ТВ

МС

А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ТВ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
МС

А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК22.171
В29
УДК519.21

Вентцель А. Д. **Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 176 с. (Теория вероятностей и математическая статистика).

Книга посвящена получению теорем о больших уклонениях для широких классов семейств марковских процессов. Материал охватывает теоремы, устанавливающие поведение больших уклонений с точностью до логарифмической эквивалентности и с точностью до эквивалентности при выполнении аналогов условия конечности экспоненциальных моментов, теоремы об асимптотике вероятностей больших уклонений, происходящих в результате больших скачков процесса.

Для научных работников в области математики и смежных областях, а также для студентов и аспирантов математических специальностей.

Библиогр. 72 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *И. А. Ибрагимов*

В $\frac{1702060000-052}{053(02)-86}$ 41-85

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы,
1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ВВЕДЕНИЕ

1. Задачи о больших уклонениях для случайных процессов.— 2. Два крайних типа поведения вероятностей больших уклонений.— 3. Грубые теоремы о больших уклонениях; функционал действия.— 4. Обзор работ по большим уклонениям для случайных процессов.— 5. Схема получения грубых теорем о больших уклонениях, принятая в данной книге.—6. Выражение: $k(\theta) S(\varphi)$ является функционалом действия равномерно по такому-то классу начальных точек.— 7. Обзор содержания глав 3—6. —8. Нумерация.

1. В последние десятилетия интенсивно развивается новая отрасль теории вероятностей—предельные теоремы для случайных процессов. Обобщение по сравнению с классическими предельными теоремами для сумм независимых случайных величин здесь идет одновременно в двух направлениях. Во-первых, вместо сумм независимых величин рассматриваются случайные процессы, принадлежащие тем или иным широким классам. Во-вторых, вместо распределения одной суммы—распределения значения случайного процесса в один момент времени—или совместного распределения значений в конечном числе моментов времени рассматриваются распределения в бесконечномерном функциональном пространстве. Для случайных процессов, которые строятся по суммам независимых случайных величин, это сводится к рассмотрению совместного распределения неограниченно растущего числа сумм.

Введем понятия, связанные с распределениями в функциональных пространствах. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$,—случайный процесс, принимающий значения в измеримом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Пусть $\boldsymbol{X}$—какое-то пространство, состоящее из функций x: $[0, T] \to X$. Определим в $\boldsymbol{X}$ σ-алгебру $\mathscr{B}^{[0,\,T]}(\boldsymbol{X})$, порожденную всеми цилиндрическими множествами $\{x \in \boldsymbol{X}\colon (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in C\}$, $t_i \in [0, T]$, $C \in \mathscr{B}^n$. В функциональном пространстве $\boldsymbol{X}$ под измеримостью мы всегда в дальнейшем будем понимать измеримость относительно $\mathscr{B}^{[0,\,T]}(\boldsymbol{X})$. Если все реализации ξ процесса $\xi(t)$ принадлежат $\boldsymbol{X}$, определяется распределение μ_ξ этого процесса в функциональном пространстве $\boldsymbol{X}$ — вероятностная мера, значения которой на измеримых множествах определяются равенством $\mu_\xi(A) = \mathsf{P}\{\xi \in A\}$.

Предельные теоремы обычно формулируются в случае, когда на функциональном пространстве $\boldsymbol{X}$ задана метрика $\rho(x, y)$. Мы не будем предполагать, что основная σ-алгебра $\mathscr{B}^{[0, T]}(\boldsymbol{X})$ на этом пространстве совпадает с σ-алгеброй, порожденной метрикой (борелевской σ-алгеброй); мы предположим только, что метрика ρ измерима и что для любого измеримого A расстояние $\rho(x, A)$ измеримо (из измеримости метрики ρ вытекает измеримость любого компакта, но не любого замкнутого множества).

В качестве $\boldsymbol{X}$ в данной книге мы будем брать пространство $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}[0, T]$ непрерывных справа и имеющих пределы слева функций в метрическом пространстве X (с σ-алгеброй $\mathscr{B} = \mathscr{B}_X$ его борелевских подмножеств) или пространство $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}[0, T]$ непрерывных функций, или их подпространства $\boldsymbol{D}_{x_0}$, $\boldsymbol{C}_{x_0}$, состоящие из функций, принимающих значение x_0 при $t = 0$; в качестве метрики на этих пространствах обычно будем рассматривать

$$\rho_{0, T}(x, y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \rho(x(t), y(t));$$

в § 5.2 — метрику Скорохода. Метрики $\rho_{0, T}$ и скороходовская удовлетворяют введенным выше условиям (при этом σ-алгебра $\mathscr{B}^{[0, T]}(\boldsymbol{D})$ не совпадает с борелевской σ-алгеброй в $\boldsymbol{D}$, соответствующей метрике $\rho_{0, T}$).

Предельные теоремы для случайных процессов могут формулироваться следующим образом. Пусть на множестве Θ элементов θ задан *фильтр* (т. е., в сущности, система окрестностей некоторой идеальной точки; определение фильтра и предела по фильтру см. Бурбаки [1]). Для пределов по этому фильтру будут использоваться обозначения $\lim\limits_{\theta \to}$ и $\to$ при $\theta \to$; выражение «для достаточно далеких $\theta \ldots$» будет означать: «существует такое множество B из фильтра, что для всех $\theta \in B \ldots$». Пусть каждому значению параметра θ отвечает случайный процесс $\xi^\theta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, на вероятностном пространстве $(\Omega^\theta, \mathscr{F}^\theta, \mathsf{P}^\theta)$ с реализациями, принадлежащими функциональному пространству $\boldsymbol{X}$. Предельные теоремы для семейства случайных процессов $\xi^\theta(t)$ касаются предельного поведения распределения μ_{ξ^θ} на $(\boldsymbol{X}, \mathscr{B}^{[0, T]}(\boldsymbol{X}))$ при $\theta \to$.

Например, теоремы о слабой сходимости утверждают, что

$$\int\limits_{X} f(x)\,\mu_{\xi^\theta}(dx) \to \int\limits_{X} f(x)\,\mu(dx)$$

при $\theta\to$ для любого ограниченного измеримого непрерывного функционала f. Теоремы типа закона больших чисел утверждают, что $\xi^\theta \to x$ в смысле сходимости по вероятности при $\theta\to$, т. е. что $\mathsf{P}^\theta\{\rho(\xi^\theta, x)\geqslant\varepsilon\}\to 0$ при $\theta\to$ для любого $\varepsilon>0$. Здесь $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — неслучайная функция, принадлежащая X.

Задачи о больших уклонениях для случайных процессов могут быть сформулированы следующим образом. Пусть для семейства случайных процессов $\xi^\theta(t)$ имеет место результат типа закона больших чисел: $\xi^\theta \xrightarrow{\mathsf{P}} x$ $(\theta\to)$. Задачи о больших уклонениях (процесса $\xi^\theta(t)$ от его «наиболее вероятной» при далеких значениях θ реализации $x(t)$) — это задачи о предельном поведении при $\theta\to$ стремящихся к нулю вероятностей $\mathsf{P}^\theta\{\xi^\theta\in A\}$ для измеримых множеств $A\subset X$, находящихся на положительном расстоянии от неслучайной предельной функции x. К задачам о больших уклонениях относятся также задачи об асимптотике при $\theta\to$ математических ожиданий вида $\mathsf{M}^\theta f^\theta(\xi^\theta)$, если их основная часть при далеких значениях θ образуется за счет маловероятных значений ξ^θ.

Задачи о больших уклонениях для сумм независимых случайных величин входят сюда следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; пусть случайная величина $\zeta_n=(X_1+\ldots+X_n-A_n)/B_n$ имеет предельное распределение при $n\to\infty$. Интегральные предельные теоремы о больших уклонениях для сумм X_i касаются предельного поведения вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_n>x\}$ при $n\to\infty$, $x\to\infty$ и тех или иных соотношениях их скоростей стремления к бесконечности. Так, теорема 1 из работы Крамера [1] касается случая, когда x стремится к бесконечности медленнее, чем $\sqrt{n}$ (предполагается, что $\mathsf{M}X_i=0$, $\mathsf{D}X_i=$ $=\sigma^2<\infty$, так что $A_n=0$, $B_n=\sigma\sqrt{n}$, и что конечны экспоненциальные моменты $\mathsf{M}e^{zX_i}$ при достаточно малых z). Здесь в качестве параметра θ выступает $(n, x)\in\{1, 2, \ldots\}\times(0, \infty)$. Фильтр, о котором идет речь, — это фильтр, соответствующий сходимости $x\to\infty$, $x=o(\sqrt{n})$ $(n\to\infty$

уже вытекает отсюда), т. е. фильтр, имеющий в качестве базы множества вида $\{(n, x): x \geqslant x_0, x \leqslant \varepsilon \sqrt{n}\}$, где x_0 и ε — произвольные положительные числа. Определим случайный процесс $\xi^{n, x}(t)$ равенством

$$\xi^{n, x}(t) = (X_1 + \ldots + X_{[nt]})/(x\sigma\sqrt{n}), \qquad t \in [0, 1];$$

при $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$ этот процесс сходится по вероятности к функции, тождественно равной нулю. В качестве множества A рассмотрим множество функций из $\boldsymbol{D}[0, 1]$, принимающих в правом конце отрезка $[0, 1]$ значение, большее 1. Ясно, что $\mathsf{P}\{\xi^{n, x} \in A\}$ совпадает с вероятностью $\mathsf{P}\{\zeta_n > x\}$.

2. Имеется два крайних типа предельного поведения вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин. К первому типу относится случай, когда выполняется условие Крамера $\mathsf{M}e^{zX_i} < \infty$. При этом главная часть вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_n > x\}$ — это вероятность того, что ζ_n находится в малой окрестности справа от x, и эта вероятность образуется в основном за счет слагаемых X_i приблизительно одинаковой величины; асимптотика вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_n > x\}$ — показательная. Теоремы о больших уклонениях этого типа могут получаться применением преобразования распределений, предложенного Г. Крамером [1].

Ко второму типу относится случай, когда X_i принадлежат зоне притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha < 2$. Здесь вероятность $\mathsf{P}\{\zeta_n > x\}$ не эквивалентна $\mathsf{P}\{\zeta_n \in (x, x(1+\varepsilon))\}$; ее основная часть образуется за счет того, что одно из слагаемых X_i может быть примерно так же велико, как вся сумма $X_1 + \ldots + X_n$; асимптотика здесь — степенная. Результаты этого типа для случайных величин, притягивающихся к устойчивому закону, были получены в работах Фортус [1], Хейде [1], Ткачука [1].

Имеются более тонкие результаты, промежуточные между обоими типами, когда части вероятности большого уклонения, образующиеся за счет малых отдельных слагаемых и за счет одного большого слагаемого, сравнимы друг с другом (см., например, Нагаев [1]).

Два крайних типа предельного поведения вероятностей больших уклонений сохраняются и для случайных процессов. Первый тип характеризуется тем, что вероятности маловероятных событий $\mathsf{P}^\theta\{\xi^0 \in A\}$ образуются в основном за счет реализаций, близких к непрерывным и даже гладким функциям, тогда как во втором типе они образуются в основном за счет реализаций ξ^θ, совершающих один или несколько больших скачков.

Подавляющее большинство полученных до сих пор результатов о больших уклонениях для случайных процессов относится к первому типу; причем большинство из них касается асимптотики больших уклонений не с точностью до эквивалентности, а с точностью до логарифмической эквивалентности: $\ln \mathsf{P}^\theta\{\xi^0 \in A\} \sim \ldots$ Такие результаты мы будем называть *грубыми*.

3. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях в функциональном пространстве для процессов, связанных с суммами независимых случайных величин, были получены Боровковым [1], Варадано м [1], для эмпирической функции распределения — Сановым [1]. Логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений в этих работах, как и в настоящей книге, описывается с помощью определенного функционала $k(\theta) S(\varphi)$, характеризующего «трудность» попадания случайного процесса ξ^θ в окрестность функции φ (чуть более точно: $\mathsf{P}^\theta\{\rho(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \approx \exp\{-k(\theta) S(\varphi)\}$ при малом $\delta > 0$ и далеких значениях θ; точный смысл см. далее). Для функционала $k(\theta) S(\varphi)$ мы вслед за Фрейдлиным [1], Вентцелем, Фрейдлиным [6] используем термин *функционал действия*; его множители, зависящие от параметра θ и функции φ в отдельности, будем называть: $k(\theta)$ — *нормирующим коэффициентом* (естественно, должно быть $k(\theta) \to \infty$ при $\theta \to$); $S(\varphi)$ — *нормированным функционалом действия*. Приведем точную формулировку.

Пусть ξ^θ — семейство случайных процессов, реализации которых принадлежат функциональному пространству $\boldsymbol{X}$ с метрикой ρ. Пусть $k(\theta)$ — положительная числовая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $\theta \to$; $S(\varphi)$ — функционал на $\boldsymbol{X}$, принимающий значения из $[0, +\infty]$. Мы будем говорить, что $k(\theta) S(\varphi)$ — функционал действия для ξ^θ при $\theta \to$, если выполнены следующие утверждения:

(0) при любом $s \geqslant 0$ множество $\Phi(s) = \{\varphi:\ S(\varphi) \leqslant s\}$ компактно;

(I) для любого $\delta > 0$, любого $\gamma > 0$, любого $s_0 > 0$ при достаточно далеких θ для любого $\varphi \in \Phi(s_0)$

$$\mathsf{P}^\theta\{\rho(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant \exp\{-k(\theta)[S(\varphi) + \gamma]\};$$

(II) для любого $\delta > 0$, любого $\gamma > 0$, любого $s_0 > 0$ при достаточно далеких θ для любого $s \leqslant s_0$

$$\mathsf{P}^\theta \{\rho(\xi^0, \Phi(s)) \geqslant \delta\} \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma)\}.$$

Условие (0) не касается случайных процессов из нашего семейства, а относится только к нормированному функционалу действия $S(\varphi)$. В случае полного пространства $\boldsymbol{X}$ это условие можно разбить на два: полунепрерывность функционала $S(\varphi)$ снизу на $\boldsymbol{X}$ (что равносильно замкнутости множества $\Phi(s)$ при любом s) и относительную компактность множества $\Phi(s)$; такое разбиение удобно для проверки условия (0).

Приведем несколько других форм определения функционала действия, равносильных условиям (I), (II) при выполнении условия (0):

(I′) для любого открытого измеримого $A \subseteq \boldsymbol{X}$

$$\varliminf_{\theta \to} k(\theta)^{-1} \ln \mathsf{P}^\theta \{\xi^\theta \in A\} \geqslant -\inf\{S(\varphi):\ \varphi \in A\};$$

(II′) для любого замкнутого измеримого $A \subseteq \boldsymbol{X}$

$$\varlimsup_{\theta \to} k(\theta)^{-1} \ln \mathsf{P}^0 \{\xi^\theta \in A\} \leqslant -\inf\{S(\varphi):\ \varphi \in A\}.$$

Будем называть множество $A \subseteq \boldsymbol{X}$ *регулярным* (относительно функционала S), если нижняя грань S по замыканию A совпадает с нижней гранью этого функционала по множеству внутренних точек A. Два условия (I), (II) или (I′), (II′) можно заменить одним:

(I+II) для любого регулярного измеримого $A \subseteq \boldsymbol{X}$

$$\lim_{\theta \to} k(\theta)^{-1} \ln \mathsf{P}^\theta \{\xi^\theta \in A\} = -\inf\{S(\varphi):\ \varphi \in A\}.$$

Еще одна форма описания грубой асимптотики больших уклонений — интегральная:

(III) если $F(x)$ — непрерывный ограниченный измеримый функционал на $\boldsymbol{X}$, то

$$\lim_{\theta \to} k(\theta)^{-1} \ln \mathsf{M}^0 \exp\{k(\theta) F(\xi^\theta)\} = \max\{F(\varphi) - S(\varphi):\ \varphi \in \boldsymbol{X}\}.$$

Условия (I′), (II′) используются в работе Варадана [1] и в дальнейших работах того же автора; (I+II) — Боровкова [1], Могульского [1] и в других работах. Равносильность (I), (II) паре (I′), (II′) или условию (I+II) при выполнении условия (0) доказывается Вентцелем, Фрейдлиным [6] (теоремы 3.3, 3.4

главы 3; доказательство, проведенное в случае, когда основная σ-алгебра в пространстве $\boldsymbol{X}$ порождается метрикой ρ, сохраняется и в случае, когда это не так, но выполнены условия, наложенные нами выше на связь метрики и основной σ-алгебры). Вывод условия (III) (и даже более сложных условий интегрального типа) из (I′), (II′) содержится в статье Варадана [1].

Легко доказывается следующая лемма:

Лемма 0.1. *Если F — непрерывный ограниченный измеримый функционал на $\boldsymbol{X}$ и разность $F-S$ достигает максимума на единственной функции $\varphi_0 \in \boldsymbol{X}$, то для любого $\delta > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{\{\rho(\xi^\theta,\varphi_0)\geqslant\delta\}} \exp\{k(\theta)F(\xi^\theta)\}\,d\mathbf{P}^\theta = \\ = o(\exp\{k(\theta)[F(\varphi_0)-S(\varphi_0)-\gamma]\})$$

при $\theta \to$.

В качестве γ можно взять $(F(\varphi_0)-S(\varphi_0)-\max\{F(\varphi)-S(\varphi)\colon \rho(\varphi_0, \varphi)\geqslant\delta\})/2$.

4. Значительная часть результатов о больших уклонениях для случайных процессов относится к семействам марковских процессов. Отметим работы, касающиеся семейств процессов с независимыми приращениями (в том числе строящихся по возрастающему числу независимых случайных величин): Боровков [1], Варадан [1], Могульский [1], Боровков, Могульский [1]; касающиеся диффузионных процессов с малой диффузией с применениями к различным асимптотическим задачам (в том числе к задачам устойчивости): Вентцель, Фрейдлин [1]—[6], Вентцель [1], [2], [6], Фридман [2], Фрейдлин [2], [4]; касающиеся диффузионных процессов с малой диффузией с отражением на границе: Андерсон, Ори [1], Живоглядова, Фрейдлин [1]; более широких классов семейств марковских процессов, включающих и процессы с независимыми приращениями, и диффузионные процессы (но не диффузионные процессы с отражением): Вентцель [4], [5], [7], Азенкотт, Рюже [1].

Сюда примыкают работы, в которых исследуется асимптотика переходных вероятностей марковского процесса, зависящего от параметра: для диффузионных процессов с малой диффузией (или на малом промежутке времени): Варадан [2], [3], Кифер [1], Молчанов [1], Фридман [1]; для процессов с малыми частыми скачками (схема, рассматриваемая в главе 4 настоящей книги): Маслов [1], [2] (переходная плотность $p^0(t, x, y)$ логарифмически эквивалентна $\exp\{-k(\theta)\min\{S_{0,t}(\varphi): \varphi(0)=x, \varphi(t)=y\}\}$; точная асимптотика связана с конкретным видом зависимости семейства процессов от параметра и выражается в некоторых случаях сложно). В работе Могульского [2] находится точная асимптотика вероятности прохождения процесса $\xi^\theta(t)$ с независимыми приращениями в полосе.

В работах Шильдера [1], Дубровского [1], [2] исследуется точная асимптотика больших уклонений в функциональном пространстве, а именно, асимптотика математических ожиданий вида $M^\theta\exp\{k(\theta)F(\xi^\theta)\}$, где F — гладкий функционал, или вида $M^\theta G(\xi^\theta)\exp\{k(\theta)F(\xi^\theta)\}$ (грубая асимптотика таких математических ожиданий задается выражением $\exp\{k(\theta)\max\limits_{\varphi}[F(\varphi)-S(\varphi)]\}$).

В случае немарковских процессов ξ^θ теоремы о функционале действия и их применения содержатся в работах: Фрейдлина [1], Вентцеля [3] (случайные процессы, выражаемые через гауссовский процесс, умноженный на малый параметр); Гриня [1], Нгуен Вьет Фу [1], [2] (то же, с применениями к различным асимптотическим задачам). В работах Фрейдлина [3], [5] (см. также Вентцель, Фрейдлин [6]) изучаются большие уклонения в обстановке, когда действует принцип усреднения (в частности, для случайных процессов η^θ, определяемых дифференциальными уравнениями $\dot\eta^\theta(t)=b(\eta^\theta(t), \xi(\theta t))$, при $\theta\to\infty$, где $\xi(s)$ — стационарный случайный процесс).

В работах Донскера, Варадана [1], Гертнера [1] для случайного процесса $\xi(t)$ изучаются большие уклонения случайной меры $\pi^T(\Gamma)=T^{-1}\int\limits_0^T\chi_\Gamma(\xi(t))\,dt$ от меры, к которой π^T сходится по вероятности при $T\to\infty$. Здесь случайная функция π^T определена не на отрезке числовой прямой, а на σ-алгебре множеств. Важные приложения к теоретической физике рассматриваются в указанной работе Донскера и Варадана, а также в их работе [2].

Задачи о больших уклонениях второго типа для случайных процессов рассматривались только в нескольких работах: Годованьчук [1], [2] (для марковских процессов с убывающим определенным образом числом больших скачков), Пинелис [1] (для семейств процессов с независимыми приращениями). Последняя работа содержит тонкие результаты, промежуточные между первым и вторым типом, аналогичные результатам А. Нагаева [1] для сумм независимых случайных величин.

5. Коснемся кратко содержания книги. В первой главе содержатся вспомогательный материал и аппарат, позволяющий работать с марковскими процессами. Этот аппарат основан на важном понятии компенсатора случайной функции и, в конечном счете, на мартингалах.

В главах 2—4 получены грубые предельные теоремы о больших уклонениях для семейств марковских случайных процессов. Изложение основано на статьях Вентцеля [7]. В настоящей книге принята следующая схема получения грубых теорем о больших уклонениях (см. Вентцель [4], [5], первую статью [7] (введение); та же схема принята в заметке Вентцеля [3], касающейся не марковских процессов, а гауссовских). Со случайными процессами $\xi(t)$ определенных классов, независимо от того, включены они в какое-либо семейство или нет, связывается *функционал действия* $I(\varphi)$ (§ 2.1 настоящей работы). Вероятность того, что реализация ξ находится не дальше, чем на расстоянии δ от функции φ, оценивается снизу выражением $\exp\{-I(\varphi)-R_1(\delta, \varphi)\}$ (§ 2.2), а вероятность того, что реализация окажется дальше, чем на расстоянии δ, от множества $\Phi(i)$ функций φ, для которых $I(\varphi)\leqslant i$, оценивается сверху выражением типа $\exp\{-i+R_2(i, \delta)\}$ (§ 2.3). Для семейства процессов ξ^θ, определенным образом зависящих от параметра, соответствующий функционал $I^\theta(\varphi)$ при $\theta\to$ может оказаться эквивалентным произведению $k(\theta)S(\varphi)$, $k(\theta)\to\infty$. Если остаточные члены $R_1^\theta(\varphi, \delta)$, $R_2^\theta(k(\theta)s, \delta)$ будут порядка $o(k(\theta))$ при $\theta\to$, то из пары оценок получается пара условий (I), (II) (см. §§ 3.2, 3.3). Заметим, что функционал действия $k(\theta)S(\varphi)$ для семейства процессов и $I^\theta(\varphi)$ для отдельного процесса могут не совпадать.

К сожалению, эту простую схему приходится усложнять и затемнять с тем, чтобы расширить область ее применимости. Так, в верхней оценке оказывается возможным и иногда нужным вместо функционала действия $I(\varphi)$ рассматривать какой-то другой, «посторонний»* функционал $\tilde I(\varphi)$ и выводить оценки для $\mathsf{P}\{\rho(\xi, \tilde\Phi(i))\geqslant\delta\}$, где $\tilde\Phi(i)=\{\varphi: \tilde I(\varphi)\leqslant i\}$ (см. теорему 2.3.2); еще одно усложнение состоит в том, что вводятся урезанный функционал действия $I^V(\varphi)$ и более сложные оценки, связанные с ним (§ 2.4).

Скажем о том, каким образом получаются оценки, связанные с функционалом действия (для марковских процессов — в настоящей книге, а для гауссовских процессов — в работе Вентцеля [3]). Для получения нижней оценки для $\mathsf{P}\{\rho(\xi, \varphi) < \delta\}$ берется функционал $\pi_\varphi(\xi)$ от реализации случайного процесса и рассматривается новая вероятность $\tilde{\mathsf{P}}(A) = \int_A \pi_\varphi(\xi)\, d\mathsf{P}$. Функционал π_φ подбирается так, чтобы $\tilde{\mathsf{P}}(\Omega) = 1$ и чтобы реализации случайного процесса оказывались с большой $\tilde{\mathsf{P}}$-вероятностью в окрестности функции φ. Далее пользуемся равенством

$$\mathsf{P}\{\rho(\xi, \varphi) < \delta\} = \int\limits_{\{\rho(\xi, \varphi) < \delta\}} \pi_\varphi(\xi)^{-1}\, d\tilde{\mathsf{P}}.$$

На части области интегрирования с достаточно большой $\tilde{\mathsf{P}}$-вероятностью $\pi_\varphi(\xi)$ оценивается сверху: $\pi_\varphi(\xi) \leqslant \pi_\varphi(\varphi) \times \times e^{R_1}$; получается оценка нужного типа с функционалом действия вида $I(\varphi) = \ln \pi_\varphi(\varphi)$.

Этот прием использовался Крамером [1] в применении к распределениям сумм независимых случайных величин, причем для получения не грубых, а точных результатов. Поэтому мы называем описанное выше преобразование *обобщенным преобразованием Крамера*. В марковском случае функционал $\pi_\varphi(\xi)$ задается с помощью стохастических интегралов:

$$\pi_\varphi(\xi) = \exp\left\{\int z(t, \xi(t-))\, d\xi(t) - \right.$$
$$\left. - \int G(t, \xi(t); z(t, \xi(t)))\, dt\right\}$$

(или, в случае дискретного времени, с помощью соответствующих сумм), где функция $z(t, x)$ определяется по функции $G(t, x; z)$, связанной с процессом $\xi(t)$, и производной $\dot{\varphi}(t)$. Неполностью использованная свобода в выборе функции $z(t, x)$ и функционала $\pi_\varphi(\xi)$ оказывается не нужной при получении грубых теорем о больших уклонениях; но в работах Дубровского [1], [2] преобразование Крамера применяется к получению точных результатов об асимптотике больших уклонений. Эти результаты будут изложены в главе 5. В указанных работах Дубровского путем дальнейшего обобщения преобразования Крамера получены некоторые еще более точные результаты.

Оценка сверху получается следующим образом. По случайной функции ξ, реализации которой не гладки (и для них функционал I, вообще говоря, бесконечен), строится вспомогательная случайная функция $l(\xi)$ («ломаная»); вводится событие A такое, что $A \subseteq \{\rho(\xi, l(\xi)) < \delta\}$. Далее пользуемся неравенством

$$\mathsf{P}\{\rho(\xi, \Phi(i)) \geqslant \delta\} \leqslant \mathsf{P}(\overline{A}) + \mathsf{P}(A \cap \{l(\xi) \notin \Phi(i)\}). \quad (0.1)$$

Второе (главное) слагаемое оценивается с помощью экспоненциального чебышёвского неравенства:

$$\mathsf{P}(A \cap \{l(\xi) \notin \Phi(i)\}) = \mathsf{P}(A \cap \{I(l(\xi)) > i\}) \leqslant$$
$$\leqslant \int_A \exp\{(1-\varkappa) I(l(\xi))\} d\mathsf{P}/\exp\{(1-\varkappa) i\}.$$

Интеграл оказывается не слишком велик, и его логарифм и $\varkappa \cdot i$ включаются в остаточный член R_2. Первое слагаемое в правой части (0.1) также оценивается с помощью экспоненциального неравенства Чебышёва.

6. Скажем об особенностях, возникающих в связи с тем, что в марковском случае естественно рассматривать процессы, начинающиеся в произвольный момент времени в произвольной точке фазового пространства (см. Дынкин [1]).

Прежде всего, метрика, которую мы будем рассматривать, зависит от отрезка $[T_1, T_2]$:

$$\rho_{T_1, T_2}(\varphi, \psi) = \sup_{T_1 \leqslant t \leqslant T_2} \rho(\varphi(t), \psi(t)),$$

где ρ — метрика в фазовом пространстве X. Мы будем рассматривать нормированный функционал действия $S(\varphi)$, зависящий также от промежутка времени $[T_1, T_2]$, на котором рассматривается процесс: $S(\varphi) = S_{T_1, T_2}(\varphi)$. Будем пользоваться обозначением $\Phi_{x; [T_1, T_2]}(s)$ для множества функций $\varphi(t)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, для которых $\varphi(T_1) = x$, а $S_{T_1, T_2}(\varphi) \leqslant s$.

Чаще всего будем рассматривать отрезок $[0, T]$.

Условимся говорить, что $k(\theta) S_{0, T}(\varphi)$ является *функционалом действия* для семейства процессов $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t, x}^\theta)$, $t \in [0, T]$, при $\theta \to$, *равномерно по начальной точке*, изменяющейся в пределах множества из некоторого класса $\mathscr{M}$ подмножеств фазового пространства X, если

($0_к$) функционал $S_{0,T}(\varphi)$ полунепрерывен снизу; сумма $\Phi_{x;[0,T]}(s)$ по $x \in K$ компактна для любого компакта $K \subseteq X$;

($\mathrm{I}_{\mathscr{M}}$) для любого $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $s_0 > 0$ и любого $M \in \mathscr{M}$ для достаточно далеких θ при всех $x \in M$ и всех $\varphi \in \Phi_{x;[0,T]}(s_0)$

$$\mathsf{P}^0_{0,x}\{\rho_{0,T}(\xi^0, \varphi) < \delta\} \geqslant \exp\{-k(\theta)[S_{0,T}(\varphi)+\gamma]\};$$

($\mathrm{II}_{\mathscr{M}}$) для любого $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $s_0 > 0$ и любого $M \in \mathscr{M}$ для достаточно далеких θ при всех $s \leqslant s_0$ и $x \in M$

$$\mathsf{P}^0_{0,x}\{\rho_{0,T}(\xi^0, \Phi_{x;[0,T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma)\}.$$

Равномерность выполнения оценок, связанных с функционалом действия, по достаточно широкому классу множеств начальных точек существенна для применений теорем о больших уклонениях, связанных с использованием марковского свойства. В большинстве случаев мы получаем равномерность по начальной точке, изменяющейся в пределах всего фазового пространства X; иногда — в пределах каждого компактного подмножества X.

7. Автор счел предпочтительным не доказывать большое число различных предельных теорем о больших уклонениях для марковских процессов независимо друг от друга, а выводить их из каких-то немногих стандартных результатов общего характера. Эту роль в данной работе играют теоремы 3.2.3, 3.2.3′ и 3.3.2, 3.3.2′ (теоремы 3.2.3, 3.3.2 относятся к случаю непрерывного времени; 3.2.3′, 3.3.2′ — дискретного).

Глава 4 содержит частные результаты, вытекающие из общих теорем третьей главы (конечно, приведенные в этой главе результаты не исчерпывают всего, что можно вывести из общих теорем). Среди этих результатов выделяются результаты типа «не очень больших» (§§ 4.4, 4.5), «очень больших» (§ 4.3) и «сверхбольших» уклонений (§ 4.6) (разграничение этих случаев см. в § 4.2; в случае задачи об асимптотике вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_n > x\}$ для нормированной суммы n независимых случайных величин это соответствует случаям $x = o(\sqrt{n})$, x того же порядка, что $\sqrt{n}$, и x, стремящегося к бесконечности быстрее, чем $\sqrt{n}$).

Все результаты требуют выполнения аналога крамеровского условия конечности экспоненциальных моментов, за исключением теорем 4.4.2, 4.4.2′, 4.4.3, относящихся к случаю не очень больших уклонений. Эти теоремы аналогичны результатам о больших уклонениях для сумм независимых случайных величин без экспоненциальных моментов с ограничением на порядок роста x более строгим, чем $x = o(\sqrt{n})$, зависящим от скорости убывания «хвостов» распределения (ср. Ибрагимов, Линник [1], теорема 13.1.1, где речь идет, конечно, о точных результатах, а не о грубых, как у нас).

Результаты главы 4 (Вентцель [7]), хотя и частные по отношению к результатам третьей главы, формулируются все же в возможно более общей форме. Это сделало возможным, в частности, применение этих результатов к вопросам сходимости с вероятностью 1 процедур стохастической аппроксимации (см. Коростелев [1], [2]).

В главе 5 излагаются результаты работ: Шильдер [1], Дубровский [1], [2], касающиеся точных предельных теорем о больших уклонениях для марковских случайных процессов. Эти результаты касаются асимптотики не вероятностей $\mathsf{P}^{\theta}_{0,x}\{\xi^{\theta} \in A\}$, а математических ожиданий вида $\mathsf{M}^{\theta}_{0,x} \exp\{k(\theta) F(\xi^{\theta})\}$, $\mathsf{M}^{\theta}_{0,x} G(\xi^{\theta}) \exp\{k(\theta) F(\xi^{\theta})\}$ для гладких функционалов F (и менее гладких G).

Глава 6 посвящена теоремам о больших уклонениях, происходящих из-за того, что марковский процесс делает один или несколько больших скачков (в терминологии этого введения — результаты второго типа). Излагаемые результаты получены в работах Годованьчука [1], [2]. Результатам этого типа и их возможным применениям уделялось до сих пор недостаточно внимания. В качестве примера в главе 6 рассмотрено их применение к получению результатов в классической ситуации сумм независимых случайных величин (результаты получены в работе: Виноградов [1]).

8. Формулы, теоремы, леммы в данной книге нумеруются номером параграфа (из двух цифр) и номером в пределах данного параграфа. Параграфы разбиты на пункты переменного объема.

Конец доказательства отмечается значком $\square$.

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1.1. Общие обозначения. Преобразование Лежандра

1. Общие обозначения.—2. Преобразование Лежандра.—3. Обозначения, связанные с многообразиями.—4. Обозначения, связанные с вероятностными пространствами.—5. Метрика.

1. Минимум и максимум двух чисел будем обозначать, соответственно, $a \wedge b$, $a \vee b$; χ_A означает индикатор множества A.

Дополнение множества A (в определенном пространстве) обозначаем $\overline{A}$. В метрическом пространстве $[A]$ означает замыкание A, (A)—множество внутренних точек A; $A_{+\delta}$—δ-окрестность A, $A_{-\delta}$—множество точек A, находящихся на расстоянии большем, чем δ, от $\overline{A}$.

Предел слева функции в точке t будем записывать как значение этой функции в точке $t-$; производная по t будет обозначаться точкой над буквой.

Системы множеств, в основном σ-алгебры, мы будем обозначать рукописными буквами; символом $\mathscr{B}_X$ будем обозначать σ-алгебру борелевских подмножеств множества X.

Элементы R^r обозначаются либо буквой z, и в этом случае мы пишем номера координат снизу (например: $z(t, x) = (z_1(t, x), \ldots, z_r(t, x))$), а обозначение линейного оператора в R^r—справа от обозначения вектора; либо другими буквами, и тогда номера координат пишутся верхними индексами ($u = (u^1, \ldots, u^r)$), а обозначение линейного оператора—слева от обозначения вектора. Используем обозначение без скобок: $zu = \sum_{i=1}^{r} z_i u^i$; сопряженные операторы обозначаются одинаковым символом: $(zA)u = z(Au) = zAu$.

2. Если $G(z)$—выпуклая вниз, полунепрерывная снизу функция от $z \in R^r$, принимающая значения в $(-\infty, \infty]$, ее *преобразованием Лежандра* называется функция $H(u)$,

$u \in R^r$, определяемая формулой

$$H(u) = \sup_z [zu - G(z)]. \tag{1.1.1}$$

Результат такого преобразования — тоже функция, выпуклая вниз и полунепрерывная снизу. Заметим, что выпуклая вниз функция может быть разрывна только на границе множества, где она конечна. В классе выпуклых вниз и полунепрерывных снизу функций преобразование Лежандра, как известно (см. Рокафеллар [1]), обратно самому себе:

$$G(z) = \sup_u [zu - H(u)]. \tag{1.1.2}$$

Для этого преобразования мы будем пользоваться обозначением $G(z) \leftrightarrow H(u)$.

Приведем без доказательства некоторые простые свойства выпуклых вниз функций и преобразования Лежандра. (Свойства этого преобразования можно найти в книге Рокафеллара [1].)

Лемма 1.1.1. *Пусть $G(z) \leftrightarrow H(u)$; z — фиксированный ненулевой вектор; h — нижняя грань $H(u)$ на гиперплоскости $\{u\colon zu = d\}$; пусть по обе стороны этой гиперплоскости есть точки, где $H(u)$ конечно. Тогда существует константа c такая, что $H(u) \geqslant czu - cd + h = czu - G(cz)$ для всех u.*

Лемма 1.1.2. *Пусть $G_1(z) \leftrightarrow H_1(u)$, $G_2(z) \leftrightarrow H_2(u)$, $\varkappa < 1$, γ — действительное число. Неравенство*

$$G_1((1-\varkappa) z) \leqslant (1-\varkappa) G_2(z) + \gamma$$

выполняется для всех z тогда и только тогда, когда для всех u выполняется неравенство

$$H_1(u) \geqslant (1-\varkappa) H_2(u) - \gamma.$$

Далее, если $G(z) < \infty$ для всех z, то $\lim\limits_{|u| \to \infty} H(u)/|u| = \infty$.

Если функция H дифференцируема в точке u, то

$$H(u) = \nabla H(u) \cdot u - G(\nabla H(u)).$$

Если при этом функция $G(z)$ дифференцируема в точке $z = \nabla H(u)$, то $\nabla G(\nabla H(u)) = u$. Если функция G дифференцируема $k \geqslant 2$ раз в точке z, и матрица вторых производных $(\partial^2 G/\partial z_i \partial z_j)$ в этой точке не вырождена, то k раз дифференцируема и функция H в точке $\nabla G(z)$; при этом $(\partial^2 H/\partial u^i \partial u^j)\Big|_{u=\nabla G(z)} = (\partial^2 G/\partial z_i \partial z_j)^{-1}$.

Запись $G(t, x; z) \leftrightarrow H(t, x; u)$ будет означать, что преобразование Лежандра применяется отдельно при каждом (t, x).

3. Карты многообразия X обозначаем (W, ψ) (ψ — взаимно однозначное отображение открытого множества $W \subseteq X$ на открытое подмножество R^r; согласно п. 1 координаты $\psi(x)$, $x \in W$, обозначаются $\psi^i(x)$). Для гладкой функции f на X через $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ будем обозначать частные производные изображения функции на карте при некотором выборе карты.

Через TX_x, T^*X_x обозначаем касательное и кокасательное пространства в точке x; элементы кокасательного пространства будем обозначать буквой z, и будем для $z \in T^*X_x$, $u \in TX_x$ использовать обозначение zu.

Преобразование Лежандра, определяемое формулой (1.1.1), переводит выпуклую вниз полунепрерывную снизу функцию на T^*X_x в такую же функцию на TX_x.

Будем применять обозначения zA, Au для линейных операторов и в случае $z \in T^*X_x$, $u \in TX_x$. Любой карте (W, ψ), $W \ni x$, соответствует линейное отображение A_x касательного пространства TX_x на R^r (компоненты вектора $A_x u$, $u \in TX_x$, — координаты u в данной локальной системе координат); соответствующее отображение T^*X_x на R^r есть A_x^{-1} (точнее, сопряженное к нему).

Будем говорить, что атлас на многообразии удовлетворяет условию λ, если существует $\lambda > 0$ такое, что в λ-окрестности любой точки действует одна из карт атласа (W, ψ), и отношение евклидова расстояния на карте $|\psi(y) - \psi(x)|$ к расстоянию на многообразии $\rho(x, y)$ ограничено положительными константами сверху и снизу равномерно по всем x, $y \in W$ и по всем картам атласа.

4. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, для события A и случайной величины ξ через $\mathsf{M}(A; \xi)$ будем обозначать интеграл $\int_A \xi(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega)$. Если вероятность P снабжена какими-то индексами, теми же индексами будем снабжать обозначение M математического ожидания.

Мы будем использовать (до тех пор, пока это не затруднит понимания) одни и те же обозначения для случайных процессов с непрерывным временем и с дискретным временным параметром, принимающим значения, кратные некоторому положительному τ. Так, промежуток времени $[t_0, T]$ в случае дискретного времени понимается как состоящий из точек, кратных τ, от t_0 до T включительно. Мы будем рассматривать σ-алгебры $\mathcal{F}_{[t_0,\,t]}$, порожденные значениями случайного процесса $\xi(s)$, $s \in [t_0, t]$; $\mathcal{F}_{t_0 t}$ будет обозначать те же самые σ-алгебры, пополненные относительно соответствующей вероятностной меры и дополненные по непрерывности справа по t в случае непрерывного времени.

5. В пространстве функций $\varphi(t)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, со значениями в метрическом пространстве будем рассматривать метрику $\rho_{T_1,\,T_2}(\varphi, \psi) = \sup\limits_{T_1 \leqslant t \leqslant T_2} \rho(\varphi(t), \psi(t))$; в случае евклидова пространства: $\rho_{T_1,\,T_2}(\varphi, \psi) = \sup\limits_{T_1 \leqslant t \leqslant T_2} |\varphi(t) - \psi(t)|$. Это обозначение будет применяться и в случае непрерывного времени, и в случае дискретного.

§ 1.2. Компенсаторы. Меры Леви

1. Компенсаторы.—2. Неравенство Колмогорова.—3. Стохастические интегралы.—4. Меры Леви.—5. Компенсатор для $F(t, \zeta(t))$.

Понятие компенсатора (хотя с не установившейся в полном объеме терминологией) и связанные с ним понятия широко используются в исследованиях по случайным процессам (см., например, Мейер [1], Липцер, Ширяев [1]). Приведем нужный нам материал.

1. Пусть $\mathcal{F}_t$, $t \in [t_0, T]$, — неубывающее семейство σ-алгебр в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ($\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$; напомним, что рассматриваются случаи и непрерывного, и дискретного времени). Без пояснений будем использовать понятия марковского момента, случайной функции, согласованной с данным семейством σ-алгебр, мартингала, локального мартингала. В случае непрерывного времени все рассматриваемые мартингалы и локальные мартингалы предполагаем всюду непрерывными справа с вероятностью 1.

Вводим в пространстве $[t_0, T] \times \Omega$ σ-алгебру $\mathcal{P}$ *предсказуемых* множеств, порожденную множествами вида $(t, T] \times A$, $A \in \mathcal{F}_t$. Случайная функция, измеримая относительно $\mathcal{P}$, называется предсказуемой. В случае дискретного времени для предсказуемости случайной функции $\eta(t) = \eta(t, \omega)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $t > t_0$, кратном τ, случайная величина $\eta(t)$ была измерима относительно $\mathcal{F}_{t-\tau}$, а $\eta(t_0)$ была константой. В случае непрерывного времени для предсказуемости случайной функции, принимающей значения в метрическом пространстве и согласованной с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, достаточно непрерывности слева и $\eta(t_0)=\mathrm{const}$ (Мейер [1]).

Компенсатором числовой или векторной случайной функции $\eta(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, согласованной с данным семейством σ-алгебр (почти наверное непрерывной справа в случае непрерывного времени), называется предсказуемая случайная функция $\tilde\eta(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\tilde\eta(t_0)=\eta(t_0)$ почти наверное, такая, что $\eta(t)-\tilde\eta(t)$ — локальный мартингал, причем в случае непрерывного времени $\tilde\eta(t)$ должна быть с вероятностью 1 непрерывна справа по t и обладать ограниченной вариацией. Компенсатор, если он есть, с вероятностью 1 единствен (см. Мейер [1], с. 297). Впрочем, мы не будем использовать эту единственность; теоремы о существовании при тех или иных условиях компенсатора случайной функции $\eta(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\eta(t_0)=\mathrm{const}$, нас тоже не будут интересовать.

Бикомпенсатором двух скалярных случайных функций $\eta(t)$, $\zeta(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, называется случайная функция $\langle\eta,\ \zeta\rangle(t)=\widetilde{(\eta-\tilde\eta)(\zeta-\tilde\zeta)}(t)$. *Квадратичный компенсатор* случайной функции $\eta(t)$ в скалярном случае — скалярная случайная функция $\langle\eta,\ \eta\rangle(t)$, в векторном — матричная случайная функция с компонентами $\langle\eta^i,\ \eta^j\rangle(t)$.

Компенсатор является некоторым аналогом математического ожидания, а квадратичный компенсатор — дисперсии; однако эта аналогия не простирается настолько далеко, чтобы было $\langle\eta,\ \eta\rangle(t)=\widetilde{\eta^2}(t)-\tilde\eta(t)^2$. Вместо этого

$$\langle\eta,\ \eta\rangle(t)=\widetilde{\eta^2}(t)-\tilde\eta(t)^2-2\sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau}(\eta(s)-\tilde\eta(s))(\tilde\eta(s+\tau)-\tilde\eta(s)) \quad (1.2.1)$$

в дискретном случае,

$$\langle\eta,\eta\rangle(t)=\widetilde{\eta^2}(t)-\tilde\eta(t)^2-2\int_{t_0}^{t}(\eta(s-)-\tilde\eta(s-))\,d\tilde\eta(s), \quad (1.2.2)$$

$$\langle\eta,\ \zeta\rangle(t)=\widetilde{\eta\zeta}(t)-\tilde\eta(t)\tilde\zeta(t)-\int_{t_0}^{t}(\eta(s-)-\tilde\eta(s-))\,d\tilde\zeta(s)-\int_{t_0}^{t}(\zeta(s-)-\tilde\zeta(s-))\,d\tilde\eta(s) \quad (1.2.3)$$

в непрерывном случае.

2. Неравенство Колмогорова: если τ_0 — марковский момент, принимающий значения в $[t_0, T]$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0} |\eta(t) - \tilde{\eta}(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_i \mathsf{M} \langle \eta^i, \eta^i \rangle (\tau_0).$$

3. В этом пункте мы рассмотрим стохастические интегралы и их дискретные аналоги. Здесь параллелизм обозначений в случае дискретного и непрерывного времени будет неполный. В случае дискретного времени для согласованных с $\{\mathscr{F}_t\}$ случайных функций $\eta(t) = \eta(t, \omega)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и $z(t) = z(t, \omega)$, $t_0 \leqslant t < T$, со значениями в R^r определяем случайную функцию $\sum\limits_{[t_0, t)} z\,\Delta\eta$ формулой

$$\sum_{[t_0, t)} z\,\Delta\eta = \sum_{s = k\tau = t_0}^{t-\tau} z(s, \omega)\,[\eta(s+\tau, \omega) - \eta(s, \omega)].$$

Легко проверяется, что $\widetilde{\sum z\,\Delta\eta}\,(t) = \sum\limits_{[t_0, t)} z\,\Delta\tilde{\eta}$, $\langle \sum z\Delta\eta, \sum z'\,\Delta\eta \rangle (t) = \sum\limits_{[t_0, t)} \sum\limits_{i, j} z_i z'_j \Delta \langle \eta^i, \eta^j \rangle$ (в предположении, разумеется, что компенсатор и квадратичный компенсатор для η существуют).

В случае непрерывного времени для непрерывной справа согласованной с $\{\mathscr{F}_t\}$ случайной функции $\eta(t) = \eta(t, \omega)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и предсказуемой случайной функции $z(t) = z(t, \omega)$, $t_0 < t \leqslant T$, если с вероятностью 1 конечны интегралы

$$\int_{t_0}^{t} |z(s, \omega)|\,|d\tilde{\eta}(s)|, \quad \int_{t_0}^{t} |z(s, \omega)|^2 \sum_i d\langle \eta^i, \eta^i \rangle (s),$$

определяется стохастический интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} z(s, \omega)\, d\eta(s)$; он является непрерывной справа случайной функцией, согласованной с семейством σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$, пополненным относительно вероятностной меры и дополненным по непрерывности справа (см. Мейер [1]; указанные условия не необходимы для возможности определить стохастический интеграл от предсказуемой случайной функции, но достаточны). При этом

$$\widetilde{\int z d\eta}(t) = \int_{t_0}^{t} z(s,\ \omega)\ d\tilde{\eta}(s),$$

$$\langle \int z d\eta,\ \int z' d\eta \rangle (t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i,\ j} z_i(s,\ \omega)\, z'_j(s,\ \omega)\, d\langle \eta^i,\ \eta^j \rangle (s).$$

Случайная функция $\eta(t)$, обладающая компенсатором и квадратичным компенсатором, представляется в виде суммы $\eta(t) = \tilde{\eta}(t) + \eta^c(t) + \eta^d(t)$, где $\eta^c(t)$ — непрерывный локальный мартингал, а $\eta^d(t)$ — локальный мартингал, ортогональный любому непрерывному локальному мартингалу $\zeta(t)$: $\langle \eta^d,\ \zeta \rangle (t) = 0$ (см. Кунита, Ватанабе [1], Мейер [1]).

Следующие пункты посвящены случаю непрерывного времени. Соответствующий аппарат можно развить и для дискретного времени, но в этом нет надобности.

4. Введем понятие меры Леви. Пусть $(Y,\ \mathcal{Y})$ — измеримое пространство; дополним это пространство еще одним элементом $*$, и в пространстве $Y \cup \{*\}$ введем σ-алгебру $\mathcal{Y}_*$, порожденную $\mathcal{Y}$ и $\{*\}$. Пусть $\eta(t) = \eta(t,\ \omega)$, $t_0 < t \leqslant T$, — случайная функция, согласованная с данным семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, со значениями в $(Y \cup \{*\},\ \mathcal{Y}_*)$, принимающая значения из Y не более чем для счетного множества значений t. *Мерой Леви*, соответствующей случайной функции $\eta(t)$, будем называть случайную функцию $L(A) = L(A,\ \omega)$ от множеств $A \subseteq (t_0,\ T] \times Y$, измеримых относительно $\mathcal{B}_{(t_0,\ T]} \times \mathcal{Y}$, такую, что

1) при фиксированном ω — это мера (могущая принимать также бесконечные значения) по A;

2) для любой неотрицательной функции $f(t,\ \omega,\ y)$ на $(t_0,\ T] \times \Omega \times Y$, измеримой относительно $\mathcal{P} \times \mathcal{Y}$,

а) случайная функция $\int_{(t_0, t]} \int_Y f(s,\ \omega,\ y)\, L(ds\, dy)$ предсказуема;

б) если эта случайная функция с вероятностью 1 конечна, то она является компенсатором случайной функции $\zeta(t) = \sum_{\substack{t_0 < s \leqslant t \\ \eta(s) \neq *}} f(s,\ \omega,\ \eta(s,\ \omega))$, которая также с вероятностью 1 конечна;

в) $$\mathsf{M}\zeta(t)=\mathsf{M}\int\limits_{(t_0,\,t]}\int\limits_{Y} f(s,\ \omega,\ y)\,L(ds\,dy). \tag{1.2.4}$$

Ясно, что требование б) выполняется также и для функции f, принимающей значения разных знаков, если только интеграл $\int\limits_{(t_0,\,t]}\int\limits_{Y}|f(s,\ \omega,\ y)|\,L(ds\,dy)$ с вероятностью 1 конечен.

Пусть $(\xi(t),\ \mathsf{P}_{t,\ x})$, $0\leqslant t\leqslant T$, — консервативный неоднородный по времени марковский процесс в метрическом пространстве X с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева. Пусть $\lambda_{t,\,x}(\Gamma)$, $t\in[0,\ T]$, $x\in X$, $\Gamma\in\mathscr{B}_X$, при фиксированных t, x — мера как функция Γ, конечная вне сколь угодно малой окрестности точки x; при фиксированном Γ эта функция пусть измерима по t, x. Положим $\eta(t)=\xi(t)$, если $\xi(t)\neq\xi(t-)$; $\eta(t)=*$, если $\xi(t)=\xi(t-)$. Мы говорим, что $\lambda_{t,\,x}$ — *мера Леви, соответствующая скачкам процесса* $(\xi(t),\ \mathsf{P}_{t,\ x})$, если для любого $t_0\in[0,\ T)$ и $x_0\in X$ случайная функция $L(A,\ \omega)=$ $=\int\limits_{t_0}^{T}\left[\int\limits_{X}\chi_A(s,\ y)\,\lambda_{s,\ \xi(s)}(dy)\right]ds$ является мерой Леви для случайной функции $\eta(t)$, $t_0<t\leqslant T$, относительно вероятностной меры $\mathsf{P}_{t_0,\,x_0}$ и семейства σ-алгебр $\mathscr{F}_{t_0 t}$.

Здесь в качестве Y выступает само фазовое пространство X, а в качестве $\eta(t)$ — значение процесса ξ после скачка. Процессы со скачками в линейном пространстве можно также описывать, беря в качестве $\eta(t)$ величину скачка $\xi(t)-\xi(t-)$.

5. Пусть $\eta(t)$, $t_0<t\leqslant T_0$, — случайная функция со значениями в $(Y\cup\{*\},\ \mathscr{Y}_*)$, $L(dt\,dy)$ — соответствующая мера Леви; $\zeta(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, — согласованная с семейством σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ случайная функция со значениями в R^r, с реализациями, непрерывными справа и обладающими пределами слева, $\zeta(t_0)=\mathrm{const}$. Пусть $g(t,\ \omega,\ y)$ — функция на $(t_0,\ T]\times\Omega\times(Y\cup\{*\})$ со значениями в R^r, измеримая относительно $\mathscr{P}\times\mathscr{Y}_*$ и такая, что $\zeta(t,\omega)=g(t,\omega,\eta(t,\omega))$, $\zeta(t-,\ \omega)=g(t,\ \omega,\ *)$ (ясно тогда, что скачки ζ могут происходить только в те моменты времени, когда $\eta(t)\neq*$).

Пусть случайная функция $\zeta(t)$ обладает непрерывными по t компенсатором и квадратичным компенсатором. Пусть $F(t,\ x)$ — числовая функция на $[t_0,\ T]\times R^r$, непрерывно дифференцируемая один раз по времени и два раза по пространственным переменным; положим $\varphi(t)=F(t,\ \zeta(t))$.

Тогда

$$\tilde{\varphi}(t) = F(t_0, \zeta(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial s}(s, \zeta(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}(s, \zeta(s))\, d\widetilde{\zeta^i}(s) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i\, \partial x^j}(s, \zeta(s))\, d\langle \zeta^{ci}, \zeta^{cj}\rangle(s) + \int_{(t_0, t]} \int_Y [F(s, g(s, \omega, y)) - F(s, \zeta(s)) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}(s, \zeta(s))(g^i(s, \omega, y) - \zeta^i(s))]\, L(ds\, dy), \qquad (1.2.5)$$

если только $\int\limits_{|F(s, g(s, \omega, y))| > C} |F(s, g(s, \omega, y))|\, L(ds\, dy)$ с вероятностью 1 сходится при больших значениях C.

Это — упрощенная и приспособленная к нашим потребностям обобщенная формула Ито (см. Кунита, Ватанабе [1], Мейер [1]), из которой оставлен только компенсатор, а представление $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)$ в виде стохастического интеграла и компенсированной суммы по скачкам выброшено.

§ 1.3. Компенсирующие операторы марковских процессов

1. Компенсирующие операторы. — 2. Локально безгранично делимые процессы. — 3. Меры Леви в дискретном случае. — 4. Леммы 1.3.1, 1.3.2.

1. Мы будем рассматривать два класса консервативных (необрывающихся) неоднородных по времени марковских процессов $(\xi(t), \mathsf{P}_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ (мы используем определение марковского процесса в смысле книги Дынкина [1]).

Первый класс будут составлять процессы с непрерывным временем, когда t пробегает все действительные значения между 0 и T.

Второй класс процессов у нас будет выступать в двух тесно связанных друг с другом видах. Первый вид — это процессы с дискретным временем t, пробегающим значения, кратные какому-то положительному τ. Ко второму виду будут относиться процессы с непрерывным временем, меняющие свое состояние только в моменты, кратные τ и остающиеся постоянными на полуинтервалах $[k\tau, (k+1)\tau)$: $\xi(t) = \xi(k\tau)$ при $k\tau \leqslant t < (k+1)\tau$. Такие процессы мы будем называть *τ-процессами*.

В случае непрерывного времени мы говорим, что измеримая числовая функция $f(t, x)$ на $[0, T] \times X$ принадлежит области определения $D_{\mathfrak{A}}$ *компенсирующего оператора* $\mathfrak{A}$, если существует измеримая функция $\varphi(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$, такая, что для любого $t_0 \in [0, T)$ и любого $x_0 \in X$ компенсатор случайной функции $\eta(t) = f(t, \xi(t)), t_0 \leqslant t \leqslant T$, относительно вероятностной меры P_{t_0, x_0} и семейства σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{t_0 t}\}$ задается формулой

$$\tilde{\eta}(t) = f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s, \xi(s))\, ds$$

(предполагается, что этот интеграл с вероятностью 1 сходится).

При этом значение компенсирующего оператора на функции f определяется формулой $\mathfrak{A}f = \varphi$.

Мы будем игнорировать вопросы о единственности (почти-единственности) определения значения компенсирующего оператора, о единственности задания процесса его компенсирующим оператором или тем или иным его сужением и о построении процесса с данным компенсирующим оператором.

Если функция f, зависящая только от аргумента x, принадлежит области определения компенсирующего оператора, то *производящий оператор* A_t на этой функции определяется равенством $A_t f(x) = \mathfrak{A}f(t, x)$.

В случае дискретного времени компенсирующий оператор $\mathfrak{A}f$ определяется равенством

$$\widetilde{f(t, \xi(t))} = f(t_0, x_0) + \sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau} \tau \cdot \mathfrak{A}f(s, \xi(s)).$$

В дискретном случае компенсирующий оператор определяется в точности однозначно, а именно,

$$\mathfrak{A}f(t, x) = \tau^{-1}(\mathsf{M}_{t, x} f(t+\tau, \xi(t+\tau)) - f(t, x)).$$

2. Строго марковский процесс $(\xi(t), \mathsf{P}_{t, x})$ на многообразии X класса $\mathbf{C}^{(2)}$ называется *локально безгранично делимым процессом*, если его реализации непрерывны справа и имеют пределы слева, компенсирующий оператор определен для всех ограниченных функций $f(t, x)$, непрерывно дифференцируемых один раз по t и дважды по локальным координатам x, и значение $\mathfrak{A}f(t, x)$ (одного из вариантов компенсирующего оператора) задается при любой карте (W, ψ), $W \ni x$, формулой

$$\mathfrak{A}f(t, x)=\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)+\sum_i b^i(t, x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{i, j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}(t, x)+\int_X [f(t, y)-f(t, x)- \\ -\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)\ (\psi^i(y)-\psi^i(x))]\lambda_{t, x}(dy). \quad (1.3.1)$$

Здесь $\lambda_{t, x}$ — мера, конечная вне каждой окрестности точки x, такая, что $\int_W |\psi(y)-\psi(x)|^2\ \lambda_{t, x}(dy)<\infty$, и измеримая по t, x; функция ψ продолжена вне области W измеримым и ограниченным образом; $a^{ij}(t, x)$ и $b^i(t, x)$ при любом выборе карты измеримым образом зависят от t, x; матрица $(a^{ij}(t, x))$ симметрична и неотрицательно определена, и она преобразуется при переходе к другой карте как тензор, а $b^i(t, x)$ зависят и от выбора карты, и от способа продолжения функции ψ за пределы области W.

Определение локально безгранично делимого процесса здесь дано в духе «мартингальных задач» (см. Струк, Варадан [1], [2]). Имеется ряд работ, в которых изучаются локально безгранично делимые процессы (например, Григелионис [1], Комацу [1], Струк [1], Лепельтье, Маршаль [1]), устанавливается эквивалентность различных определений, рассматриваются вопросы их построения по данным локальным характеристикам b^i, a^{ij}, $\lambda_{t, x}$ (чего мы не будем касаться). Мера $\lambda_{t, x}(dy)$ оказывается мерой Леви, соответствующей скачкам локально безгранично делимого процесса. Коэффициенты $a^{ij}(t, x)$ задают квадратичный компенсатор непрерывной части изображения процесса на карте: если мы обозначим через τ_W момент первого выхода процесса из области W и рассмотрим представление случайной функции $\eta(t)=\psi(\xi(t\wedge\tau_W))=$ $=\tilde{\eta}(t)+\eta^c(t)+\eta^d(t)$ в виде суммы компенсатора относительно вероятностной меры, соответствующей любой начальной точке, непрерывного локального мартингала и локального мартингала, ортогонального всем непрерывным, то $\langle\eta^{ci}, \eta^{cj}\rangle(t)=\int_0^{t\wedge\tau_W} a^{ij}(s, \xi(s))\,ds$.

3. В случае процессов с дискретным временем, меняющимся с шагом τ, мы определяем меру Леви $\lambda_{t,x}$ равенством

$$\lambda_{t,x}(\Gamma)=\tau^{-1}\mathsf{P}_{t,x}\{\xi(t+\tau)\in\Gamma\}.$$

Формула (1.3.1) с заменой $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ на $\tau^{-1}(f(t+\tau, x) - f(t, x))$, а $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)$, $f(t, y)$ на $f(t+\tau, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(t+\tau, x)$, $f(t+\tau, y)$ и с нулевыми коэффициентами a^{ij} здесь действует всегда; коэффициенты b^i определяются формулой

$$b^i(t, x)=\int\limits_X (\psi^i(y)-\psi^i(x))\,\lambda_{t,x}(dy).$$

4. Приведем вспомогательные результаты, касающиеся сумм по скачкам и мер Леви.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $V(t, y, x)$, $t\in(t_0, T]$, $y, x\in X$, — *неотрицательная ограниченная измеримая функция, равная* 0 *при* $\rho(x, y)<\varepsilon$, $\varepsilon>0$. *Тогда в случае локально безгранично делимого процесса*

$$\mathsf{M}_{t_0,x_0}\sum_{t_0<t\leqslant T} V(t, \xi(t-), \xi(t))=$$
$$=\mathsf{M}_{t_0,x_0}\int\limits_{t_0}^{T} dt\int\limits_X \lambda_{t,\xi(t)}(dx)\,V(t, \xi(t), x); \quad (1.3.2)$$

в случае процесса $(\xi(t), \mathsf{P}_{t,x})$, $t=k\tau\in[0, T]$:

$$\mathsf{M}_{t_0,x_0}\sum_{t_0<t=k\tau\leqslant T} V(t, \xi(t-\tau), \xi(t))=$$
$$=\mathsf{M}_{t_0,x_0}\sum_{t_0\leqslant t=k\tau<T}\tau\int\limits_X \lambda_{t,\xi(t)}(dx)\,V(t+\tau, \xi(t), x). \quad (1.3.3)$$

Сумма под знаком математического ожидания в (1.3.2) содержит на самом деле лишь конечное число слагаемых, так как $V(t, \xi(t-), \xi(t))$ отлично от нуля только в случае скачка большего ε.

Доказательство — применение формулы (1.2.4); в случае дискретного времени — простая выкладка. □

Лемма 1.3.2. *Пусть* $V(t_1, y_1, x_1, \ldots, t_k, y_k, x_k)$, $t_0<t_1<\ldots<t_k\leqslant T$, $y_i, x_i\in X$, — *неотрицательная ограниченная измеримая функция, равная нулю, если* $\rho(x_i, y_i)<\varepsilon$

при каком-либо $i\,(\varepsilon > 0)$. *Тогда*

$$\mathsf{M}_{t_0,\,x_0} \sum_{t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant T} V(t_1,\ \xi(t_1 -),\ \xi(t_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ t_k,\ \xi(t_k -),\ \xi(t_k)) =$$
$$= \mathsf{M}_{t_0,\,x_0} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_X \lambda_{t_1,\,\xi(t_1)}(dx_1) \times$$
$$\times \mathsf{M}_{t_1,\,x_1} \int_{t_1}^{T} dt_2 \int_X \lambda_{t_2,\,\xi(t_2)}(dx_2) \times \ \ldots$$
$$\ldots \times \mathsf{M}_{t_{k-1},\,x_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{T} dt_k \int_X \lambda_{t_k,\,\xi(t_k)}(dx_k) \times$$
$$\times V(t_1,\ \xi(t_1),\ x_1,\ \ldots,\ t_k,\ \xi(t_k),\ x_k). \qquad (1.3.4)$$

Здесь последнее математическое ожидание берется при фиксированных $\xi(t_1),\ \ldots,\ \xi(t_{k-1})$ *и случайном* $\xi(t_k)$, *т. е. речь идет о*

$$\int_\Omega \mathsf{P}_{t_{k-1},\,x_{k-1}}(d\omega') \int_{t_{k-1}}^{T} dt_k \int_X \lambda_{t_k,\,\xi(t_k,\,\omega')}(dx_k) \times$$
$$\times V(t_1,\ \xi(t_1,\ \omega),\ x_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ t_{k-1},\ \xi(t_{k-1},\ \omega),\ x_{k-1},\ t_k,\ \xi(t_k,\ \omega'),\ x_k);$$

предпоследнее — при фиксированных $\xi(t_1),\ \ldots,\ \xi(t_{k-2})$ *и случайном* $\xi(t_{k-1})$ *и т. д.; наконец, первое — при случайном* $\xi(t_1)$.

В случае дискретного времени $(t = k\tau)$

$$\mathsf{M}_{t_0,\,x_0} \sum_{t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant T} V(t_1,\ \xi(t_1 - \tau),\ \xi(t_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ t_k,\ \xi(t_k - \tau),\ \xi(t_k)) =$$
$$= \mathsf{M}_{t_0,\,x_0} \sum_{t_0 \leqslant t_1 < T} \tau \cdot \int_X \lambda_{t_1,\,\xi(t_1)}(dx_1) \times$$
$$\times \mathsf{M}_{t_1+\tau,\,x_1} \sum_{t_1+\tau \leqslant t_2 < T} \tau \times \ \ldots$$
$$\ldots \times \mathsf{M}_{t_{k-1}+\tau,\,x_{k-1}} \sum_{t_{k-1}+\tau \leqslant t_k < T} \tau \cdot \int_X \lambda_{t_k,\,\xi(t_k)}(dx_k) \times$$
$$\times V(t_1 + \tau,\ \xi(t_1),\ x_1,\ \ldots,\ t_k + \tau,\ \xi(t_k),\ x_k). \quad (1.3.5)$$

Здесь всюду t_i *кратны* τ.

Доказательство будем вести по индукции (для $k = 1$ все уже доказано). Обозначим сумму под знаком математического ожидания в левой части (1.3.4), (1.3.5) через $\sum_{t_0, T}^{k}(V)$. Достаточно доказать (1.3.4), (1.3.5) для $V(t_1, y_1, x_1, \ldots, t_k, y_k, x_k) = V_1(t_1, y_1, x_1)\cdot\ldots\cdot V_k(t_k, y_k, x_k)$. В случае дискретного времени переход от $k-1$ и k осуществляется с использованием марковского свойства:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{t_0, x_0}\textstyle\sum_{t_0, T}^{k}(V_1\cdot\ldots\cdot V_k) = \\
&= \sum_{t_0 \leqslant t_1 < T} \mathsf{M}_{t_0, x_0} V_1(t_1+\tau, \xi(t_1), \xi(t_1+\tau))\times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \textstyle\sum_{t_1+\tau, T}^{k-1}(V_2\cdot\ldots\cdot V_k) = \\
&= \sum_{t_0 \leqslant t_1 < T} \mathsf{M}_{t_0, x_0} V_1(t_1+\tau, \xi(t_1), \xi(t_1+\tau))\times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \mathsf{M}_{t_1+\tau, \xi(t_1+\tau)}\textstyle\sum_{t_1+\tau, T}^{k-1}(V_2\cdot\ldots\cdot V_k).
\end{aligned}$$

В случае непрерывного времени введем марковские моменты $\tau_0^\varepsilon = t_0$, $\tau_i^\varepsilon = \min\{t > \tau_{i-1}^\varepsilon\colon\ \rho(\xi(t), \xi(t-)) \geqslant \varepsilon\}$; если таких t нет, полагаем τ_i^ε и все следующие τ_{i+1}^ε, τ_{i+2}^ε, ... равными $+\infty$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{t_0, x_0}\textstyle\sum_{t_0, T}^{k}(V_1\cdot\ldots\cdot V_k) = \\
&\qquad = \mathsf{M}_{t_0, x_0}\sum_{i=1}^{\infty} V_1(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon-), \xi(\tau_i^\varepsilon))\textstyle\sum_{\tau_i^\varepsilon, T}^{k-1}(V_2\cdot\ldots\cdot V_k).
\end{aligned}$$

Здесь мы положили $V_1(+\infty, y, x) = 0$. Переставляем знаки математического ожидания и суммы; в i-м слагаемом пользуемся строго марковским свойством относительно момента τ_i^ε. Величина $V_1(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon-), \xi(\tau_i^\varepsilon))$ выносится за знак условного математического ожидания, и остается $G(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon))$, где $G(t, x) = \mathsf{M}_{t,x}\sum_{t, T}^{k-1}(V_2\cdot\ldots\cdot V_k)$. Находим, пользуясь предыдущей леммой:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{t_0, x_0}\textstyle\sum_{t_0, T}^{k}(V_1\cdot\ldots\cdot V_k) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}_{t_0, x_0} V_1(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon-), \xi(\tau_i^\varepsilon))\, G(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon)) = \\
&\qquad = \mathsf{M}_{t_0, x_0}\sum_{i=1}^{\infty} V_1(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon-), \xi(\tau_i^\varepsilon))\, G(\tau_i^\varepsilon, \xi(\tau_i^\varepsilon)) = \\
&\qquad = \mathsf{M}_{t_0, x_0}\sum_{t_0 < t \leqslant T} V_1(t, \xi(t-), \xi(t))\, G(t, \xi(t)) = \\
&\qquad\qquad = \mathsf{M}_{t_0, x_0}\int_{t_0}^{T} dt \int_X \lambda_{t, \xi(t)}(dx)\, V_1(t, \xi(t), x)\, G(t, x).
\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для $G(t, x)$, имеющее место в силу предположения индукции, получаем (1.3.4). □

ГЛАВА 2

ОЦЕНКИ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИОНАЛОМ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 2.1. Кумулянта. Функционал действия

1. Кумулянта. —2. Выражение через нее компенсатора и квадратичного компенсатора процесса.—3. Функционал $\pi(t_0, t)$.—4. Функции $H(t, x; u)$, $\underline{H}(u)$; лемма 2.1.2.—5. Функционал действия, множество $\Phi_{x;\,[T_1,\,T_2]}(i)$.

1. В §§ 2.1—2.3 мы рассматриваем марковские процессы в R^r, удовлетворяющие аналогу крамеровского условия конечности экспоненциальных моментов. Мы будем рассматривать два класса таких процессов: процессы с дискретным временем, принимающим значения, кратные какому-то $\tau > 0$; локально безгранично делимые процессы с компенсирующим оператором, задаваемым формулой

$$\mathfrak{A}f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i b^i(t, x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) + \\ + \int_{R^r}\Big[f(t, y) - f(t, x) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)(y^i - x^i)\Big]\lambda_{t,x}(dy). \quad (2.1.1)$$

Для сходимости интеграла для гладких ограниченных f на меру $\lambda_{t,x}$ надо наложить некоторые условия на бесконечности, так что этот вид оператора—менее общий, чем (1.3.1), где функция ψ продолжена вне некоторой окрестности точки x ограниченным образом; но все равно мы сейчас наложим на коэффициенты оператора и меру $\lambda_{t,x}$ еще более сильные ограничения.

Кумулянта процесса $(\xi(t), \mathsf{P}_{t,x})$—это функция $G(t, x; z)$ от $t \in [0, T)$, $x \in R^r$ и $z \in R^r$, принимающая значения в $(-\infty, \infty]$. Она определяется в случае дискретного времени формулой

$$G(t, x; z) = \tau^{-1} \ln \mathsf{M}_{t,x} \exp\{z(\xi(t+\tau) - x)\}. \quad (2.1.2)$$

(В статьях Вентцеля [7] кумулянта в случае дискретного времени определялась немного по-другому — без множителя τ^{-1}; мы вводим этот множитель для большего параллелизма рассмотрения дискретного и непрерывного времени.) В случае непрерывного времени:

$$G(t, x; z) = \sum_i z_i b^i(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} z_i z_j a^{ij}(t, x) + \\ + \int_{R^r} [e^{z(y-x)} - 1 - z(y-x)] \lambda_{t,x}(dy). \quad (2.1.3)$$

Термин *кумулянта* используется в сходном смысле Гихманом, Скороходом [1].

Ясно, что функция $G(t, x; z)$ измерима по t, x, z; $G(t, x; 0) \equiv 0$. Легко проверяется, что эта функция при фиксированных t, x выпукла вниз и полунепрерывна снизу по z, а внутри той области, где она конечна, она аналитична по z, и матрица ее вторых производных строго положительно определена.

Введем ограничение на функцию G:

A. $G(t, x; z) \leqslant \bar{G}(z)$ при всех t, x, z, где $\bar{G}(z)$ — неотрицательная выпуклая вниз и полунепрерывная снизу функция, $\bar{G}(0) = 0$, $\bar{G}(z) < \infty$ для z в некотором открытом множестве Z, содержащем точку 0.

Функцию $\bar{G}$, удовлетворяющую этим условиям, кроме конечности в окрестности нуля, всегда можно получить, полагая $\bar{G}(z) = 0 \vee \sup_{t, x} G(t, x; z)$; так что **A** — это некоторое условие ограниченности.

При выполнении условия **A** функция $G(t, x; z)$ ограничена сверху и снизу при всех t, x и при z, изменяющихся в пределах любого компактного подмножества Z.

2. Легко видеть, что при выполнении условия **A** функция G бесконечно дифференцируема по z в точке $z = 0$ и что ее производные связаны с моментами приращений процесса. Компенсатор и квадратичный компенсатор $\xi(t)$, $t \in [t_0, T]$, относительно вероятностных мер P_{t_0, x_0} выражаются следующим образом: в дискретном случае

$$\tilde{\xi}(t) = x_0 + \sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau} \nabla_z G(s, \xi(s); 0) \cdot \tau,$$

$$\langle \xi^i, \xi^j \rangle (t) = \sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau} \frac{\partial^2 G}{\partial z_i \partial z_j}(s, \xi(s); 0) \cdot \tau;$$

в непрерывном случае суммы заменяются интегралами от t_0 до t. В случае непрерывного времени это выводится из того, что

$$\tilde{\xi}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} b(s,\ \xi(s))\,ds, \quad \langle\xi^i,\ \xi^j\rangle(t)=\int_{t_0}^{t} A^{ij}(s,\ \xi(s))\,ds,$$

где $b=(b^1,\ \ldots,\ b^r)$, $A^{ij}(s,\ x)=a^{ij}(s,x)+\int_{R^r}(y^i-x^i)\times$ $\times(y^j-x^j)\,\lambda_{s,x}(dy)$, причем $b(s,x)$ и $(A^{ij}(s,x))$ ограничены равномерно по s, x: при достаточно малых положительных ε (таких, что $\{z\colon |z|\leqslant\varepsilon\}\subset Z$)

$$|b(s,\ x)|=|\nabla_z G(s,\ x;\ 0)|\leqslant\varepsilon^{-1}\sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\bar{G}(z),$$

$$|A^{ij}(s,\ x)|\leqslant(A^{ii}(s,\ x)+A^{jj}(s,\ x))/2,$$

$$A^{ii}(s,\ x)=a^{ii}(s,\ x)+\int_{R^r}(y^i-x^i)^2\,\lambda_{s,x}(dy)\leqslant$$

$$\leqslant a^{ii}(s,\ x)+\varepsilon^{-2}\int_{R^r}\left[e^{\varepsilon(y^i-x^i)}-1+e^{-\varepsilon(y^i-x^i)}-1\right]\lambda_{s,x}(dy)=$$

$$=\varepsilon^{-2}[G(s,x;\,0,\ \ldots,\underset{i}{\varepsilon},\ \ldots,0)+G(s,x;\,0,\ \ldots,\underset{i}{-\varepsilon},\ \ldots,0)]\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^{-2}\sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\bar{G}(z).$$

3. Сформулируем основное свойство кумулянты, которое мы будем использовать.

Случай дискретного времени:

Лемма 2.1.1. *Пусть t_0—число от 0 до T, кратнсе τ; $z(t,\ \omega)$, $t\in[t_0,\ T)$,—согласованная с семейством σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{[t_0,\,t]}\}$ случайная функция, все значения которой принадлежат Z. Тогда случайная функция*

$$\pi(t_0,\ t)=\exp\Biggl\{\sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau} z(s,\ \omega)\,(\xi(s+\tau)-\xi(s))-$$
$$-\sum_{s=k\tau=t_0}^{t-\tau} G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \omega))\cdot\tau\Biggr\},\qquad t\in[t_0,\ T],$$

есть мартингал относительно любой из вероятностных мер P_{t_0,x_0} и семейства σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{[t_0,\,t]}\}$.

Доказательство. Применяя марковское свойство, доказываем, что

$$\mathsf{M}_{t_0,x_0}(\pi(t_0,\ t+\tau)\,\pi(t_0,\ t)^{-1}\,|\,\mathcal{F}_{[t_0,\,t]})=1. \quad \square$$

Случай непрерывного времени:

Лемма 2.1.1′. *Пусть $t_0 \in [0, T]$; $z(t, \omega)$, $t_0 \leqslant t < T$, — предсказуемая случайная функция, все значения которой принадлежат какому-то компактному подмножеству $K \subset Z$. Тогда случайная функция*

$$\pi(t_0, t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} z(s, \omega)\, d\xi(s) - \right.$$
$$\left. - \int_{t_0}^{t} G(s, \xi(s); z(s, \omega))\, ds\right\}, \qquad t \in [t_0, T],$$

есть мартингал относительно любой из вероятностных мер P_{t_0, x_0} и семейства σ-алгебр $\mathscr{F}_{t_0 t}$.

Здесь рассматриваются пополненные σ-алгебры $\mathscr{F}_{t_0 t}$ из-за использования стохастических интегралов.

Доказательство. Пользуясь формулой (1.2.5), проверяем, что $\tilde{\pi}(t_0, t) = 1$, так что $\pi(t_0, t)$ — локальный мартингал. Раз $\pi(t_0, t) > 0$, из этого уже вытекает, что $\mathsf{M}_{t_0, x_0}\pi(t_0, \tau_0) \leqslant 1$ для любого марковского момента τ_0, $t_0 \leqslant \tau_0 \leqslant T$. Чтобы доказать, что $\pi(t_0, t)$ — мартингал, достаточно проверить равномерную интегрируемость $\pi(t_0, \tau_0)$ для всех марковских моментов τ_0, $t_0 \leqslant \tau_0 \leqslant T$, а для этого достаточно установить при каком-нибудь $\varepsilon > 0$ ограниченность $\mathsf{M}_{t_0, x_0}\pi(t_0, \tau_0)^{1+\varepsilon}$. Но при достаточно малых ε компакт $(1+\varepsilon)K \subset Z$; $\pi'(t_0, t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} (1+\varepsilon) \times \right.$ $\left. \times z(s, \omega)\, d\xi(s) - \int_{t_0}^{t} G(s, \xi(s); (1+\varepsilon) z(s, \omega))\, ds\right\}$ — локальный мартингал, $\mathsf{M}_{t_0, x_0}\pi'(t_0, \tau_0) \leqslant 1$, и $\mathsf{M}_{t_0, x_0}\pi(t_0, \tau_0)^{1+\varepsilon} \leqslant$ $\leqslant \exp\{(T - t_0)[\sup\{G(t, x; (1+\varepsilon) z)): t \in [t_0, T), x \in R^r,$ $z \in K\} - (1+\varepsilon)\inf\{G(t, x; z): t \in [t_0, T), x \in R^r, z \in K\}]\}$. □

4. Положим $H(t, x; u) \leftrightarrow G(t, x; z)$; эта функция неотрицательна, потому что $G(t, x; 0) = 0$, и измерима по t, x, u. Множество, где функция H конечна, связано с возможными значениями скачков случайной функции $\xi(t)$.

Примеры. В случае дискретного времени: если распределение $\tau^{-1}[\xi(t+\tau) - \xi(t)]$ (для процесса, выходящего в момент t из точки x в плоскости) является смесью распределения с положительной плотностью в некотором круге и распределения, сосредоточенного в некоторой точке u_0 границы этого круга, то $G(t, x; z)$ конечно при всех z; $H(t, x; u) = \infty$ вне круга и на окружности, кроме точки u_0; внутри круга и в точке u_0 функция H принимает конечные значения, причем она стремится к ∞ при приближении u изнутри к точкам окружности, кроме u_0. В случае непрерывного времени, если x находится внутри выпуклой оболочки носителя меры $\lambda_{t,x}$ или матрица $(a^{ij}(t, x))$ положительно определена, то $G(t, x; z)$ стремится к бесконечности быстрее, чем линейно, при стремлении z к бесконечности по любому направлению, и $H(t, x; u)$ конечно всюду. Если $a^{ij}(t, x)=0$, а мера $\lambda_{t,x}$ сосредоточена в двух точках, видных из x под некоторым углом, то $H(t, x; u)$ конечно в точках этого угла (включая границу), сдвинутых на определенный вектор. Если

$$a^{ij}(t, x)=0, \ \lambda_{t,x}(R^r \setminus \{x\}) < \infty,$$

и $\lambda_{t,x}$ имеет положительную плотность на выпуклом открытом множестве, не содержащем x, то $H(t, x; u) < \infty$ внутри сдвинутого на некоторый вектор угла, под которым это множество видно из x, и в вершине угла, но не на остальной его границе. Если $\lambda_{t,x}(R^r \setminus \{x\})=\infty$ (что может быть, только если x принадлежит границе упомянутого выпуклого множества), но $\int (y-x)\,\lambda_{t,x}(dy)$ сходится, то функция H обращается в ∞ также и в вершине угла. Если же этот интеграл расходится в каком-то из внутренних направлений этого угла, то $H(t, x; u)$ конечно всюду.

Введем функцию $\underline{H}(u) \leftrightarrow \overline{G}(z)$. Легко видеть, что $0 \leqslant \underline{H}(u) \leqslant H(t, x; u)$ при всех t, x, u. Обозначим через $\overline{U}$ замыкание множества $\{u\colon \underline{H}(u) < \infty\}$. Множество $\overline{U}$ непременно выпукло.

Лемма 2.1.2. *Пусть z — ненулевой вектор, d — действительное число; $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant T$. Если $\underline{H}(u)=\infty$ при $zu > d$, то почти наверное $z(\xi(t')-\xi(t)) \leqslant (t'-t)\,d$.*

Доказательство. Для натурального n и $\varepsilon > 0$ воспользуемся экспоненциальным чебышёвским неравенством:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{t,x}\{z(\xi(t')-\xi(t)) > (t'-t)\cdot(d+\varepsilon)\} &\leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}_{t,x}\exp\{nz(\xi(t')-\xi(t))\}/\exp\{n(t'-t)(d+\varepsilon)\} &\leqslant \\ \leqslant \exp\{(t'-t)[\overline{G}(nz)-nd]-n(t'-t)\varepsilon\}. \quad &(2.1.4)\end{aligned}$$

Но $\overline{G}(nz)=\sup\limits_u [nzu-\underline{H}(u)]$, причем верхнюю грань можно брать по тем u, для которых $\underline{H}(u) < \infty$. Скалярное произведение здесь не превосходит nd, а $H(u) \geqslant 0$; поэтому выражение (2.1.4) не превосходит $\exp\{-n(t'-t)\varepsilon\}$. Полагая $n \to \infty$, получаем, что вероятность равна 0; чтобы завершить доказательство, устремляем ε к 0. □

Следствие. Для любых $0 \leqslant t < t' \leqslant T$ почти наверное $\xi(t') - \xi(t) \in (t'-t)\cdot\bar{U}$. Для доказательства достаточно представить $\bar{U}$ в виде счетного пересечения полупространств вида $\{u\colon zu \leqslant d\}$.

5. Определим *функционал действия* $I_{T_1, T_2}(\varphi)$ для процесса $\xi(t)$ на отрезке $[T_1, T_2] \subseteq [0, T]$ от функции $\varphi(t)$, $t \in [T_1, T_2]$, со значениями в R^r. В случае дискретного времени положим

$$I_{T_1, T_2}(\varphi) = \sum_{s=k\tau=T_1}^{T_2-\tau} H\left(s, \varphi(s); \frac{\varphi(s+\tau)-\varphi(s)}{\tau}\right)\cdot\tau;$$

в случае непрерывного времени для абсолютно непрерывных φ

$$I_{T_1, T_2}(\varphi) = \int_{T_1}^{T_2} H(s, \varphi(s); \dot{\varphi}(s))\, ds,$$

для остальных полагаем $I_{T_1, T_2}(\varphi) = +\infty$.

Для $x \in R^r$, $[T_1, T_2] \subseteq [0, T]$, $i \geqslant 0$ будем рассматривать множество $\Phi_{x;\,[T_1, T_2]}(i) = \{\varphi\colon \varphi(T_1) = x,\ I_{T_1, T_2}(\varphi) \leqslant i\}$.

§ 2.2. Вывод нижней оценки для вероятности прохождения трубочки

1. Формулировка теоремы 2.2.1; обобщенное преобразование Крамера.—2. Характеристики преобразованного процесса.—3. Окончание доказательства теоремы.

1. Теорема 2.2.1. *Пусть* $(\xi(t), \mathsf{P}_{t,x})$ — *марковский процесс, принадлежащий к одному из двух классов, введенных в предыдущем параграфе; пусть соответствующая кумулянта удовлетворяет условию* **A**. *Пусть* $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *функция со значениями в* R^r, *в случае непрерывного времени — абсолютно непрерывная. Пусть в случае дискретного времени при всех* x *и всех* $t \in [0, T)$, *кратных* τ, *функция* $H(t, x; u)$ *дифференцируема по* u *в точке* $(\varphi(t+\tau)-\varphi(t))/\tau$, *и все значения функции* $z(t, x) = \nabla_u H(t, x; (\varphi(t+\tau)-\varphi(t))/\tau)$ *принадлежат некоторому компактному подмножеству* Z; *в случае непрерывного вре-*

мени пусть то же выполняется для всех x и почти всех $t \in [0, T)$ для значений $z(t, x) = \nabla_u H(t, x; \dot{\varphi}(t))$.

Положим в дискретном случае для $0 \leqslant t < T$

$$D(t) = \sup_x \sum_i \frac{\partial^2 G}{\partial z_i^2}(t, x; z(t, x)), \tag{2.2.1}$$

$$ZDZ(t) = \sup_x \sum_{i, j} \frac{\partial^2 G}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; z(t, x)) z_i(t, x) z_j(t, x), \tag{2.2.2}$$

$$\delta' = 2\left(\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} D(t)\cdot\tau\right)^{1/2}, \tag{2.2.3}$$

$$\Delta H(t) = \sup_{|x-\varphi(t)|<\delta'} \left[H\left(t, x; \frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}\right) - H\left(t, \varphi(t); \frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}\right)\right]; \tag{2.2.4}$$

в непрерывном случае — то же, но с заменой $(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))/\tau$ на $\dot{\varphi}(t)$, а суммы в (2.2.3) на интеграл:

$$\delta' = 2\left(\int_0^T D(t)\,dt\right)^{1/2}. \tag{2.2.3'}$$

Тогда, если $\delta \geqslant \delta'$, то для $x_0 = \varphi(0)$ в дискретном случае

$$\mathbf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \varphi) < \delta\} \geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-I_{0, T}(\varphi) - 2\left(\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} ZDZ(t)\cdot\tau\right)^{1/2} - \sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} \Delta H(t)\cdot\tau\right\}; \tag{2.2.5}$$

в непрерывном случае

$$\mathbf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \varphi) < \delta\} \geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-I_{0, T}(\varphi) - 2\left(\int_0^T ZDZ(t)\,dt\right)^{1/2} - \int_0^T \Delta H(t)\,dt\right\}. \tag{2.2.5'}$$

Доказательство. Введем *обобщенное преобразование Крамера*, соответствующее произвольной измеримой функции $z(t, x)$, принимающей значения в компактном подмножестве Z (введено Вентцелем [4], [5]; источник идеи — см. Крамер [1]). В случае дискретного времени положим

$$\pi(0,\ t)=\exp\left\{\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau} z(s,\ \xi(s))(\xi(s+\tau)-\xi(s))-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau} G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\cdot\tau\right\};$$

а в непрерывном случае

$$\pi(0,\ t)=\exp\left\{\int_0^t z(s,\ \xi(s-))\,d\xi(s)-\right.$$
$$\left.-\int_0^t G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\,ds\right\}$$

(напоминаем, что случайная функция $\xi(s-)$ предсказуема). Обобщенным преобразованием Крамера, соответствующим $z(t,\ x)$, будем называть преобразование, состоящее в замене вероятностной меры $\mathsf{P}_{0,\ x_0}$ мерой $\mathsf{P}^z_{0,\ x_0}$, определяемой для событий $A\in\mathscr{F}_{0T}$ формулой

$$\mathsf{P}^z_{0,\ x_0}(A)=\mathsf{M}_{0,\ x_0}(A;\ \pi(0,\ T)).$$

Согласно леммам 2.1.1, 2.1.1′, $\mathsf{P}^z_{0,\ x_0}$ — вероятностная мера.

2. Компенсатор и квадратичный компенсатор $\xi(t)$ относительно этой вероятностной меры задаются следующими формулами: в дискретном случае

$$\tilde{\xi}^z(t)=x_0+\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau}\nabla_z G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\cdot\tau, \quad (2.2.6)$$

$$\langle\xi^i,\ \xi^j\rangle^z(t)=\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau}\frac{\partial^2 G}{\partial z_i\,\partial z_j}(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\cdot\tau; \quad (2.2.7)$$

в непрерывном случае

$$\tilde{\xi}^z(t)=x_0+\int_0^t\nabla_z G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\,ds, \quad (2.2.8)$$

$$\langle\xi^i,\ \xi^j\rangle^z(t)=\int_0^t\frac{\partial^2 G}{\partial z_i\,\partial z_j}(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\,ds. \quad (2.2.9)$$

Для доказательства того, что формула (2.2.6) или (2.2.8) действительно задает компенсатор $\xi(t)$, достаточно проверить, что существует последовательность марковских моментов $T_n\uparrow T$ такая, что для любых $t_1\leqslant t$ из $[0,\ T]$

и любого события $A \in \mathcal{F}_{0t_1}$ равно нулю математическое ожидание

$$\mathsf{M}^z_{0,\, x_0}(A;\ \xi(t\wedge T_n)-\tilde{\xi}^z(t\wedge T_n)-\xi(t_1\wedge T_n)+\tilde{\xi}^z(t_1\wedge T_n)) = \\ = \mathsf{M}_{0,\, x_0}(A;\ \pi(0,\ T)[\xi(t\wedge T_n)-\tilde{\xi}^z(t\wedge T_n)- \\ -\xi(t_1\wedge T_n)+\tilde{\xi}^z(t_1\wedge T_n)]). \qquad (2.2.10)$$

Пользуясь тем, что $\pi(0,\ t)$ — мартингал, сводим математическое ожидание (2.2.10) к выражению

$$\mathsf{M}_{0,\, x_0}(A;\ \pi(0,\ t\wedge T_n)[\xi(t\wedge T_n)-\tilde{\xi}^z(t\wedge T_n)- \\ -\xi(t_1\wedge T_n)+\tilde{\xi}^z(t_1\wedge T_n)]).$$

Таким образом, дело сводится к установлению того, что компенсатор $\pi(0,\ t)[\xi(t)-\tilde{\xi}^z(t)]$ относительно первоначальной вероятностной меры равен 0.

Рассмотрим сначала случай дискретного времени. Имеем

$$\mathsf{M}_{0,\, x_0}\{\pi(0,\ t+\tau)[\xi(t+\tau)-\tilde{\xi}^z(t+\tau)]\,|\,\mathcal{F}_{0t}\} = \\ = \pi(0,\ t)\,\mathsf{M}_{0,\, x_0}\{\xi(t+\tau)\exp\{z(t,\ \xi(t))(\xi(t+\tau)-\xi(t))- \\ -\tau G(t,\ \xi(t);\ z(t,\ \xi(t)))\}\,|\,\mathcal{F}_{0t}\}- \\ -\tilde{\xi}^z(t+\tau)\,\mathsf{M}_{0,\, x_0}\{\pi(0,\ t+\tau)\,|\,\mathcal{F}_{0t}\} = \\ = \pi(0,\ t)\exp\{-\tau G(t,\ \xi(t);\ z(t,\ \xi(t)))\}\times \\ \times \mathsf{M}_{t,\, x}\,\xi(t+\tau)\exp\{z(t,\ x)(\xi(t+\tau)-x)\}\,|_{x=\xi(t)}- \\ -\pi(0,\ t)\,\tilde{\xi}^z(t+\tau). \qquad (2.2.11)$$

Здесь мы воспользовались марковским свойством относительно момента t. Но

$$\mathsf{M}_{t,\, x}\,\xi(t+\tau)\exp\{z(t,\ x)(\xi(t+\tau)-x)\} = \\ = x\mathsf{M}_{t,\, x}\exp\{z(t,\ x)(\xi(t+\tau)-x)\}+ \\ +\nabla_z\mathsf{M}_{t,\, x}\exp\{z(\xi(t+\tau)-x)\}\,|_{z=z(t,\, x)} = \\ = x\exp\{\tau\cdot G(t,\ x;\ z(t,\ x))\}+ \\ +\exp\{\tau\cdot G(t,\ x;\ z(t,\ x))\}\cdot\tau\cdot\nabla_z G(t,\ x;\ z(t,\ x)).$$

Итак, условное математическое ожидание (2.2.11) приводится к виду

$$\pi(0,\ t)[\xi(t)+\tau\cdot\nabla_z G(t,\, x;\ z(t,\, x))-\tilde{\xi}^z(t+\tau)] = \\ = \pi(0,\ t)[\xi(t)-\tilde{\xi}^z(t)],$$

что и требовалось доказать.

Аналогично проверяется в случае дискретного времени и формула для квадратичного компенсатора.

Установим формулы (2.2.8), (2.2.9) для компенсатора и квадратичного компенсатора $\xi(t)$ относительно преобразованной вероятности в случае непрерывного времени. Для этого докажем, что для растущей не быстрее $e^{\varepsilon|x|}$ функции $f(t, x)$, непрерывно дифференцируемой один раз по t и дважды по x (ε выбирается так, чтобы замкнутая ε-окрестность компакта, которому принадлежат все значения $z(t, x)$, все еще принадлежала Z), случайная функция

$$\pi(0, t)\left[f(t, \xi(t))-f(0, x_0)-\int_0^t \mathfrak{A}^z f(s, \xi(s))\,ds\right] \tag{2.2.12}$$

является локальным мартингалом относительно вероятности P_{0, x_0}, где

$$\mathfrak{A}^z f(t, x)=\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)+\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)\frac{\partial G}{\partial z_i}(t, x; z(t, x))+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i, j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}(t, x)+\int_{R^r}\Big[f(t, y)-f(t, x)-$$
$$-\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)(y^i-x^i)\Big]e^{z(t, x)(y-x)}\lambda_{t, x}(dy).$$

Для этого положим $\psi(t)=\pi(0, t)f(t, \xi(t))$ и вычислим компенсатор $\tilde{\psi}(t)$ с помощью формулы (1.2.5). В качестве $\eta(t)$ возьмем случайную функцию, равную $\xi(t)$ в точках разрыва и $*$ в точках непрерывности ξ.

Положим

$$\xi^0(t)=\int_0^t z(s, \xi(s-))\,d\xi(s)-\int_0^t G(s, \xi(s); z(s, \xi(s)))\,ds;$$

имеем: $\psi(t)=F(t, \xi^0(t), \xi^1(t), \ldots, \xi^r(t))$, где $F(t, x^0, x^1, \ldots, x^r)=e^{x^0}f(t, x^1, \ldots, x^r)$. Выписываем соответствующие функции g^k, компенсаторы $\tilde{\xi}^k(t)$ и бикомпенсаторы их непрерывных частей:

$$g^0(t, \omega, y)=\xi^0(t-)+z(t, \xi(t-))(y-\xi(t-)),$$
$$g^i(t, \omega, y)=y^i, \qquad 1\leqslant i\leqslant r,$$
$$g^k(t, \omega, *)=\xi^k(t-), \qquad 0\leqslant k\leqslant r;$$
$$\tilde{\xi}^0(t)=\int_0^t [z(s, \xi(s))\,b(s, \xi(s))-G(s, \xi(s); z(s, \xi(s)))]\,ds,$$

$$\widetilde{\xi^i}(t) = x_0^i + \int_0^t b^i(s, \xi(s))\,ds, \quad 1 \leqslant i \leqslant r;$$

$$\langle \xi^{c0}, \xi^{c0} \rangle (t) = \int_0^t \sum_{i,j} a^{ij}(s, \xi(s))\, z_i(s, \xi(s))\, z_j(s, \xi(s))\,ds,$$

$$\langle \xi^{c0}, \xi^{ci} \rangle (t) = \int_0^t \sum_j a^{ij}(s, \xi(s))\, z_j(s, \xi(s))\,ds,$$

$$\langle \xi^{ci}, \xi^{cj} \rangle (t) = \int_0^t a^{ij}(s, \xi(s))\,ds, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant r.$$

Применяем формулу (1.2.5):

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(t) = f(0, x_0) + \int_0^t e^{\xi^0(s)} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial s}(s, \xi(s)) &+ \\
+ f(s, \xi(s))\,[z(s, \xi(s))\, b(s, \xi(s)) - G(s, \xi(s); z(s, \xi(s)))] &+ \\
+ \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, \xi(s))\, b^i(s, \xi(s)) &+ \\
+ \frac{1}{2} f(s, \xi(s)) \sum_{i,j=1}^{r} a^{ij}(s, \xi(s))\, z_i(s, \xi(s))\, z_j(s, \xi(s)) &+ \\
+ \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, \xi(s))\; a^{ij}(s, \xi(s))\; z_j(s, \xi(s)) &+ \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(s, \xi(s))\, a^{ij}(s, \xi(s)) &+ \\
+ \int_{R^r} [e^{z(s, \xi(s))(y - \xi(s))} f(s, y) &- \\
- f(s, \xi(s)) - f(s, \xi(s)) \cdot z(s, \xi(s))\,(y - \xi(s)) &- \\
- \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, \xi(s))\,(y^i - \xi^i(s))]\, \lambda_{s, \xi(s)}(dy) \Big\}\, ds&.
\end{aligned}$$

Здесь всюду $\xi(s-)$ заменено на $\xi(s)$, потому что множество точек разрыва имеет лебегову меру 0. Последний интеграл в фигурных скобках переписывается в виде

$$\int_{R^r} [f(s,\ y)-f(s,\ \xi(s))-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial x^i}(s,\ \xi(s))(y^i-\xi^i(s))]\times$$
$$\times e^{z(s,\ \xi(s))(y-\xi(s))}\lambda_{s,\ \xi(s)}(dy)+$$
$$+f(s,\ \xi(s))\cdot\int_{R^r}[e^{z(s,\ \xi(s))(y-\xi(s))}-1-$$
$$-z(s,\ \xi(s))(y-\xi(s))]\lambda_{s,\ \xi(s)}(dy)+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial x^i}(s,\ \xi(s))\cdot\int_{R^r}(y^i-\xi^i(s))\times$$
$$\times[e^{z(s,\ \xi(s))(y-\xi(s))}-1]\lambda_{s,\xi(s)}(dy).$$

Коэффициенты при $f(s,\ \xi(s))$ и $\frac{\partial f}{\partial x^i}(s,\ \xi(s))$ равны, соответственно, $G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))-z(s,\ \xi(s))\,b(s,\ \xi(s))-$ $-\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{r}a^{ij}(s,\ \xi(s))\,z_i(s,\ \xi(s))\,z_j(s,\ \xi(s))$ и $\frac{\partial G}{\partial x^i}(s,\ \xi(s);\ z(s,$ $\xi(s)))-b^i(s,\ \xi(s))-\sum_{j=1}^{r}a^{ij}(s,\ \xi(s))\,z_j(s,\ \xi(s))$. Собирая однородные члены, получаем

$$\tilde{\psi}(t)=f(0,\ x_0)+\int_0^t \pi(0,\ s)\,\mathfrak{A}^z f(s,\ \xi(s))\,ds.$$

Далее, компенсатор $\pi(0,\ t)\ f(0,\ x_0)$ равен $f\ (0,\ x_0)$. В (2.2.12) остается часть, содержащая интеграл. Обозначим этот интеграл $\tilde{\eta}^z(t)$; имеем:

$$\pi(0,\ t)\,\tilde{\eta}^z(t)=\int_0^t \tilde{\eta}^z(s)\,d\pi(0,\ s)+\int_0^t \pi(0,\ s)\,d\tilde{\eta}^z(s).$$

Компенсатор этого выражения равен

$$\int_0^t \tilde{\eta}^z(s)\,d\tilde{\pi}(0,\ s)+\int_0^t \pi(0,\ s)\,d\tilde{\eta}^z(s)=$$
$$=\int_0^t \pi(0,\ s)\,\mathfrak{A}^z f(s,\ \xi(s))\,ds.$$

Окончательно получаем, что компенсатор выражения (2.2.12) равен 0, что доказывает наше утверждение.

Теперь выражение (2.2.8) для компенсатора $\xi^i(t)$ относительно вероятности P^z_{0,x_0} получаем, беря $f(t, x)=x^i$, а (2.2.9) — беря $f(t, x)=x^i x^j$ и пользуясь формулой (1.2.3).

Заметим, что если мы введем $\pi(t_0, t)$ очевидным образом, и для $t_0 \in [0, T]$, $x \in R^r$ определим меры $\mathsf{P}^z_{t_0, x}$ на $\mathcal{F}_{t_0 T}$: $\mathsf{P}^z_{t_0, x}(A)=\mathsf{M}_{t_0, x}(A;\ \pi(t_0, T))$, то $(\xi(t), \mathsf{P}^z_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, окажется опять марковским процессом, в случае непрерывного времени — локально безгранично делимым процессом, но уже с другими характеристиками. При этом нужные нам результаты можно было бы достаточно легко извлечь из результатов Григелиониса [1], Комацу [1], касающихся плотностей распределений в пространстве функций одних локально безгранично делимых процессов относительно других. Мы этого не делаем, во-первых, потому, что эти результаты так или иначе основываются на обобщенной формуле Ито; во-вторых, для того, чтобы мы могли применять один и тот же метод в этом случае и далее, в § 2.4, где получающийся после соответствующего преобразования процесс уже не оказывается марковским.

3. Вероятностная мера P^z_{0, x_0} абсолютно непрерывна относительно P_{0, x_0} с положительной плотностью $\pi(0, T)$, поэтому имеет место и обратная абсолютная непрерывность, и

$$\mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \varphi)<\delta\}=\mathsf{M}^z_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \varphi)<\delta;\quad \pi(0, T)^{-1}\}. \tag{2.2.13}$$

Возьмем в качестве $z(t, x)$ ту функцию, которая указана в формулировке теоремы, и оценим $\mathsf{P}^z_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \varphi)<\delta\} \geqslant$ $\geqslant 1-\mathsf{P}^z_{0, x_0}\{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T}|\xi(t)-\varphi(t)| \geqslant \delta'\}$. При указанном выборе $z(t, x)$ компенсатор $\tilde{\xi}^z(t)$ оказывается равным $\varphi(t)$, и неравенство Колмогорова дает нам:

$$\mathsf{P}^z_{0, x_0}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}|\xi(t)-\varphi(t)| \geqslant \delta'\} \leqslant$$

$$\leqslant (\delta')^{-2}\mathsf{M}^z_{0, x_0}\sum_i \langle\xi^i, \xi^i\rangle^z(T)=$$

$$=(\delta')^{-2}\mathsf{M}^z_{0, x_0}\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau}\sum_i \frac{\partial^2 G}{\partial z_i^2}(t, \xi(t); z(t, \xi(t)))\cdot\tau \leqslant$$

$$\leqslant (\delta')^{-2}\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} D(t)\cdot\tau=\frac{1}{4};$$

то же выполняется и для непрерывного случая, с заменой суммы по t на интеграл. Итак, $\mathsf{P}^z_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi,\ \varphi)<\delta'\}\geqslant 3/4$.

Чтобы оценить снизу плотность $\pi(0,\ T)^{-1}$ хотя бы на части области интегрирования, также воспользуемся неравенством Колмогорова. Положим $\zeta(t)=\sum\limits_{s=k\tau=0}^{t-\tau} z(s,\ \xi(s))\times(\xi(s+\tau)-\xi(s))$ или, в непрерывном случае, $\zeta(t)=\int\limits_0^t z(s,\ \xi(s-))\,d\xi(s)$. Имеем:

$$\mathsf{P}^z_{0,\,x_0}\{\zeta(T)-\tilde{\zeta}^z(T)\leqslant-\varepsilon\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}^z_{0,\,x_0}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\zeta(t)-\tilde{\zeta}^z(t)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\varepsilon^{-2}\mathsf{M}^z_{0,\,x_0}\langle\zeta,\ \zeta\rangle^z(T). \tag{2.2.14}$$

Здесь компенсатор и квадратичный компенсатор относительно $\mathsf{P}^z_{0,\,x_0}$ задаются формулами

$$\tilde{\zeta}^z(t)=\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau} z(s,\ \xi(s))\,\nabla_z G(s,\ \xi(s);\ z(s,\xi(s)))\cdot\tau,$$
$$\langle\zeta,\ \zeta\rangle^z(t)=$$
$$=\sum_{s=k\tau=0}^{t-\tau}\sum_{i,\,j}\frac{\partial^2 G}{\partial z_i\,\partial z_j}(s,\xi(s);z(s,\xi(s)))\,z_i(s,\xi(s))\,z_j(s,\xi(s))\cdot\tau,$$

соответственно, в непрерывном случае

$$\tilde{\zeta}^z(t)=\int_0^t z(s,\ \xi(s))\,\nabla_z G(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\,ds,$$
$$\langle\zeta,\ \zeta\rangle^z(t)=$$
$$=\int_0^t\sum_{i,\,j}\frac{\partial^2 G}{\partial z_i\,\partial z_j}(s,\ \xi(s);\ z(s,\ \xi(s)))\,z_i(s,\ \xi(s))\,z_j(s,\ \xi(s))\,ds.$$

Если мы выберем $\varepsilon=2\left(\sum\limits_{t=k\tau=0}^{T-\tau} ZDZ(t)\cdot\tau\right)^{1/2}$ (в непрерывном случае — то же самое, но с интегралом), то вероятность (2.2.14) не превосходит $1/4$. Значит, с $\mathsf{P}^z_{0,\,x}$-вероятностью не менее 3/4

$$\pi(0, T)^{-1} > \exp\Big\{\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} z(t, \xi(t)) \nabla_z G(t, \xi(t); z(t, \xi(t)))\cdot\tau - \\ - \sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} G(t, \xi(t); z(t, \xi(t)))\cdot\tau - \varepsilon\Big\} \quad (2.2.15)$$

(или $\pi(0, T)^{-1}$ больше соответствующего выражения с интегралами). Пересечение двух событий вероятности не менее 3/4 имеет вероятность не менее 1/2, т. е. оценка (2.2.15) или ее непрерывный вариант имеют место на части области интегрирования в (2.2.13), имеющей P^z_{0, x_0}-вероятность не менее 1/2.

Но $z(t, \xi(t)) \nabla_z G(t, \xi(t); z(t, \xi(t))) - G(t, \xi(t); z(t, \xi(t))) = H(t, \xi(t); (\varphi(t+\tau) - \varphi(t))/\tau)$ или, в непрерывном случае, $H(t, \xi(t); \dot\varphi(t))$; учитывая (2.2.4), получаем (2.2.5), (2.2.5′). $\square$

§ 2.3. Вывод верхней оценки для вероятности прохождения вдали от множеств $\Phi_{x_0; [0, T]}(i)$, $\tilde\Phi_{x_0; [0, T]}(i)$

1.—Теорема 2.3.1.—2. Теорема 2.3.2 и замечание к теоремам.

1. Теорема 2.3.1. *Пусть* $(\xi(t), \mathsf{P}_{t, x})$ — *марковский процесс одного из двух классов, введенных в* § 2.1; *пусть соответствующая кумулянта удовлетворяет условию* **A**. *Пусть* δ' *и* A — *произвольные положительные числа*; $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ — *разбиение отрезка от* 0 *до* T (*в случае дискретного времени* t_i *кратны* τ), $\Delta t_{\min} = \min_m (t_{m+1} - t_m)$, $\Delta t_{\max} = \max_m (t_{m+1} - t_m)$; $z(1), \ldots, z(k)$ — r-*мерные векторы, принадлежащие* Z; $d(1), \ldots, d(k)$ — *числа, такие что* $d(j) \geqslant \overline{G}(z(j))$; $U_0 = \{u: z(j)u < d(j), 1 \leqslant j \leqslant k\}$; N — *натуральное число. Пусть числа* $\varepsilon_1 \in [0, 1)$, $\varepsilon_2 > 0$ *таковы, что при всех* s, $t \in [0, T]$, x, $y \in R^r$, $|t - s| < \Delta t_{\max}$, $|x - y| \leqslant 2\delta'$, *и всех* z

$$G(t, y; (1-\varepsilon_1) z) \leqslant (1-\varepsilon_1) G(s, x; z) + \varepsilon_1 A; \quad (2.3.1)$$

при всех $t \in [0, T)$, $x \in R^r$ *существуют такие* $z\{1\}, \ldots, z\{N\} \in Z$ (*зависящие от* t, x), *что*

$$\sup_{u \in U_0} [H(t, x; u) - \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [z\{j\} u - G(t, x; z\{j\})]] \leqslant \varepsilon_2. \quad (2.3.2)$$

Тогда для любых $x_0 \in R^r$, $i \geqslant 0$, $\delta \geqslant 3\delta'$, $\delta' \geqslant \Delta t_{\max} \times \sup\{|u| : u \in U_0\}$

$$\mathsf{P}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi,\ \Phi_{x_0;\,[0,\,T]}(i)) \geqslant \delta\} \leqslant \leqslant 2n \sum_{j=1}^{k} \exp\{\Delta t_{\min}[\overline{G}(z(j)) - d(j)]\} + + N^n \exp\{-i + i\cdot\varepsilon_1(2-\varepsilon_1) + T(A\varepsilon_1(2-\varepsilon_1) + \varepsilon_2(1-\varepsilon_1))\}. \tag{2.3.3}$$

Заметим, что максимум в формуле (2.3.2) — это многогранник, описанный снизу около графика функции H; условие (2.3.1) в силу леммы 1.1.2 равносильно

$$\sup_{\substack{|t-s| < \Delta t_{\max} \\ |x-y| \leqslant 2\delta' \\ H(s,\,x;\,u) < \infty}} \frac{H(t,\ y;\ u) - H(s,\ x;\ u)}{A + H(s,\ x;\ u)} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}. \tag{2.3.4}$$

Доказательство. Введем события

$$A(m) = \{\xi(t_{m+1}) - \xi(t_m) \in (t_{m+1} - t_m)\,U_0,\ \sup_{t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}} |\xi(t) - \xi(t_m)| \leqslant 2\delta'\}, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Пусть l — случайная ломаная, соединяющая точки $(t_m, \xi(t_m))$, $m = 0, 1, \ldots, n$. Если выполнены все события $A(m)$, то $\rho_{0,\,T}(\xi,\ l) < 3\delta' \leqslant \delta$, и поэтому

$$\mathsf{P}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi,\ \Phi_{x_0;\,[0,\,T]}(i)) \geqslant \delta\} \leqslant \leqslant \mathsf{P}_{0,\,x_0}\left(\bigcup_{m=0}^{n-1} \overline{A(m)}\right) + \mathsf{P}_{0,\,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1} A(m) \cap \{l \notin \Phi_{x_0;\,[0,\,T]}(i)\}\right). \tag{2.3.5}$$

Первое слагаемое в (2.3.5) не превосходит суммы вероятностей событий $A(m)$; оценим их. Для этого воспользуемся следующим неравенством, справедливым для непрерывных справа марковских процессов в метрических пространствах: если Γ — множество, содержащееся целиком в δ'-окрестности точки x, то для $s \leqslant s'$

$$\mathsf{P}_{s,\,x}\{\xi(s') \notin \Gamma \text{ или } \sup_{s \leqslant t \leqslant s'} \rho(\xi(t),\ x) > 2\delta'\} \leqslant \leqslant \mathsf{P}_{s,\,x}\{\xi(s') \notin \Gamma\} + \sup_{\substack{t,\ y \\ s \leqslant t \leqslant s'}} \mathsf{P}_{t,\,y}\{\rho(\xi(s'),\ y) > \delta'\}.$$

Доказательство этого неравенства фактически совпадает с доказательством леммы 6.3 из книги Дынкина [1]. Отсюда, используя марковское свойство и изменяя обозначения ($s=t_m$, $s'=t_{m+1}$, $\Gamma=x+(t_{m+1}-t_m)U_0$), получаем:

$$\mathsf{P}_{0,x_0}(\overline{A(m)})=\mathsf{P}_{0,x_0}\{\xi(t_{m+1})-\xi(t_m)\notin(t_{m+1}-t_m)U_0 \quad \text{или}$$

$$\sup_{t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1}}\rho(\xi(t),\ \xi(t_{m+1}))>2\delta'\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_x \mathsf{P}_{t_m,x}\{\xi(t_{m+1})-x\notin(t_{m+1}-t_m)U_0\}+$$

$$+\sup_{\substack{t,\,y\\ t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1}}}\mathsf{P}_{t,y}\{|\xi(t_{m+1})-y|>(t_{m+1}-t_m)\sup\{|u|:u\in$$

$$\in U_0\}\}\leqslant 2\sup_{\substack{t,\,x\\ t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1}}}\mathsf{P}_{t,x}\{\xi(t_{m+1})-x\notin(t_{m+1}-t_m)U_0\}. \tag{2.3.6}$$

Вероятность в правой части (2.3.6) оценивается при помощи экспоненциального неравенства Чебышёва; она не превосходит

$$\mathsf{P}_{t,x}\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{z(j)(\xi(t_{m+1})-\xi(t))\geqslant d(j)(t_{m+1}-t_m)\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\frac{\mathsf{M}_{t,x}\exp\{z(j)(\xi(t_{m+1})-\xi(t))\}}{\exp\{d(j)(t_{m+1}-t_m)\}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\exp\{(t_{m+1}-t_m)[\bar G(z(j))-d(j)]\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\exp\{\Delta t_{\min}[\bar G(z(j))-d(j)]\}.$$

Итак, вероятность суммы $\overline{A(m)}$ оценивается сверху первым слагаемым в (2.3.3).

Чтобы оценить второе слагаемое в (2.3.5), также воспользуемся экспоненциальным чебышёвским неравенством:

$$\mathsf{P}_{0,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}A(m)\cap\{l\notin\Phi_{x_0;[0,T]}(i)\}\right)=$$

$$=\mathsf{P}_{0,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}A(m)\cap\{I_{0,T}(l)>i\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mathsf{M}_{0,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}A(m);\exp\{(1-\varepsilon_1)^2 I_{0,T}(l)\}\right)}{\exp\{(1-\varepsilon_1)^2 i\}}. \tag{2.3.7}$$

Вспомним, что $I_{0,T}(l)$ — это $\sum\limits_{t=k\tau=0}^{T-\tau} H\left(t,\ l(t);\ \frac{l(t+\tau)-l(t)}{\tau}\right)\cdot\tau$ или $\int\limits_0^T H(t,\ l(t);\ \dot{l}(t))\,dt$. Аргумент t здесь отличается от ближайшего слева t_m меньше, чем на $\Delta t_{\max}$, а если выполнено событие $A(m)$, то $l(t)$ отличается от $\xi(t_m)$ не более, чем на δ'; третий аргумент здесь равен $(\xi(t_{m+1})-\xi(t_m))/(t_{m+1}-t_m)$. В силу (2.3.4) получаем:

$$I_{0,T}(l)\leqslant\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}A\sum_{m=0}^{n-1}(t_{m+1}-t_m)+$$
$$+(1-\varepsilon_1)^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}(t_{m+1}-t_m)\ H\left(t_m,\ \xi(t_m);\ \frac{\xi(t_{m+1})-\xi(t_m)}{t_{m+1}-t_m}\right).$$

Итак, нам нужно оценить

$$\mathsf{M}_{0,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}A(m);\ \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\sum_{m=0}^{n-1}(t_{m+1}-t_m)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times H\left(t_m,\ \xi(t_m);\ \frac{\xi(t_{m+1})-\xi(t_m)}{t_{m+1}-t_m}\right)\right\}\right).$$

Пользуясь марковским свойством относительно моментов t_m, находим, что это математическое ожидание не превосходит

$$\prod_{m=0}^{n-1}\sup_x \mathsf{M}_{t_m,x}\left(A(m);\ \exp\{(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1)\times\right.$$
$$\left.\times H\left(t_m,\ x;\ \frac{\xi(t_{m+1})-x}{t_{m+1}-t_m}\right)\}\right).\qquad(2.3.8)$$

Зафиксируем x и оценим математическое ожидание в (2.3.8), пользуясь сравнением функции $H(t_m,\ x;\ u)$ с приближающим ее снизу многогранником. Раз выполнено событие $A(m)$, то третий аргумент в функции H принадлежит U_0. Имеем:

$$H\left(t_m, x;\ \frac{\xi(t_{m+1})-x}{t_{m+1}-t_m}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant N}\left[z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x)/(t_{m+1}-t_m)-G(t_m, x;\ z\{j\})\right]+$$
$$+\sup_{u\in U_0}\Delta H(t_m,\ x;\ u),$$

где

$$\Delta H(t_m, x; u) = H(t_m, x; u) - \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [z\{j\} u - G(t_m, x; z\{j\})].$$

Поэтому математическое ожидание в (2.3.8) не превосходит

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_{t_m, x}(A(m);\ \exp\{(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1)\times \\
\times \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x)/(t_{m+1}-t_m) - \\
- G(t_m, x; z\{j\})] + \\
+ (t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1) \sup_{u \in U_0} \Delta H(t_m, x; u)\}) \leqslant \\
\leqslant \exp\{(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1)\cdot \sup_{u \in U_0} \Delta H(t_m, x; u)\} \times \\
\times \mathsf{M}_{t_m, x}(A(m);\ \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [\exp\{(1-\varepsilon_1) z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x) - \\
-(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1) G(t_m, x; z\{j\})\}]).
\end{aligned}$$

Далее пользуемся тем, что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{N}$, и получаем, что последнее математическое ожидание оценивается сверху суммой по j от 1 до N слагаемых вида

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_{t_m, x}(A(m);\ \exp\{(1-\varepsilon_1) z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x) - \\
-(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1) G(t_m, x; z\{j\})\}). \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

Мы знаем, что

$$\mathsf{M}_{t_m, x} \exp\{(1-\varepsilon_1) z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x) - \sum_{t=k\tau=t_m}^{t_{m+1}-\tau} G(t, \xi(t); (1-\varepsilon_1) z\{j\})\cdot\tau\} = 1$$

(в непрерывном случае сумма заменяется интегралом от t_m до t_{m+1}). Пользуясь (2.3.1), получаем, что математическое ожидание (2.3.9) не превосходит

$$\mathsf{M}_{t_m, x}(A(m); \exp\{(1-\varepsilon_1) z\{j\}(\xi(t_{m+1})-x) - \sum_{t=k\tau=t_m}^{t_{m+1}-\tau} G(t, \xi(t); (1-\varepsilon_1) z\{j\})\cdot\tau + A(t_{m+1}-t_m)\})$$

Заменяя область интегрирования $A(m)$ на все пространство, получаем, что это выражение не превосходит $\exp\{(t_{m+1}-t_m)\varepsilon_1 A\}$.

Пользуясь неравенством (2.3.2), получаем оценку

$$\mathsf{M}_{t_m,\,x}(A(m);\ \exp\{(t_{m+1}-t_m)(1-\varepsilon_1)\times$$
$$\times H\left(t_m,\ x;\ \frac{\xi(t_{m+1})-x}{t_{m+1}-t_m}\right)\}) \leqslant$$
$$\leqslant N\exp\{(t_{m+1}-t_m)[A\varepsilon_1+\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)]\};$$

выражение (2.3 8) оценивается произведением таких величин, равным $N^n\exp\{T[A\varepsilon_1+\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)]\}$; далее получаем:

$$\mathsf{M}_{0,\,x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1}A(m);\ \exp\{(1-\varepsilon_1)^2 I_{0,\,T}(l)\}\right)\leqslant$$
$$\leqslant N^n\exp\{T(A\varepsilon_1+\varepsilon_2(1-\varepsilon_1))+\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)AT\}=$$
$$=N^n\exp\{T(A\varepsilon_1(2-\varepsilon_1)+\varepsilon_2(1-\varepsilon_1))\},$$

откуда, наконец, используя (2.3.5) и (2.3.7), выводим оценку (2.3.3). □

2. Сейчас мы приведем одно простое обобщение теоремы 2.3.1, которое сделает ее более громоздкой, но более полезной для дальнейших применений.

Пусть $\tilde{G}(t,\ x;\ z)$ — функция от $t\in[0,\ T)$, $x,\ z\in R^r$, измеримая по тройке аргументов, выпуклая вниз и полунепрерывная снизу по третьему аргументу; $\tilde{H}(t,\ x;\ u)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow\tilde{G}(t,\ x;\ z)$ — ее преобразование Лежандра. Обозначим через $\tilde{I}_{0,\,T}(\varphi)$ функционал, определяемый в дискретном случае формулой

$$\tilde{I}_{0,\,T}(\varphi)=\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau}\tilde{H}\left(t,\ \varphi(t);\ \frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}\right)\tau;$$

в случае непрерывного времени для абсолютно непрерывных $\varphi(t)$

$$\tilde{I}_{0,\,T}(\varphi)=\int_0^T\tilde{H}(t,\ \varphi(t);\ \dot{\varphi}(t))\,dt,$$

для остальных φ полагаем $\tilde{I}_{0,\,T}(\varphi)=\infty$. Обозначим через $\tilde{\Phi}_{x;\,[0,\,T]}(i)$ множество функций φ таких, что $\varphi(0)=x$, $\tilde{I}_{0,\,T}(\varphi)\leqslant i$.

Теорема 2.3.2. *Пусть Z_0 — произвольное подмножество множества Z; пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 с заменой условия (2.3.1) условиями:*

$$\tilde{G}(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)\leqslant(1-\varepsilon_1)\tilde{G}(s,\ x;\ z)+\varepsilon_1 A \quad (2.3.10)$$

при всех $s,\ t\in[0,\ T),\ x,\ y\in R^r,\ |t-s|<\Delta t_{\max},\ |x-y|\leqslant 2\delta'$ *и всех* z,

$$G(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)\leqslant\tilde G(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)+\varepsilon_1 A \quad (2.3.11)$$

при всех $t\in[0,\ T),\ y\in R^r$ *и всех* $z\in Z_0$; *а условия* (2.3.2)*—на*

$$\sup_{u\in U_0}\left[\tilde H(t,\ x;\ u)-\max_{1\leqslant j\leqslant N}\left[z\{j\}u-\tilde G(t,\ x;\ z\{j\})\right]\right]\leqslant\varepsilon_2, \quad (2.3.12)$$

где $z\{1\},\ \ldots,\ z\{N\}\in Z_0$ *могут зависеть от* $t,\ x$.

Тогда для любых $x_0\in R^r,\ i\geqslant 0,\ \delta\geqslant 3\delta',\ \delta'\geqslant\Delta t_{\max}\times\sup\{|u|:\ u\in U_0\}$

$$\mathsf{P}_{0,\ x_0}\{\rho_{0,\ T}(\xi,\ \tilde\Phi_{x_0;\ [0,\ T]}(i))\geqslant\delta\}\leqslant$$
$$\leqslant 2n\sum_{j=1}^{k}\exp\{\Delta t_{\min}[\bar G(z(j))-d(j)]\}+$$
$$+N^n\exp\{-i+i\varepsilon_1(2-\varepsilon_1)+T(A\varepsilon_1(3-\varepsilon_1)+\varepsilon_2(1-\varepsilon_1))\}. \quad (2.3.13)$$

Заметим, что условия этой теоремы значительно менее ограничительны, чем условия теоремы 2.3.1, при выполнении которых функция $H(t,\ x;\ u)$ непременно при любых t и x должна быть конечна при одних и тех же значениях u; здесь это условие должно быть выполнено для функции $\tilde H$, и это не накладывает никаких ограничений на рассматриваемый марковский процесс, так как функция $\tilde H$ может выбираться, вообще говоря, совершенно не связанным с процессом образом (конечно, чтобы получить хорошую оценку (2.3.13), нужно, чтобы эта функция была выбрана каким-то разумным образом, но в ее выборе остается много свободы).

Доказательство проводится так же, как и доказательство предыдущей теоремы; вместо неравенства (2.3.4) используется вытекающее из (2.3.10) неравенство

$$\tilde H(t,\ y;\ u)\leqslant\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}A+\frac{1}{1-\varepsilon_1}\tilde H(s,\ x;\ u),$$

а затем вместо (2.3.1)—вытекающее из (2.3.10), (2.3.11) неравенство

$$(1-\varepsilon_1)\tilde G(t_m,\ x;\ z\{j\})\geqslant$$
$$\geqslant G(t,\ \xi(t);\ (1-\varepsilon_1)z\{j\})-2A\varepsilon_1. \quad \square$$

Замечание к теоремам 2.3.1, 2.3.2. Эти теоремы остаются справедливы, если в формулах (2.3.2), (2.3.12) брать верхнюю грань не по U_0, а только по $U_0 \cap \overline{U}$. Используется лемма 2.1.2, в остальном доказательство остается таким же.

§ 2.4. Урезанный функционал действия и оценки, связанные с ним

1. Моменты τ_B, τ_V.— 2. Урезанная кумулянта, урезанный функционал действия, полуметрика $\rho_{0,\, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V}$.— 3. Теорема 2.4.1.— 4. Теорема 2.4.2 и замечание к ней.

1. Пусть $(\xi(t), \mathsf{P}_{t,x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$,— марковский процесс на многообразии X класса $C^{2)}$, либо с дискретным временем, пробегающим значения, кратные τ, либо локально безгранично делимый, с компенсирующим оператором, задаваемым формулой (1.3.1). Отображение ψ мы будем предполагать продолженным за пределы действия карты дважды непрерывно дифференцируемым образом.

Пусть B — открытое подмножество X; V — открытое подмножество $X \times X$, содержащее «диагональ» $\{(x, x)\colon x \in X\}$. Введем следующие марковские моменты: момент $\tau_B = \min\{t \geqslant 0\colon \xi(t) \notin B\}$ первого выхода из B (если $\xi(t)$ вообще не выходит из B, полагаем $\tau_B = \infty$) и момент τ_V первого скачка, не принадлежащего множеству V. А именно, в случае дискретного времени $\tau_V = \min\{t = k\tau > 0\colon (\xi(t-\tau), \xi(t)) \notin V\}$; в случае непрерывного времени $\tau_V = \min\{t > 0\colon (\xi(t-), \xi(t)) \notin V\}$ ($\tau_V = \infty$, если таких t нет).

В этом параграфе мы выведем оценки, аналогичные оценкам § 2.2, 2.3, но не на отрезке времени $[0, T]$, а на $[0, T] \cap [0, \tau_B] \cap [0, \tau_V)$.

2. Зафиксируем некоторую карту ψ, действующую в области W, содержащей все точки x, y, $x \in B$, $(x, y) \in V$.

Определим *урезанную кумулянту* $G_V(t, x; z)$, $0 \leqslant t < T$, $x \in X$, $z \in R^r$: в случае дискретного времени

$$G_V(t, x; z) = \tau^{-1} \ln [\mathsf{M}_{t,x}\{(x, \xi(t+\tau)) \notin V;\ 1\} + \mathsf{M}_{t,x}\{(x, \xi(t+\tau)) \in V;\ \exp\{z(\psi(\xi(t+\tau)) - \psi(x))\}\}];$$

в случае непрерывного времени

$$G_V(t, x; z) = z b_V(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} z_i z_j a^{ij}(t, x) + \int\limits_{\{y:\,(x,y) \in V\}} [\exp\{z(\psi(y) - \psi(x))\} - 1 - z(\psi(y) - \psi(x))]\, \lambda_{t,x}(dy),$$

где $b_V(t, x) = b(t, x) - \int\limits_{\{y:\,(x,y) \notin V\}} [\psi(y) - \psi(x)]\, \lambda_{t,x}(dy)$.

Если $X = R^r$, и мы возьмем вместо V всё $R^r \times R^r$, урезанная кумулянта превращается в кумулянту.

Заметим, что для $x \in B$ значения $b_V(t, x)$, $G_V(t, x; z)$ не зависят от способа, которым продолжено отображение ψ за пределы W.

Через $\overline{G}_V(z)$ будем обозначать неотрицательную выпуклую вниз функцию, такую, что $\overline{G}_V(0) = 0$ и $G_V(t, x; z) \leqslant \leqslant \overline{G}_V(z)$ при всех $t \in [0, T)$, x и z. Мы будем предполагать, что $\overline{G}_V(z) < \infty$ при всех z.

Далее определим функцию $H_V(t, x; u) \leftrightarrow G_V(t, x; z)$ от $t \in [0, T)$, $x \in X$, $u \in R^r$.

Определим *урезанный функционал действия* $I^V_{0,T}(\varphi)$ для функций $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, со значениями в пределах действия данной карты. В случае дискретного времени положим

$$I^V_{0,T}(\varphi) = \sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} H_V\left(t, \varphi(t); \frac{\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t))}{\tau}\right) \cdot \tau;$$

в случае непрерывного времени для абсолютно непрерывных функций

$$I^V_{0,T}(\varphi) = \int_0^T H_V\left(t, \varphi(t); \frac{d}{dt}\psi(\varphi(t))\right) dt,$$

а для остальных $I^V_{0,T}(\varphi) = \infty$.

Заметим, что если значения функции φ лежат в пределах действия двух разных карт, то значение функционала $I^V_{0,T}(\varphi)$, вычисленное по отношению к одной карте, вообще говоря, отлично от такого же значения в другой карте.

Введем следующую полуметрику (зависящую от случайных моментов τ_B, τ_V):

$$\rho_{0,\, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V -}(\varphi, \psi) = \sup_{[0, T] \cap [0, \tau_B] \cap [0, \tau_V)} \rho(\varphi(t), \psi(t)).$$

3. Теорема 2.4.1. *Пусть* $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *— функция, принимающая значения в множестве* B; δ *— положительное число. Пусть в случае дискретного времени при всех* x *из* B *и всех* t, *кратных* τ, $0 \leqslant t < T$, *функция* $H_V(t, x; u)$ *дифференцируема по* u *в точке* $\tau^{-1}(\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t)))$, *и все значения функции* $z(t, x) =$

$= \nabla_u H_V\left(t, x; \dfrac{\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t))}{\tau}\right)$ *принадлежат некоторому ограниченному множеству; в случае непрерывного времени то же пусть выполняется для* $x \in B$ *и почти всех* $t \in [0, T)$ *для значений* $z(t, x) = \nabla_u H_V\left(t, x; \dfrac{d}{dt}(\psi(\varphi(t)))\right)$.

Положим в дискретном случае для $0 \leqslant t < T$

$$D(t) = \sup_{x \in B} \sum_i \frac{\partial^2 G_V}{\partial z_i^2}(t, x; z(t, x)), \tag{2.4.1}$$

$$ZDZ(t) = \sup_{x \in B} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 G_V}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; z(t, x))\, z_i(t, x)\, z_j(t, x), \tag{2.4.2}$$

$$\delta' = 2\left(\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} D(t)\cdot\tau\right)^{1/2}, \tag{2.4.3}$$

$$\Delta H(t) = \sup_{x \in B,\, |\psi(x) - \psi(\varphi(t))| < \delta'} \left[H_V\left(t, x; \frac{\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t))}{\tau}\right) - H_V\left(t, \varphi(t); \frac{\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t))}{\tau}\right)\right]; \tag{2.4.4}$$

в непрерывном случае — то же, но с заменой в (2.4.4) $(\psi(\varphi(t+\tau)) - \psi(\varphi(t)))/\tau$ *на* $\dfrac{d}{dt}\psi(\varphi(t))$, *а суммы в* (2.4.3) — *на интеграл*:

$$\delta' = 2\left(\int_0^T D(t)\, dt\right)^{1/2}. \tag{2.4.3'}$$

Пусть для любой пары точек x, y *из* B *из того, что* $\psi(x)$ *и* $\psi(y)$ *находятся на расстоянии меньшем* δ', *вытекает* $\rho(x, y) < \delta$.

Тогда для $x_0 = \varphi(0)$

$$\mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_{V^-}}(\xi, \varphi) < \delta\} \geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-I_{0, T}^V(\varphi) - 2\left(\sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} ZDZ(t)\cdot\tau\right)^{1/2} - \sum_{t=k\tau=0}^{T-\tau} \Delta H(t)\cdot\tau\right\} \tag{2.4.5}$$

в д скретном случае; в непрерывном случае

$$\mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_{V^-}}(\xi, \varphi) < \delta\} \geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-I_{0, T}^V(\varphi) - 2\left(\int_0^T ZDZ(t)\, dt\right)^{1/2} - \int_0^T \Delta H(t)\, dt\right\}. \tag{2.4.5'}$$

Из (2.4.5), (2.4.5′) вытекает, что $\mathsf{P}_{0,x_0}\{\rho_{0,T}(\xi, \varphi) < \delta\}$ оценивается снизу тем же выражением, из которого вычтены $\mathsf{P}_{0,x_0}\{\tau_B \leqslant T\}$ и $\mathsf{P}_{0,x_0}\{\tau_V \leqslant T\}$.

Доказательство. Введем урезанное преобразование Крамера. Определим случайную функцию $\xi_V(t)$, остановив $\xi(t)$ в последний момент перед первым скачком, не принадлежащим V: в случае дискретного времени

$$\xi_V(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{при } 0 \leqslant t < \tau_V, \\ \xi(\tau_V - \tau) & \text{при } \tau_V \leqslant t \leqslant T; \end{cases}$$

в случае непрерывного времени $\tau_V - \tau$ заменяется на τ_V-.

Для гладкой функции $f(t, x)$ компенсатор $f(t, \xi_V(t))$ относительно вероятности P_{0,x_0} равен

$$\widetilde{f(t, \xi_V(t))} = f(0, x_0) + \int_0^{t \wedge \tau_V} \mathfrak{A}_V f(s, \xi_V(s))\, ds,$$

$$\mathfrak{A}_V f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \nabla_x f(t, x) \cdot b_V(t, x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(t, x) + \int_{\{y:\,(x,y) \in V\}} [f(t, y) - \\ - f(t, x) - \nabla_x f(t, x)(\psi(y) - \psi(x))]\, \lambda_{t,x}(dy)$$

(в случае непрерывного времени; в случае дискретного времени интеграл заменяется суммой от 0 до $t \wedge \tau_V - \tau$ и соответственно меняется выражение для $\mathfrak{A}_V f$).

Произвольной измеримой ограниченной функции $z(t, x)$, $0 \leqslant t < T$, $x \in B$, со значениями в R^r поставим в соответствие функционал $\pi_{B,V}(0, t)$ от реализаций случайного процесса $\xi(t)$: в дискретном случае

$$\pi_{B,V}(0, t) = \\ = \exp\left\{\sum_{s=k\tau=0}^{t \wedge \tau_B \wedge \tau_V - \tau} z(s, \xi(s))(\psi(\xi_V(s+\tau)) - \psi(\xi_V(s))) - \right. \\ \left. - \sum_{s=k\tau=0}^{t \wedge \tau_B \wedge \tau_V - \tau} G_V(s, \xi(s); z(s, \xi(s))) \cdot \tau \right\};$$

в непрерывном случае

$$\pi_{B,V}(0, t) = \\ = \exp\left\{\int_0^t \chi_{[0,\, \tau_B \wedge \tau_V]}(s)\, z(s, \xi(s-))\, d\psi(\xi_V(s)) - \right. \\ \left. - \int_0^{t \wedge \tau_B \wedge \tau_V} G_V(s, \xi(s); z(s, \xi(s)))\, ds \right\}.$$

Проверяется, что $\pi_{B,V}(0, t)$ — мартингал относительно каждой из вероятностей P_{0,x_0} и семейства σ-алгебр $\mathcal{F}_{0t}$. В случае дискретного времени это проверяется непосредственной выкладкой; в случае непрерывного времени вычисляем меру Леви, соответствующую скачкам процесса $\xi_V(t \wedge \tau_B)$:

$$L(A) = \int_0^{T \wedge \tau_B \wedge \tau_V} \lambda_{t,\xi(t)}\{y\colon (t, y) \in A,\ (\xi(t), y) \in V\}\,dt,$$

компенсатор $\psi(\xi_V(t \wedge \tau_B))$, равный

$$\psi(x_0) + \int_0^{t \wedge \tau_B \wedge \tau_V} b_V(s, \xi(s))\,ds,$$

и бикомпенсаторы непрерывных частей случайных функций $\psi^i(\xi_V(t \wedge \tau_B))$, $\psi^j(\xi_V(t \wedge \tau_B))$:

$$\int_0^{t \wedge \tau_B \wedge \tau_V} a^{ij}(s, \xi(s))\,ds,$$

и применяем формулу (1.2.5).

Получаем, что $\mathsf{M}_{0,x_0}\pi_{B,V}(0, T) = 1$. *Урезанное преобразование Крамера*, соответствующее данной функции $z(t, x)$, состоит по определению в замене вероятностной меры P_{0,x_0} мерой P^z_{0,x_0}, определяемой равенством $\mathsf{P}^z_{0,x_0}(A) = \mathsf{M}_{0,x_0}(A;\ \pi_{B,V}(0, T))$.

Для произвольной гладкой функции $f(t, x)$ вычисляется компенсатор $f(t, \xi_V(t))$ относительно вероятностной меры P^z_{0,x_0}.

Использованное в § 2.2 обобщенное преобразование Крамера превращало $\xi(t) - \varphi(t)$ в мартингал; урезанное преобразование при том выборе $z(t, x)$, который указан в условии теоремы 2.4.1, превращает в мартингал случайную функцию $\psi(\xi_V(t \wedge \tau_B)) - \psi(\varphi(t \wedge \tau_B \wedge \tau_V))$.

Далее доказательство следует доказательству теоремы 2.2.1; получается оценка для

$$\mathsf{P}_{0,x_0}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\psi(\xi_V(t \wedge \tau_B)) - \psi(\varphi(t \wedge \tau_B \wedge \tau_V))| < \delta'\right\}.$$

Но обе точки $\xi_V(t \wedge \tau_B)$ и $\varphi(t \wedge \tau_B \wedge \tau_V)$ лежат в области W действия нашей карты ψ, и из того, что евклидово расстояние между $\psi(\xi_V(t \wedge \tau_B))$ и $\psi(\varphi(t \wedge \tau_B \wedge \tau_V))$ меньше δ', вытекает, что расстояние на многообразии между $\xi_V(t \wedge \tau_B)$

и $\varphi(t\wedge\tau_B\wedge\tau_V)$ меньше δ. Наконец, при $t\in[0,\tau_B]\cap[0,\tau_V)$ имеем $\xi_V(t\wedge\tau_B)=\xi(t)$, $\varphi(t\wedge\tau_B\wedge\tau_V)=\varphi(t)$. □

4. Пусть теперь $\tilde G(t,\ x;\ z)$ — функция от $t\in[0,\ T)$, $x\in W$, $z\in R^r$, измеримая по тройке аргументов, выпуклая вниз и полунепрерывная снизу по третьему аргументу; $\tilde H(t,\ x;\ u)$ — ее преобразование Лежандра. Для функции $\varphi(t)$, $t\in[T_1,\ T_2]\subseteq[0,\ T]$, со значениями в области действия выбранной карты обозначим через $\tilde I_{T_1,T_2}(\varphi)$ функционал, определяемый в дискретном случае (для T_1 и T_2, кратных τ) формулой

$$\tilde I_{T_1,T_2}(\varphi)=\sum_{t=k\tau=T_1}^{T_2-\tau}\tilde H\left(t,\ \varphi(t);\ \frac{\psi(\varphi(t+\tau))-\psi(\varphi(t))}{\tau}\right)\cdot\tau;$$

в случае непрерывного времени для абсолютно непрерывных $\varphi(t)$

$$\tilde I_{T_1,T_2}(\varphi)=\int_{T_1}^{T_2}\tilde H\left(t,\ \varphi(t);\ \frac{d}{dt}\psi(\varphi(t))\right)dt,$$

для остальных φ полагаем $\tilde I_{T_1,T_2}(\varphi)=\infty$. Обозначим для $[T_1,\ T_2]\subseteq[0,\ T]$, $x\in B$ и $i\geqslant 0$ через $\tilde\Phi_{x;\,[T_1,T_2]}(i)$ множество функций $\varphi(t)$ на отрезке от T_1 до T_2 таких, что $\varphi(T_1)=x$, $\tilde I_{T_1,T_2}(\varphi)\leqslant i$.

Теорема 2.4.2. *Пусть δ-окрестность $B_{+\delta}$ множества B лежит в пределах действия данной карты. Пусть δ' — произвольное положительное число, меньшее, чем $\delta/3$; $A>0$; $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ — разбиение отрезка от 0 до T (в случае дискретного времени t_i кратны τ), $\Delta t_{\min}=\min\limits_m(t_{m+1}-t_m)$, $\Delta t_{\max}=\max\limits_m(t_{m+1}-t_m)$; $z(1),\ldots,z(k)\in R^r$; $d(1),\ \ldots,\ d(k)$ — числа такие, что $d(j)\geqslant\bar G_V(z(j))$; $U_0=\{u:\ z(j)u<d(j),\ 1\leqslant j\leqslant k\}$; N — натуральное число. Пусть в пределах действия данной карты из $|\psi(y)-\psi(x)|<\Delta t_{\max}\sup\{|u|:\ u\in U_0\}$ вытекает $\rho(x,\ y)<\delta'$. Пусть числа $\varepsilon_1\in[0,\ 1)$, $\varepsilon_2>0$ таковы, что при всех s, $t\in[0,\ T)$, x, $y\in B_{+\delta}$, $|t-s|<\Delta t_{\max}$, $\rho(x,\ y)\leqslant 2\delta'$ и всех z справедливы условия:*

$$\tilde G(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)\leqslant(1-\varepsilon_1)\tilde G(s,\ x;\ z)+\varepsilon_1 A;$$

при всех $t\in[0,\ T]$, $y\in B_{+\delta}$, $z\in Z_0$ выполнено неравенство

$$G_V(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)\leqslant\tilde G(t,\ y;\ (1-\varepsilon_1)z)+\varepsilon_1 A;$$

при всех $s \in [0, T)$, $x \in B_{+\delta}$ *существуют* $z\{1\}, \ldots, z\{N\} \in Z_0$ *такие, что*

$$\sup_{u \in U_0} [\tilde{H}(s, x; u) - \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [z\{j\}u - \tilde{G}(s, x; z\{j\})]] \leqslant \varepsilon_2.$$

Тогда для любых $x_0 \in B$, $i \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V -}(\xi, \tilde{\Phi}_{x_0; [0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V]}(i)) \geqslant \delta\} \leqslant \\ \leqslant 2n \sum_{j=1}^{k} \exp\{\Delta t_{\min} [\overline{G}_V(z(j)) - d(j)]\} + \\ + N^n \exp\{-i + i\varepsilon_1(2 - \varepsilon_1) + \\ + (1 - \varepsilon_1)^2 \Delta t_{\max} \cdot \sup_{t, x} \tilde{H}(t, x; 0) + \\ + T(A\varepsilon_1(3 - \varepsilon_1) + \varepsilon_2(1 - \varepsilon_1))\}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Из оценки (2.4.6) вытекает, что для вероятности $\mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi, \tilde{\Phi}_{x_0; [0, T]}(i)) \geqslant \delta\}$ имеет место такая же оценка с добавкой $\mathsf{P}_{0, x_0}\{\tau_B \leqslant T\} + \mathsf{P}_{0, x_0}\{\tau_V \leqslant T\}$ в правой части.

Доказательство. Пусть m_0 — наибольший из номеров m таких, что $t_m < \tau_B \wedge \tau_V$. Определим случайную функцию $l(t)$: на отрезках от t_m до t_{m+1}, $m < m_0$, определяем ее так, чтобы $l(t_m) = \xi(t_m)$, $l(t_{m+1}) = \xi(t_{m+1})$ и чтобы на карте она изображалась прямой; а при $t_{m_0} \leqslant t \leqslant \leqslant T \wedge \tau_B \wedge \tau_V$ положим $l(t) = \xi(t_{m_0})$. Вводим события

$$\begin{aligned} A(m) = \{\psi(\xi_V(t_{m+1} \wedge \tau_B)) - \\ - \psi(\xi_V(t_m \wedge \tau_B)) \in (t_{m+1} - t_m) U_0, \\ \sup_{t_{m+1} \leqslant t \leqslant t_m} \rho(\xi_V(t \wedge \tau_B), \xi_V(t_m \wedge \tau_B)) \leqslant 2\delta'\}, \\ m = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Если выполнены все события $A(m)$, то $\rho_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V -}(\xi, l) < \delta$; поэтому

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{0, x_0}\{\rho_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V -}(\xi, \tilde{\Phi}_{x_0; [0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V]}(i)) \geqslant \delta\} \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}_{0, x_0}\left(\bigcup_{m=0}^{n-1} \overline{A(m)}\right) + \\ + \mathsf{P}_{0, x_0}\left(\bigcap_{m=0}^{n-1} A(m) \cap \{\tilde{I}_{0, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V}(l) > i\}\right). \end{aligned}$$

Пользуемся аддитивностью функционала $\tilde{I}$:

$$\tilde{I}_{0,\, T \wedge \tau_B \wedge \tau_V}(l) \leqslant \leqslant \sum_{m=0}^{m_0-1} \tilde{I}_{t_m,\, t_{m+1}}(l) + \Delta t_{\max} \cdot \sup_{t,\, x} \tilde{H}(t, x; 0).$$

Далее доказательство, как и доказательство теоремы 2.3.2, повторяет доказательство теоремы 2.3.1. □

Замечание. Определим расстояние $\rho_{\{0,\, T\}}$ между функциями на отрезке от 0 до T: $\rho_{\{0,\, T\}}(\varphi, \psi) = \rho_{0,\, T}(\varphi, \psi)$, если $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(T) = \psi(T)$, и $\rho_{\{0,\, T\}}(\varphi, \psi) = \infty$ в противном случае. Тогда при условиях теоремы 2.4.2 $\mathbf{P}_{0,\, x_0}\{\rho_{\{0,\, T\}}(\xi, \Phi_{x_0;\ [0,\, T]}(i)) \geqslant \delta\}$ оценивается сверху правой частью (2.4.6) плюс $\mathbf{P}_{0,\, x_0}\{\tau_B \leqslant T\} + \mathbf{P}_{0,\, x_0}\{\tau_V \leqslant T\}$.

Это утверждение вытекает из способа доказательства, состоящего в приближении траектории ломаной $l(t)$, совпадающей с ней при $t = t_0 = 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n = T$.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИОНАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 3.1. Свойства функционала $S_{T_1, T_2}(\varphi)$

1. Требования **А**, **Б**, **В**.—2. Теорема 3.1.1.—3. Теорема 3.1.2.

1. Прежде чем вывести из оценок предыдущей главы грубые предельные теоремы о больших уклонениях для семейств марковских процессов, изучим свойства функционала, задаваемого для абсолютно непрерывных функций формулой

$$S_{T_1, T_2}(\varphi) = \int_{T_1}^{T_2} H_0(t, \varphi(t); \dot{\varphi}(t))\, dt \qquad (3.1.1)$$

(для прочих функций S_{T_1, T_2} равно $+\infty$), где $H_0(t, x; u)$ — функция от $t \in [0, T]$, x, $u \in R^r$, полунепрерывная снизу и выпуклая вниз по третьему аргументу. Функционалы такого вида будут в следующем параграфе выступать в качестве нормированных функционалов действия, задающих асимптотику функционалов действия для семейств процессов, зависящих от параметра. Положим $\Phi_{x; [T_1, T_2]}(s) = \{\varphi\colon \varphi(T_1) = x,\ S_{T_1, T_2}(\varphi) \leqslant s\}$.

Рассмотрим преобразование Лежандра $G_0(t, x; z) \leftrightarrow H_0(t, x; u)$; введем ограничения на функции $G_0 \leftrightarrow H_0$:

А. $G_0(t, x; z) \leqslant \overline{G}_0(z)$ при всех t, x, z, где $\overline{G}_0$ — выпуклая вниз неотрицательная функция, конечная при всех значениях z и такая, что $G_0(t, x; 0) \equiv \overline{G}_0(0) = 0$ (сравните с условием **А** из § 2.1).

Для функции H_0 это условие означает, что $\underline{H}_0(u) \leqslant H_0(t, x; u)$ при всех t, x, u, где $\underline{H}_0(u) \leftrightarrow \overline{G}_0(z)$; условие конечности $\overline{G}_0$ при всех z превращается в условие $\lim\limits_{|u| \to \infty} \underline{H}_0(u)/|u| = \infty$, а из условия $\overline{G}_0(0) = 0$ вытекает $\underline{H}_0(u) \geqslant 0$.

Б. $H_0(t, x; u) < \infty$ для тех же u, для которых конечно $\underline{H}_0(u)$;

В. $\Delta H_0(h,\ \delta') = \sup\limits_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ |x-y|\leqslant\delta'\\ H_0(t,\,x;\,u)<\infty}} \dfrac{H_0(s,\,y;\,u)-H_0(t,\,x;\,u)}{1+H_0(t,\,x;\,u)} \to 0$

при $h\downarrow 0$, $\delta'\downarrow 0$.

Мы не будем требовать, чтобы функция G_0 (как кумулянта G в § 2.1) выражалась через интегралы от экспонент по некоторой мере; функции G_0 и H_0 могут быть не гладкими. Однако из условия **В** вытекает непрерывность функции $H_0(t,\ x;\ u)$ при u, лежащих внутри множества $\{u:\ H_0(t,\ x;\ u)<\infty\}$, и непрерывность $G_0(t,\ x;\ z)$ при всех значениях аргументов.

2. Будем говорить, что функции φ из некоторого множества *равностепенно абсолютно непрерывны*, если для любого $\delta>0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $\sum\limits_i |\varphi(t_i)-\varphi(s_i)|<\delta$ для любой функции из рассматриваемого множества, как только сумма длин непересекающихся полуинтервалов $[s_i,\ t_i)$ (в конечном числе) меньше ε. Легко видеть, что для равностепенной абсолютной непрерывности функций из некоторого множества необходимы и достаточны абсолютная непрерывность функций и равномерная интегрируемость их производных.

Теорема 3.1.1. *Пусть функции G_0, H_0 удовлетворяют условиям* **А—В**. *Тогда*

а) *функции из множества* $\bigcup\limits_{[T_1,\ T_2]\subseteq[0,\ T]}\ \bigcup\limits_x \Phi_{x;\,[T_1,\,T_2]}(s)$ *равностепенно абсолютно непрерывны*;

б) *функционал $S_{T_1,\,T_2}(\varphi)$ полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости, т. е. из $\varphi_n\to\varphi$ вытекает* $\varliminf\limits_{n\to\infty} S_{T_1,\,T_2}(\varphi_n)\geqslant S_{T_1,\,T_2}(\varphi)$;

в) *для любого компакта K множество* $\bigcup\limits_{x\in K}\Phi_{x;\,[T_1,\,T_2]}(s)=\{\varphi:\ \varphi(T_1)\in K,\ S_{T_1,\,T_2}(\varphi)\leqslant s\}$ *компактно в смысле равномерной сходимости.*

Доказательство. Утверждение а) следует из того, что для φ из указанного множества $\int\limits_{T_1}^{T_2}\underline{H}_0(\dot\varphi(t))\,dt\leqslant s<\infty$, причем $\underline{H}_0(u)/|u|\to\infty$ при $|u|\to\infty$.

Докажем б). Достаточно рассмотреть случай, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{T_1,\,T_2}(\varphi_n)=s_\infty$. Если $s_\infty=\infty$, то доказывать нечего; остается случай $s_\infty<\infty$. Мы можем считать, что $S_{T_1,\,T_2}(\varphi_n)<s_\infty+1$ при всех n; тогда, по пункту а),

функции φ_n равностепенно абсолютно непрерывны. Переходя к пределу в неравенстве $\sum_i |\varphi_n(t_i)-\varphi_n(s_i)|<\delta$, получаем, что $\sum_i |\varphi(t_i)-\varphi(s_i)|\leqslant\delta$, если $\sum_i (t_i-s_i)<\varepsilon$, т. е. функция φ абсолютно непрерывна.

Выберем положительные h и δ' так, чтобы $\Delta H_0(h,\delta')$ было меньше заранее назначенного положительного числа $\varkappa$; если нужно, уменьшим h так, чтобы колебание каждой из функций φ_n, φ на отрезках длины менее h было меньше δ'. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[T_1, T_2]$ точками $T_1=t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<t_k=T_2$ на отрезки длины менее h. В силу выбора h и δ' имеем

$$(1+\varkappa)\int_{T_1}^{T_2} H_0(t,\ \varphi_n(t);\ \dot\varphi_n(t))\,dt+\varkappa(T_2-T_1)\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_0(t_i,\ \varphi_n(t_i);\ \dot\varphi_n(t))\,dt.$$

Пользуясь неравенством Иенсена для выпуклой вниз функции $H_0(t_i,\ \varphi_n(t_i);\ u)$, продолжаем неравенство:

$$(1+\varkappa)\,S_{T_1,\,T_2}(\varphi_n)+\varkappa(T_2-T_1)\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\,H_0\left(t_i,\ \varphi_n(t_i);\frac{\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, в силу полунепрерывности функции H_0:

$$(1+\varkappa)\,s_\infty+\varkappa(T_2-T_1)\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\,H_0\left(t_i,\ \varphi(t_i);\ \frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right).$$

Еще раз пользуемся выбором h и δ': $H_0(t,\ \varphi(t);\ u)\leqslant\leqslant(1+\varkappa)\,H_0(t_i,\varphi(t_i);u)+\varkappa$ при $|t-t_i|<h$, $|\varphi(t)-\varphi(t_i)|<\delta'$; поэтому

$$\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_0\left(t,\ \varphi(t);\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)dt\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa(T_2-T_1)+(1+\varkappa)\,\varkappa(T_2-T_1)+(1+\varkappa)^2\,s_\infty.$$

Пусть $\psi(t)=\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}$ при $t_i<t<t_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots, k-1$. Для любого достаточно мелкого разбиения выполняется неравенство

$$\int_{T_1}^{T_2} H_0(t, \varphi(t); \psi(t))\,dt \leqslant (1+\varkappa)^2 s_\infty+(2\varkappa+\varkappa^2)(T_2-T_1).$$

Если мы рассмотрим последовательность безгранично измельчающихся разбиений, то соответствующие функции $\psi_n(t)$ почти всюду сходятся к $\varphi(t)$. Функция H_0 полунепрерывна снизу, поэтому почти всюду $H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t)) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} H_0(t, \varphi(t); \psi_n(t))$; помня, что $H_0 \geqslant 0$, и пользуясь леммой Фату, получаем

$$S_{T_1, T_2}(\varphi)= \int_{T_1}^{T_2} H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{T_1}^{T_2} H_0(t, \varphi(t); \psi_n(t))\,dt \leqslant (1+\varkappa)^2 s_\infty+(2\varkappa+\varkappa^2)(T_2-T_1).$$

Так как $\varkappa>0$ произвольно мало, получаем, что $S_{T_1, T_2}(\varphi) \leqslant s_\infty$, что и требовалось доказать.

Из б) вытекает замкнутость множества $\bigcup_{x\in K} \Phi_{x;\,[T_1, T_2]}(s)$; из равностепенной абсолютной непрерывности вытекает равностепенная непрерывность, и применение теоремы Арцела дает утверждение в). □

Из б) и в) следует, в частности, что функционал S_{T_1, T_2} достигает своего наименьшего значения на любом непустом замкнутом множестве функций φ, для которого множество начальных значений $\{\varphi(T_1)\}$ ограничено.

Утверждения б) и в) входят в определение функционала действия (см. Введение).

3. Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия* **А—В**. *Тогда для любого $\gamma>0$ и любого $s_0>0$ существует такое $h>0$, что для любого разбиения отрезка от T_1 до T_2 точками* $T=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=T_2$, $\max(t_{j+1}-t_j) \leqslant h$,

$$\text{а)}\ \sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j) H_0\left(t_j, \varphi(t_j); \frac{\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)}{t_{j+1}-t_j}\right) \leqslant \int_{T_1}^{T_2} H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))\,dt+\gamma \qquad (3.1.2)$$

для любой абсолютно непрерывной функции $\varphi(t)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, *для которой интеграл в правой части не превосходит* s_0;

б) $$\int_{T_1}^{T_2} H_0(t,\ l(t);\ \dot{l}(t))\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)\, H_0\left(t_j,\ l_j;\ \frac{l_{j+1}-l_j}{t_{j+1}-t_j}\right)+\gamma, \qquad (3.1.3)$$

где $l(t)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, — *ломаная с вершинами в точках* $(t_j,\ l_j)$, *а* l_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, — *произвольные элементы* R^r, *для которых сумма в правой части* (3.1.3) *не превосходит* s_0.

Доказательство. Для произвольного $\varkappa > 0$ возьмем соответствующие ему положительные h и δ' (см. доказательство предыдущей теоремы); уменьшим h так, чтобы было $|\varphi(t)-\varphi(s)| < \delta'$ при $|t-s| < h$. По неравенству Иенсена

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)\, H_0\left(t_j,\ \varphi(t_j);\ \frac{\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)}{t_{j+1}-t_j}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_0(t_j,\ \varphi(t_j);\ \dot{\varphi}(t_j))\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(T_2-T_1)+(1+\varkappa)\int_{T_1}^{T_2} H_0(t,\ \varphi(t);\ \dot{\varphi}(t))\,dt.$$

Так как $\varkappa$ произвольно, получаем утверждение а) теоремы. Для б) доказательство еще проще (не нужно пользоваться даже неравенством Иенсена); выбранное h годится и для функций $l(t)$, удовлетворяющих указанным условиям. □

§ 3.2. Теоремы о функционале действия для семейств марковских процессов в R^r. Случай существования экспоненциальных моментов

1. Требования Г, Д; обозначения, связанные с параметром θ. — 2. Теорема 3.2.1. — 3. Теорема 3.2.2, формулировка и начало доказательства. — 4. Приближение функции H_0 многогранником. Завершение доказательства. — 5. Теорема 3.2.3. — 6. Теорема 3.2.3′. — 7. Замечания к теоремам.

1. Наложим на функции $G_0 \leftrightarrow H_0$ еще ряд ограничений.

Г. Множество $\{u:\ H_0(u) < \infty\}$ открыто, и $\sup_{t,\,x} H_0(t,\ x;\ u_0) < \infty$ для какой-то его точки u_0.

Условие **Г** исключает некоторые из примеров, приведенных в п. 4 § 2.1.

Д. Для любого компакта $U_K \subset \{u\colon H_0(u) < \infty\}$ градиент $\nabla_u H_0(t, x; u)$ ограничен и непрерывен по $u \in U_K$ равномерно по всем t, x.

Мы докажем грубые предельные теоремы о больших уклонениях для семейств марковских процессов $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}^\theta_{t, x})$, зависящих от параметра θ, пробегающего множество с заданным на нем фильтром $\theta \to$ (см. Введение, п. 1). Всё, относящееся к процессу ξ^θ, будем снабжать индексом θ: кумулянта $G^\theta(t, x; z)$, ее преобразование Лежандра $H^\theta(t, x; u)$, функционал действия $I^\theta_{T_1, T_2}$, и т. п.

2. Случай непрерывного времени. Пусть $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}^\theta_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при каждом $\theta \in \Theta$ — локально безгранично делимый процесс в R^r.

Теорема 3.2.1. *Пусть для функций $G_0 \leftrightarrow H_0$ выполнены условия* **А—Д**; *функционал $S_{0, T}$ задается формулой* (3.1.1). *Пусть $k(\theta)$ — числовая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $\theta \to$; пусть для кумулянты $G^\theta(t, x; z)$ выполнены следующие условия:*

$$k(\theta)^{-1} G^\theta(t, x; k(\theta) z) \to G_0(t, x; z), \tag{3.2.1}$$

$$\nabla_z (k(\theta)^{-1} G^\theta(t, x; k(\theta) z)) \to \nabla_z G_0(t, x; z) \tag{3.2.2}$$

при $\theta \to$, причем равномерно по всем t, x и по каждому ограниченному множеству значений z; и для любого ограниченного множества K

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (k(\theta)^{-1} G^\theta(t, x; k(\theta) z)) \right| \leqslant \text{const} < \infty \tag{3.2.3}$$

для всех достаточно далеких θ, для всех t, x и всех $z \in K$.

Тогда для любых $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и $s_0 > 0$ для достаточно далеких θ для всех $x_0 \in R^r$ и $\varphi \in \Phi_{x_0; [0, T]}(s_0)$

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant \exp\{-k(\theta)[S_{0, T}(\varphi) + \gamma]\}. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Будем считать, что точка u_0, упоминаемая в условии **Г**, есть 0. Это не ограничивает общности: иначе можно перейти к процессу $\xi^\theta(t) - u_0 t$.

Из (3.2.1), (3.2.2) и условия **Д** вытекает, что

$$H^\theta(t, x; u) = k(\theta)[H_0(t, x; u) + o(1)],$$
$$\nabla_u H^\theta(t, x; u) = O(k(\theta))$$

при $\theta \to$, равномерно по t, x и u в пределах любого компакта $U_K \subset \{u\colon H_0(u) < \infty\}$.

Проведем доказательство сначала для множества функций φ, для которых все значения $\dot\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, принадлежат одному и тому же компактному множеству $U_K \subset \{u: H_0(u) < \infty\}$. Для таких функций

$$I_{0,T}^{\theta}(\varphi) = \int_0^T H^{\theta}(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))\, dt = k(\theta)[S_{0,T}(\varphi) + o(1)]$$

при $\theta \to$, равномерно по всем этим функциям.

Пользуемся теоремой 2.2.1. Полагаем $z^{\theta}(t, x) = \nabla_u H^{\theta}(t, x; \dot\varphi(t))$ и оцениваем соответствующие выражения (2.2.1)—(2.2.4):

$$D^{\theta}(t) = \sup_x \sum_i \frac{\partial^2 G^{\theta}}{\partial z_i^2}(t, x; z^{\theta}(t, x)) = O(k(\theta)^{-1}),$$

$$(ZDZ)^{\theta}(t) = \sup_x \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G^{\theta}}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; z^{\theta}(t, x)) \times \\ \times z_i^{\theta}(t, x) z_j^{\theta}(t, x) = O(k(\theta)),$$

$$(\delta')^{\theta} = 2\left(\int_0^T D^{\theta}(t)\, dt\right)^{1/2} = O(k(\theta)^{-1/2}),$$

$$\Delta H^{\theta}(t) = \sup_{|x-\varphi(t)| < (\delta')^{\theta}} [H^{\theta}(t, x; \dot\varphi(t)) - H^{\theta}(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))] \leqslant \\ \leqslant k(\theta) \sup_{|x-\varphi(t)| < (\delta')^{\theta}} [H_0(t, x; \dot\varphi(t)) - \\ - H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))] + o(k(\theta)) \leqslant \\ \leqslant k(\theta)[1 + H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))]\, \Delta H_0(0, (\delta')^{\theta}) + o(k(\theta)).$$

Для достаточно далеких θ имеем $(\delta')^{\theta} \leqslant \delta$; тогда

$$\mathbf{P}_{0,x_0}^{\theta}\{\rho_{0,T}(\xi^{\theta}, \varphi) < \delta\} \geqslant \exp\Bigg\{-I_{0,T}^{\theta}(\varphi) - \ln 2 - \\ - 2\left(\int_0^T (ZDZ)^{\theta}(t)\, dt\right)^{1/2} - \int_0^T \Delta H^{\theta}(t)\, dt\Bigg\} = \\ = \exp\{-k(\theta) S_{0,T}(\varphi) - o(k(\theta))[1 + S_{0,T}(\varphi)]\}.$$

Для достаточно далеких θ член $\gamma k(\theta)$ компенсирует последнее слагаемое, и получаем (3.2.4).

Пусть теперь φ — произвольная функция с $S_{0,T}(\varphi) \leqslant s_0$. Пользуясь теоремами 3.1.1 и 3.1.2, выбираем $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, одни и те же для всех φ с $S_{0,T}(\varphi) \leqslant s_0$, и для каждой из функций φ строим ломаную l с вершинами $(t_i, \varphi(t_i))$ так, что $\rho_{0,T}(l, \varphi) < \delta/3$, $S_{0,T}(l) \leqslant S_{0,T}(\varphi) + \gamma/3$. Далее полагаем $l_\varkappa(t) = \varkappa x_0 + (1-\varkappa)\, l(t)$, где $\varkappa$ — малое положительное число (а $x_0 = \varphi(0) = l(0) = l_\varkappa(0)$). Значения $\dot{l}_\varkappa(t)$ принадлежат некоторому компактному подмножеству $\{u\colon \overline{H}_0(u) < \infty\}$. Так как для всех рассматриваемых функций φ расстояние $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi(t) - \varphi(0)|$ не превосходит какой-то константы, то, уменьшая $\varkappa$, можно сделать ломаные l и $l_\varkappa$ сколь угодно близкими; в частности, добиться выполнения равенства $\rho_{0.T}(\varphi, l_\varkappa) < 2\delta/3$. Оцениваем $S_{0,T}(l_\varkappa)$, пользуясь выпуклостью вниз функции H_0:

$$\int_0^T H_0(t, l_\varkappa(t); \dot{l}_\varkappa(t))\, dt = \int_0^T H_0(t, l_\varkappa(t); (1-\varkappa)\, \dot{l}(t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \varkappa H_0(t, l_\varkappa(t); 0)\, dt + \int_0^T (1-\varkappa) H_0(t, l_\varkappa(t); \dot{l}(t))\, dt.$$

Первый интеграл не превосходит $\varkappa T \sup\limits_{t, x} H_0(t, x; 0)$, второй можно сделать сколь угодно мало отличающимся от $S_{0,T}(l)$; окончательно, при достаточно малом $\varkappa$ сразу для всех φ, $S_{0,T}(\varphi) \leqslant s_0$, имеем: $S_{0,T}(l_\varkappa) \leqslant S_{0,T}(\varphi) + 2\gamma/3$. Для функций $l_\varkappa$ имеет место неравенство (3.2.4) с заменой δ на $\delta/3$, γ на $\gamma/3$; поэтому при достаточно далеких θ

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant \mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^\theta, l_\varkappa) < \delta/3\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{-k(\theta)\,[S_{0,T}(\varphi) + \gamma]\}. \quad \square$$

3. Теорема 3.2.2. *При условиях теоремы* 3.2.1 *для любых* $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $s_0 > 0$ *для достаточно далеких* θ *для всех* $x_0 \in R^r$ *и* $s \leqslant s_0$

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^\theta, \Phi_{x_0; [0, T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma)\}. \tag{3.2.5}$$

Доказательство. Опять, не ограничивая общности, считаем $u_0 = 0$; используем теорему 2.3.2. Элементы конструкции этой теоремы будем выбирать в следующем порядке (зависимость от параметра θ будем указывать индексом): функции $\tilde{G}^\theta(t, x; z) \leftrightarrow \tilde{H}^\theta(t, x; u)$, функционал $\tilde{I}^\theta_{0,T}$ и множество $\tilde{\Phi}^\theta_{x_0; [0, T]}(i)$; i^θ и A^θ; ε_1, δ' и h; $z^\theta(j)$, $d^\theta(j)$ и разбиение $\{t_m\}$; ε^θ_2, N и $z^\theta\{1\}, \ldots, z^\theta\{N\}$; множество Z^θ_0. Нам нужно будет проверить, что условия теоремы выполнены при всех достаточно далеких θ.

Положим $\tilde{G}^\theta(t;\ x;\ z)=k(\theta)G_0(t,\ x;\ k(\theta)^{-1}z)$; тогда $\tilde{H}^\theta(t,\ x;\ u)=k(\theta)H_0(t,\ x;\ u)$, $\tilde{I}^\theta_{0,\,T}(\varphi)=k(\theta)S_{0,\,T}(\varphi)$, $\tilde{\Phi}^\theta_{x_0;\,[0,\,T]}(k(\theta)s)=\Phi_{x_0;\,[0,\,T]}(s)$. В качестве i^θ возьмем как раз $k(\theta)s$; положим $A^\theta=k(\theta)$. Положим $\Delta_1=\gamma/4(T+s_0)$, $\varepsilon_1=\Delta_1/(1+\Delta_1)$. Выберем положительные $\delta'\leqslant\delta/3$ и h так, чтобы при $|t-s|\leqslant h$, $|x-y|\leqslant 2\delta'$ и всех u

$$H_0(s,\ y;\ u)-H_0(t,\ x;\ u)\leqslant[1+H_0(t,\ x;\ u)]\,\Delta_1. \quad (3.2.6)$$

Если мы выберем $\{t_m\}$ так, чтобы $\Delta t_{\max}\leqslant h$, это уже обеспечит нам выполнение условия (2.3.10) теоремы 2.3.2.

Разбиения $\{t_m\}$ будем брать только из одинаковых отрезков длины $\Delta t\leqslant h$. Векторы $z^\theta(j)$ и числа $d^\theta(j)$ будем брать вида $z^\theta(j)=k(\theta)z_0(j)$, $d^\theta(j)=k(\theta)d_0(j)$, так что сумма по j в оценке (2.3.3) будет состоять из слагаемых вида

$$\exp\{\Delta t\,[\bar{G}^\theta(k(\theta)z_0(j))-k(\theta)d_0(j)]\}=$$
$$=\exp\{k(\theta)\,\Delta t\,[\bar{G}_0(z_0(j))+o(1)-d_0(j)]\}. \quad (3.2.7)$$

Часть $z_0(j)$, $d_0(j)$ мы используем для того, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\Delta t\cdot\sup\{|u|:\ u\in U_0\}\leqslant\delta'$. Положим $z_0(2i-1)=Ze_i$, $z_0(2i)=-Ze_i$, $i=1,\ \ldots,\ r$, где $Z>0$ и e_i — единичный вектор, лежащий на i-й координатной оси; а $d_0(1),\ \ldots,\ d_0(2r)$ возьмем равными одному и тому же $D>0$. Тогда U_0 будет содержаться в кубе с центром в 0 и ребром $2D/Z$; чтобы этот куб содержался в шаре радиуса $\delta'/\Delta t$ с центром в 0, свяжем Z и D соотношением $Z=\Delta tD\sqrt{r}/\delta'$. Для того чтобы слагаемыми (3.2.7), $j=1,\ \ldots,\ 2r$, можно было пренебречь при далеких значениях θ, еще более ограничим выбор Z, D и Δt: потребуем, чтобы $\Delta t\bar{G}_0(z_0(j))$, $1\leqslant j\leqslant 2r$, не превосходили s_0, а $\Delta t\,d_0(j)=$ $=\Delta tD=3s_0$. Это дает: $Z=3s_0\sqrt{r}/\delta'$. Векторы $z_0(1),\ \ldots$ $\ldots,z_0(2r)$, таким образом, определены; в качестве Δt можно выбрать любое положительное число такое, что $T/\Delta t$ — целое, и не превосходящее $h\wedge\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2r}[\bar{G}_0(z_0(j))]^{-1}$. Наконец, полагаем $d_0(1)=\ldots=d_0(2r)=D=3s_0/\Delta t$.

К уже выбранным $z_0(1),\ \ldots,\ z_0(2r)$, $d_0(1),\ \ldots,\ d_0(2r)$ добавим, если нужно, еще сколько-то $z_0(j)$, $d_0(j)$, чтобы отрезать от множества U_0 те точки u, в которых функция H_0 бесконечна,— иначе мы не сможем добиться выполнения условия (2.3.12). Для этого рассмотрим множество $\{u:\ H_0(u)\leqslant 2s_0/\Delta t\}$; это множество компактно в силу полунепрерывности $\underline{H}_0$ и того, что $\lim\limits_{|u|\to\infty} \underline{H}_0(u)=\infty$. Существует такое положительное ρ, что ρ-окрестность множества $\{u\colon \underline{H}_0(u)\leqslant 2s_0/\Delta t\}$ содержится в множестве $\{u\colon H_0(u)<\infty\}$. Опишем около $\rho/2$-окрестности множества $\{u\colon \underline{H}_0(u)\leqslant \leqslant 2s_0/\Delta t\}$ многогранник, целиком содержащийся в ρ-окрестности этого множества.

По обе стороны каждой грани $\{u\colon zu=d\}$ этого многогранника есть точки с $\underline{H}_0(u)<\infty$, и в силу леммы 1.1.1 существует такая константа c, что $cd-\overline{G}_0(cz)=\inf\{\underline{H}_0(u)\colon zu=d\}>2s_0/\Delta t$. Ясно, что $cd>0$. Введенный выше выпуклый многогранник целиком лежит по одну сторону гиперплоскости $\{u\colon czu=cd\}$, а именно, по ту сторону, где $czu\leqslant cd$ (потому что там лежит точка $u=0$). Возьмем задающие эти гиперплоскости векторы cz в качестве $z_0(2r+1), \ldots, z_0(k)$, числа cd — в качестве $d_0(2r+1), \ldots \ldots, d_0(k)$.

При добавлении $z_0(j)$, $d_0(j)$, $2r+1\leqslant j\leqslant k$, неравенство $\Delta t \sup\{|u|\colon \ u\in U_0\}\leqslant\delta'$ сохраняется, а для $(2r+1)$-го, ..., k-го членов суммы в оценке (2.3.13) будем иметь:

$$\exp\{\Delta t[\overline{G}^\theta(z^\theta(j))-d^\theta(j)]\}=$$
$$=\exp\{k(\theta)\Delta t[\overline{G}_0(z_0(j))+o(1)-d_0(j)]\}<\exp\{-k(\theta)s_0\}$$

при достаточно далеких θ.

4. В качестве ε_2^θ назначаем $2k(\theta)\Delta_1=k(\theta)\gamma/2(T+s_0)$. Нам нужно выбрать число N и при любых t, x указать $z_0\{1\}, \ldots, z_0\{N\}$, для которых разность функции $H_0(t, x; u)$ и описанного снизу около нее многогранника $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}[z_0\{j\}u-G_0(t, x; z_0\{j\})]$ на множестве U_0 оценивается сверху величиной $2\Delta_1$. Тогда для $z^\theta\{j\}=k(\theta)z_0\{j\}$ будет выполняться условие (2.3.12).

По условию **Д** при u, принадлежащих замыканию U_0, имеем: $|\nabla_u H_0(t, x; u)|\leqslant C<\infty$. Из условия **А** вытекает, что $|\nabla_z G_0(t, x; z)|\leqslant C_1<\infty$, $H_0(t, x; \nabla_z G_0(t, x; z))\leqslant C_2$ при $|z|\leqslant C$. Введем компактное множество $U_{C_2}=\{u\colon \underline{H}_0(u)\leqslant C_2\}$. При $u\in U_{C_2}$ функция $H_0(t, x; u)$ равностепенно непрерывна как функция u (в силу условия **Д**) и равномерно ограничена (в силу условий **Г**, **Д**); значит, мы можем выбрать в множестве функций $H_0(t, x, u)$, $u\in U_{C_2}$, конечную Δ_1-сеть $\{H_0(s_i, x_i; u),\ i=1, \ldots, I\}$. Каждую из непрерывных выпуклых вниз функций $H_0(s_i,$

x_i; u) приблизим на множестве U_0 с точностью до Δ_1 описанным многогранником, составленным из плоскостей $H_{ij}(u) = z_0^i\{j\}u - G_0(s_i, x_i; z_0^i\{j\})$, $j = 1, \ldots, N_i$, с точками касания $u(i, j) = \nabla_z G_0(s_i, x_i; z_0^i\{j\}) \in U_0$. При этом $|z_0^i\{j\}| \leqslant C_1$.

Для любых t, x выбираем s_i, x_i такие, что $\max\limits_{u \in U_{C_2}} |H_0(t, x; u) - H_0(s_i, x_i; u)| < \Delta_1$. При этом $H_{ij}(u) \leqslant H_0(s_i, x_i; u) < H_0(t, x; u) + \Delta_1$ при всех $u \in U_{C_2}$, а при $u = u(i, j)$ имеем: $H_{ij}(u(i, j)) = H_0(s_i, x_i; u(i, j)) > H_0(t, x; u(i, j)) - \Delta_1$. Поэтому плоскость $H_{ij}(u)$ можно сдвинуть не более, чем на Δ_1, так, чтобы она касалась $H_0(t, x; u)$ в точке $u = \nabla_z G_0(t, x; z_0^i\{j\}) \in U_{C_2}$; при этом

$$\sup_{u \in U_0} [H_0(t, x; u) - \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [z_0\{j\}u - G_0(t, x; z_0^i\{j\})]] \leqslant 2\Delta_1.$$

Если мы теперь положим $Z_0^\theta = \{z: |z| \leqslant k(\theta) C_1\}$ и для произвольных t, x возьмем $z^\theta\{j\} = k(\theta) z_0^i\{j\}$, то условие (2.3.12) будет выполнено с $\varepsilon_2^\theta = 2k(\theta)\Delta_1$. В качестве N возьмем $\max\limits_i N_i$.

Выполнение (2.3.11) при далеких значениях θ вытекает из равномерной сходимости (3.2.1). В итоге получаем:

$$\mathsf{P}_{0, x_0}^\theta \{\rho_{0, T}(\xi^\theta, \Phi_{x_0; [0, T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant 2nk \exp\{-k(\theta) s_0\} + N^n \exp\left\{-k(\theta) s + k(\theta) \frac{\gamma}{4(T + s_0)} \cdot (4T + 2s_0)\right\}.$$

При достаточно далеких θ разница между γ и вторым множителем при $k(\theta)$ компенсирует первое слагаемое и множитель N^n, и мы получим оценку (3.2.5) при достаточно далеких θ, всех x_0 и всех $s \leqslant s_0$.

Теорема 3.2.2 доказана. □

5. Теоремы 3.1.1, 3.2.1 и 3.2.2 дают нам вместе следующую теорему:

Теорема 3.2.3. *При условиях теоремы 3.2.1 $k(\theta) S_{0, T}(\varphi)$ — функционал действия для семейства марковских процессов $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t, x}^\theta)$ при $\theta \to$, равномерно относительно начальной точки.*

6. Случай дискретного времени. Пусть теперь на множестве Θ значений параметра задана положительная числовая функция $\tau(\theta)$. Пусть $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t, x}^\theta)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при каждом $\theta \in \Theta$ — $\tau(\theta)$-процесс в R^r (см. § 1.2). Будем обозначать $G^\theta(t, x; z)$ кумулянту марковского процесса с дискретным временем $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t, x}^\theta)$, $t = k\tau(\theta) \in [0, T]$.

Теорема 3.2.3′. *Пусть для функций $G_0 \leftrightarrow H_0$ выполнены условия* **А—Д**, *функционал $S_{0, T}$ задается формулой*

(3.1.1); $k(\theta)\to+\infty$, *а* $\tau(\theta)\to 0$ *при* $\theta\to$; *пусть для кумулянты* $G^\theta(t,\ x;\ z)$ *выполнены условия* (3.2.1)—(3.2.3).

Тогда $k(\theta)S_{0,T}(\varphi)$—*функционал действия для семейства марковских процессов* $(\xi^\theta(t),\ \mathsf{P}^\theta_{t,x})$ *при* $\theta\to$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство. Часть, касающаяся требований на нормированный функционал действия, уже доказана; нужно доказать неравенства (3.2.4), (3.2.5). Докажем (3.2.4) сначала для кусочно линейных функций $\varphi(t)$ с производной $\dot\varphi(t)\in U_K\subset\{u:\ H_0(u)<\infty\}$, остающейся постоянной на интервалах $(k\tau(\theta),(k+1)\tau(\theta))$. Функционал действия $I^\theta_{0,T}(\varphi)$ задается формулой

$$I^\theta_{0,T}(\varphi)=$$

$$=\sum_{k=0}^{[T/\tau(\theta)]-1} H^\theta\left(k\tau(\theta),\ \varphi(k\tau(\theta));\ \frac{\varphi((k+1)\tau(\theta))-\varphi(k\tau(\theta))}{\tau(\theta)}\right)\cdot\tau(\theta)=$$

$$=k(\theta)\left[\sum H_0\left(k\tau(\theta),\ \varphi(k\tau(\theta));\ \frac{\varphi((k+1)\tau(\theta))-\varphi(k\tau(\theta))}{\tau(\theta)}\right)\cdot\tau(\theta)+o(1)\right].$$

Если $S_{0,T}(\varphi)\leqslant s_0$, то в силу теоремы 3.1.2 а) при достаточно далеких θ (а стало быть, малых $\tau(\theta)$) значение $I^\theta_{0,T}(\varphi)$ не превосходит $k(\theta)[S_{0,T}(\varphi)+\gamma/2]$. Далее, при достаточно далеких θ колебание функции φ на отрезках длины $\tau(\theta)$ не превосходит $\delta/2$; поэтому

$$\rho_{0,T}(\xi^\theta,\varphi)\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant[T/\tau(\theta)]}|\xi^\theta(k\tau(\theta))-\varphi(k\tau(\theta))|+\delta/2.$$

Пользуемся оценкой (2.2.5) с $\delta/2$ вместо δ; при этом

$$z^\theta(t,\ x)=\nabla_u H^\theta\left(t,\ x;\ \frac{\varphi(t+\tau(\theta))-\varphi(t)}{\tau(\theta)}\right)=O(k(\theta)),$$

$$D^\theta(t)=O(k(\theta)^{-1}),\quad (ZDZ)^\theta(t)=O(k(\theta)),$$

$$(\delta')^\theta=2\left(\sum_{k=0}^{[T/\tau(\theta)]-1}D^\theta(k\tau(\theta))\cdot\tau(\theta)\right)^{1/2}=O(k(\theta)^{-1/2}),$$

$$\Delta H^\theta(t)\leqslant\Delta H_0(0,\ (\delta')^\theta)\times$$

$$\times k(\theta)\left[1+H_0\left(t,\ \varphi(t);\ \frac{\varphi(t+\tau(\theta))-\varphi(t)}{\tau(\theta)}\right)\right]+o(k(\theta)).$$

Так как функция φ—кусочно линейная, частное под знаком H_0 равно производной функции φ на интервале от t до $t+\tau(\theta)$. Так же, как при доказательстве теоремы 3.2.1, получаем (3.2.4) для этого класса функций, а от них переходим к произвольным; только абсциссы вершин ломаной l выбираются при этом кратными $\tau(\theta)$ (а стало быть, зависящими от θ).

Перейдем к доказательству (3.2.5). Пользуемся теоремой 2.3.2 с $i^\theta = k(\theta)(s-\Delta_1)$, $\delta' \leqslant \delta/6$, $\Delta_1 = \gamma/8(T+1+s_0)$ вместо $\gamma/4(T+s_0)$ (см. доказательство теоремы 3.2.2). Разбиение $\{t_m\}$ отрезка от 0 до T выбираем так, чтобы его точки были кратны $\tau(\theta)$ и чтобы $\Delta t_{\max} \leqslant 2\Delta t_{\min}$; в остальном воспроизводим п. 3—4 доказательства теоремы 3.2.2. Получаем оценку:

$$\mathbf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi^\theta, \tilde{\Phi}^\theta_{x_0; [0, T]}(k(\theta)(s-\Delta_1))) \geqslant 3\delta'\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma)\}. \quad (3.2.8)$$

Здесь $\rho_{0, T}$ — расстояние между функциями, рассматриваемыми лишь в точках, кратных $\tau(\theta)$.

Далее произвольную функцию $\varphi(t)$, $t = k\tau(\theta) \in [0, T]$, из множества $\tilde{\Phi}^\theta_{x_0; [0, T]}(k(\theta)(s-\Delta_1))$ доопределяем линейно между точками $k\tau(\theta) \in [0, T]$; на отрезке от $[T/\tau(\theta)]\,\tau(\theta)$ до T делаем ее постоянной. В силу теоремы 3.1.2б) получаем, что

$$\int_0^T H_0(t, \varphi(t); \dot{\varphi}(t))\,dt \leqslant s,$$

т. е. $\varphi \in \Phi_{x_0; [0, T]}(s)$.

Расстояние от ξ^θ до такой функции по всему отрезку отличается от расстояния, измеренного только по точкам, кратным $\tau(\theta)$, на сколь угодно малую величину, и из (3.2.8) получаем (3.2.5). □

7. Замечание 1 к теоремам 3.2.3, 3.2.3′. Условия (3.2.1)—(3.2.3) выполнены, если $G^\theta(t, x; 0) = G_0(t, x; 0) = 0$; функция $G_0(t, x; z)$ обладает ограниченными в каждой ограниченной области изменения z первыми и вторыми производными по z;

$$\nabla_z(k(\theta)^{-1}G^\theta(t, x; k(\theta)z))|_{z=0} \to \nabla_z G_0(t, x; 0) \quad (3.2.9)$$

при $\theta \to$, равномерно по t, x; и

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(k(\theta)^{-1}G^\theta(t, x; k(\theta)z)) \to \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}G_0(t, x; z) \quad (3.2.10)$$

при $\theta \to$, равномерно по t, x и по каждому ограниченному множеству значений z.

Замечание 2. Заменим условие **B** на следующее условие: для любого ограниченного множества $K \subset R^r$

$$\Delta_K H_0(h, \delta') = \sup_{\substack{|t-s| \leqslant h \\ |x-y| \leqslant \delta',\, x \in K \\ H_0(t,x;u) < \infty}} \frac{H_0(s, y; u) - H_0(t, x; u)}{1 + H_0(t, x; u)} \to 0$$

при $h \downarrow 0$, $\delta' \downarrow 0$. В условиях (3.2.1)—(3.2.3) будем требовать равномерности не по всем $x \in R^r$, а только по каждому ограниченному множеству. Введем в дополнение к ослабленному требованию (3.2.1) такое требование:

$$k(\theta)^{-1} G^{\theta}(t, x; k(\theta) z) \leqslant \text{const} < \infty \qquad (3.2.11)$$

для всех t, всех $x \in R^r$, всех z, пробегающих ограниченное множество, и всех достаточно далеких θ.

Тогда в условиях теорем 3.2.1, 3.2.3′ $k(\theta) S_{0,T}(\varphi)$ является функционалом действия для соответствующего семейства процессов равномерно не по всем начальным точкам, а только в каждом ограниченном множестве значений x_0.

Замечание 3. Пусть рассматриваемые случайные процессы и их характеристики зависят еще от одного параметра α, пробегающего множество A.

Пусть условия теоремы 3.2.1 (условия теоремы 3.2.3′, условия, приведенные в замечании 2) выполняются равномерно по α. Тогда утверждения теоремы 3.2.3 (3.2.3′, замечания 2) выполняются равномерно еще и по α.

§ 3.3. Перенесение на многообразие. Теоремы о функционале действия, связанные с урезанными кумулянтами

1. Условия А—Д на многообразии; теорема 3.3.1.—2. Формулировка теорем 3.3.2, 3.3.2′.— 3. Вывод формул (3.3.7), (3.3.8).— 4. Вывод нижней оценки.— 5. Вывод верхней оценки.

1. Пусть многообразие X удовлетворяет условию λ (см. это условие, а также обозначения, связанные с многообразиями, в п. 3 § 1.1). Пусть заданы выпуклые вниз по третьему аргументу функции $G_0(t, x; z)$, $t \in [0, T]$, $x \in X$, $z \in T^*X_x$, и $H_0(t, x; u)$, $t \in [0, T]$, $x \in X$, $u \in TX_x$, связанные преобразованием Лежандра по третьему аргументу. Введем ограничения на эти функции:

А. Существуют неотрицательные выпуклые вниз функции $\bar{G}_0(z) < \infty$, $\underline{H}_0(u) \leqslant \infty$ от z, $u \in R^r$, связанные преобразованием Лежандра, такие, что при всех $t \in [0, T]$,

$x \in X$, $z \in T^*X_x$, $u \in TX_x$ для любой карты из рассматриваемого атласа, действующей в окрестности x,

$$G_0(t, x; z) \leqslant \overline{G}_0(zA_x^{-1}), \quad H_0(t, x; u) \geqslant \underline{H}_0(A_x u).$$

Б. Для тех u, для которых $\underline{H}_0(u) < \infty$, конечно также и $H_0(t, x; A_x^{-1}u)$ для любой карты из атласа, действующей в окрестности x.

В. Определим

$$\Delta H_0(h, \delta') = \sup \frac{H_0(t, y; A_y^{-1}u) - H_0(s, x; A_x^{-1}u)}{1 + H_0(s, x; A_x^{-1}u)},$$

где верхняя грань берется по всем t, s, $|t-s| \leqslant h$, $x, y \in X$, $\rho(x, y) \leqslant \delta'$, всем картам из нашего атласа, в области действия которых лежат x и y, и всем u, $\underline{H}_0(u) < \infty$. Требуется, чтобы $\Delta H_0(h, \delta') \to 0$ при $h \downarrow 0$, $\delta' \downarrow 0$.

Г. Множество $\{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$ открыто, содержит 0, и верхняя грань значений $H_0(t, x; 0)$ по всем t и x конечна.

Д. Для любого компакта $U_K \subset \{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$ градиент $\nabla_u H_0(t, x; A_x^{-1}u)$ ограничен и непрерывен по $u \in U_K$ равномерно по всем t, x и по всем картам.

Заметим, что условия **Б**, **В**, особенно в случае $\{u: \underline{H}_0(u) < < \infty\} \neq R^r$, не инвариантны относительно замены выбранного атласа другим, удовлетворяющим тому же условию λ.

Определим функционал $S_{T_1, T_2}(\varphi)$ формулой (3.1.1); обозначение $\Phi_{x; [T_1, T_2]}(s)$ имеет тот же смысл, что и ранее.

Теорема 3.3.1. *Пусть функции* $G_0 \leftrightarrow H_0$ *удовлетворяют условиям* **А**—**В**. *Тогда*

а) *функции из множества* $\bigcup\limits_{[T_1, T_2] \subseteq [0, T]} \bigcup\limits_x \Phi_{x; [T_1, T_2]}(s)$ *равностепенно непрерывны*;

б) *функционал* S_{T_1, T_2} *полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости*;

в) *для любого компакта* $K \subseteq X$ *множество* $\bigcup\limits_{x \in K} \Phi_{x; [T_1, T_2]}(s)$ *компактно*.

Доказательство теоремы 3.1.1 сохраняется и для случая многообразия. □

2. Пусть каждому значению параметра θ, пробегающего множество Θ с заданным на нем фильтром $\theta \to$, поставлен в соответствие локально безгранично делимый процесс $(\xi^\theta(t), \mathrm{P}^\theta_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, на X с компенсирующим оператором $\mathfrak{A}^\theta$, задаваемым формулой (1.3.1) с коэффициентами $b^{\theta, i}$, $a^{\theta, i, j}$ и мерой $\lambda^\theta_{t, x}$. Пусть V—открытое подмножество $X\times X$, $V\supset\{(x, x): x\in X\}$, причем для $(x, y)\in V$ расстояние $\rho(x, y)<\lambda/2$. Определим для каждой карты урезанную кумулянту $G_V^\theta(t, x; z)$ процесса $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t,x}^\theta)$, соответствующую множеству V (см. § 2.4).

Теорема 3.3.2. *Пусть для функций G_0, H_0 выполнены условия* **А—Д**. *Пусть $k(\theta)$ — числовая функция, стремящаяся к ∞ при $\theta\to$. Пусть выполнены следующие условия:*

$$\lim_{\theta\to} k(\theta)^{-1}\sup_{t,x}\ln\lambda_{t,x}^\theta\{y: (x, y)\notin V\}=-\infty; \quad (3.3.1)$$

$$k(\theta)^{-1}G_V^\theta(t, x; k(\theta)z)-G_0(t, x; zA_x)\to 0, \quad (3.3.2)$$

$$\nabla_z(k(\theta)^{-1}G_V^\theta(t, x; k(\theta)z)-G_0(t, x; zA_x))\to 0 \quad (3.3.3)$$

при $\theta\to$, причем равномерно по $t\in[0, T)$, по всем картам (W, ψ), по всем x, $\rho(x, X\setminus W)>\lambda/4$, и по каждому ограниченному множеству значений z; и для любого ограниченного множества $K\subset R^r$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j}(k(\theta)^{-1}G_V^\theta(t, x; k(\theta)z))\right|\leqslant\text{const}<\infty \quad (3.3.4)$$

для всех достаточно далеких θ, всех t, всех карт (W, ψ), всех x, $\rho(x, X\setminus W)>\lambda/4$, и всех $z\in K$.

Тогда $k(\theta)S_{0,T}(\varphi)$ является функционалом действия для семейства процессов $\xi^\theta(t)$ при $\theta\to$, равномерно относительно начальной точки $x_0\in X$.

Приведем вариант этой теоремы с дискретным временем (обобщение теоремы 3.2.3').

Пусть каждому $\theta\in\Theta$ поставлено в соответствие положительное число $\tau(\theta)$ и $\tau(\theta)$-процесс $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t,x}^\theta)$, $0\leqslant t\leqslant T$, на X. Пусть V — подмножество $X\times X$, содержащее $\{(x, x): x\in X\}$, $\rho(x, y)<\lambda/2$ при $(x, y)\in V$; $G_V^\theta(t, x; z)$ — урезанная кумулянта процесса.

Теорема 3.3.2'. *Пусть для функций $G_0\leftrightarrow H_0$ выполнены условия* **А—Д**; *$k(\theta)\to\infty$, $\tau(\theta)\to 0$ при $\theta\to$. Пусть*

$$\lim_{\theta\to} k(\theta)^{-1}\ln\Big[\tau(\theta)^{-1}\times$$

$$\times\sup_{t=k\tau(\theta),\,x\in X}\mathsf{P}_{t,x}^\theta\{(x, \xi^\theta(t+\tau(\theta)))\notin V\}\Big]=-\infty; \quad (3.3.1')$$

пусть выполнены условия (3.3.2)—(3.3.4).

Тогда $k(\theta)S_{0,T}(\varphi)$ — функционал действия для семейства процессов $\xi^\theta(t)$ при $\theta\to$, равномерно относительно начальной точки.

3. Доказательство проведем для непрерывного времени; доказательство в случае дискретного времени отличается только тем, что моменты t_m (см. ниже) нужно выбирать кратными $\tau(\theta)$ (а стало быть, зависящими от θ, что усложняет обозначения), и вместо $\xi^\theta(t-)$ берется $\xi^\theta(t-\tau(\theta))$.

Нам нужно доказать, что для любых положительных δ, γ, s_0 при достаточно далеких θ для всех $x_0 \in X$, всех $\varphi \in \Phi_{x_0, [0, T]}(s_0)$ и всех $s \leqslant s_0$

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant \\ \geqslant \exp\{-k(\theta)[S_{0, T}(\varphi)+\gamma]\}, \quad (3.3.5)$$

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\{\rho_{0, T}(\xi^\theta, \Phi_{x_0; [0, T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma)\}. \quad (3.3.6)$$

Вместе с утверждением теоремы 3.3.1 это и даст нам утверждение нашей теоремы.

Выбираем $h > 0$ так, чтобы для функций φ с $S_{T_1, T_2}(\varphi) \leqslant \leqslant s_0+2\gamma$ из $|t-s| \leqslant h$ вытекало, что $\rho(\varphi(t), \varphi(s)) < \lambda/4$. Выбираем разбиение $0=t_0<t_1< \ldots <t_n=T$ отрезка от 0 до T с $\max\limits_m(t_{m+1}-t_m) \leqslant h$. Выберем положительные $\delta' < \delta$ и $\gamma' < \gamma$ (их выбор будет указан впоследствии) и установим, что при достаточно далеких θ для всех $x \in X$, всех $\varphi \in \Phi_{x; [t_m, t_{m+1}]}(s_0+2\gamma)$ и всех $s \leqslant s_0+2\gamma$

$$\mathsf{P}^\theta_{t_m, x}\{\rho_{t_m, t_{m+1}}(\xi^\theta, \varphi) < \delta'\} \geqslant \\ \geqslant \exp\{-k(\theta)[S_{t_m, t_{m+1}}(\varphi)+\gamma']\}, \quad (3.3.7)$$

$$\mathsf{P}^\theta_{t_m, x}\{\rho_{\{t_m, t_{m+1}\}}(\xi^\theta, \Phi_{x; [t_m, t_{m+1}]}(s)) \geqslant \delta'\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma')\}. \quad (3.3.8)$$

(Напоминаем обозначение $\rho_{\{t_m, t_{m+1}\}}$, введенное в конце § 2.4: это — обычное расстояние для функций с совпадающими значениями в концах и $+\infty$ в противном случае.)

Эта часть доказательства проводится следующим образом.

Для данной начальной точки x зафиксируем карту (W, ψ) такую, что $\rho(x, X \setminus W) > \lambda$. Обозначим через B $\lambda/2$-окрестность точки x. Положим

$$\tau^\theta_B(t_m) = \min\{t \geqslant t_m\colon \xi^\theta(t) \notin B\},$$
$$\tau^\theta_V(t_m) = \min\{t > t_m\colon (\xi^\theta(t-), \xi^\theta(t)) \notin V\}.$$

В силу условия (3.3.1)

$$\mathsf{P}^\theta_{t_m, x}\{\tau^\theta_V(t_m) \leqslant t_{m+1}\} \leqslant \\ \leqslant (t_{m+1}-t_m)\sup_{t, y} \lambda^\theta_{t, y}\{y'\colon (y, y') \notin V\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-k(\theta)\cdot(s_0+\gamma)\}.$$

Пользуясь теоремами 2.4.1, 2.4.2 для начального момента t_m вместо 0 и воспроизводя доказательство теорем 3.2.1, 3.2.2, получаем, что при достаточно далеких θ сразу для всех начальных точек x, всех $\varphi \in \Phi_{x;\,[t_m,\,t_{m+1}]}(s_0+2\gamma)$ и всех $s \leqslant s_0+2\gamma$

$$\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\rho_{t_m,\,t_{m+1}}(\xi^\theta,\ \varphi)<\delta'\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{-k(\theta)[S_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi)+\gamma'/2]\} -$$
$$-\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\tau^\theta_B(t_m)\leqslant t_{m+1}\}, \qquad (3.3.9)$$

$$\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\rho_{t_m,\,t_{m+1}\wedge\tau^\theta_B(t_m)}(\xi^\theta,\ \Phi_{x;\,[t_m,\,t_{m+1}\wedge\tau^\theta_B(t_m)]}(s))\geqslant\delta'\}\leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma'/2)\}, \qquad (3.3.10)$$

$$\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\rho_{[t_m,\,t_{m+1}]}(\xi^\theta,\ \Phi_{x;\,[t_m,\,t_{m+1}]}(s))\geqslant\delta'\}\leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-k(\theta)(s-\gamma'/2)\}+\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\tau^\theta_B(t_m)\leqslant t_{m+1}\}. \qquad (3.3.11)$$

Далее, при достаточно далеких θ

$$\mathbf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\tau^\theta_B(t_m)\leqslant t_{m+1}\}\leqslant \exp\{-k(\theta)(s_0+\gamma)\}.$$

Действительно, функции из $\Phi_{x;\,[t_m,\,t_{m+1}\wedge\tau^\theta_B(t_m)]}(s_0+2\gamma)$ лежат в $(\lambda/4)$-окрестности x, и расстояние от них до траекторий ξ^θ, для которых $\tau^\theta_B(t_m)\leqslant t_{m+1}$, больше, чем $\lambda/4$; и нужная оценка получается применением оценки (3.3.10).

Отсюда и из (3.3.9), (3.3.11) вытекает, что при достаточно далеких θ выполнены (3.3.7), (3.3.8).

4. Докажем оценку (3.3.5). При достаточно малом положительном $\delta''\leqslant\delta$ для любой функции $\varphi \in \bigcup_{x_0}\Phi_{x_0;\,[0,T]}(s)$ и для x из δ''-окрестности точки $\varphi(t_m)$ определена функция

$$\varphi_{m,\,x}(t)=\psi^{-1}(\psi(x)+\psi(\varphi(t))-\psi(\varphi(t_m))), \qquad t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1},$$

где используется карта ψ, действующая в области W, содержащей λ-окрестность точки x (это — функция, изображение которой на карте получается сдвигом изображения $\varphi(t)$ на отрезке от t_m до t_{m+1} на такой вектор, что $\varphi_{m,\,x}(t_m)$ попадает в x). Наложим на выбор δ'' еще одно ограничение, потребовав, чтобы было $\Delta H_0(0,\delta'')<\frac{\gamma}{2n(1+s_0)}$. Тогда для всех x таких, что $\rho(x,\ \varphi(t_m))<\delta''$,

$$S_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi_{m,\,x})\leqslant S_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi)+\frac{\gamma}{2n}. \qquad (3.3.12)$$

Теперь выберем положительное $\delta'\leqslant\delta''$ так, чтобы для $x_0=\varphi(0)\,(=\varphi(t_0))$ из $\rho(x_1,\varphi_{0,\,x_0}(t_1))<\delta'$,

$\rho(x_2, \varphi_{1,\,x_1}(t_2)) < \delta', \ldots, \rho(x_{n-1}, \varphi_{n-2,\,x_{n-2}}(t_{n-1})) < \delta'$ вытекало $\rho_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi_{m,\,x_m}, \varphi) < \delta''$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$ (δ' выражается через δ'', n и верхнюю и нижнюю грани отношения $|\psi(y) - \psi(x)|/\rho(x, y)$). Имеем:

$$\mathsf{P}^\theta_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}^\theta_{0,\,x_0}\Big(\bigcap_{m=0}^{n-1}\{\rho_{t_m,\,t_{m+1}}(\xi^\theta, \varphi_{m,\,\xi^\theta(t_m)}) < \delta'\}\Big).$$

(Чертеж, поясняющий эту формулу, должен был бы иметь такой вид: толстая δ-трубочка около функции φ; в нее вставлена система трубочек, имеющая вид телескопа: первое колено имеет начальный радиус δ', а каждое последующее колено на δ' шире, чем конец предыдущего.) Пользуясь марковским свойством относительно моментов t_m, $m = 1, 2, \ldots, n-1$, получаем:

$$\mathsf{P}^\theta_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi^\theta, \varphi) < \delta\} \geqslant$$
$$\geqslant \prod_{m=0}^{n-1} \inf_{\rho(x_m,\,\varphi(t_m)) < \delta''} \mathsf{P}^\theta_{t_m,\,x_m}\{\rho_{t_m,\,t_{m+1}}(\xi^\theta, \varphi_{t_m,\,x_m}) < \delta'\}.$$

Отсюда с помощью оценки (3.3.7) с $\gamma' = \gamma/2n$ и неравенства (3.3.12) получаем (3.3.5).

5. Теперь докажем (3.3.6). Введем метрику $\rho_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}}$, полагая $\rho_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}}(\varphi, \psi) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \rho(\varphi(t), \psi(t))$, если $\varphi(t_m) = \psi(t_m)$ при $m = 0, 1, \ldots, n$, и $\rho_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}}(\varphi, \psi) = \infty$ в противном случае. Введем случайные величины

$$\sigma_{0,\,T} = \min\{S_{0,\,T}(\varphi)\colon \varphi(0) = \xi^\theta(0),\ \rho_{0,\,T}(\xi^\theta, \varphi) \leqslant \delta\},$$
$$\sigma_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}} = \min\{S_{0,\,T}(\varphi)\colon \rho_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}}(\xi^\theta, \varphi) \leqslant \delta\},$$
$$\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}} = \min\{S_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi)\colon \rho_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}(\xi^\theta, \varphi) \leqslant \delta\}$$

(минимум, в силу теоремы 3.3.1, достигается). Для траектории с начальной точкой $\xi^\theta(0) = x_0$ из $\rho_{0,\,T}(\xi^\theta, \Phi_{x_0;\,[0,\,T]}(s)) > \vee\,\delta$ вытекает, что $\sigma_{0,\,T} > s$; так что нам достаточно оценить сверху $\mathsf{P}^\theta_{0,\,x_0}\{\sigma_{0,\,T} > s\}$. Ясно, кроме того, что $\sigma_{0,\,T} \leqslant \sigma_{\{t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\}}$, а последняя случайная величина, в силу $S_{0,\,T}(\varphi) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} S_{t_m,\,t_{m+1}}(\varphi)$, равна $\sum\limits_{m=0}^{n-1} \sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}$.

Итак, мы можем написать цепочку неравенств:

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^{\theta},\Phi_{x_0;\,[0,T]}(s))>\delta\}\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\Big\{\sum_{m=0}^{n-1}\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>s\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i_0=0}^{[s_0/\gamma']+1}\dots\sum_{i_{n-2}=0}^{[s_0/\gamma']+1}\mathsf{P}^{0}_{0,\,x_0}\{(i_m-1)\gamma'<$$
$$<\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}\leqslant i_m\gamma',\quad m=0,\,1,\,\dots,\,n-2;$$
$$\sigma_{\{t_{n-1},\,t_n\}}>s-(i_0+i_1+\dots+i_{n-2})\gamma'\}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>s_0\}.$$

Пользуясь марковским свойством относительно моментов $t_1,\,\dots,\,t_{n-1}$, мы можем продолжить эту цепочку неравенств и написать:

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^{\theta},\;\Phi_{x_0;\,[0,T]}(s))>\delta\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i_0=0}^{[s_0/\gamma']+1}\dots\sum_{i_{n-2}=0}^{[s_0/\gamma']+1}\prod_{m=0}^{n-2}\sup_x \mathsf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>(i_m-1)\gamma'\}\times$$
$$\times\sup_x\mathsf{P}^{\theta}_{t_{n-1},\,x}\{\sigma_{\{t_{n-1},\,t_n\}}>s-(i_0+\dots+i_{n-2})\gamma'\}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\sup_x\mathsf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>s_0\}.$$

Каждый множитель в большой сумме и каждое слагаемое в малой оценивается с помощью оценки (3.3.8):

$$\mathsf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>(i_m-1)\gamma'\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\rho_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}(\xi^{\theta},\Phi_{x;\,[t_m,\,t_{m+1}]}((i_m-1)\gamma'))>\delta'\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\{-k(\theta)(i_m-2)\gamma'\},$$
$$\mathsf{P}^{\theta}_{t_{n-1},\,x}\{\sigma_{\{t_{n-1},\,t_n\}}>s-(i_0+\dots+i_{n-2})\gamma'\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\{-k(\theta)(s-(i_0+\dots+i_{n-2}+1)\gamma')\},$$
$$\mathsf{P}^{\theta}_{t_m,\,x}\{\sigma_{\{t_m,\,t_{m+1}\}}>s_0\}\leqslant\exp\{-k(\theta)(s_0-\gamma')\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,T}(\xi^{\theta},\;\Phi_{x_0;\,[0,T]}(s))>\delta\}\leqslant$$
$$\leqslant([s_0/\gamma']+2)^{n-1}\exp\{-k(\theta)(s-(2n-1)\gamma')\}+$$
$$+(n-1)\exp\{-k(\theta)(s_0-\gamma')\}.$$

Беря $\gamma'=\gamma/2n$, получаем (3.3.6). □

ГЛАВА 4

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

§ 4.1. Проверка выполнения условий А—Д §§ 3.1—3.3

1. Квадратичные функции $G_0 \leftrightarrow H_0$.— 2. Класс примеров на римановом многообразии.— 3. Теорема 4.1.1.— 4. Класс примеров, связанных с конечным числом векторов.

Многие результаты этой главы будут формулироваться при условии, что возникающие в них функции $G_0(t, x; z) \leftrightarrow \leftrightarrow H_0(t, x; u)$ удовлетворяют условиям **А—Д**. Здесь мы приведем некоторые примеры проверки выполнения этих условий.

1. Прежде всего рассмотрим случай

$$G_0(t, x; z) = \sum_i b^i(t, x) z_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j} a^{ij}(t, x) z_i z_j \quad (4.1.1)$$

(что соответствует, в случае дискретного времени, процессам с нормально распределенными скачками, а в случае непрерывного времени — диффузионным процессам). Если матрица $(a^{ij}(t, x))$ не вырождена, преобразование Лежандра задается формулой

$$H(t, x; u) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} a_{ij}(t, x)(u^i - b^i(t, x))(u^j - b^j(t, x)), \quad (4.1.2)$$

где $(a_{ij}) = (a^{ij})^{-1}$. Легко проверяется, что если коэффициенты $b^i(t, x)$, $a^{ij}(t, x)$ ограничены и равномерно непрерывны, а матрица $(a^{ij}(t, x))$ равномерно положительно определена, условия **А—Д** выполняются. В частности, функции $\overline{G}_0 \leftrightarrow \underline{H}_0$ задаются формулами

$$\overline{G}_0(z) = B|z| + \frac{1}{2} A |z|^2;$$

$$\underline{H}_0(u) = \begin{cases} 0, & |u| \leqslant B, \\ \frac{1}{2} A^{-1}(|u| - B)^2, & |u| > B, \end{cases}$$

где B — верхняя грань $|b(t, x)|$, A — верхняя грань собственных значений матрицы $(a^{ij}(t, x))$.

Это справедливо и для многообразий, удовлетворяющих условию λ.

2. Пусть X — компактное трехмерное риманово многообразие класса $\boldsymbol{C}^{(2)}$. Риманову длину векторов из касательного и кокасательного пространства TX_x, T^*X_x будем обозначать $|\ \ |_x$. Пусть функция $G_0(t,\ x;\ z) \equiv G_0(x;\ z)$ задается формулой

$$G_0(x;\ z) = \ln \int\limits_{TX_x} e^{zu} \mu_x(du),$$

где μ_x при каждом x — распределение вероятностей на TX_x, равномерное по сферам, и $\mu_x\{u:\ |u|_x \in d\rho\} = \mu(d\rho)$, где радиальное распределение μ — какое-то распределение на полупрямой $[0,\ \infty)$, одно и то же для всех точек x. Такая функция получается, в частности, для одного из примеров с дискретным временем, рассматриваемых в п. 5 § 4.3. Вычисления показывают, что $G_0(x;\ z) = F_0(|z|_x)$, где

$$F_0(t) = \ln \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \rho t}{\rho t} \mu(d\rho).$$

Преобразование Лежандра также зависит только от длины вектора $u \in TX_x$: $H_0(x;\ u) = A_0(|u|_x)$, где $A_0 \leftrightarrow F_0$. Если $\ln \mu[\rho,\ \infty) \sim -K\rho^\beta$ при $\rho \to \infty$, где $K > 0$, β — какое-то число, большее 1, то для функций G_0, H_0 выполняются условия **А—Д**.

Прежде всего, атлас, удовлетворяющий условию λ, существует, и даже, в силу компактности X, из конечного числа карт; выбираем любой такой атлас. В качестве функции $\overline{G}_0(z)$ берем $F_0(c\,|z|)$, где c — достаточно большая положительная константа; $\underline{H}_0(u) = A_0(c^{-1}\,|u|)$. Отсюда следует выполнение условия **А**. Далее проверяется, что $F_0(t) \sim K' t^{\frac{\beta}{\beta-1}}$ при $t \to \infty$, откуда вытекает конечность A_0 при всех значениях аргумента (условия **Б**, **Г**, стало быть, выполнены). Легко проверяется условие **Д**. Проверим выполнение условия **В**.

Это условие равносильно тому, что для любого $\varepsilon \in (0,\ 1)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых x, y из области действия одной карты, $\rho(x,\ y) < \delta$, и для любого $z \in R^3$ $G_0(y;\ (1-\varepsilon) zA_y) \leqslant \varepsilon + (1-\varepsilon) G_0(x;\ zA_x)$, т. е.

$$F_0((1-\varepsilon)\,|zA_y|_y) \leqslant \varepsilon + (1-\varepsilon) F_0(|zA_x|_x). \qquad (4.1.3)$$

Для достаточно малых $\rho(x, y)$ имеем:

$$|zA_y|_y \leqslant (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{3\beta}} |zA_x|_x.$$

В то же время для достаточно больших t

$$K'(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3\beta}} t^{\frac{\beta}{\beta-1}} < F_0(t) < K'(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{3\beta}} t^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Поэтому при достаточно больших $|z|$ и малых $\rho(x, y)$

$$F_0((1-\varepsilon)|zA_y|_y) <$$

$$< K'(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{3\beta}} [(1-\varepsilon)^{1-\frac{1}{3\beta}} |zA_x|_x]^{\frac{\beta}{\beta-1}} <$$

$$< K'(1-\varepsilon)^{\frac{3\beta-1}{3\beta-3}} |zA_x|_x^{\frac{\beta}{\beta-1}} < (1-\varepsilon) F_0(|zA_x|_x).$$

Отсюда вытекает выполнение (4.1.3) при больших $|z|$, скажем, $|z| > z_0$.

Что касается небольших значений z, то легко проверяется, что функция $G_0(x; zA_x)$ непрерывна по x, z равномерно по всем $z \in R^3$, $|z| \leqslant z_0$, всем картам и всем x в области действия данной карты. Отсюда вытекает выполнение (4.1.3) для всех значений z.

3. В этом примере мы ограничимся одномерным случаем. Пусть функция G_0 задается формулой

$$G_0(t, x; z) = b(t, x) z + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{zu} - 1 - zu) u^{-2} \mu_{t, x}(du),$$

где функция $(e^{zu} - 1 - zu) u^{-2}$ при $u = 0$ продолжена по непрерывности (такой вид функция G_0 будет иметь в примерах с непрерывным временем, рассматриваемых в § 4.3).

Теорема 4.1.3. *Пусть $b(t, x)$ — ограниченная равномерно непрерывная функция, мера $\mu_{t, x}$ ограничена и равномерно слабо непрерывна по t, x и при каждом t, x эта мера сосредоточена на отрезке $[u_-(t, x), u_+(t, x)]$, где функции $u_-(t, x)$, $u_+(t, x)$ ограничены и равномерно непрерывны, $u_-(t, x) < -c$, $u_+(t, x) > c$, $c > 0$. Пусть для каждого $\varkappa > 0$ существует такое $\lambda > 0$, что*

$$\mu_{t, x}[u_-(t, x), \quad u_-(t, x)(1-\varkappa)] > \lambda,$$
$$\mu_{t, x}[(1-\varkappa) u_+(t, x), \quad u_+(t, x)] > \lambda$$

при всех t, x. Тогда для функций $H_0 \leftrightarrow G_0$ выполняются условия **А—Д**.

Доказательство. Прежде всего, легко видеть, что в качестве $\overline{G}_0$ можно взять функцию $\overline{G}_0(z) = C(e^{A|z|} - 1)$, где A и C — некоторые положительные константы; $\underline{H}_0(u) = Ch(|u|/AC)$, где

$$h(v) = \begin{cases} v\ln v - v + 1 & \text{при} \quad v \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant v < 1. \end{cases}$$

Проверим условие **B**: для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ при достаточно близких x, y при всех z

$$G_0(t, x; (1-\varepsilon)z) - (1-\varepsilon)G_0(s, y; z) \leqslant \varepsilon. \quad (4.1.4)$$

Для фиксированного ε возьмем $\varkappa = \varepsilon/3$; выберем положительные h и δ' сначала так, чтобы $u_-(t, x)/u_-(t, y)$, $u_+(t, x)/u_+(t, y)$ были при $|t-s| \leqslant h$, $|x-y| \leqslant \delta'$ больше $1-\varkappa$. При $z > 0$ имеем

$$G_0(t, x; (1-\varepsilon)z) \leqslant$$
$$\leqslant Bz + \frac{\mu_{t,x}(R^1)\left(e^{(1-\varepsilon)u_+(t,x)z} - 1 - (1-\varepsilon)u_+(t,x)z\right)}{u_+(t,x)^2} \quad (4.1.5)$$

(здесь $B = \sup|b(t, x)|$), причем $\mu_{t,x}(R^1) \leqslant M = \text{const} < \infty$. В свою очередь,

$$(1-\varepsilon)G_0(s, y; z) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda \frac{e^{(1-\varkappa)u_+(s,y)z} - 1 - (1-\varkappa)u_+(s,y)z}{[(1-\varkappa)u_+(s,y)]^2}(1-\varepsilon) - Bz. \quad (4.1.6)$$

Для достаточно больших z ($z > z_0$) выражение (4.1.5) меньше (4.1.6) при всех $|t-s| \leqslant h$, $|x-y| \leqslant \delta'$; т. е. при $z > z_0$ левая часть (4.1.4) неположительна. То же имеет место и при достаточно больших по модулю отрицательных z, т. е. для всех z, $|z| > z_0$. При $|z| \leqslant z_0$ функция $G_0(t, x; z)$ равномерно непрерывна по всем аргументам; поэтому мы можем уменьшить h, δ' так, чтобы

$$|G_0(t, x; (1-\varepsilon)z) - G_0(s, y; (1-\varepsilon)z)| < \varepsilon$$

при всех $|t-s| \leqslant h$, $|x-y| \leqslant \delta'$, $|z| \leqslant z_0$. Легко доказать, что $(e^{(1-\varepsilon)zu} - 1 - (1-\varepsilon)zu)u^{-2} \leqslant (1-\varepsilon)(e^{zu} - 1 - zu)u^{-2}$ при всех u, z, откуда $G_0(s, y; (1-\varepsilon)z) \leqslant (1-\varepsilon)G_0(s, y; z)$ и, наконец, $G_0(t, x; (1-\varepsilon)z) - (1-\varepsilon) \times G_0(s, y; z) \leqslant G_0(t, x; (1-\varepsilon)z) - G_0(s, y; (1-\varepsilon)z) + G_0(s, y; (1-\varepsilon)z) - (1-\varepsilon)G_0(s, y; z) < \varepsilon$.

Остальные условия проверяются легко. □

4. Пусть X — многообразие, удовлетворяющее условию λ; пусть каждому $t \in [0, T]$ и каждой точке $x \in X$

поставлено в соответствие n векторов $u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x)$ из TX_x и n положительных чисел $\lambda_1(t, x), \ldots, \lambda_n(t, x)$. Определим функцию G_0 формулой

$$G_0(t, x; z)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t, x)\left(e^{zu_i(t, x)}-1\right).$$

Пусть все функции $u_i(t, x)$, $\lambda_i(t, x)$ равномерно непрерывны и ограничены (для функций u_i это означает ограниченность $A_x u_i(t, x)$ при любой карте из нашего атласа, удовлетворяющего условию λ); $\lambda_i(t, x) \geqslant \lambda_0 > 0$. Пусть $U_{t, x} \subset TX_x$ — выпуклая оболочка множества $\{u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x)\}$. Пусть нижняя грань $|A_x u|$ по $u \notin U_{t, x}$, по всем t, x и по всем картам положительна. Тогда для функции G_0 и ее преобразования Лежандра H_0 выполнены условия **А—Д**.

Доказательство — такое же, как и в предыдущем пункте; условие с выпуклой оболочкой играет роль условия $u_-(t, x) < -c$, $u_+(t, x) > c$, $c > 0$, а равномерная положительность $\lambda_i(t, x)$ обеспечивает равномерную «достаточную заполненность» краев множества $U_{t, x}$ мерой.

§ 4.2. Схемы процессов с малыми частыми скачками. Случаи очень больших уклонений, не очень больших уклонений, сверхбольших уклонений

1. Очень большие, не очень большие, сверхбольшие уклонения; случай дискретного времени.— 2. Выражение кумулянты.— 3. Непрерывное время.— 4. Процессы с независимыми приращениями.— 5. Примеры с $\tau = h$.— 6. Сдвиги по геодезическим.— 7. Связь с нормальным распределением.— 8. Схема работы Варадана [1].

1. Мы будем рассматривать семейства марковских процессов, зависящих от двух положительных параметров τ и h; грубо говоря, время между скачками будет изменяться пропорционально τ, а величины скачков — пропорционально h.

Сначала рассмотрим случай процессов в R^r с дискретным временем.

Пусть для любых $t \in [0, T)$, $x \in R^r$ заданы вероятностные распределения $\mu_{t, x}$ на R^r; при $\tau > 0$, $h > 0$ пусть задана векторная функция $b^{\tau, h}(t, x)$ от $t \in [0, T)$, $x \in R^r$. Пусть эти функции зависят от x измеримым образом.

Рассмотрим при каждом $\tau > 0$, $h > 0$ τ-процесс $(\xi^{\tau, h}(t), \mathsf{P}^{\tau, h}_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, в R^r такой, что процесс, находящийся в момент $t = k\tau$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ в точке x, в момент $t + \tau$ совершает скачок величины $\tau \cdot b^{\tau, h}(t, x) + h \cdot U$, где случайная величина U имеет распределение $\mu_{t, x}$. Иначе говоря, для t, кратных τ,

$$\mathsf{P}^{\tau, h}_{t, x}\{\xi^{\tau, h}(t+\tau) \in \Gamma\} = \mu_{t, x}(h^{-1}(\Gamma - x - \tau b^{\tau, h}(t, x))).$$

Если распределение $\mu_{t, x}$ при любых t, x сосредоточено целиком в точке 0, а $b^{\tau, h}(t, x) \equiv b(t, x)$, траектории $\xi^{\tau, h}(t)$ — это почти ломаные Эйлера для дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = b(t, x(t))$. Для нетривиального $\mu_{t, x}$ можно рассматривать наш случайный процесс как результат возмущения этого дифференциального уравнения «помехами»; однако нужно иметь в виду, что эти возмущения могут быть больше по величине и играть не менее важную роль, чем само «невозмущенное» движение.

Мы будем рассматривать асимптотические задачи для процессов $(\xi^{\tau, h}(t), \mathsf{P}^{\tau, h}_{t, x})$ при $\tau \to 0$, $h \to 0$; однако такие задачи будут задачами о больших уклонениях не при любом соотношении скорости стремления к нулю τ и h. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим соответствующие задачи для сумм n независимых одинаково распределенных случайных величин, которые входят в эту схему при $b^{\tau, h}(t, x) \equiv 0$, $\mu_{t, x} \equiv \mu$, $\tau = 1/n$.

В этом случае процесс $\xi^{\tau, h}(t)$, начинающийся в момент 0 в точке 0, можно представить в виде $h(X_1 + X_2 + \ldots + X_{[nt]})$, где $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины с распределением μ. Пусть математическое ожидание $\int u\mu(du) = 0$, дисперсия $\int u^2\mu(du) = 1$ (будем рассматривать одномерный случай). Вероятность $\mathsf{P}^{\tau, h}_{0, 0}\{\xi^{\tau, h}(1) > 1\}$ преобразуется к виду $\mathsf{P}\{(X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n} > \tau^{1/2}h^{-1}\}$ (индексы у вероятности опускаем). Если $\tau^{1/2}h^{-1}$ не стремится к бесконечности, задача отыскания асимптотики такой вероятности — вообще не задача о больших уклонениях. Мы будем рассматривать только случаи, когда $\tau \to 0$, $\tau^{1/2}h^{-1} \to \infty$ (из этого уже следует $h \to 0$). Но здесь нужно ввести некоторую классификацию задач о больших уклонениях.

Задачи, касающиеся отклонений нормированной суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин от 0 порядка $\sqrt{n}$, будем называть задачами об *очень больших уклонениях*; задачи об уклонениях порядка $o(\sqrt{n})$

(но стремящихся к бесконечности) — задачами о *не очень больших уклонениях*; уклонения порядка, бесконечно большого по сравнению с $\sqrt{n}$, будем называть *сверхбольшими*. Как известно, при выполнении крамеровского условия существования экспоненциальных моментов по очень большим уклонениям проходит граница резкого изменения характера результатов о больших уклонениях. Результаты о не очень больших уклонениях еще связаны с нормальным распределением (см., например, теорему 1 работы Крамера [1]; разумеется, следует иметь в виду, что это — результат точный, а не грубый — с точностью до логарифмической эквивалентности, как у нас). Результаты об очень больших уклонениях (теорема 6 работы Крамера [1]) уже не связаны с нормальным распределением и формулируются в терминах преобразований Лежандра. Результаты, касающиеся сверхбольших уклонений, получены в некоторых работах (см., например, Джахангирова, Нагаев [1]); они очень сильно зависят от поведения «хвостов» распределения μ.

В соответствии с этим в общей схеме мы будем говорить о случае $\tau = h$ (или τ и h одного порядка), как о случае *очень больших уклонений*; о случае $\tau = o(h)$ (не надо забывать, что в то же время $\tau^{1/2}h^{-1} \to \infty$, т. е. $h = o(\tau^{1/2})$) — как о случае *не очень больших уклонений*; и о случае $h = o(\tau)$, $\tau \to 0$, — как о случае *сверхбольших уклонений*. В случае не очень больших уклонений мы будем требовать, чтобы $\int u\mu_{t,x}(du) = 0$ (иначе, в случае нормированных сумм независимых случайных величин, математическое ожидание при центрировании «забьет» уклонение порядка $o(\sqrt{n})$); в случаях очень больших и сверхбольших уклонений это неважно. Во всех случаях мы будем предполагать, что $b^{\tau,h}(t, x) \to b(t, x)$.

2. Кумулянта $G^{\tau,h}$ процесса $\xi^{\tau,h}(t)$ выражается следующим образом:

$$G^{\tau,h}(t, x; z) = \tau^{-1}\ln M_{t,x}^{\tau,h}\exp\{z(\xi^{\tau,h}(t) - x)\} = \\ = zb^{\tau,h}(t, x) + \tau^{-1}G_*(t, x; hz), \qquad (4.2.1)$$

$$G_*(t, x; z) = \ln\int_{R^r} e^{zu}\mu_{t,x}(du). \qquad (4.2.2)$$

Результаты о не очень больших уклонениях будут получены с использованием разложения Маклорена функции $G_*(t, x; z)$ по z.

3. В случае непрерывного времени мы будем рассматривать семейства локально безгранично делимых процессов $(\xi^{\tau, h}(t), \mathsf{P}^{\tau, h}_{t, x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, в R^r, зависящих от параметров τ, $h > 0$, с компенсирующими операторами вида

$$\mathfrak{A}^{\tau, h} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i b^{\tau, h, i}(t, x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) + \frac{\tau^{-1} h^2}{2} \sum_{i, j} a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) + \tau^{-1} \int_{R^r} \Big[f(t, x + hu) - f(t, x) - h \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) u^i \Big] \nu_{t, x}(du) \quad (4.2.3)$$

и с производящими операторами

$$A_t^{\tau, h} f(x) = \sum_i b^{\tau, h, i}(t, x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \frac{\tau^{-1} h^2}{2} \sum_{i, j} a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \tau^{-1} \int_{R^r} \Big[f(x + hu) - f(x) - h \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) u^i \Big] \nu_{t, x}(du). \quad (4.2.4)$$

Множитель $\tau^{-1} h^2$ при диффузионной части здесь выбран так, чтобы соответствовать скачкообразной (интегральной) части.

Случай $\tau = h \to 0$ мы будем называть случаем очень больших уклонений; случай $\tau h^{-1} \to 0$, $\tau h^{-2} \to \infty$ (откуда уже вытекает $\tau \to 0$, $h \to 0$) — случаем не очень больших уклонений; случай $h \to 0$, $\tau h^{-1} \to \infty$ — случаем сверхбольших уклонений (заметим, что в последнем случае, в отличие от дискретного времени, нет надобности требовать стремления τ к 0). Во всех случаях мы будем предполагать, что $b^{\tau, h}(t, x) \to b(t, x)$ при соответствующем изменении τ и h.

Кумулянта $G^{\tau, h}$ в случае непрерывного времени выражается, как и в случае дискретного времени, формулой

$$G^{\tau, h}(t, x; z) = z b^{\tau, h}(t, x) + \tau^{-1} G_*(t, x; hz), \quad (4.2.5)$$

$$G_*(t, x; z) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} a^{ij}(t, x) z_i z_j + \int_{R^r} (e^{zu} - 1 - zu) \nu_{t, x}(du). \quad (4.2.6)$$

4. Важный частный случай рассматриваемых схем — семейства процессов с независимыми приращениями, как с непрерывным так и с дискретным временем (т. е. процессы, которые строятся по суммам независимых случайных величин). Этот случай характеризуется тем, что $\mu_{t,x} \equiv \mu_t$, $b^{\tau,h}(t, x) \equiv 0$ (введение $b^{\tau,h}(t)$, не зависящего от x, не дает ничего нового). Теоремы последующих параграфов применимы к случаю процессов с независимыми приращениями. Большие уклонения для семейств процессов с независимыми приращениями были изучены Боровковым [1], Могульским [1]; из-за отсутствия зависимости локальных характеристик от x результаты получаются при более слабых ограничениях. Боровков, Могульский [1] получили результаты о больших уклонениях для процессов с независимыми приращениями в бесконечномерных пространствах.

5. В различных приложениях чаще всего естественно возникает вариант этой схемы с $\tau = h$ (случай очень больших уклонений), $b^{h,h}(t, x) \equiv b(t, x)$.

Рассмотрим пример. Пусть в некотором объеме V питательной среды размножаются бактерии. Пусть каждая бактерия в течение бесконечно малого промежутка времени dt делится надвое с вероятностью $\lambda_+ dt$ и погибает с вероятностью $\lambda_- dt$ (мы постулируем марковский характер процесса, что, разумеется, может годиться только в качестве первого приближения). Пусть скорости λ_+, λ_- размножения и гибели зависят от доступности бактериям питательных веществ и, в конечном итоге, от концентрации бактерий в данном объеме

$$\lambda_+ = \lambda_+ (N(t)/V), \quad \lambda_- = \lambda_- (N(t)/V),$$

где $N(t)$ — число бактерий в данный момент времени t.

Введем обозначение $\xi^V(t) = N(t)/V$. Процесс $\xi^V(t)$ зависит от параметра именно таким образом, как это указано в предыдущем пункте, с $\tau = h = V^{-1}$. Действительно, процесс ξ^V, начинающийся в момент t из точки x, стоит на месте в течение показательного времени; за время dt он перескакивает в точку $x + V^{-1}$ с вероятностью $N(t)\lambda_+ dt = V \cdot x\lambda_+(x)\, dt$ и в точку $x - V^{-1}$ с вероятностью $V \cdot x\lambda_-(x)\, dt$. Производящий оператор процесса задается формулой

$$A_t^V f(x) = V\,[x\lambda_+(x)(f(x + V^{-1}) - f(x)) + \\ + x\lambda_-(x)(f(x - V^{-1}) - f(x))].$$

Это сводится к формуле (4.2.4) с $\tau=h=V^{-1}$, $b(t, x)=x(\lambda_+(x)-\lambda_-(x))$ и мерой $\nu_{t,x}$, сосредоточенной в точках $+1$ и -1, $\nu_{t,x}\{1\}=x\lambda_+(x)$, $\nu_{t,x}\{-1\}=x\lambda_-(x)$.

Предельные теоремы при $\tau=h\to 0$ в данном примере — это теоремы об асимптотике поведения популяции бактерий при стремлении объема V к ∞ (т. е., в сущности, о поведении популяции при большом числе бактерий).

Второй пример, который мы рассмотрим,— эмпирическая функция распределения $F_n^*(t)$, построенная по n независимым одинаково распределенным случайным величинам $X_1, \ldots, X_n$. Эта случайная функция является марковской; она возрастает скачками величины $1/n$, и вероятность того, что скачок произойдет на отрезке от t до $t+dt$, при условии, что $F_n^*(t)=x$ (в предположении, что распределение случайных величин X_i — равномерное на отрезке от 0 до 1), равна $n\frac{1-x}{1-t}dt\,(0\leqslant t<1,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$. Производящий оператор A_t^n задается формулой

$$A_t^n f(x)=n\frac{1-x}{1-t}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

что приводится к виду (4.2.4) с $\tau=h=1/n$.

6. Пусть X — риманово многообразие класса $C^{(2)}$. Для $x\in X$, $u\in TX_x$ обозначим через $e(x, u)$ точку многообразия, получаемую сдвигом из x по геодезической в направлении u на расстояние, равное римановой длине $|u|_x$ вектора u (предполагаем, что любую геодезическую можно неограниченно продолжать). Пусть каждому $t\in[0, T)$, $x\in X$ поставлено в соответствие распределение $\mu_{t,x}$ на TX_x; и при любых $\tau>0$, $h>0$ определена функция $b^{\tau,h}(t, x)$ со значениями в TX_x (зависимость от x предполагается измеримой).

Будем рассматривать при $\tau>0$, $h>0$ марковский случайный процесс $(\xi^{\tau,h}(t), \mathsf{P}_{t,x}^{\tau,h})$ на X, устроенный следующим образом. Если процесс в момент t, кратный τ, находится в точке x, то он остается в ней в течение промежутка времени $[t, t+\tau)$, а в момент $t+\tau$ перескакивает в точку $e(x, \tau b^{\tau,h}(t, x)+hU)$, где U — случайный вектор из TX_x с распределением $\mu_{t,x}$.

Классификация больших уклонений здесь остается такой же.

В работе Азенкотта, Рюже [1] была получена теорема о больших уклонениях для такой схемы в случае очень больших уклонений. Аналогичный результат, но при несколько других предположениях мы выведем из общих результатов предыдущей главы в § 4.3.

Мы не будем вводить вариант этой схемы на многообразии с непрерывным временем, потому что не собираемся приводить конкретные результаты, входящие в такую схему.

7. Получаемые нами теоремы о больших уклонениях для случайных процессов, как и теоремы для сумм независимых случайных величин, в случае не очень больших уклонений (см. §§ 4.4, 4.5) еще сохраняют связь с нормальным распределением и диффузионными процессами; а именно, нормированный функционал действия получается в виде интеграла от квадратической функции H_0 вида (4.1.2). В случае очень больших уклонений (§ 4.3) эта связь теряется, функция H_0 выражается при помощи преобразования Лежандра через экспоненциальные моменты. Для сверхбольших уклонений получаются только очень частные результаты.

8. Можно рассматривать различные другие схемы марковских процессов с частыми малыми скачками. В частности, в работе Варадана [1] рассматривается схема сумм независимых случайных величин со специальным образом подобранными распределениями. Приведем конструкцию этой работы, приблизив обозначения к нашим.

Пусть $g(z)$ — конечная выпуклая вниз функция на прямой, $g(0)=0$. Определим функцию $h(u)$ как ее преобразование Лежандра; предполагается, что $h(u) < +\infty$ на каком-то интервале. Пусть a_n — числовая последовательность, $\frac{a_n}{n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Рассмотрим независимые случайные величины $X_{n,j}$ с плотностью распределения $c_n \exp\left\{-\frac{a_n}{n} h(u)\right\}$; положим $\xi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{[nt]} X_{n,j}$.

В работе Варадана [1] доказывается, что функционал действия для семейства процессов ξ_n при $n \to \infty$ имеет вид $a_n S_{0,T}(\varphi)$, где $S_{0,T}(\varphi) = \int_0^T h(\dot\varphi(t))\,dt$.

Этот результат не подпадает под нашу классификацию очень больших, не очень больших, сверхбольших уклонений.

Покажем, как его можно вывести из теоремы 3.2.3′, если ввести дополнительно предположение, что функции

$g(z)$, $h(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы (последняя — в том интервале, где она конечна).

Выполнение условий **А—Д** очевидно. В качестве параметра θ здесь выступает n, $\theta \to$ означает $n \to \infty$, $k(\theta) = a_n$, $\tau(\theta) = n^{-1}$. Вычисляем кумулянту, соответствующую значению параметра n:

$$G_n(z) = n \ln \int \exp\left\{\frac{zu}{n}\right\} \cdot c_n \exp\left\{-\frac{a_n}{n} h(u)\right\} du.$$

Лемма 2.2 из работы Варадана утверждает, что при $n \to \infty$

$$G_n(a_n z) = a_n [g(z) + o(1)]. \tag{4.2.7}$$

Легко уточнить это утверждение, установив, что (4.2.7) выполняется равномерно по z в любой ограниченной области; это дает нам выполнение условия (3.2.1). Применение метода Лапласа к интегралам

$$\int u \exp\left\{\frac{a_n}{n}[zu - h(u)]\right\} du,$$

$$\int (u-u_0)^2 \exp\left\{\frac{a_n}{n}[zu - h(u)]\right\} du$$

дает нам выполнение также условий (3.2.2), (3.2.3); и применение теоремы 3.2.3′ дает нужный результат.

§ 4.3. Случай очень больших уклонений

1. Теорема 4.3.1.— 2. Теорема 4.3.2; обобщение в одномерном случае.— 3. Примеры.— 4. Диффузионные процессы с малой диффузией.— 5. Теорема 4.3.4.

1. Теорема 4.3.1. *Пусть дано семейство марковских процессов одного из двух классов, описанных в п. п. 1, 3 предыдущего параграфа, с* $\tau = h$: $(\xi^{h,h}(t), \mathsf{P}^{h,h}_{t,x})$. *Пусть* $b^{h,h}(t, x) \to b(t, x)$ *при* $h \to 0$ *равномерно по* t, x. *Пусть функции* $G_0(t, x; z) = zb(t, x) + G_*(t, x; z)$ *и* $H_0(t, x; u) \leftrightarrow G_0(t, x; z)$ *удовлетворяют условиям* **А—Д** §§ 3.1, 3.2, *функционал* $S_{0,T}(\varphi)$ *задается формулой* (3.1.1).

Тогда $h^{-1} S_{0,T}(\varphi)$ *является функционалом действия для* $(\xi^{h,h}(t), \mathsf{P}^{h,h}_{t,x})$ *при* $h \to 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство — непосредственное применение теорем 3.2.3, 3.2.3′. Из представлений (4.2.2), (4.2.6) для функции $G_*(t, x; z)$ вытекает, что она (а значит, и функция $G_0(t, x; z)$) бесконечно дифференцируема по z, и производные по z в любом компактном множестве измене ния z равномерно по t, x оцениваются через верхнюю грань значений самой функции в несколько большем множестве. Отсюда получаем выполнение условий (3.2.2), (3.2.3) (а то, что выполнено условие (3.2.1),—тривиально). □

2. Теорема 4.3.2. *Пусть* $(\xi^{h, h}(t), \mathsf{P}^{h, h}_{t, x})$, $h > 0$,— *такое же семейство процессов, как в предыдущей теореме; пусть* $b^{h, h}(t, x) \equiv b(t, x)$. *Пусть для функций* $G_0(t, x; z) = zb(t, x) + G_*(t, x; z)$ *и* $H_0 \leftrightarrow G_0$ *выполнены условия* **А**, **Б**, **В**, *а вместо условий* **Г**, **Д**—*следующие условия*:

Г′. *В множестве* $\{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$ *есть хотя бы одна внутренняя точка* u_0, *и* $\sup\limits_{t, x} H_0(t, x; u_0) < \infty$.

Г″. *Множество тех точек* u *из замыкания* $\overline{U}$ *множества* $\{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$, *для которых* $\underline{H}_0(u) = \infty$, *замкнуто*.

Д′. *Для любого компакта* $U_K \subseteq \{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$ *функция* $H_0(t, x; u)$ *равномерно непрерывна по* u *при всех* t, x *и всех* $u \in U_K$.

Д″. *Для любого компакта* U_K, *состоящего целиком из внутренних точек множества* $\{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$, *градиент* $\nabla_u H_0(t, x; u)$ *ограничен и непрерывен по* u *равномерно по всем* t, x *и* $u \in U_K$.

Тогда $h^{-1} S_{0, T}(\varphi)$—*функционал действия для семейства процессов* $\xi^{h, h}(t)$ *при* $h \to 0$, *равномерно относительно начальной точки*.

Доказательство воспроизводит с некоторым упрощением доказательство теорем § 3.2 (упрощение состоит в том, что вместо теоремы 2.3.2 используется теорема 2.3.1, и нет надобности вводить функционал $\tilde{I}^h_{T_1, T_2}(\varphi)$, отличный от функционала действия); используется замечание к теоремам 2.3.1, 2.3.2, позволяющее ограничиться значениями u, принадлежащими множеству $\overline{U}$. □

Теорема 4.3.2 допускает более широкий класс кумулянт $G_0(t, x; z)$, чем теорема 4.3.1; в одномерном случае этот класс можно еще расширить. Во-первых, условие **Г″** выполняется тривиальным образом, потому что множество, о котором идет речь, состоит максимум из двух точек; во-вторых, условие **Д′** можно заменить условием равномерной ограниченности функции $H_0(t, x; u)$ на каждом компакте $U_K \subseteq \{u: \underline{H}_0(u) < \infty\}$.

3. **Конкретный пример.** Пусть функции $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_{-1}(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$ от $t \in [0, T)$, $x \in R^r$ равномерно непрерывны и ограничены сверху и снизу положительными константами. Пусть марковский процесс $\xi^h(t)$ со значе-

ниями в R^2, находясь в момент t в точке x, совершает скачки величины h по первой координате с плотностью $h^{-1}\lambda_1(t, x)$, величины $-h$ по первой координате с плотностью $h^{-1}\lambda_{-1}(t, x)$, величины h по второй координате — с плотностью $h^{-1}\lambda_2(t, x)$, а между скачками остается на месте. Здесь

$$G_0(t, x; z)=\lambda_1(t, x)(e^{z_1}-1)+ \\ +\lambda_{-1}(t, x)(e^{-z_1}-1)+\lambda_2(t, x)(e^{z_2}-1);$$

$$H_0(t, x; u)= \\ =u^1\ln\frac{u^1+\sqrt{(u^1)^2+4\lambda_1(t, x)\lambda_{-1}(t, x)}}{2\lambda_1(t, x)}- \\ -\sqrt{(u^1)^2+4\lambda_1(t, x)\lambda_{-1}(t, x)}+\lambda_1(t, x)+\lambda_{-1}(t, x)+ \\ +u^2\ln\frac{u^2}{\lambda_2(t, x)}-u^2+\lambda_2(t, x).$$

Условия **А**—**В**, **Г′**, **Г″**, **Д′**, **Д″** выполнены, в частности, $\{u\colon \underline{H}_0(u)<\infty\}=\{u=(u^1, u^2)\colon u^2\geqslant 0\}$, а в условии **Г′** можно взять $u_0=(0, 1)$.

Для эмпирической функции распределения (см. п. 4 предыдущего параграфа) условия теоремы 4.3.2 (и даже более слабые условия, приведенные в п. 3) не выполнены, потому что соответствующая функция $G_0(t, x; z)=$ $=\frac{1-x}{1-t}(e^z-1)$ имеет особенность при $t=1$ и обращается в нуль при $x=1$. Произведем, тем не менее, вычисления:

$$H_0(t, x; u)= \\ =u\ln(1-t)-u\ln(1-x)+u\ln u-u+\frac{1-x}{1-t};$$

$$S_{0,1}(\varphi)= \\ =\int_0^1\dot\varphi(t)\ln(1-t)\,dt-\int_0^1\dot\varphi(t)\ln(1-\varphi(t))\,dt+ \\ +\int_0^1\dot\varphi(t)\ln\dot\varphi(t)\,dt-\int_0^1\dot\varphi(t)\,dt+\int_0^1\frac{1-\varphi(t)}{1-t}\,dt= \\ =\int_0^1\dot\varphi(t)\ln\dot\varphi(t)\,dt.$$

Итак, функционал $S_{0,1}(\varphi)$ оказывается равным взятой с минусом энтропии распределения с функцией распределения $\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. То, что $n\cdot S_{0,1}(\varphi)$ — функционал действия для эмпирической функции распределения при $n \to \infty$, не вытекает из наших результатов; этот факт был установлен И. Н. Сановым [1].

Заметим, что для эмпирической функции распределения обобщенное преобразование Крамера (см. § 2.2) имеет довольно прозрачный смысл. Вычисления показывают, что если взять в качестве функции $z^n(t, x)$ не зависящую от x функцию

$$n[\ln(1-t)-\ln(1-\varphi(t))+\ln\dot{\varphi}(t)],$$

то обобщенное преобразование Крамера состоит в замене равномерно распределенных случайных величин независимыми величинами, имеющими функцию распределения $\varphi(t)$ (а плотность $\pi(0, 1)$ оказывается равной отношению правдоподобия). На этом можно основывать доказательство теорем о больших уклонениях для эмпирических функций распределения; возможны различные обобщения (см., например, Бахадур [1]).

4. Важный класс семейств марковских процессов, зависящих от параметра,— диффузионные процессы с малой диффузией в евклидовом пространстве или на многообразии.

Теорема 4.3.3. *Пусть дано многообразие класса $C^{(2)}$ с выделенным атласом, удовлетворяющим условию λ. Пусть $(\xi^h(t), \mathsf{P}^h_{t,x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при каждом $h > 0$ — диффузионный процесс на этом многообразии с производящим оператором A^h_t, описываемым в локальных координатах формулой*

$$A^h_t f(x) = \sum_i b^{h,i}(t, x)\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{h}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j},$$

причем $b^{h,i}(t, x) \to b^i(t, x)$ равномерно по t, по x в пределах действия данной карты и по всем картам из выделенного атласа. Пусть $b^i(t, x)$, $a^{ij}(t, x)$ ограничены и непрерывны равномерно по всем t, x и всем картам из выделенного атласа; пусть обратная матрица $(a_{ij}(t, x)) = (a^{ij}(t, x))^{-1}$ обладает теми же свойствами.

Тогда $h^{-1} S_{0,T}(\varphi)$, где

$$S_{0,T}(\varphi) = \int_0^T \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t, \varphi(t)) \times \\ \times (\dot{\varphi}^i(t) - b^i(t, \varphi(t)))(\dot{\varphi}^j(t) - b^j(t, \varphi(t)))\,dt,$$

есть функционал действия рассматриваемого семейства процессов при $h \to 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство состоит в применении теоремы 3.3.2. □

Введенное в предыдущем параграфе разделение на очень большие, не очень большие и сверхбольшие уклонения здесь несущественно: данная схема подходит под все три случая. Результаты, касающиеся больших уклонений для диффузионных процессов с малой диффузией, получены Вентцелем, Фрейдлиным [1], [4].

5. Пусть X — компактное r-мерное риманово многообразие класса $C^{(2)}$. Пусть $(\xi^{h, h}(t), \mathsf{P}^{h, h}_{t, x})$ при каждом $h > 0$ — марковский процесс вида, описанного в п. 6 предыдущего параграфа, с $\tau = h$; пусть $b^{h, h}(t, x) \to 0$ при $h \to 0$ равномерно по t, x. Определим функцию $G_0(t, x; z)$ от $t \in [0, T)$, $x \in X$, $z \in T^*X_x$ формулой

$$G_0(t, x; z) = \ln \int_{TX_x} e^{zu} \mu_{t, x}(du),$$

и рассмотрим функцию $H_0(t, x; u) \leftrightarrow G_0(t, x; z)$. Для абсолютно непрерывных $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, со значениями в X положим

$$S_{0, T}(\varphi) = \int_0^T H_0(t, \varphi(t); \dot{\varphi}(t))dt,$$

для прочих $S_{0, T}(\varphi) = +\infty$.

Теорема 4.3.4. *Пусть функции* G_0, H_0 *удовлетворяют условиям* **А—Д**. *Тогда* $h^{-1} S_{0, T}(\varphi)$ *является функционалом действия для семейства процессов* $\xi^{h, h}(t)$ *при* $h \to 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство. Положим $V = \{(x, y): \rho(x, y) < \rho_0\}$, где ρ_0 — положительное число. Нужно проверить выполнение условий (3.3.1′), (3.3.2)—(3.3.4) с h в качестве θ, $\tau(\theta) = h$ и $k(\theta) = h^{-1}$, и воспользоваться теоремой 3.3.2′. В силу устройства процесса $\xi^{h, h}(t)$ имеем при t, кратных h: $\mathsf{P}^{h, h}_{t, x}\{\rho(x, \xi^{h, h}(t+h)) \geqslant \rho_0\} = \mu_{t, x}(\overline{A^h_{t, x}})$, где $A^h_{t, x} = \{u \in TX_x: \rho(x, e(x, hb^{h, h}(t, x) + hu)) < \rho_0\}$. Так как $\rho(x, e(x, u)) \leqslant |u|_x$ (при малых $|u|_x$ имеет место равенство), то $\overline{A^h_{t, x}} \subseteq \{u: |hb^{h, h}(t, x) + hu|_x \geqslant \rho_0\}$. При достаточно малых h имеем: $|hb^{h, h}(t, x)|_x < \rho_0/2$, и $\overline{A^h_{t, x}} \subseteq$

$\subseteq \{u\colon |u|_x \geqslant \rho_0/2h\}$. Отсюда

$$\mathsf{P}_{t,x}^{h,h}\{\rho(x, \xi^{h,h}(t+h)) \geqslant \rho_0\} \leqslant \mu_{t,x}\{u\colon |u|_x \geqslant \rho_0/2h\}.$$

Выбираем натуральное n, положительное d и при каждом x единичные векторы $z(1), \ldots, z(n) \in T^*X_x$ так, чтобы многогранник $\{u\colon z(i)u < d,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ лежал внутри единичного шара $\{u\colon |u|_x < 1\}$. Тогда для произвольного $a > 0$ в силу неравенства Чебышёва

$$\mu_{t,x}\{u\colon |u|_x \geqslant \rho_0/2h\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_{t,x}\{u\colon z(i)u \geqslant d\rho_0/2h\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{TX_x} e^{az(i)u}\,\mu_{t,x}(du)\cdot e^{-ad\rho_0/2h} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} e^{G_0(t,\ x;\ az(i))}\, e^{-ad\rho_0/2h} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} e^{\overline{G}_0\left(az(i)A_x^{-1}\right)}\, e^{-ad\rho_0/2h} \leqslant$$
$$\leqslant n \exp\{\max_{|z| \leqslant Ca} \overline{G}_0(z)\}\, e^{-ad\rho_0/2h}.$$

Здесь C — верхняя грань $|zA_x^{-1}|$ по всем $x \in X$, $z \in T^*X_x$ с $|z|_x = 1$ и всем картам из выделенного на X атласа; она конечна в силу условия λ, наложенного на атлас.

Из этих оценок вытекает, что

$$\varlimsup_{h \downarrow 0} h \ln \sup_{t,x} \mathsf{P}_{t,x}^{h,h}\{\rho(x, \xi^{h,h}(t+h)) \geqslant \rho_0\} \leqslant -a\,d\rho_0/2.$$

Раз $a > 0$ произвольно, то

$$\lim_{h \downarrow 0} h \ln \sup_{t,x} \mathsf{P}_{t,x}^{h,h}\{\rho(x, \xi^{h,h}(t+h)) \geqslant \rho_0\} = -\infty.$$

Добавление множителя h^{-1} под знаком логарифма не влияет на предел, и условие (3.3.1′) выполняется.

Выпишем теперь урезанную кумулянту от аргумента $h^{-1}z$ и ее производные, умноженные на h:

$$hG_V^{h,h}(t,\ x;\ h^{-1}z) =$$
$$= \ln\left[\mu_{t,x}(\overline{A_{t,x}^h}) + \int\limits_{A_{t,x}^h} \exp\{h^{-1}z\Delta\psi\}\,\mu_{t,x}(du)\right],$$

где $\Delta\psi=\psi(e(x, hb^{h,h}(t,x)+hu))-\psi(x)=(\Delta\psi^1, \ldots, \Delta\psi^r)$. Обозначим выражение в квадратных скобках Ψ^h. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(hG_V^{h,h}(t, x; h^{-1}z))=$$
$$=(\Psi^h)^{-1}\int\limits_{A_{t,x}^h} h^{-1}\Delta\psi^i e^{h^{-1}z\Delta\psi}\,d\mu_{t,x},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j}(hG_V^{h,h}(t, x; h^{-1}z))=$$
$$=(\Psi^h)^{-1}\int\limits_{A_{t,x}^h} h^{-2}\Delta\psi^i\,\Delta\psi^j e^{h^{-1}z\Delta\psi}\,d\mu_{t,x}+$$
$$+(\Psi^h)^{-2}\int\limits_{A_{t,x}^h} h^{-1}\Delta\psi^i e^{h^{-1}z\Delta\psi}\,d\mu_{t,x}\int h^{-1}\Delta\psi^j e^{h^{-1}z\Delta\psi}\,d\mu_{t,x}.$$

В этих интегралах $h^{-1}\Delta\psi\longrightarrow A_x u$, $e^{h^{-1}z\Delta\psi}\longrightarrow e^{zA_xu}$ при $h\downarrow 0$, причем равномерно по $|z|\leqslant z_0<\infty$, $|u|_x\leqslant u_0<\infty$, по всем картам (W, ψ) из нашего атласа и по всем x, $\rho(x, X\setminus W)>\lambda/4$. Равномерная сходимость интегралов обеспечивается соотношением $\sup\limits_x \mu_{t,x}\{u: |u|_x\geqslant u_0\}\longrightarrow 0$ при $u_0\longrightarrow\infty$ и тем, что функции под знаком интеграла мажорируются равномерно интегрируемыми относительно мер $\mu_{t,x}$ функциями $\mathrm{const}(1+|u|_x^2)\exp\{\mathrm{const}\cdot z_0\cdot|u|_x\}$.

Получаем, что функция $hG_V^{h,h}(t, x; h^{-1}z)$ и ее производные равномерно стремятся при $h\downarrow 0$ к $G_0(t, x; zA_x)$ и производным этой функции и выполнены (3.3.2)—(3.3.4).

Это доказывает теорему. □

Полученный результат близок к результату Азенкотта, Рюже [1], но условия **А—Д** отличаются от условий этой работы. В частности, вместо наиболее сложного условия **В**, которое для области небольших значений функции H_0 сводится к равномерной непрерывности этой функции, в работе Азенкотта, Рюже [1] налагается другое ограничение, которое в области небольших значений H_0 сводится к выполнению условия Липшица; зато в области больших значений H_0 условия этой работы могут быть менее ограничительны.

Условия **А—Д**, как мы видели, выполняются для процесса сдвигов по геодезическим с равномерным распределением по направлению и с распределением μ по радиусу, удовлетворяющим условиям п. 2 § 4.1; функционал действия имеет в этом случае вид $h^{-1}\int\limits_0^T A_0(|\dot\varphi(t)|_{\varphi(t)})\,dt$.

§ 4.4. Случай не очень больших уклонений

1. Теорема 4.4.1. *Пусть дано семейство марковских процессов одного из двух классов, описанных в п. п.* 1, 3 § 4.2. *Пусть функция* G_* (*определяемая формулой* (4.2.2) *или* (4.2.6)) *конечна и ограничена при всех* t, x *и всех достаточно малых* $|z|$; *пусть* $\nabla_z G_*(t, x; 0) \equiv 0$; *пусть матрица* $(A^{ij}(t, x)) = \left(\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; 0)\right)$ *ограничена, равномерно положительно определена и равномерно непрерывна по* t, x. *Положим*

$$(A_{ij}(t, x)) = (A^{ij}(t, x))^{-1}. \tag{4.4.1}$$

Пусть $b^{\tau, h}(t, x) \longrightarrow b(t, x)$ *равномерно по* t, x *при* $\tau h^{-2} \longrightarrow \infty$, $\tau h^{-1} \longrightarrow 0$, *причем функция* $b(t, x)$ *ограничена и равномерно непрерывна по* t, x. *Положим*

$$H_0(t, x; u) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i, j} A_{ij}(t, x)(u^i - b^i(t, x))(u^j - b^j(t, x)). \tag{4.4.2}$$

Зададим функционал $S_{0, T}(\varphi)$ *формулой* (3.1.1).

Тогда $\tau h^{-2} S_{0, T}(\varphi)$ *является функционалом действия для семейства процессов* $(\xi^{\tau, h}(t), \mathsf{P}_{t, x}^{\tau, h})$ *при* $\tau h^{-2} \longrightarrow \infty$, $\tau h^{-1} \longrightarrow 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство. Применяем теорему 3.2.3 или 3.2.3′, беря в качестве θ векторный параметр (τ, h), придавая $\theta \longrightarrow$ смысл $\tau h^{-2} \longrightarrow \infty$, $\tau h^{-1} \longrightarrow 0$, полагая $k(\theta) = \tau h^{-2}$ и, в дискретном случае, $\tau(\theta) = \tau$.

Из ограниченности G_* при малых $|z|$ вытекает ограниченность, скажем, третьих производных по z при малых $|z|$, и, используя разложение Маклорена для функции G_*, получаем, что выполняются соотношения (3.2.1)—(3.2.3) с

$$G_0(t, x; z) = zb(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} A^{ij}(t, x) z_i z_j.$$

Эта функция удовлетворяет условиям **А**—**Д**, а ее преобразование Лежандра есть H_0. Это доказывает теорему. □

2. Будем рассматривать случай дискретного времени. Условие $\nabla_z G_*(t, x; 0) \equiv 0$ можно переписать в виде

$\int u\, d\mu_{t,x} \equiv 0$, а выражение для $A^{ij}(t, x)$ — в виде

$$A^{ij}(t, x) = \int\limits_{R^r} u^i u^j \mu_{t,x}(du). \qquad (4.4.3)$$

Таким образом, мы можем выписать функционал $S_{0,T}(\varphi)$ и без предположения о существовании экспоненциальных моментов.

Покажем, что $\tau h^{-2} S_{0,T}(\varphi)$ остается функционалом действия для рассматриваемого семейства процессов и без этого предположения, но только для τh^{-1}, стремящихся к нулю достаточно быстро.

Субэкспоненциальный случай.

Теорема 4.4.2. *Пусть* $\mu_{t,x}\{u: |u| \geqslant y\} \leqslant \exp\{-Ky^\beta\}$ *при всех* t, x, y, *где* $0 < \beta < 1$, $K > 0$; $\int\limits_{R^r} u\mu_{t,x}(du) = 0$ *при всех* t, x. *Пусть матрица* $(A^{ij}(t, x))$ *ограничена, равномерно положительно определена и равномерно непрерывна по* t, x; *пусть* $b^{\tau,h}(t, x) \to b(t, x)$ *равномерно по* t, x *при* $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2+\beta} \to 0$, *причем функция* $b(t, x)$ *ограничена и равномерно непрерывна по* t, x.

Тогда $\tau h^{-2} S_{0,T}(\varphi)$, *где* $S_{0,T}(\varphi)$ *задается формулами* (3.1.1), (4.4.3), (4.4.1), (4.4.2), — *функционал действия для семейства процессов* $\xi^{\tau,h}(t)$ *при* $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2+\beta} \to 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство. Применяем теорему 3.3.2′. Полагаем $V = \{(x, y): |x - y| < 1\}$. Проверяем (3.3.1′):

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{\tau,h}_{t,x}\{(x, \xi^{\tau,h}(t+\tau)) \notin V\} &= \\ = \mu_{t,x}\{u: |u - \tau h^{-1} b^{\tau,h}(t, x)| \geqslant h^{-1}\} &\leqslant \\ \leqslant \mu_{t,x}\{u: |u| \geqslant h^{-1}/2\} &\leqslant \exp\{-K(2h)^{-\beta}\} \end{aligned}$$

при достаточно больших τh^{-2} и малых $\tau h^{-2+\beta}$, откуда

$$\tau^{-1} h^2 \ln\Big[\tau^{-1} \sup_{t,x} \mathsf{P}^{\tau,h}_{t,x}\{(x, \xi^{\tau,h}(t+\tau)) \notin V\}\Big] \leqslant \\ \leqslant \tau^{-1} h^2 (-\ln\tau - K(2h)^{-\beta}).$$

Так как τ стремится к нулю медленнее, чем h^2, то $|\ln\tau| \leqslant |\ln h^2|$, и этим логарифмом можно пренебречь по сравнению со вторым членом; предел (3.3.1′) равен $-\infty$.

Теперь вычислим урезанную кумулянту и проверим выполнение (3.3.2)—(3.3.4). Имеем:

$$(\tau h^{-2})^{-1} G_V^{\tau, h}(t, x; \tau h^{-2} z) = \tau^{-2} h^2 \ln \Bigg[1 + \\ + \int\limits_{|u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}} (\exp\{Q_{t, x}^{\tau, h}(z, u)\} - 1)\, \mu_{t, x}(du) \Bigg],$$

где $Q_{t, x}^{\tau, h}(z, u) = \tau^2 h^{-2} z b^{\tau, h}(t, x) + \tau h^{-1} z u$. Требуется доказать, что при $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2+\beta} \to 0$ это выражение равномерно по t, x и по z, $|z| \leqslant z_0 = \mathrm{const} < \infty$ стремится к

$$G_0(t, x; z) = z b(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} A^{ij}(t, x) z_i z_j.$$

Достаточно доказать, что к этому пределу равномерно стремится

$$\tau^{-2} h^2 \int\limits_{|u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}} (\exp\{Q_{t, x}^{\tau, h}(z, u)\} - 1)\, \mu_{t, x}(du) = \\ = \int\limits_{|u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}} \tau^{-2} h^2 (\exp\{Q_{t, x}^{\tau, h}(z, u)\} - \\ - 1 - Q_{t, x}^{\tau, h}(z, u))\, \mu_{t, x}(du) + \\ + z b^{\tau, h}(t, x)\, \mu_{t, x}\{u : |u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}\} + \\ + \tau^{-1} h \int\limits_{|u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}} z u \mu_{t, x}(du).$$

Второй член здесь равномерно сходится к $zb(t, x)$ в силу равномерной сходимости $b^{\tau, h}(t, x) \to b(t, x)$ и оценки $1 - \mu_{t, x}\{u : |u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}(t, x)| < h^{-1}\} \leqslant$

$$\leqslant 4h^2 \int |u|^2 \mu_{t, x}(du) = 4h^2 \sum_i A^{ii}(t, x) \leqslant \mathrm{const} \cdot h^2 \to 0.$$

Третий член равен $-\tau^{-1} h \int\limits_{|u - \tau h^{-1} b^{\tau, h}| \geqslant h^{-1}} z u \mu_{t, x}(du)$ и

по модулю не превосходит

$$2\tau^{-1} h^2 z_0 \int |u|^2 d\mu_{t, x} \leqslant \mathrm{const} \cdot \tau^{-1} h^2 \to 0.$$

Первый член мы разобьем на I_1 — интеграл по $|u| < \tau^{-1/4} h^{1/4}$ и I_2 — по остальным u.

Функция $\tau^{-2}h^2(\exp\{Q_{t,x}^{\tau,h}(z,u)\}-1-Q_{t,x}^{\tau,h}(z,u))$ равномерно по $|z|\leqslant z_0$, $|u|<\tau^{-1/4}h^{1/4}$ стремится к $(zu)^2/2$, и интеграл I_1 равномерно стремится к $\frac{1}{2}\sum_{i,j}A^{ij}(t,x)z_iz_j$. Оцениваем I_2, пользуясь неравенством $|e^a-1-a|\leqslant\leqslant e^{|a|}-1-|a|<e^{|a|}$: при $|z|\leqslant z_0$

$$|I_2|\leqslant\tau^{-2}h^2\exp\{\tau^2h^{-2}z_0|b^{\tau,h}(t,x)|\}\times\times\int\limits_{\tau^{-1/4}h^{1/4}\leqslant|u|<2h^{-1}} e^{\tau h^{-1}z_0|u|}\mu_{t,x}(du).$$

Экспонента вне знака интеграла стремится равномерно к 1. Последний интеграл равен

$$\int\limits_{[\tau^{-1/4}h^{1/4},\,2h^{-1})} e^{\tau h^{-1}z_0y}\,d(-\mu_{t,x}\{u:\ |u|\geqslant y\})=$$
$$=-e^{\tau h^{-1}z_0y}\mu_{t,x}\{u:\ |u|\geqslant y\}\Big|_{\tau^{-1/4}h^{1/4}}^{2h^{-1}}+$$
$$+\int\limits_{\tau^{-1/4}h^{1/4}}^{2h^{-1}}\mu_{t,x}\{u:\ |u|\geqslant y\}\,de^{\tau h^{-1}z_0y}\leqslant$$
$$\leqslant e^{z_0\tau^{3/4}h^{-3/4}}\exp\{-K(\tau^{-1/4}h^{1/4})^\beta\}+$$
$$+\tau h^{-1}z_0\int\limits_{\tau^{-1/4}h^{1/4}}^{2h^{-1}}\exp\{-Ky^\beta+\tau h^{-1}z_0y\}\,dy.$$

В первом члене здесь $\tau^{3/4}h^{-3/4}\to 0$, первая экспонента стремится к 1, и весь член стремится к нулю экспоненциально быстро. В интегральном члене, получившемся после интегрирования по частям, производная по y от показателя экспоненты равна $\tau h^{-1}z_0-K\beta y^{\beta-1}\leqslant\tau h^{-1}z_0-K\beta(h/2)^{1-\beta}<-Ch^{1-\beta}$, $C>0$, если только $\tau h^{-2+\beta}$ достаточно мало, и этот член не превосходит

$$\tau h^{-1}z_0\exp\{-Ky^\beta+\tau h^{-1}z_0y\}\big|_{y=\tau^{-1/4}h^{1/4}}\times$$
$$\times\int\limits_{\tau^{-1/4}h^{1/4}}^{2h^{-1}}\exp\{-Ch^{1-\beta}(y-\tau^{-1/4}h^{1/4})\}\,dy<$$
$$<\exp\{z_0\tau^{3/4}h^{-3/4}-K(\tau^{-1/4}h^{1/4})^\beta\}.$$

Окончательно получаем: $|I_2|\leqslant\mathrm{const}\cdot\tau^{-2}h^2\exp\{-K\times\times(\tau^{-1/4}h^{1/4})^\beta\}\to 0$, что доказывает (3.3.2).

Совершенно так же проверяются (3.3.3) и (3.3.4). Теорема доказана. □

Соответствующий результат для процессов, получающихся из сумм независимых случайных величин, доказан в работе Могульского [1], теорема 1.

Этот результат аналогичен результатам о больших уклонениях порядка $o(n^{\beta/(4-2\beta)})$ для нормированных сумм n независимых одинаково распределенных случайных величин X_i с $\mathsf{P}\{|X_i|\geqslant y\}\leqslant e^{-Ky^\beta}$ (ср. Ибрагимов, Линник [1], теорема 13.1.1, где речь идет, конечно, о точных результатах, а не о грубых, как у нас).

3. Такие же результаты можно получить для семейств процессов с непрерывным временем. Пусть $(\xi^{\tau,h}(t), \mathsf{P}_{t,x}^{\tau,h})$ — семейство процессов вида, описанного в п. 3 § 4.2. Положим

$$A^{ij}(t, x)=a^{ij}(t, x)+\int\limits_{R^r} u^i u^j \nu_{t,x}(du). \qquad (4.4.4)$$

Теорема 4.4.2′. *Пусть* $\nu_{t,x}\{u: |u|\geqslant y\}\leqslant \exp\{-Ky^\beta\}$ *при всех* t, x, $y\geqslant y_0$, *где* $0<\beta<1$, $K>0$. *Пусть матрица* $(A^{ij}(t, x))$ *ограничена, равномерно положительно определена и равномерно непрерывна по* t, x; *пусть* $b^{\tau,h}(t, x)\longrightarrow b(t, x)$ *равномерно по* t, x *при* $\tau h^{-2}\longrightarrow\infty$, $\tau h^{-2+\beta}\longrightarrow 0$, *причем функция* $b(t, x)$ *ограничена и равномерно непрерывна по* t, x.

Тогда $\tau h^{-2}S_{0,T}(\varphi)$, *где* $S_{0,T}(\varphi)$ *задается формулами* (3.1.1), (4.4.4), (4.4.1), (4.4.2) — *функционал действия для семейства процессов* $(\xi^{\tau,h}(t), \mathsf{P}_{t,x}^{\tau,h})$ *при* $\tau h^{-2}\longrightarrow\infty$, $\tau h^{-2+\beta}\longrightarrow 0$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство такое же, как в теореме 4.4.2, но чуть-чуть проще, потому, в частности, что вместо множества $\{u: |u-\tau h^{-1}b^{\tau,h}(t, x)|<h^{-1}\}$ рассматривается $\{u: |u|<h^{-1}\}$. □

4. Случай степенных «хвостов».

Теорема 4.4.3. *Пусть* $(\xi^{\tau,h}(t), \mathsf{P}_{t,x}^{\tau,h})$ — *семейство марковских процессов одного из двух классов, описанных в п.п.* 1, 3 § 4.2; *функция* $(A^{ij}(t, x))$ *определяется формулой* (4.4.3) *или* (4.4.4). *Пусть выполняются условия* $\mu_{t,x}\{u: |u|\geqslant y\}\leqslant Cy^{-\beta}$, $\beta>2$, $C>0$, $\int u\,d\mu_{t,x}\equiv 0$ *или соответствующее условие на* $\nu_{t,x}$. *Пусть матрица* $(A^{ij}(t, x))$ *ограничена, равномерно положительно определена и равномерно непрерывна по* t, x; *пусть* $b^{\tau,h}(t, x)\longrightarrow b(t, x)$ *равномерно по* t, x *при* $h\longrightarrow 0$, $\tau h^{-2}\longrightarrow\infty$, $\tau h^{-2}=o(\ln h^{-1})$, *предельная функция ограничена и равномерно непрерывна.*

Тогда $\tau h^{-2}S_{0,T}(\varphi)$ — *функционал действия для рассматриваемого семейства процессов при* $h \to 0$, $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2} = o(\ln h^{-1})$, *равномерно относительно начальной точки.*

Доказательство на этот раз проведем для случая непрерывного времени. Применим теорему 3.2.3. Берем $V = \{(x, y)\colon |x - y| < 1\}$; проверяем (3.3.1): при $h \to 0$, $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2} = o(\ln h^{-1})$

$$\tau^{-1}h^2 \sup_{t,\,x} \ln \lambda_{t,\,x}^{\tau,\,h}\{y\colon (x, y) \notin V\} \leqslant \tau^{-1}h^2 \ln(Ch^{\beta}) \to -\infty.$$

Проверим условие (3.3.2). Найдем урезанную кумулянту $G_V^{\tau,\,h}(t, x; z)$ и $\tau^{-1}h^2 G_V^{\tau,\,h}(t, x; \tau h^{-2}z)$:

$$\tau^{-1}h^2 G_V^{\tau,\,h}(t, x; \tau h^{-2}z) = \\ = z b_V^{\tau,\,h}(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j} a^{ij}(t, x) z_i z_j + \\ + \tau^{-2}h^2 \int\limits_{|u| < h^{-1}} (e^{\tau h^{-1}zu} - 1 - \tau h^{-1}zu)\, \nu_{t,\,x}(du), \quad (4.4.5)$$

$$b_V^{\tau,\,h}(t, x) = b^{\tau,\,h}(t, x) - \tau^{-1}h \int\limits_{|u| \geqslant h^{-1}} u\nu_{t,\,x}(du).$$

Требуется доказать, что выражение (4.4.5) равномерно по t, x и по z, $|z| \leqslant z_0 = \mathrm{const} < \infty$, стремится к

$$G_0(t, x; z) = zb(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j}\left[a^{ij}(t, x) + \int\limits_{R^r} u^i u^j \nu_{t,\,x}(du)\right] z_i z_j.$$

Разность линейных членов содержит член с $b^{\tau,\,h}(t, x) - b(t, x)$, равномерно стремящийся к 0, и скалярное произведение z на

$$\tau^{-1}h \int\limits_{|u| \geqslant h^{-1}} u\nu_{t,\,x}(du).$$

Этот интеграл не превосходит

$$\tau^{-1}h^2 \int |u|^2 \nu_{t,\,x}(du) \leqslant \tau^{-1}h^2 \sum_i A^{ii}(t, x) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\cdot\tau^{-1}h^2 \to 0.$$

Разность нелинейных членов равна

$$\int\limits_{|u| < h^{-1}} \tau^{-2}h^2 \left[e^{\tau h^{-1}zu} - 1 - \tau h^{-1}zu - \frac{(\tau h^{-1}zu)^2}{2}\right] \nu_{t,\,x}(du) - \\ - \int\limits_{|u| \geqslant h^{-1}} \frac{(zu)^2}{2} \nu_{t,\,x}(du).$$

Равномерное стремление к нулю второго интеграла сразу ясно; в первом точно так же, как при доказательстве теоремы 4.4.2, выделяются интегралы I_1 по $|u| < h^{-1}/\ln h^{-1}$ и I_2 по $h^{-1}/\ln h^{-1} \leqslant |u| < h^{-1}$, и I_1 оценивается так же. Интеграл I_2 оценивается так:

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{h^{-1}/\ln h^{-1} \leqslant |u| < h^{-1}} \tau^{-2}h^2 e^{\tau h^{-1}z_0 |u|} \nu_{t,x}(du) \leqslant$$
$$\leqslant \tau^{-2}h^2 e^{z_0 \tau h^{-2}/\ln h^{-1}} \cdot C(h^{-1}/\ln h^{-1})^{-\beta} +$$
$$+ \tau^{-1}hz_0 \int\limits_{h^{-1}/\ln h^{-1}}^{h^{-1}} e^{\tau h^{-1}z_0 y} C y^{-\beta}\, dy.$$

В первом члене экспонента стремится к 1, остается $C(\tau^{-1}h^2)^2 \cdot h^{\beta-2} \ln^\beta h^{-1} \to 0$. Функция под знаком интеграла во втором члене выпукла вниз; поэтому интеграл не превосходит длины промежутка интегрирования, умноженной на полусумму значений в его концах, т. е. он не превосходит

$$\tau^{-1}hz_0 \cdot h^{-1}e^{\tau h^{-2}z_0} \cdot Ch^\beta \ln^\beta h^{-1} = Cz_0\tau^{-1}h^2h^{\beta-2}e^{z_0\tau h^{-2}} \ln^\beta h^{-1}.$$

При $h \to 0$, $\tau h^{-2} \to \infty$, $\tau h^{-2} = o(\ln h^{-1})$ экспонента не превосходит $h^{-\gamma}$, где γ — сколь угодно малое положительное число, и все это выражение стремится к 0.

При проверке (3.3.3), (3.3.4) возникают еще интегралы

$$\int\limits_{h^{-1}/\ln h^{-1} \leqslant |u| < h^{-1}} \tau^{-1}he^{\tau h^{-1}z_0 |u|} |u| \nu_{t,x}(du),$$
$$\int\limits_{h^{-1}/\ln h^{-1} \leqslant |u| < h^{-1}} e^{\tau h^{-1}z_0 |u|} |u|^2 \nu_{t,x}(du),$$

стремление которых к нулю доказывается аналогично. □

§ 4.5. Некоторые другие схемы не очень больших уклонений

1. Теорема 4.5.1.—2. Теорема 4.5.2.

1. Пусть $(\xi^{h,h}(t), \mathsf{P}^{h,h}_{t,x})$ — семейство марковских процессов одного из двух классов, описанных в п.п. 1, 3 § 4.2, с $\tau = h$; мы будем предполагать, что $b^{h,h}(t, x) \equiv b(t, x)$, а в случае дискретного времени — еще, что $\int u\, d\mu_{t,x} \equiv 0$. Определим функцию G_* формулой (4.2.2) или (4.2.6).

Предположим, что функция $b(t, x)$ непрерывна по t, x и удовлетворяет условию Липшица по x. Обозначим через $X(t, x)$ значение в момент t решения уравнения $\dot{x}(t) = b(t, x(t))$ с начальным условием $x(0)=x$; через $Y(t, x)$ будем обозначать функцию, обратную к X по второму аргументу. Преобразование Y «выпрямляет» наиболее вероятные при малых h траектории процесса $\xi^{h, h}(t)$

Положим для $h>0$, $\beta>0$, $x_0 \in R^r$

$$\eta_{x_0}^{h, \beta}(t) = \beta\left[Y(t, \xi^{h, h}(t)) - x_0\right].$$

Мы получим теорему о функционале действия для семейства процессов $\eta_{x_0}^{h, \beta}(t)$ при $h \to 0$, $\beta \to \infty$, $h\beta^2 \to 0$.

Пусть $(A_{ij}(t, x))$ означает матрицу, обратную к матрице вторых производных функции G_* по z при $z=0$; положим

$$C_{ij}(x_0; t) = \sum_{k, l} \frac{\partial X^k}{\partial x^i}(t, x_0) \frac{\partial X^l}{\partial x^j}(t, x_0) A_{kl}(t, X(t, x_0)); \tag{4.5.1}$$

$$H_0^\eta(x_0; t; u) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} C_{ij}(x_0; t) u^i u^j. \tag{4.5.2}$$

Определим для $x_0 \in R^r$ функционал $S_{0, T}^\eta(x_0; \varphi)$ для абсолютно непрерывных функций $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, формулой

$$S_{0, T}^\eta(x_0; \varphi) = \int_0^T H_0^\eta(x_0; t; \dot{\varphi}(t))\, dt.$$

Теорема 4.5.1. *Пусть функция G_* конечна и ограничена при всех t, x и всех достаточно малых z; матрица $\left(\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; 0)\right)$ ограничена, равномерно положительно определена и равномерно непрерывна по t, x; функция $b(t, x)$ ограничена и равномерно непрерывна вместе с первыми и вторыми производными по x.*

Тогда выражение $h^{-1}\beta^{-2} S_{0, T}^\eta(x_0; \varphi)$ является функционалом действия для семейства процессов $\eta_{x_0}^{h, \beta}(t)$ при $\beta \to \infty$, $h\beta^2 \to 0$ равномерно по $x_0 \in R^r$ и по начальной точке процесса $\eta_{x_0}^{h, \beta}$, изменяющейся в любой ограниченной области; т. е.:

а) *функционал $S_{0, T}^\eta(x_0; \varphi)$ полунепрерывен снизу по φ равномерно относительно x_0;*

б) *функции из множества* $\bigcup_{x_0 \in R^r} \bigcup_{x \in R^r} \Phi^{\eta}_{x_0;\, x;\, [0,\, T]}(s)$ *равностепенно непрерывны, где*

$$\Phi^{\eta}_{x_0;\, x;\, [0;\, T]}(s) = \{\varphi\colon\ \varphi(0) = x,\ S^{\eta}_{0,\, T}(x_0;\, \varphi) \leqslant s\};$$

в) *для любых положительных* δ, γ, s_0 *для любого ограниченного множества* $K \subset R^r$ *для достаточно больших* β *и достаточно малых* $h\beta^2$, *для произвольных* $x_0 \in R^r$, $x \in K$ *и* $\varphi \in \Phi^{\eta}_{x_0;\, x;\, [0,\, T]}(s_0)$

$$\mathsf{P}^{h,\,\beta}_{x_0;\, 0,\, x}\{\rho_{0,\, T}(\eta^{h,\,\beta}_{x_0}, \varphi) < \delta\} \geqslant \\ \geqslant \exp\{-h^{-1}\beta^{-2}[S^{\eta}_{0,\, T}(x_0;\, \varphi) + \gamma]\},$$

где $\mathsf{P}^{h,\,\beta}_{x_0;\, 0,\, x}$ *означает вероятность, вычисленную в предположении, что* $\eta^{h,\,\beta}_{x_0}(0) = x$ (*т. е.* $\xi^{h,\,h}(0) = x_0 + \beta^{-1}x$);

г) *для любых* $\delta > 0, \gamma > 0, s_0 > 0$, *ограниченного* $K \subset R^r$, *для достаточно больших* β *и малых* $h\beta^2$ *для* $x_0 \in R^r$, $x \in K$, $s \leqslant s_0$

$$\mathsf{P}^{h,\,\beta}_{x_0;\, 0,\, x}\{\rho_{0,\, T}(\eta^{h,\,\beta}_{x_0}, \Phi_{x_0;\, x;\, [0,\, T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{-h^{-1}\beta^{-2}(s - \gamma)\}.$$

Доказательство проведем в случае непрерывного времени. Мы воспользуемся теоремой 3.2.3 и замечаниями к теоремам 3.2.3, 3.2.3′. Для этого прежде всего найдем локальные характеристики процесса $\eta^{h,\,\beta}_{x_0}(t)$.

Компенсирующий оператор $\mathfrak{A}^h$ процесса $\xi^{h,\,h}(t)$ задается формулой

$$\mathfrak{A}^h f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i b^i(t, x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) + \\ + \frac{h}{2}\sum_{i,\, j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(t, x) + \\ + h^{-1}\int\left[f(t, x + hu) - f(t, x) - h\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)\, u^i\right]\nu_{t,\, x}(du).$$

Пользуясь этим выражением, мы можем найти компенсатор случайной функции $f(t, \eta^{h,\,\beta}_{x_0}(t)) = F(t, \xi^{h,\,h}(t))$, где $F(t, x) = f(t, \beta[Y(t, x) - x_0])$. Подсчеты показывают, что компенсирующий оператор $\mathfrak{A}^{h,\,\beta}_{x_0}$ марковского процесса

$\eta_{x_0}^{h,\beta}(t)$ задается формулой

$$\mathfrak{A}_{x_0}^{h,\beta} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \beta \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) \left\{ \frac{\partial Y^i}{\partial t}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) + \sum_j b^j(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) + \frac{h}{2} \sum_{k,l} a^{kl}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) \frac{\partial^2 Y^i}{\partial x^k \partial x^l}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) + h^{-1} \int \left[Y^i(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x) + hu) - Y^i(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) - h \sum_j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) u^j \right] \nu_{t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)}(du) \right\} + \frac{h\beta^2}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) \cdot \sum_{k,l} \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) \times \frac{\partial Y^j}{\partial x^l}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) a^{kl}(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)) + h^{-1} \int \left[f(t, \beta[Y(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x) + hu) - x_0]) - f(t, x) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)(\beta[Y^i(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x) + hu) - x_0^i] - x^i) \right] \times \nu_{t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)}(du).$$

Первые два члена в фигурных скобках сокращаются в силу определения функций X, Y. Обозначим сумму по k, l в третьем члене в фигурных скобках через III^i, интеграл в четвертом — через IV^i, сумму по k, l в первом члене после фигурных скобок — через V^{ij}; положим $\mathrm{VI}^i = Y^i(t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x) + hu) - (x_0^i + \beta^{-1}x^i)$. Выпишем выражение для $h\beta^2 G_{x_0}^{h,\beta}(t, x; h^{-1}\beta^{-2}z)$, где $G_{x_0}^{h,\beta}$ — кумулянта процесса $\eta_{x_0}^{h,\beta}$:

$$h\beta^2 G_{x_0}^{h,\beta}(t, x; h^{-1}\beta^{-2}z) = \sum_i z_i \{h\beta \mathrm{III}^i + h^{-1}\beta \mathrm{IV}^i\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} z_i z_j \mathrm{V}^{ij} + \int \beta^2 \left(e^{h^{-1}\beta^{-1} \sum_i z_i \mathrm{VI}^i} - 1 - h^{-1}\beta^{-1} \sum_i z_i \mathrm{VI}^i \right) \nu_{t, X(t, x_0 + \beta^{-1}x)}(du). \quad (4.5.3)$$

Первые производные этой функции по z_i при $z=0$ равны $h\beta\,\mathrm{III}^i+h^{-1}\beta\mathrm{IV}^i$; выпишем вторые производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j}\left(h\beta^2 G_{x_0}^{h,\beta}(t,\,x;\,h^{-1}\beta^{-2}z)\right)=$$
$$=\mathrm{V}^{ij}+\int h^{-2}e^{h^{-1}\beta^{-1}\sum\limits_i z_i\mathrm{VI}^i}\cdot\mathrm{VI}^i\,\mathrm{VI}^j\nu_{t,\,X(t,\,x_0+\beta^{-1}x)}\,(du). \tag{4.5.4}$$

Положим

$$C^{ij}(x_0;\ t)=$$
$$=\sum_{k,\,l}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(t,\,X(t,\,x_0))\frac{\partial Y^j}{\partial x^l}(t,\,X(t,\,x_0))\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_k\,\partial z_l}(t,\,X(t,\,x_0);\,0),$$
$$G_0^{\eta}(x_0;\,t;\,z)=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j}C^{ij}(x_0;\,t)\,z_iz_j$$

и докажем, что первые производные выражения (4.5.3) в нуле и вторые производные равномерно в каждой ограниченной области сходятся к соответствующим производным функции G_0^{η}.

Функция под знаком интеграла в IV^i выражается при помощи разложения Тейлора в виде

$$\frac{h^2}{2}\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2 Y^i}{\partial x^j\,\partial x^k}(t,\,\tilde{x})\cdot u^ju^k;$$

из ограниченности $G_*(t,\,x;\,z)$ при малых z вытекает, что интеграл, равномерно по t, x_0 и x, есть $O(h^2)$. Так как выражение III^i очевидным образом ограничено, то $h\beta\,\mathrm{III}^i+$ $+h^{-1}\beta\mathrm{IV}^i=O(h\beta)$, и эта производная стремится к 0 при $\beta\to\infty$, $h\beta^2\to 0$ (как и должно быть).

Чтобы найти предел выражения (4.5.4), опять воспользуемся разложением Тейлора

$$\mathrm{VI}^i=h\sum_k\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(t,\,X(t,\,x_0+\beta^{-1}x)+h\tilde{u})\,u^k.$$

Мы видим, что функция под знаком интеграла в (4.5.4) при $\beta\to\infty$, $h\beta^2\to 0$ стремится к $\sum\limits_{k,\,l}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(t,\ X(t,\ x_0))\times$ $\times\frac{\partial Y^j}{\partial x^l}(t,\,X(t,\,x_0))\,u^ku^l$, причем при $\beta\geqslant\beta_0$, $|z|\leqslant C$ она мажорируется функцией

$$\mathrm{const}\cdot|u|^2\exp\left\{\beta_0^{-1}Cr^2\sup_{i,\,k,\,t,\,x}\left|\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\right||u|\right\}.$$

При достаточно больших β_0 эта функция равномерно интегрируема относительно всех мер $\nu_{t,\,x}$, и возможен предельный переход под знаком интеграла. Итак, получаем, что при достаточно больших β и малых $h\beta^2$ равномерно по всем t, x_0 и по x, z, изменяющимся в ограниченных областях, выражение (4.5.4) близко к

$$\sum_{k,\,l}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(t,\,X(t,\,x_0))\frac{\partial Y^j}{\partial x^l}(t,\,X(t,\,x_0))\times$$
$$\times\left[a^{kl}(t,\,X(t,\,x_0+\beta^{-1}x))+\int u^k u^l \nu_{t,\,X\,(t,\,x_0+\beta^{-1}x)}(du)\right].$$

Выражение в квадратных скобках будет равно $\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_k\,\partial z_l}(t,\,X(t,\,x_0+\beta^{-1}x);\,0)$, и при $\beta\to\infty$ оно, в силу предположения о равномерной непрерывности $\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_k\,\partial z_l}$ по второму аргументу, стремится к $\frac{\partial^2 G_*}{\partial z_k\,\partial z_l}(t,\,X(t,\,x_0);\,0)$.

Итак, сходимость выражения (4.5.3) и его производных к функции G_0^η и ее производным доказана; преобразование Лежандра от G_0^η — это функция H_0^η, задаваемая формулами (4.5.1), (4.5.2); применение теоремы 3.2.3 и замечаний к ней дает нам нужное утверждение. □

2. Теорема 4.5.1 означает, что для семейства процессов $\eta_{x_0}^{h,\,\beta}(t)$ функционал действия — тот же, что для семейства гауссовских процессов с независимыми приращениями с нулевым сносом. Другой способ «выпрямления» наиболее вероятных траекторий, при котором выпрямляется только одна траектория,— это вычитание из процесса решения $X(t,\,x_0)$ уравнения $\dot{x}(t)=b(t,\,x(t))$.

Для семейства случайных процессов

$$\zeta_{x_0}^{h,\,\beta}(t)=\beta\,[\xi^{h,\,h}(t)-X(t,\,x_0)]$$

функционал действия будет такой же, как и для семейства гауссовских марковских процессов с линейным сносом.

Положим

$$B_k^i(x_0;\ t)=\frac{\partial b^i}{\partial x^k}(t,\ X(t,\ x_0));$$

$$H_0^{\zeta}(x_0;\ t,\ x;\ u)=\frac{1}{2}\sum_{i,\ j}A_{ij}(t,\ X(t,\ x_0))\times$$

$$\times\left(u^i-\sum_k B_k^i(x_0;\ t)x^k\right)\left(u^j-\sum_l B_l^j(x_0;\ t)\,x^l\right);$$

$$S_{0,\ T}^{\zeta}(x_0;\ \varphi)=\int_0^T H_0^{\zeta}(x_0;\ t,\ \varphi(t);\ \dot{\varphi}(t))\,dt.$$

Теорема 4.5.2. *В условиях теоремы* 4.5.1 *выражение* $h^{-1}\beta^{-2}S_{0,\ T}^{\zeta}(x_0;\ \varphi)$ — *функционал действия для семейства процессов* $\zeta_{x_0}^{h,\ \beta}(t)$ *при* $\beta\to\infty$, $h\beta^2\to 0$, *равномерно по* $x_0\in R^r$ *и по начальной точке, изменяющейся в любой ограниченной области.*

Доказательство можно провести так же, как доказательство предыдущей теоремы; а можно вывести утверждение этой теоремы из теоремы 4.5.1. Действительно, разложение Тейлора дает нам

$$\zeta_{x_0}^{h,\ \beta;\ i}(t)=\sum_k\frac{\partial X^i}{\partial x^k}(t,\ x_0)\cdot\eta_{x_0}^{h,\ \beta;\ k}(t)+O(\beta^{-1}\,|\,\eta_{x_0}^{h,\ \beta}(t)\,|^2).$$

Таким образом, с точностью до бесконечно малых одна случайная функция получается из другой при помощи зависящего от t невырожденного линейного преобразования; и пересчет функционала действия производится элементарно. □

§ 4.6. Случай сверхбольших уклонений

1. Формальные вычисления для случая сверхбольших уклонений.— 2. Сопоставление с пуассоновскими случайными величинами.— 3. Функционал $S_{0,\ T}(\varphi)$ не удовлетворяет нужным требованиям.— 4. Теорема 4.6.1.—5. Теорема 4.6.2.

1. Как мы уже говорили (§ 4.2, п. 1), результаты, касающиеся сверхбольших уклонений для сумм независимых случайных величин, весьма чувствительны к характеру убывания «хвостов» их распределений. В связи с этим представляет определенный интерес рассмотреть процесс $\xi^{\tau,\ h}$, скачки которого не имеют нетривиальных «хвостов», т. е. ограничены по модулю константой, умноженной на h (вспомним, что величины скачков в схеме семейств марковских случайных процессов, описанной в § 4.2, пропорциональны h). Разумеется, ненулевые вероятности больших уклонений здесь могут получиться только в случае непрерывного времени, за счет того, что число малых скачков будет чрезвычайно велико.

Будем рассматривать только одномерный случай.

Пусть $(\xi^{\tau, h}(t), \mathsf{P}^{\tau, h}_{t, x})$ — семейство процессов вида, описанного в п. 3 § 4.2, с кумулянтой, задаваемой формулой

$$G^{\tau, h}(t, x; z) = zb^{\tau, h}(t, x) + \tau^{-1}G_*(t, x; hz),$$

$$G_*(t, x; z) = \int (e^{zu} - 1 - zu)\, u^{-2}\mu_{t, x}(du).$$

Предположим, что мера $\mu_{t, x}$ ограничена по t, x и при каждом t, x сосредоточена на отрезке $[u_-(t, x), u_+(t, x)]$, где функции $u_-(t, x)$, $u_+(t, x)$ равномерно непрерывны, ограничены, и $u_-(t, x) < -c$, $u_+(t, x) > c$, $c > 0$. Введем условие равномерной по t, x «достаточной заполненности» краев отрезка $[u_-(t, x), u_+(t, x)]$ мерой $\mu_{t, x}$ (ср. § 4.1, п. 3): для любого $\varkappa > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех t, x

$$\mu_{t, x}[u_-(t, x), (1-\varkappa)u_-(t, x)] > \lambda,$$

$$\mu_{t, x}[(1-\varkappa)u_+(t, x), u_+(t, x)] > \lambda.$$

От функции $b^{\tau, h}(t, x)$ потребуем, чтобы она равномерно по t, x стремилась при $h \to 0$, $\tau^{-1}h \to 0$ к равномерно непрерывной и ограниченной функции $b(t, x)$.

Подсчеты показывают, что преобразование Лежандра $H^{\tau, h}(t, x; u)$ от кумулянты $G^{\tau, h}(t, x; z)$ имеет порядок $h^{-1}\ln(\tau h^{-1})$ при $h \to 0$, $\tau^{-1}h \to 0$. Поэтому мы должны принять $k(\tau, h) = h^{-1}\ln(\tau h^{-1})$.

Предел при $h \to 0$, $\tau^{-1}h \to 0$ выражения

$$k(\tau, h)^{-1}G^{\tau, h}(t, x; k(\tau, h)z) =$$
$$= zb^{\tau, h}(t, x) + \tau^{-1}h\ln^{-1}(\tau h^{-1}) \times$$
$$\times \int (e^{\ln(\tau h^{-1})zu} - 1 - \ln(\tau h^{-1})zu)\, u^{-2}\mu_{t, x}(du)$$

равен, как легко проверить, $zb(t, x)$ при $u_-(t, x)^{-1} < z < u_+(t, x)^{-1}$ и $+\infty$ при $z > u_+(t, x)^{-1}$ и при $z < u_-(t, x)^{-1}$. Условия теоремы 3.2.3 не выполнены. Тем не менее положим

$$G_0(t, x; z) = \begin{cases} zb(t, x), & u_-(t, x)^{-1} \leqslant z \leqslant u_+(t, x)^{-1}; \\ +\infty & \text{при остальных } z \end{cases}$$

и выпишем преобразование Лежандра от этой функции:

$$H_0(t, x; u) = \begin{cases} \dfrac{u - b(t, x)}{u_+(t, x)} & \text{при} \quad u \geqslant b(t, x); \\ \dfrac{u - b(t, x)}{u_-(t, x)} & \text{при} \quad u \leqslant b(t, x). \end{cases}$$

Определим функционал

$$S_{0, T}(\varphi) = \int_0^T H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))\, dt$$

(как обычно, $S_{0, T}(\varphi)$ полагается равным $+\infty$ для не абсолютно непрерывных φ).

2. Вид функций $k(\tau, h)$, $H_0(t, x; u)$ и функционала $S_{0, T}(\varphi)$ можно сравнить с тем, что получается в простом случае сложения независимых пуассоновских величин. А именно, имеет место следующее

Утверждение. *Пусть λ и c — положительные константы, $\xi^{\tau, h}$ — пуассоновская случайная величина с параметром $\tau^{-1} \cdot \lambda$, умноженная на ch (или сумма независимых величин, дающая нужное значение параметра в сумме); тогда для $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \tau^{-1} h \to 0}} (h^{-1} \ln(\tau h^{-1}))^{-1} \ln \mathbf{P}\{\xi^{\tau, h} \in [a, b]\} = -\min_{x \in [a, b]} S(x), \tag{4.6.1}$$

где $S(x) = x/c$ (так что предел (4.6.1) равен a/c).

Доказательство элементарно.

Ясно, какую роль играет здесь пуассоновское распределение: скачки локально безгранично делимого процесса, величина которых попадает в определенное множество, можно считать происходящими в соответствии с «пуассоновским потоком событий», сделанным неоднородным по времени и пространству.

3. Однако функционал $S_{0, T}(\varphi)$ не может претендовать на то, чтобы быть нормированным функционалом действия для нашего семейства процессов, потому что множество $\Phi_{x; [0, T]}(s) = \{\varphi\colon \varphi(0) = x, S_{0, T}(\varphi) \leqslant s\}$ не компактно: существуют не абсолютно непрерывные функции φ, для которых $\varliminf_{\psi \to \varphi} S_{0, T}(\psi) < \infty$. Даже если переопределить функционал для таких функций, заменив его значение нижним пределом, множество $\Phi_{x; [0, T]}(s)$ не делается компактным. Может быть, это можно исправить, рассмот-

рев вместо метрики $\rho_{0,T}(\varphi, \psi) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi(t) - \psi(t)|$ другую, более «короткую», например, метрику Скорохода, как это делается в работе Могульского [1]; однако наши основные оценки (§§ 2.2, 2.3) приспособлены к метрике $\rho_{0,T}$ и ничего не дадут для новой метрики.

Тем не менее мы можем получить некоторые частичные результаты.

4. Теорема 4.6.1. *При перечисленных выше условиях для любых положительных δ и γ, для любого равностепенно непрерывного множества Φ функций, для достаточно малых h и $\tau^{-1}h$ при любом $x_0 \in R^1$ для любой функции $\varphi \in \Phi$, $\varphi(0) = x_0$,*

$$\mathrm{P}_{0, x_0}^{\tau, h}\{\rho_{0, T}(\xi^{\tau, h}, \varphi) < \delta\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{-h^{-1}\ln(\tau h^{-1})[S_{0, T}(\varphi) + \gamma]\}.$$

Доказательство основывается на теореме 2.2.1. □

Заметим, что условие $h \to 0$, $\tau^{-1}h \to 0$ не накладывает никаких ограничений на характер изменения τ: этот параметр при малых h и $\tau^{-1}h$ может принимать и сколь угодно малые, и сколь угодно большие, и все промежуточные значения.

5. Что касается противоположной оценки, то второстепенные члены в (2.3.13) оказываются малы по сравнению с основными не во всем диапазоне изменения τ и h, описываемом требованиями $h \to 0$, $\tau^{-1}h \to 0$, а только в узкой его части: для того, чтобы был пренебрежимо мал первый член в правой части (2.3.13), приходится выбирать всё увеличивающееся множество U_0; чтобы обеспечить $\delta' \geqslant \Delta t_{\max} \sup\{|u| : u \in U_0\}$, нужно выбирать разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ с $\Delta t_{\max}$, стремящимся к 0; а это увеличивает член N^n. Какой-то результат получается только тогда, когда $h \to 0$ и $\tau^{-1}h \to 0$, причем медленнее, чем любая положительная степень h. Так как из $\tau^{-1}h \to 0$, $h^\alpha = o(\tau^{-1}h)$ при малых $\alpha > 0$ вытекает $h \to 0$, $\tau \to 0$, то отдельно требовать $h \to 0$ не нужно.

Теорема 4.6.2. *При тех же предположениях для любых положительных δ, γ и s_0 существуют такие положительные ε и α, что для всех положительных τ, h таких, что $\tau^{-1}h \leqslant \varepsilon$, $\tau^{-1}h \geqslant h^\alpha$, для любого $x_0 \in R^r$ и любого $s \leqslant s_0$*

$$\mathrm{P}_{0, x_0}^{\tau, h}\{\rho_{0, T}(\xi^{\tau, h}, \Phi_{x_0; [0, T]}(s)) \geqslant \delta\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-h^{-1}\ln(\tau h^{-1})(s - \gamma)\}.$$

Доказательство — применение теоремы 2.3.2. □

ГЛАВА 5

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

§ 5.1. Случай винеровского процесса

1. Формулировка теоремы 5.1.1.—2. Линейный член.—3. Равномерная интегрируемость. Окончание доказательства теоремы 5.1.1.—4. Случай нескольких равных максимумов и множителя $G(\xi^h)$. Неограниченные функционалы.—5. Уточняющие члены.

1. Пусть $\xi^h(t)$—семейство случайных процессов, зависящих от положительного числового параметра h; пусть вероятности маловероятных событий, связанных с этими процессами, описываются при $h\downarrow 0$ функционалом действия $h^{-1}S(\varphi)$. Если F—измеримый непрерывный ограниченный функционал, то среднее $M^h \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}$ логарифмически эквивалентно $\exp\{h^{-1}\max[F(\varphi)-S(\varphi)]\}$ (см. Введение). Точную асимптотику этого математического ожидания нельзя найти, если не ввести дополнительных ограничений. Такие ограничения мы введем в этой главе: во-первых, мы будем рассматривать только определенный вид зависимости процессов $\xi^h(t)$ (марковских) от параметра; во-вторых, функционал F будет предполагаться гладким; в-третьих, мы наложим ограничения на характер принятия максимума функционалом $F-S$. А именно, при наших предположениях функционал S будет дважды дифференцируем на определенном подпространстве. В точке максимума вторая производная разности $F-S$—неположительно определенный функционал; мы предположим, что он строго отрицательно определен. Результаты, которые мы получим, будут относиться и к асимптотике математических ожиданий вида $M^h G(\xi^h)\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}$.

В этом параграфе мы вслед за работой Шильдера [1] рассмотрим частный случай, когда ξ^h—r-мерный винеровский процесс с дисперсией каждой координаты h в единицу времени. Такой процесс можно получить, взяв $\xi^h(t)=h^{1/2}w(t)$, где $w(t)$—стандартный r-мерный винеровский процесс. Будем рассматривать процесс, начинающийся в нулевой момент времени в точке 0; вероятность

$\mathsf{P}^h_{0,0}$ и математическое ожидание $\mathsf{M}^h_{0,0}$ будем обозначать просто P, M.

Мы знаем, что функционал действия для семейства $\xi^h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при $h \downarrow 0$ задается формулой $h^{-1}S(\varphi)$, где $S(\varphi)$ — квадратичный функционал:

$$S(\varphi) = S_{0,T}(\varphi) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot\varphi(t)|^2 \, dt$$

для абсолютно непрерывных φ и $S(\varphi) = +\infty$ для остальных.

Наряду с пространством $\boldsymbol{C}[0, T]$ непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в R^r будем рассматривать пространство $\boldsymbol{W}^{1,2}[0, T]$ абсолютно непрерывных функций с интегрируемой в квадрате производной и $\boldsymbol{C}^1[0, T]$ непрерывно дифференцируемых функций; $\boldsymbol{C}_0[0, T]$, $\mathbf{W}_0^{1,2}[0, T]$ и $\boldsymbol{C}_0^1[0, T]$ будут означать подпространства этих пространств, состоящие из функций, равных 0 при $t = 0$. Будем пользоваться обозначением $\|\varphi\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi(t)|$.

Теорема 5.1.1. *Пусть $\xi^h(t) = h^{1/2}w(t)$, где $w(t)$ — стандартный r-мерный винеровский процесс, начинающийся при $t = 0$ в точке 0. Пусть F — ограниченный непрерывный функционал на пространстве $\boldsymbol{C}_0[0, T]$. Пусть $\max\{F(\varphi) - S(\varphi)\colon \varphi \in \boldsymbol{C}_0[0, T]\}$ достигается на единственной функции $\varphi_0 \in \boldsymbol{C}_0[0, T]$. Пусть функционал F дважды дифференцируем по Фреше в точке φ_0; пусть вторая производная F в этой точке — билинейный функционал $F''(\varphi_0)(x_1, x_2)$ — такова, что для любой ненулевой функции $x \in \boldsymbol{C}_0[0, T]$ выполнено строгое неравенство*

$$\frac{1}{2} F''(\varphi_0)(x, x) < S(x). \qquad (5.1.1)$$

Тогда при $h \downarrow 0$

$$\mathsf{M} \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} \sim K_0 \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0)]\}, \qquad (5.1.2)$$

где

$$K_0 = \mathsf{M} \exp\left\{\frac{1}{2} F''(\varphi_0)(w, w)\right\}. \qquad (5.1.3)$$

2. Доказательство. В силу леммы 0.1 (см. Введение) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что при $h \downarrow 0$

$$\mathsf{M} \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} = \\ = \mathsf{M}\{\rho_{0,T}(\xi^h, \varphi_0) < \varepsilon;\ \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}\} + \\ + o(\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0) - \gamma]\}). \tag{5.1.4}$$

Воспользуемся обобщенным преобразованием Крамера, соответствующим не зависящей от x функции $z^h(t) = h^{-1}(z_1(t), \ldots, z_r(t))$, где $z_i(t) = \dot\varphi_0^i(t)$. Это преобразование превращает процесс $\xi^h(t)$ в винеровский процесс с дисперсией h в единицу времени по каждой координате и сносом $\dot\varphi_0(t)$; иначе говоря, относительно новой вероятностной меры

$$\mathsf{P}^{z^h}(A) = \mathsf{M}\left(A;\ \exp\left\{\int_0^T z^h(t)\,d\xi^h(t) - h^{-1}\int_0^T \frac{1}{2}|\dot\varphi_0(t)|^2\,dt\right\}\right)$$

случайный процесс $\xi^h(t)$ имеет такое же распределение в пространстве $C_0[0, T]$, как $\varphi_0(t) + h^{1/2}w(t)$.

Преобразуем математическое ожидание в правой части (5.1.4), пользуясь обобщенным преобразованием Крамера:

$$\mathsf{M}\{\rho_{0,T}(\xi^h, \varphi_0) < \varepsilon;\ \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}\} = \\ = \mathsf{M}^{z^h}\{\rho_{0,T}(\xi^h, \varphi_0) < \varepsilon;\ \exp\{h^{-1}F(\xi^h) - \\ - h^{-1}\int_0^T \sum_{i=1}^r \dot\varphi_0^i(t)\,d\xi^{hi}(t) + h^{-1}\int_0^T \frac{1}{2}|\dot\varphi_0(t)|^2\,dt\}\} = \\ = \mathsf{M}\{\|w\| < h^{-1/2}\varepsilon;\ \exp\{h^{-1}F(\varphi_0 + h^{1/2}w) - \\ - h^{-1/2}\int_0^T \sum_{i=1}^r \dot\varphi_0^i(t)\,dw^i(t) - h^{-1}\int_0^T \frac{1}{2}|\dot\varphi_0(t)|^2\,dt\}\}. \tag{5.1.5}$$

Последний интеграл здесь со знаком минус, потому что из стохастического интеграла возникает член $-h^{-1}\int_0^T |\dot\varphi_0(t)|^2\,dt$.

Оказывается, если функционал F дифференцируем, стохастический интеграл здесь с вероятностью 1 совпадает с $F'(\varphi_0)(w)$. Действительно, первая производная F в точке φ_0 — линейный функционал на $C_0[0, T]$ — представима в виде

$$F'(\varphi_0)(x) = \int_{(0,T]} \sum_{i=1}^r x^i(t)\,dV_i(t), \tag{5.1.6}$$

где $V_i(t)$ — функции ограниченной вариации на $[0, T]$, непрерывные справа; нормируем их условием $V_i(T)=0$. Квадратичный функционал S также дифференцируем — разумеется, не по всему пространству $C_0[0, T]$, а только по подпространству $W_0^{1,2}[0, T]$, где он конечен; для $x \in W_0^{1,2}[0, T]$

$$S'(\varphi_0)(x) = \int_0^T \sum_{i=1}^r \dot{\varphi}_0^i(t)\, \dot{x}^i(t)\, dt.$$

Так как у функционала $F - S$ в точке φ_0 экстремум, то его производная должна обращаться в нуль для всех $x \in C_0^1[0, T]$:

$$\int_{(0, T]} \sum_{i=1}^r x^i(t)\, dV_i(t) - \int_0^T \sum_{i=1}^r \dot{\varphi}_0^i(t)\, \dot{x}^i(t)\, dt = 0. \qquad (5.1.7)$$

Берем первый интеграл по частям (внеинтегральный член обращается в нуль):

$$-\int_0^T \sum_{i=1}^r V_i(t)\, \dot{x}^i(t)\, dt - \int_0^T \sum_{i=1}^r \dot{\varphi}_0^i(t)\, \dot{x}^i(t)\, dt = 0. \qquad (5.1.8)$$

В качестве $\dot{x}^i(t)$ можно взять произвольные непрерывные функции; так что из (5.1.8) вытекает, что $V_i(t) = -\dot{\varphi}_0^i(t)$ почти при всех t.

В интеграле $F'(\varphi_0)(w)$ также производим интегрирование по частям, получая почти наверное равный ему стохастический интеграл:

$$F'(\varphi_0)(w) = \int_{(0, T]} \sum_{i=1}^r w^i(t)\, dV_i(t) =$$

$$= -\int_0^T \sum_{i=1}^r V_i(t) dw^i(t) = \int_0^T \sum_{i=1}^r \dot{\varphi}_0^i(t)\, dw^i(t) \qquad (5.1.9)$$

(внеинтегральный член исчезает из-за $w^i(0)=0$, $V_i(T)=0$).

С учетом этого формулы (5.1.4), (5.1.5) переписываются в следующем виде (множители $\exp\{h^{-1}F(\varphi_0)\}$ и $\exp\{-h^{-1}S(\varphi_0)\}$ вынесены):

$$\mathsf{M} \exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} = \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0)]\} \times$$

$$\times \mathsf{M}\chi_{\{\|w\| < h^{-1/2}\varepsilon\}} \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0 + h^{1/2}w) -$$

$$- F(\varphi_0) - h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)]\} +$$

$$+ o(\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0) - \gamma]\}). \qquad (5.1.10)$$

3. Разложим функционал F вблизи функции φ_0 по Тейлору до членов второго порядка:

$$F(\varphi_0+h^{1/2}w)=F(\varphi_0)+h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)+\\+\frac{h}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)+R(h^{1/2}w),$$

где $R(x)=o(\|x\|^2)$ при $x\to 0$. Подставляя это в (5.1.10), получаем

$$\mathsf{M}\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}=\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0)-S(\varphi_0)]\}\times\\ \times\left[\mathsf{M}\chi_{\{\|w\|<h^{-1/2}\varepsilon\}}\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)+\right.\right.\\ \left.\left.+h^{-1}R(h^{1/2}w)\right\}+o(e^{-\gamma h^{-1}})\right]. \qquad (5.1.11)$$

Случайная величина под знаком математического ожидания при $h\downarrow 0$ сходится к $\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)\right\}$. Чтобы установить конечность математического ожидания этого предела (т. е. (**5.1.3**)) и эквивалентность (5.1.2), достаточно при каком-то $\varepsilon>0$ установить равномерную интегрируемость этих случайных величин при всех $h>0$.

Лемма 5.1.1. *Пусть $Q(x)$ — непрерывный квадратичный функционал на $\boldsymbol{C}_0[0,\ T]$, причем $Q(x)<S(x)$ для всех ненулевых $x\in\boldsymbol{C}_0[0,\ T]$. Тогда существует $\varkappa>0$ такое, что*

$$Q(x)\leqslant(1-\varkappa)S(x) \qquad (5.1.12)$$

при всех $x\in\boldsymbol{C}_0[0,\ T]$.

Доказательство. Множество $\Phi_0(1)=\{x\in\boldsymbol{C}_0[0,\ T]:\ S(x)\leqslant 1\}$ компактно, и непрерывный функционал $Q(x)$ достигает своего максимума на $\Phi_0(1)$ в некоторой точке x_0. Если $x_0=0$, в качестве $\varkappa$ можно взять 1, если же $x_0\neq 0$, то $Q(x_0)<S(x_0)\leqslant 1$, и берем $\varkappa=1-Q(x_0)$. Для произвольного ненулевого $x\in\boldsymbol{C}_0[0,T]$ либо $S(x)=+\infty$, и (5.1.12) выполнено тривиальным образом; если же $S(x)<\infty$, определяем $\tilde{x}=x/\sqrt{S(x)}\in\Phi_0(1)$, и $Q(x)=Q(\sqrt{S(x)}\cdot\tilde{x})=$ $=S(x)\cdot Q(\tilde{x})\leqslant S(x)(1-\varkappa)$. □

Выбираем по этой лемме $\varkappa>0$ для функционала $Q(x)=$ $=\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(x,\ x)$, который меньше $S(x)$ при $x\neq 0$ согласно (5.1.1). Затем выбираем $\varepsilon>0$ так, чтобы $R(x)\leqslant$ $\leqslant\frac{\varkappa}{4T}\|x\|^2$ при $\|x\|<\varepsilon$. Функция под знаком математического ожидания в правой части (5.1.11) не превосходит

$\exp\{Q_1(w)\}$, где

$$Q_1(x)=\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(x,\ x)+\frac{\varkappa}{4T}\|x\|^2\leqslant(1-\varkappa/2)\,S(x) \qquad (5.1.13)$$

(так как $\|x\|^2\leqslant 2TS(x)$). Чтобы установить равномерную интегрируемость, достаточно проверить, что $\mathsf{M}\exp\{Q_1(w)\}<\infty$.

Для этого выберем произвольное пока $\alpha>0$ и рассмотрим при всех натуральных m $\alpha\sqrt{m}$-окрестности множеств $\Phi_0(m)=\{x\in \boldsymbol{C}_0[0,\ T]:\ S(x)\leqslant m\}$, которые мы обозначим $\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}$. Все пространство $\boldsymbol{C}_0[0,\ T]$ представляется в виде суммы $\Phi_0(1)_{+\alpha}\cup(\Phi_0(2)_{+\alpha\sqrt{2}}\setminus\Phi_0(1)_{+\alpha})\cup\ldots$ $\ldots\cup(\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\setminus\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}})\cup\ldots$ Оценим часть интеграла от $\exp\{Q_1(w)\}$, соответствующую каждому из этих множеств:

$$\mathsf{M}\{w\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\setminus\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}};\ \exp\{Q_1(w)\}\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\{w\notin\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}\}\exp\{\sup\{Q_1(x):$$
$$x\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\}\}. \qquad (5.1.14)$$

Для любой функции $x\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}$ существует функция $\tilde{x}\in\Phi_0(m+1)$ такая, что $\|x-\tilde{x}\|<\alpha\sqrt{m+1}$. Так как Q — непрерывный квадратичный функционал, то существует константа C такая, что

$$Q(x)\leqslant Q(\tilde{x})+C\|\tilde{x}+x\|\cdot\|x-\tilde{x}\|\leqslant(1-\varkappa)(m+1)+$$
$$+C(\|\tilde{x}\|\cdot\alpha\sqrt{m+1}+2(\alpha\sqrt{m+1})^2)\leqslant$$
$$\leqslant(m+1)(1-\varkappa+C\sqrt{2T}\alpha+2C\alpha^2).$$

Что касается слагаемого $\frac{\varkappa}{4T}\|x\|^2$, то оно не превосходит

$$\frac{\varkappa}{4T}(\|\tilde{x}\|+\alpha\sqrt{m+1})^2\leqslant\frac{\varkappa}{4T}\left(\sqrt{2TS(\tilde{x})}+\alpha\sqrt{m+1}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant(m+1)\cdot\frac{\varkappa}{4T}(\sqrt{2T}+\alpha)^2=(m+1)\,\varkappa\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sqrt{2T}}+\frac{\alpha^2}{4T}\right).$$

Итак, для $x\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}$

$$Q_1(x)\leqslant(m+1)\left(1-\frac{\varkappa}{2}+\frac{\varkappa\alpha}{\sqrt{2T}}+\frac{\varkappa\alpha^2}{T}+C\sqrt{2T}\alpha+2C\alpha^2\right).$$

Выбираем $\alpha>0$ так, чтобы правая часть не превосходила $(m+1)(1-\varkappa/3)$; тогда $\sup\{Q_1(x):\ x\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\}\leqslant$ $\leqslant(m+1)(1-\varkappa/3)$.

Вероятность в правой части (5.1.14) оценим с помощью теоремы 2.3.1. Функционал S здесь выступает не только как нормированный функционал действия для семейства процессов ξ^h, но и как функционал действия случайного процесса w. Здесь $G(t, x; z) \equiv \overline{G}(z) = \frac{1}{2}|z|^2$, $H(t, x; u) \equiv H(u) = \frac{1}{2}|u|^2$. В качестве δ' возьмем $\alpha\sqrt{m}/3$; положим

$$t_i = iT/n, \quad \Delta t_{\min} = \Delta t_{\max} = T/n;$$

$$k = 2r, \quad z(j) = \sqrt{m} z_0(j), \quad d(j) = \sqrt{m} d_0,$$

где $z_0(1) = (Z, 0, \ldots, 0)$, $z_0(2) = (-Z, 0, \ldots, 0)$, ..., $z_0(2r) = (0, \ldots, 0, -Z)$, $d_0 = Z^2$; U_0 — куб со стороной $2Z\sqrt{m}$ с центром в 0. Приблизим выпуклую вниз функцию $H(u) = \frac{1}{2}|u|^2$ на кубе $\{u: |u^1| < 1, \ldots, |u^r| < 1\}$ описанным снизу многогранником $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N}\left[z_0\{j\}u - \frac{1}{2}|z_0\{j\}|^2\right]$ с точностью до $\varkappa/6T$. Возьмем $z\{j\} = \sqrt{m} z_0\{j\}$. В качестве ε_1, ε_2 можно взять соответственно 0, $m\varkappa/6T$. Чтобы было выполнено неравенство $\delta' = \alpha\sqrt{m}/3 \geqslant \frac{T}{n}\cdot\sup\{|u|: u \in U_0\} = \frac{T}{n} Z\sqrt{r}\sqrt{m}$, нужно взять

$$n \geqslant 3Z\sqrt{r}\,T/\alpha. \tag{5.1.15}$$

При этом оценка (2.3.3) дает:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{w \notin \Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}\} &= \mathsf{P}\{\rho_{0,T}(w, \Phi_0(m)) \geqslant \alpha\sqrt{m}\} \leqslant \\ &\leqslant 2n\cdot 2r\cdot\exp\left\{\frac{T}{n}\left[\frac{1}{2}mZ^2 - mZ^2\right]\right\} + \\ &\quad + N^n\cdot\exp\{-m + T\cdot m\varkappa/6T\} = \\ &= 4nr\exp\left\{-m\frac{TZ^2}{2n}\right\} + N^n\exp\{-m(1-\varkappa/6)\}.\end{aligned}$$

Чтобы можно было пренебречь первым членом в правой части, достаточно, чтобы $Z^2T \geqslant 2n$. Этому неравенству и (5.1.15) можно удовлетворить, взяв целое $n \geqslant 18rT/\alpha^2$ и $Z = \sqrt{2n/T}$.

При таком выборе элементов нашей конструкции получаем:

$$\mathsf{M}\exp\{Q_1(w)\} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{(m+1)(1-\varkappa/3)\}\times$$
$$\times[4nr\exp\{-m\}+N^n\exp\{-m(1-\varkappa/6)\}] \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{1-\varkappa/3\}[4nr+N^n]\frac{1}{1-e^{-\varkappa/6}}.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

4. Ничуть не сложнее разбирается и случай, когда у $F(\varphi)-S(\varphi)$ абсолютный максимум достигается не в одной, а в конечном числе точек, а также когда $\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\}$ множится еще на $G(\xi^h)$, где G — непрерывный функционал.

Теорема 5.1.2. *Пусть F — ограниченный непрерывный функционал; пусть* $\max\{F(\varphi)-S(\varphi)\colon \varphi\in \boldsymbol{C}_0[0, T]\}$ *достигается на функциях* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \boldsymbol{C}_0[0, T]$, *причем функционал F дважды дифференцируем в этих точках, и* $\frac{1}{2}F''(\varphi_j)(x, x) < S(x)$ *при всех ненулевых* $x\in\boldsymbol{C}_0[0, T]$, $j=1, \ldots, k$. *Пусть G — ограниченный измеримый функционал на $\boldsymbol{C}_0[0, T]$, непрерывный в точках φ_j. Тогда при* $h\downarrow 0$

$$\mathsf{M}G(\xi^h)\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} = \exp\{h^{-1}\max[F(\varphi)-S(\varphi)]\}\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{k} G(\varphi_j)\,\mathsf{M}\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_j)(w, w)\right\}+o(1)\right]. \qquad (5.1.16)$$

Полученный результат можно обобщить и на некоторые неограниченные функционалы F и G; достаточно наложить на их рост такие, например, ограничения: $F(\varphi) = o(\|\varphi\|^2)$ при $\|\varphi\|\to\infty$, $G(\varphi)=O(e^{C\|\varphi\|^2})$ при любом $C>0$.

5. Пусть теперь функционал F дифференцируем s раз, а G соответственно $s-2$ раза. Беря тейлоровское разложение F до s-го члена, а G — до $(s-2)$-го, мы можем получить выражения, более точные, чем (5.1.16).

Для простоты обозначений вернемся к случаю единственного максимума.

Выпишем формулу, соответствующую (5.1.10):

$$\mathsf{M}G(\xi^h)\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} = \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0)-S(\varphi_0)]\}\times$$
$$\times\big[\mathsf{M}\chi_{\{\|w\|<h^{-1/2}\varepsilon\}}G(\varphi_0+h^{1/2}w)\times$$
$$\times\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0+h^{1/2}w)-F(\varphi_0)-$$
$$-h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)]\}+o(e^{-h^{-1}\gamma})\big]. \qquad (5.1.17)$$

Разобьем математическое ожидание с множителем $\chi_{\{\|w\|<h^{-1/2}\varepsilon\}}$ на часть, соответствующую $\|w\|<h^{-0,1}$, и часть, где $h^{-0,1}\leqslant\|w\|<h^{-1/2}\varepsilon$. Вторая часть оценивается сверху верхней гранью $|G|$, умноженной на выражение

$$\mathsf{M}\left\{\|w\|\geqslant h^{-0,1};\ \exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)+\frac{\varkappa}{4T}\|w\|^2\right\}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=m_0}^{\infty}\mathsf{M}\left\{w\in\Phi_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\setminus\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}};\right.$$

$$\left.\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)+\frac{\varkappa}{4T}\|w\|^2\right\}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{1-\varkappa/3\}\left[4nr+N^n\right]\frac{e^{-m_0\varkappa/6}}{1-e^{-\varkappa/6}}. \qquad (5.1.18)$$

Здесь m_0 — целая часть $h^{-0,2}/(\sqrt{2T}+\alpha)^2$; остальные m не совместимы с неравенством $\|w\|\geqslant h^{-0,1}$, потому что $\sup\{\|x\|:\ x\in\Phi_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}\}\leqslant\sqrt{m}\cdot(\sqrt{2T}+\alpha)$. Выражение (5.1.18) стремится к 0 при $h\downarrow 0$ быстрее любой степени h.

В той части математического ожидания, где $\|w\|<h^{-0,1}$, воспользуемся тем, что $F(\varphi_0+x)=F(\varphi_0)+F'(\varphi_0)(x)+$ $+\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(x,\ x)+O(\|x\|^3)$ при $\|x\|\to 0$; значит, для $\|w\|<h^{-0,1}$ имеем

$$h^{-1}\left[F(\varphi_0+h^{1/2}w)-F(\varphi_0)-h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)-\right.$$

$$\left.-\frac{h}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)\right]=O(h^{1/2}\|w\|^3)=O(h^{0,2})\to 0.$$

Для этой разности воспользуемся представлением $e^a=1+$ $+a+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^{s-2}}{(s-2)!}+o(a^{s-2})$; в то же время возьмем тейлоровское разложение функционала F до членов s-го порядка:

$$\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0+h^{1/2}w)-F(\varphi_0)-h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)]\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,\ w)\right\}\cdot\left[1+\frac{h^{1/2}}{6}F'''(\varphi_0)(w,\ w,\ w)+\right.$$

$$+\frac{h}{24}F^{\mathrm{IV}}(\varphi_0)(w,\ w,\ w,\ w)+\frac{h}{72}(F'''(\varphi_0)(w,\ w,\ w))^2+$$

$$\left.+\ldots+o\left(h^{\frac{s-2}{2}}(\|w\|^s+\|w\|^{3(s-2)})\right)\right].$$

Комбинируя это с разложением для G:

$$G(\varphi_0+h^{1/2}w)=G(\varphi_0)+h^{1/2}G'(\varphi_0)(w)+$$
$$+\frac{h}{2}G''(\varphi_0)(w,w)+\ldots+\frac{h^{\frac{(s-2)}{2}}}{(s-2)!}G^{(s-2)}(\varphi_0)(w,\ldots,w)+$$
$$+o\left(h^{\frac{(s-2)}{2}}\|w\|^{s-2}\right),$$

получаем:

$$G(\varphi_0+h^{1/2}w)\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0+h^{1/2}w)-F(\varphi_0)-$$
$$-h^{1/2}F'(\varphi_0)(w)]\}=\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,w)\right\}\times$$
$$\times\left[G(\varphi_0)+h^{1/2}G'(\varphi_0)(w)+\frac{h^{1/2}}{6}G(\varphi_0)F'''(\varphi_0)(w,w,w)+\right.$$
$$+\frac{h}{2}G''(\varphi_0)(w,w)+\frac{h}{6}G'(\varphi_0)(w)F'''(\varphi_0)(w,w,w)+$$
$$+\frac{h}{24}G(\varphi_0)F^{\mathrm{IV}}(\varphi_0)(w,w,w,w)+$$
$$+\frac{h}{72}G(\varphi_0)(F'''(\varphi_0)(w,w,w))^2+\ldots$$
$$\left.\ldots+o\left(h^{\frac{s-2}{2}}(\|w\|^{s-2}+\|w\|^{3(s-2)})\right)\right].$$

Это выражение интегрируется по заполняющему все пространство с уменьшением h множеству $\{\|w\|<h^{-0,1}\}$. Математические ожидания $\mathsf{M}\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,w)\right\}\times\times G^{(k)}(\varphi_0)(w,\ldots,w)\prod_i F^{(k_i)}(\varphi_0)(w,\ldots,w)$ конечны, потому что множитель при экспоненте не превосходит $\mathrm{const}\|w\|^l\leqslant\mathrm{const}'\cdot\exp\left\{0,1\frac{\varkappa}{T}\|w\|^2\right\}$. Интегралы по $\{\|w\|<<h^{-0,1}\}$ стремятся к своим пределам экспоненциально быстро. Наконец, $o\left(h^{\frac{s-2}{2}}\cdot(\|w\|^{s-2}+\|w\|^{3(s-2)})\right)$ после умножения на $\exp\left\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w,w)\right\}$ и интегрирования дает $o\left(h^{\frac{(s-2)}{2}}\right)$.

Итак, получаем:

$$\mathsf{M}G(\xi^h)\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} = \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0)-S(\varphi_0)]\}\times$$
$$\times\Big[G(\varphi_0)+h^{1/2}\mathsf{M}\Big(G'(\varphi_0)(w)+\frac{1}{6}G(\varphi_0)F'''(\varphi_0)(w, w, w)\Big)+$$
$$+h\mathsf{M}\Big(\frac{1}{2}G''(\varphi_0)(w, w)+\frac{1}{6}G'(\varphi_0)(w)F'''(\varphi_0)(w, w, w)+$$
$$+\frac{1}{24}G(\varphi_0)F^{\mathrm{IV}}(\varphi_0)(w, w, w, w)+$$
$$+\frac{1}{72}G(\varphi_0)(F'''(\varphi_0)(w, w, w))^2\Big)+\ldots+o\big(h^{\frac{s-2}{2}}\big)\Big]. \qquad (5.1.19)$$

Математические ожидания произведений экспоненты на полилинейные функционалы от w нечетного порядка обращаются в 0 из-за симметрии распределения w; т. е. в выражении (5.1.19) остаются только члены с целыми степенями h.

Теорема 5.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1.1. Пусть, кроме того, функционал G ограничен, непрерывен и дифференцируем в точке φ_0 $s-2$ раза, а F — s раз. Тогда при $h\downarrow 0$*

$$\mathsf{M}G(\xi^h)\exp\{h^{-1}F(\xi^h)\} =$$
$$=\exp\{h^{-1}[F(\varphi_0)-S(\varphi_0)]\}\Big[\sum_{0\leqslant i\leqslant\frac{s-2}{2}}K_ih^i+o\Big(h^{\frac{s-2}{2}}\Big)\Big], \qquad (5.1.20)$$

где коэффициенты K_i определяются по производным G до $2i$-го порядка и F до $(2i+2)$-го в точке φ_0; в частности,

$$K_0=G(\varphi_0)\mathsf{M}\exp\Big\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w, w)\Big\},$$
$$K_1=\mathsf{M}\exp\Big\{\frac{1}{2}F''(\varphi_0)(w, w)\Big\}\Big[\frac{1}{2}G''(\varphi_0)(w, w)+$$
$$+\frac{1}{6}G'(\varphi_0)(w)F'''(\varphi_0)(w, w, w)+$$
$$+\frac{1}{24}G(\varphi_0)F^{\mathrm{IV}}(\varphi_0)(w, w, w, w)+$$
$$+\frac{1}{72}G(\varphi_0)(F'''(\varphi_0)(w, w, w))^2\Big].$$

§ 5.2. Процессы с малыми частыми скачками

1. Леммы о производных.—2. Теорема 5.2.1. Локализация, обобщенное преобразование Крамера, разложение Тейлора.—3. Линейные члены сокращаются.—4. Представление в виде интеграла по $\mathbf{D}_0\,[0, T]$. План дальнейшей части доказательства.—5. Предельный процесс.—6. Равномерная интегрируемость. Окончание доказательства.—7. Вопрос об уточняющих членах.

В этом параграфе мы, следуя Дубровскому [1], [2], разберем случай, когда $\xi^h(t)=\xi^{h,h}(t)$—семейство процессов из класса, рассмотренного в § 4.3. Формулировка и доказательство основного результата будут аналогичны теореме 5.1.1, но возникнут некоторые новые трудности.

1. Приведем сначала вспомогательные результаты, связанные с дифференцированием.

Лемма 5.2.1. *Пусть функция $H_0(t, x; u)$, $t\in[0, T]$, x, $u\in R^r$, дважды дифференцируема по паре последних аргументов, причем сама функция и производные непрерывны по тройке аргументов. Тогда функционал*

$$S(\varphi)=S_{0,T}(\varphi)=\int_0^T H_0(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))\,dt \tag{5.2.1}$$

дважды дифференцируем по Фреше в любой точке $\varphi\in \boldsymbol{C}^1[0, T]$ по пространству $\boldsymbol{C}^1[0, T]$. Первая и вторая производные задаются формулами

$$S'(\varphi)(x)=\int_0^T \sum_i \left[\frac{\partial H_0}{\partial x^i} x^i(t)+\frac{\partial H_0}{\partial u^i}\dot x^i(t)\right] dt, \tag{5.2.2}$$

$$S''(\varphi)(x, x)=\int_0^T \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^i\,\partial x^j} x^i(t)\,x^j(t)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^i\,\partial u^j} x^i(t)\,\dot x^j(t)+\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^i\,\partial u^j}\dot x^i(t)\,\dot x^j(t)\right] dt, \tag{5.2.3}$$

где частные производные берутся в точке $(t, \varphi(t); \dot\varphi(t))$.

Лемма 5.2.2. *Пусть функции $H_0(t, x; u)$, $G_0(t, x; z)$ связаны преобразованием Лежандра по последнему аргументу и дважды непрерывно дифференцируемы по последним двум аргументам. Тогда частные производные функции G_0 в точке $(t, x; \nabla_u H_0(t, x; u))$ и H_0 в точке $(t, x; u)$*

связаны соотношениями

$$\frac{\partial G_0}{\partial x^i} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^i \partial u^j} = -\sum_k \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i \partial z_k} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u^k \partial u^j},$$

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k,\, l} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u^k \partial u^l} \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_k \partial x^i} \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_l \partial x^j},$$

и матрица $\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^i \partial u^j}\right)$ — *обратная к* $\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i \partial z_j}\right)$.

Доказательство обеих лемм — элементарное дифференцирование функционала, или же, соответственно, формулы

$$H_0(t, x; u) = \sum_k u^k \frac{\partial H_0}{\partial u^k}(t, x; u) - G_0(t, x; \nabla_u H_0(t, x; u)). \quad \square$$

Пусть $\boldsymbol{D}[0, T]$ — пространство функций на $[0, T]$ со значениями в R^r, непрерывных справа и имеющих пределы слева, с нормой $\|x\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x(t)|$; $\boldsymbol{D}_0[0, T]$ — его подпространство, состоящее из функций, обращающихся в 0 при $t = 0$.

Первая производная произвольного функционала на $\boldsymbol{D}_0[0, T]$ — непрерывный линейный функционал на этом пространстве.

Лемма 5.2.3. *Любой непрерывный линейный функционал* $l(x)$ *на* $\boldsymbol{D}_0[0, T]$ *представим в виде*

$$l(x) = \int_{(0, T]} \sum_{i=1}^{r} x^i(t)\, dV_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^j \cdot (x^i(t_j) - x^i(t_j -)),$$

где $V_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, — *непрерывные справа функции ограниченной вариации на* $[0, T]$, $t_j \in (0, T]$, $\sum_{j,\, i} |\alpha_i^j| < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{T}$, состоящее из точек вида $t \in [0, T]$ и $t-$, где $t \in (0, T]$; введем на $\mathfrak{T}$ естественный порядок и топологию, взяв в качестве окрестностей интервалы. В этой топологии $\mathfrak{T}$ — компакт. Пространство $\boldsymbol{D}[0, T]$ с нормой $\|\ \|$ отождествляется с пространством $\boldsymbol{C}(\mathfrak{T})$ непрерывных функций на $\mathfrak{T}$. Согласно теореме Рисса (см. Халмош [1], § 56), непрерывные линейные функционалы на $\boldsymbol{C}(\mathfrak{T})$ представляются в виде интегралов относительно зарядов на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathfrak{T}$ (которые состоят из борелевских множеств пар t, t — и не более чем счетных множеств отдельных точек t_k, t'_k —). Каждый такой заряд однозначно задается своей функцией распределения $V(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{T}$, имеющей не более чем счетное число точек разрыва, причем ряд из величин скачков в этих точках абсолютно сходится. Отсюда получается утверждение леммы. □

2. Теорема 5.2.1. *Пусть* $(\xi^{h, h}(t), \mathsf{P}^{h, h}_{t, x})$, $t \in [0, T]$, $h > 0$, — *семейство локально безгранично делимых процессов с кумулянтами* $G^{h, h}(t, x; z) = h^{-1} G_0(t, x; hz)$. *Пусть функции* $G_0(t, x; z) \leftrightarrow H_0(t, x; u)$ *всюду конечны и удовлетворяют условиям* **А**—**Д** §§ 3.1, 3.2; *пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

Е. *Функции* $G_0(t, x; z)$ *и* $H_0(t, x; u)$ *дважды дифференцируемы по* $(x; z)$, *соответственно, по* $(x; u)$, *причем первые и вторые производные непрерывны по* $(t, x; z)$, $(t, x; u)$.

Ж. *Существует положительное* b *такое, что* $\sum\limits_{i, j} \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i \partial z_j}(t, x; z) z_i z_j \geqslant b |z|^2$ *для всех* t, x, z.

Пусть функционал $S(\varphi)$ *задается формулой* (5.2.1) *для абсолютно непрерывных* φ *и* $S(\varphi) = +\infty$ *для остальных*.

Пусть F — *ограниченный функционал на* $\boldsymbol{D}_0[0, T]$, *измеримый относительно* σ-*алгебры, порожденной цилиндрическими множествами, и непрерывный в топологии равномерной сходимости. Пусть максимум функционала* $F - S$ *достигается на единственной функции* $\varphi_0 \in \boldsymbol{D}_0[0, T]$; *пусть эта функция принадлежит* $\boldsymbol{C}^1_0[0, T]$, *и пусть функционал* F *дважды дифференцируем в точке* φ_0 *по Фреше в норме* $\| \;\; \|$.

Пусть $F''(\varphi_0)(x, x) < S''(\varphi_0)(x, x)$ *для любой ненулевой функции* $x \in \boldsymbol{W}^{1, 2}_0[0, T]$, *где вторая производная* S'' *продолжена с* $\boldsymbol{C}^1_0[0, T]$ *на* $\boldsymbol{W}^{1, 2}_0[0, T]$ *формулой* (5.2.3).

Тогда при $h \downarrow 0$

$$\mathsf{M}^{h, h}_{0, 0} \exp\{h^{-1} F(\xi^{h, h})\} \sim K_0 \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0)]\}, \quad (5.2.4)$$

где

$$K_0 = \mathsf{M} \exp\{Q(\eta)\} < \infty, \quad (5.2.5)$$

$\eta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\eta(0) = 0$, — *гауссовский диффузионный процесс в* R^r *с матрицей диффузии*

$$(A^{ij}(t)) = \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i \partial z_j}(t, \varphi_0(t); \nabla_u H_0(t, \varphi_0(t); \dot{\varphi}_0(t))) \right) \quad (5.2.6)$$

и коэффициентами переноса

$$B^i(t,\ x)=\sum_{j=1}^{r} C_j^i(t)\, x^j, \tag{5.2.7}$$

$$C_j^i(t)=\frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i\, \partial x^j}(t,\ \varphi_0(t);\ \nabla_u H_0(t,\ \varphi_0(t);\ \dot\varphi_0(t))), \tag{5.2.8}$$

а функционал Q на $\boldsymbol{D}_0[0,\ T]$ задается формулой

$$Q(x)=\frac{1}{2}\left[F''(\varphi_0)(x,\ x)+\int_0^T \sum_{i,\ j} D_{ij}(t)\, x^i(t)\, x^j(t)\, dt\right], \tag{5.2.9}$$

$$D_{ij}(t)=\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i\, \partial x^j}(t,\ \varphi_0(t);\ \nabla_u H_0(t,\ \varphi_0(t);\ \dot\varphi_0(t))). \tag{5.2.10}$$

Заметим, что в условиях теоремы 5.1.1 $S''(\varphi_0)(x,\ x)=2S(x)$, $A^{ij}(t)=\delta^{ij}$, $B^i(t,\ x)=0$, $D^{ij}(t)=0$.

Доказательство. Прежде всего, согласно теореме 4.3.1, $h^{-1}S_{0,\ T}(\varphi)$ — функционал действия для рассматриваемого семейства процессов при $h\downarrow 0$. Так же, как в § 5.1, отбрасываем дополнение ε-окрестности точки φ_0 и пользуемся обобщенным преобразованием Крамера с $z^h(t)=h^{-1}z_0(t)$, $z_0(t)=\nabla_u H_0(t,\ \varphi_0(t);\ \dot\varphi_0(t))$:

$$\mathsf{P}^{z^h}(A)=\mathsf{M}_{0;\ 0}^{h;\ h}\left(A;\ \exp\left\{h^{-1}\int_0^T z_0(t)\, d\xi^{h,\ h}(t)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-h^{-1}\int_0^T G_0(t,\ \xi^{h,\ h}(t);\ z_0(t))\, dt\right\}\right).$$

Получаем, обозначая M^{z^h} соответствующее математическое ожидание и полагая $\eta^h(t)=h^{-1/2}(\xi^{h,\ h}(t)-\varphi_0(t))$:

$$\mathsf{M}_{0;\ 0}^{h;\ h}\exp\{h^{-1}F(\xi^{h,\ h})\}\sim$$
$$\sim\mathsf{M}^{h,\ h}\{\rho_{0,\ T}(\xi^{h,\ h},\ \varphi_0)<\varepsilon;\ \exp\{h^{-1}F(\xi^{h,\ h})\}\}=$$
$$=\mathsf{M}^{z^h}\left\{\rho_{0,\ T}(\xi^{h,\ h},\ \varphi_0)<\varepsilon;\ \exp\left\{h^{-1}F(\xi^{h,\ h})-\right.\right.$$
$$\left.\left.-h^{-1}\int_0^T z_0(t)\, d\xi^{h,\ h}(t)+h^{-1}\int_0^T G_0(t,\ \xi^{h,\ h}(t);\ z_0(t))\, dt\right\}\right\}=$$
$$=\mathsf{M}^{z^h}\left\{\|\eta^h\|<h^{-1/2}\varepsilon;\ \exp\left\{h^{-1}F(\varphi_0+h^{1/2}\eta^h)-\right.\right.$$
$$-h^{-1/2}\int_0^T z_0(t)\, d\eta^h(t)-h^{-1}\int_0^T [z_0(t)\,\dot\varphi_0(t)-$$
$$\left.\left.-G_0(t,\ \varphi_0(t)+h^{1/2}\eta^h(t);\ z_0(t))]\, dt\right\}\right\}.$$

Беря разложение Тейлора функционала F вблизи точки φ_0, а функции G_0 по второму аргументу вблизи точки $\varphi_0(t)$ до членов второго порядка, получаем:

$$\mathsf{M}^{h,\,h}_{0,\,0}\exp\{h^{-1}F(\xi^{h,\,h})\}\sim \mathsf{M}^{z^h}\chi_{\{\|\eta^h\|<h^{-1/2}\varepsilon\}}\times$$
$$\times\exp\left\{h^{-1}\left[F(\varphi_0)-\int_0^T[z_0(t)\,\dot\varphi_0(t)-G_0(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))]\,dt\right]+\right.$$
$$+h^{-1/2}\left[F'(\varphi_0)(\eta^h)-\int_0^T z_0(t)\,d\eta^h(t)+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\nabla_x G_0(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))\,\eta^h(t)\,dt\right]+\frac{1}{2}\left[F''(\varphi_0)(\eta^h,\ \eta^h)+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\sum_{i,\,j}\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i\,\partial x^j}(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))\,\eta^{hi}(t)\,\eta^{hj}(t)\,dt\right]+$$
$$\left.+h^{-1}R(h^{1/2}\eta^h)\right\},\qquad(5.2.11)$$

где $R(x)=o(\|x\|^2)$ при $x\to 0$ $(x\in \boldsymbol{D}_0[0,\ T])$.

3. Множитель при h^{-1} — не что иное, как $F(\varphi_0)-S(\varphi_0)$. Докажем, как и в § 5.1, что члены с $h^{-1/2}$ вероятностью 1 сокращаются.

Так как функционал $F-S$ имеет в точке φ_0 экстремум и так как этот функционал дифференцируем по подпространству $\boldsymbol{C}_0^1[0,\ T]\subset \boldsymbol{D}_0[0,\ T]$, то $F'(\varphi_0)(x)-S'(\varphi_0)(x)=0$ для всех $x\in \boldsymbol{C}_0^1[0,\ T]$. Воспользуемся леммами 5.2.1 и 5.2.3 применительно к функционалу $F'(\varphi_0)(x)$; члены с $x^i(t_j)-x^i(t_j-)$ пропадут:

$$\int_{(0,\ T]}\sum_i x^i(t)\,dV_i(t)-$$
$$-\int_0^T\sum_i\frac{\partial H_0}{\partial x^i}x^i(t)\,dt-\int_0^T\sum_i\frac{\partial H_0}{\partial u^i}\dot x^i(t)\,dt=0$$

для всех $x\in \boldsymbol{C}_0^1[0,\ T]$. Нормируем функции $V_i(t)$ условием $V_i(T)=0$; положим $W_i(t)=\int_t^T\frac{\partial H_0}{\partial x^i}(s,\ \varphi_0(s);\ \dot\varphi_0(s))\,ds$.

Возьмем первые два интеграла по частям; внеинтегральные члены пропадут из-за $x^i(0)=0$, $V_i(T)=W_i(T)=0$.

Получим:

$$\int_0^T \sum_i \left[-V_i(t) - W_i(t) - \frac{\partial H_0}{\partial u^i}(t,\ \varphi_0(t);\ \dot{\varphi}_0(t)) \right] \dot{x}^i(t)\,dt = 0.$$

Так как $\dot{x}^i(t)$ — произвольные непрерывные функции, то при почти всех t

$$-V_i(t) - W_i(t) - \frac{\partial H_0}{\partial u^i}(t,\ \varphi_0(t);\ \dot{\varphi}_0(t)) = 0. \quad (5.2.12)$$

Теперь рассмотрим члены с множителем $h^{-1/2}$ в (5.2.11). Скачки локально безгранично делимого процесса $\xi^{h,h}(t)$, как и скачки $\eta^h(t)$, лишь с нулевой вероятностью приходятся на счетное число моментов времени $\{t_j\}$; поэтому в $F'(\varphi_0)(\eta^h)$ члены с $\eta^{hi}(t_j) - \eta^{hi}(t_j -)$ можно отбросить. Почти наверное получим:

$$F'(\varphi_0)(\eta^h) - \int_0^T z_0(t)\,d\eta^h(t) +$$
$$+ \int_0^T \nabla_x G_0(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))\,\eta^h(t)\,dt =$$
$$= \int_{(0,T]} \sum_i \eta^{hi}(t)\,dV_i(t) - \int_0^T \sum_i z_{0i}(t)\,d\eta^{hi}(t) +$$
$$+ \int_0^T \sum_i \frac{\partial G_0}{\partial x^i}(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))\,\eta^{hi}(t)\,dt. \quad (5.2.13)$$

Первый интеграл интегрированием по частям превратим в стохастический (внеинтегральный член пропадет из-за $V_i(T) = 0$, $\eta^{hi}(0) = 0$); во втором вспомним, что $z_{0i}(t) = \frac{\partial H_0}{\partial u^i}(t,\ \varphi_0(t);\ \dot{\varphi}_0(t))$. В третьем, пользуясь леммой 5.2.2, заменим $\frac{\partial G_0}{\partial x^i}(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))$ на $-\frac{\partial H_0}{\partial x^i}(t,\ \varphi_0(t);\ \dot{\varphi}_0(t)) = \frac{dW_i(t)}{dt}$ и также произведем интегрирование по частям. Получим, что выражение (5.2.13) с единичной вероятностью равно

$$\int_0^T \sum_i \left[-V_i(t) - \frac{\partial H_0}{\partial u^i}(t,\ \varphi_0(t);\ \dot{\varphi}_0(t)) - W_i(t) \right] d\eta^{hi}(t),$$

т. е., согласно (5.2.12), нулю.

4. Перепишем формулу (5.2.11) с учетом исчезновения членов первого порядка по η^h и используя интеграл по мере μ_{η^h} — распределению случайной функции η^h в пространстве $D_0[0, T]$ относительно вероятностной меры P^{z^h}:

$$\mu_{\eta^h}(A) = \mathsf{P}^{z^h}\{\eta^h \in A\}.$$

Получаем:

$$\mathsf{M}_{0,\,0}^{h,\,h} \exp\{h^{-1}F(\xi^{h,\,h})\} \sim$$
$$\sim \exp\{h^{-1}[F(\varphi_0) - S(\varphi_0)]\} \int\limits_{D_0[0,\,T]} f^h(x)\,\mu_{\eta^h}(dx), \qquad (5.2.14)$$

$$f^h(x) = \chi_{[0,\,h^{-1/2}\varepsilon)}(\|x\|)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\left[F''(\varphi_0)(x,\,x) + \right.\right.$$
$$\left. + \int\limits_0^T \sum_{i,\,j} \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i\,\partial x^j}(t,\ \varphi_0(t);\ z_0(t))\,x^i(t)\,x^j(t)\,dt\right] +$$
$$\left. + h^{-1}R(h^{1/2}x)\right\}. \qquad (5.2.15)$$

Легко видеть, что функционал под знаком интеграла равномерно на каждом ограниченном множестве сходится к функционалу $\exp\{Q(x)\}$. Мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 5.2.4. *Пусть семейство конечных мер μ^h на метрическом пространстве X слабо сходится при $h \downarrow 0$ к конечной мере μ; пусть измеримые функции $f^h(x)$ ограничены в любом ограниченном множестве и сходятся при $h \downarrow 0$ к функции $f(x)$ равномерно на каждом ограниченном множестве. Пусть предельная функция $f(x)$ непрерывна почти всюду относительно меры μ.*

Тогда для сходимости

$$\int\limits_X f^h(x)\,\mu^h(dx) \to \int\limits_X f(x)\,\mu(dx)$$

при $h \downarrow 0$ и конечности этого предела достаточна равномерная интегрируемость функций $f^h(x)$ относительно мер μ^h.

Доказательство этой чисто аналитической леммы опускаем.

План дальнейшей части доказательства. Вводим на пространстве $D_0[0, T]$ наряду с метрикой $\rho_{0,\,T}$ метрику Скорохода. Предельный функционал $\exp\{Q(x)\}$ непрерывен относительно равномерной сходимости. Но сходимость $y \to x$ в смысле обеих метрик в $D_0[0, T]$ совпадает, если

$x \in \boldsymbol{C}_0[0, T]$ (см. Биллингсли [1], § 14). Поэтому функционал $\exp\{Q(x)\}$ непрерывен в смысле скороходовской топологии в точках $x \in \boldsymbol{C}_0[0, T]$. Относительно распределения диффузионного процесса это — множество полной меры. Таким образом, остается установить слабую сходимость мер $\mu_{\eta h}$ к распределению μ_η указанного диффузионного процесса и равномерную интегрируемость $f^h(x)$ относительно $\mu_{\eta h}$.

5. Доказательство слабой сходимости $\mu_{\eta h}$ к μ_η мы полностью приводить не будем; оно придерживается стандартной схемы. Во-первых, проверяется относительная слабая компактность семейства мер $\{\mu_{\eta h}\}$; во-вторых, устанавливается, что некоторая характеристика любой предельной точки семейства мер $\{\mu_{\eta h}\}$ при $h \downarrow 0$, однозначно определяющая меру, — именно та, какая должна быть. В качестве аппарата, характеризующего меры в $\boldsymbol{D}_0[0, T]$, берутся мартингальные задачи. Обозначим через $\hat{\boldsymbol{C}}^{1,2}$ множество ограниченных функций $f(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^r$, один раз непрерывно дифференцируемых по первому аргументу и два раза по второму, причем $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|$, $|x|\left|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|$ ограничены. Распределения $\mu_{\eta h}$, μ_η характеризуются с помощью компенсаторов $f(t, x(t))$ для функций $f \in \hat{\boldsymbol{C}}^{1,2}$ относительно этих мер:

$$\widetilde{f(t, x(t))}^{\mu_{\eta h}} = \int_0^t \mathfrak{A}_{\eta h} f(s, x(s))\, ds, \tag{5.2.16}$$

$$\widetilde{f(t, x(t))}^{\mu_\eta} = \int_0^t \mathfrak{A}_\eta f(s, x(s))\, ds, \tag{5.2.17}$$

где $\mathfrak{A}_{\eta h}$, $\mathfrak{A}_\eta$ — соответствующие компенсирующие операторы.

Выпишем эти операторы. Компенсирующий оператор исходного процесса задается формулой (4.2.3) с $\tau = h$ и $b^{\tau, h} \equiv b$, т. е.

$$\mathfrak{A}_{\xi^h, h} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i b^i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) + \\ + \frac{h}{2} \sum_{i, j} a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) + h^{-1} \int \Big[f(t, x + hu) - \\ - f(t, x) - h \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) u^i \Big] \nu_{t, x}(du).$$

Компенсирующий оператор для того же процесса относительно меры, подвергнутой преобразованию Крамера, есть

$$\mathfrak{A}^{z^h}_{\xi^{h,h}} f(t, x) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i \frac{\partial G_0}{\partial z_i}(t, x; z_0(t)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) +$$
$$+ \frac{h}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) + h^{-1} \int \Big[f(t, x+hu) -$$
$$- f(t, x) - h \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) u^i \Big] e^{z_0(t) u} \nu_{t, x}(du),$$

а для процесса $\eta^h(t) = h^{-1/2}(\xi^{h,h}(t) - \varphi_0(t))$ относительно вероятности P^{z^h}:

$$\mathfrak{A}_{\eta^h} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) +$$
$$+ h^{-1/2} \sum_i \left[\frac{\partial G_0}{\partial z_i}(t, \varphi_0(t) + h^{1/2} x; z_0(t)) - \dot{\varphi}_0^i(t) \right] \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(t, \varphi_0(t) + h^{1/2} x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) +$$
$$+ h^{-1} \int \Big[f(t, x + h^{1/2} u) - f(t, x) -$$
$$- h^{1/2} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) u^i \Big] e^{z_0(t) u} \nu_{t, \varphi_0(t) + h^{1/2} x}(du). \quad (5.2.18)$$

Наконец, для диффузионного процесса $\eta(t)$ имеем

$$\mathfrak{A}_\eta f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \sum_i B^i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t, x). \quad (5.2.19)$$

При этом распределение μ_η на $D_0[0, T]$ является единственным решением мартингальной задачи (5.2.17) (см. Струк, Варадан [1], [2]).

При $h \downarrow 0$ для $f \in \hat{C}^{1,2}$ имеет место сходимость операторов. Действительно, в формуле (5.2.18) $\dot{\varphi}_0^i(t) = \frac{\partial G_0}{\partial z_i}(t, \varphi_0(t); z_0(t))$. Пользуясь тейлоровским разложением, получаем

$$\mathfrak{A}_{\eta^h} f(t,\ x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,\ x) +$$
$$+ \sum_{i,\ j} \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i\, \partial x^j}(t,\ \varphi_0(t) + \theta h^{1/2} x;\ z_0(t))\, x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,\ x) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,\ j} a^{ij}(t,\ \varphi_0(t) + h^{1/2} x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(t,\ x) +$$
$$+ \int \frac{1}{2} \sum_{i,\ j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(t,\ x + \theta h^{1/2} u)\, u^i u^j \nu_{t,\ \varphi_0(t) + h^{1/2} x}(du),$$

где $\theta \in (0,\ 1)$. Второй член сходится к $\sum_{i,\ j} \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i\, \partial x^j}(t,\ \varphi_0(t);$ $z_0(t))\, x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,\ x) = \sum_i B^i(t,\ x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,\ x)$. Третий и четвертый вместе дают

$$\frac{1}{2} \sum_{i,\ j} \Big[a^{ij}(t,\ \varphi_0(t) + h^{1/2} x) +$$
$$+ \int e^{z_0(t) u} u^i u^j \nu_{t,\ \varphi_0(t) + h^{1/2} x}(du) \Big] \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(t,\ x) + o(1);$$

сумма в квадратных скобках есть

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i\, \partial z_j}(t,\ \varphi_0(t) + h^{1/2} x;\ z_0(t)) \to A^{ij}(t).$$

Итак, $\mathfrak{A}_{\eta^h} f(t,\ x) \to \mathfrak{A}_\eta f(t,\ x)$ при $h \downarrow 0$, причем сходимость равномерна в каждом ограниченном множестве. Слабая сходимость μ_{η^h} к μ_η выводится отсюда так, как это делают (в другой ситуации) Струк и Варадан ([2], гл. 11).

6. Чтобы установить равномерную интегрируемость $f^h(x)$ относительно μ_{η^h}, достаточно проверить, что для какого-то положительного $\varkappa$ существует константа C такая, что $\mathsf{M}^{z^h} f^h(\eta^h)^{1+0,1\varkappa} \leqslant C$.

В § 5.1 функционал S выступил и как нормированный функционал действия для семейства процессов ξ^h, и как половина его второй производной в произвольной точке из $W^{1,2}[0,\ T]$, и как функционал действия процесса w, участвующего в представлениях (5.1.10), (5.1.11). В нашем теперешнем случае все эти функционалы различны. Функционалы S и $S''(\varphi_0)(x, x)$ у нас уже выписаны; выпишем функционал действия предельного диффузионного процесса η. Обозначать его мы будем $\tilde{I}=\tilde{I}_{0,T}$:

$$\tilde{I}(x)=\tilde{I}_{0,T}(x)=$$
$$=\int_0^T \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^i\,\partial u^j}\left(\dot{x}^i(t)-\sum_k \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_i\,\partial x^k}x^k(t)\right)\times$$
$$\times\left(\dot{x}^j(t)-\sum_l \frac{\partial^2 G_0}{\partial z_j\,\partial x^l}x^l(t)\right)dt=$$
$$=\int_0^T \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^i\,\partial u^j}\dot{x}^i(t)\,\dot{x}^j(t)+2\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^i\,\partial x^j}\dot{x}^i(t)\,x^j(t)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^i\,\partial x^j}+\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)x^i(t)\,x^j(t)\right]dt. \quad (5.2.20)$$

Здесь производные H_0 берутся в точке $(t, \varphi_0(t); \dot{\varphi}_0(t))$, G_0 — в точке $(t, \varphi_0(t); z_0(t))$, и используется лемма 5.2.2.

Вместо леммы 5.1.1 в нашей ситуации используется

Лемма 5.2.5. *Пусть $Q(x)$ — непрерывный квадратичный функционал на $\boldsymbol{D}_0[0, T]$; $\tilde{I}(x)$ — функционал, задаваемый формулой (5.2.20) для $x\in \boldsymbol{W}_0^{1,2}[0, T]$ и равный $+\infty$ для прочих $x\in\boldsymbol{D}_0[0, T]$. Пусть $Q(x)<\tilde{I}(x)$ для всех ненулевых $x\in\boldsymbol{W}_0^{1,2}[0, T]$. Тогда существуют положительные константы K и $\varkappa$ такие, что $\|x\|^2\leqslant K\tilde{I}(x)$, $Q(x)\leqslant(1-\varkappa)\tilde{I}(x)$ для всех $x\in\boldsymbol{D}_0[0, T]$.*

Доказательство — такое же, как у леммы 5.1.1. □

Из условия $F''(\varphi_0)(x, x)<S''(\varphi_0)(x, x)$ с учетом формул (5.2.3), (5.2.9), (5.2.20) вытекает, что $Q(x)<\tilde{I}(x)$. Применение леммы 5.2.5 дает существование $\varkappa>0$ такого, что $Q(x)\leqslant(1-\varkappa)\tilde{I}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{D}_0[0, T]$. Накладываем на выбор $\varepsilon>0$ ограничение: требуем, чтобы $R(x)\leqslant 0{,}1\frac{\varkappa}{K}\|x\|^2$ при $\|x\|<\varepsilon$. Тогда для установления равномерной интегрируемости $f^h(\eta^h)$ достаточно проверить, что

$$\mathsf{M}^{z^h}\{\|\eta^h\|<h^{-1/2}\varepsilon;\ \exp\{(1+0{,}1\varkappa)\,Q_1(\eta^h)\}\}\leqslant C<\infty,$$

где $Q_1(x)=Q(x)+0,1\frac{\varkappa}{K}\|x\|^2$. Это математическое ожидание не превосходит

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{M}^{z^h}\{\|\eta^h\|<h^{-1/2}\varepsilon,\ \eta^h\in$$

$$\in\tilde{\Phi}_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m+1}}\diagdown\tilde{\Phi}_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}};\ \exp\{(1+0,1\varkappa)\,Q_1(\eta^h)\}\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}^{z^h}\{\|\eta^h\|<h^{-1/2}\varepsilon,\ \eta^h\notin\tilde{\Phi}_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}\}\times$$

$$\times\exp\{(1+0,1\varkappa)\sup\{Q_1(x):\ x\in\tilde{\Phi}_0(m+1)_{+\alpha\sqrt{m|+1}}\}\},$$

где $\alpha>0$, $\tilde{\Phi}_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}$ — $\alpha\sqrt{m}$-окрестность множества $\tilde{\Phi}_0(m)=\{x\in\boldsymbol{D}_0[0,T]:\ \tilde{I}(x)\leqslant m\}$. Последняя верхняя грань оценивается так же, как в § 5.1; вероятность — при помощи теоремы 2.4.2. Укажем элементы конструкции, используемой в этой теореме: $V=(R^r)^2$; B — множество всех значений $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, функций из $\tilde{\Phi}_0(m)_{+\alpha\sqrt{m}}$, пересеченное с $\{x:\ |x|<h^{-1/2}\varepsilon\}$; в качестве δ берется $\alpha\sqrt{m}$, $\delta'=\delta/3$; $A=m$; $t_i=iT/n$; $z(j)$ и $z\{j\}$ берутся пропорциональными $\sqrt{m}$, а $d(j)=md_0$. В отличие от § 5.1, ε_1 здесь уже нельзя взять равным 0; эта константа может быть сделана малой выбором малого α и большого числа n отрезков разбиения. В остальном доказательство завершается так же, как доказательство теоремы 5.1.1. □

7. Естественно, результат переносится на $\mathsf{M}_{0,\,0}^{h;\,h}G(\xi^{h,\,h})\times\times\exp\{h^{-1}F(\xi^{h,\,h})\}$. Однако, в отличие от § 5.1, мы не можем так же легко получить уточнение этого результата для s—2 раза дифференцируемого функционала G и s раз дифференцируемого F. Это связано с отсутствием общих результатов об асимптотических разложениях $\mathsf{M}^{z^h}H(\eta^h)$ при $h\downarrow 0$ для гладких функционалов H.

В работе Дубровского [2] результаты об асимптотических разложениях получены для частного вида гладких функционалов F: $F(\varphi)=\int_0^T v(t,\ \varphi(t))\,dt+w(\varphi(T))$ и $G\equiv 1$. При этом используется еще более общий вариант преобразования Крамера, при помощи которого удается свести функционал под знаком математического ожидания почти что к константе.

ГЛАВА 6

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ БОЛЬШИХ СКАЧКОВ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

§ 6.1. Условия, накладываемые на семейство процессов. Вспомогательные результаты

1. Условия **А — Г**. — 2. Примеры проверки выполнения условий **А — Г**. — 3. Моменты $\tau^\varepsilon(s)$, τ_k^ε. Вспомогательные результаты.

1. В этой главе, как и в предыдущих, мы будем рассматривать два класса строго марковских процессов в R^r — локально безгранично делимые и τ-процессы. Однако здесь не будет накладываться никакое условие, аналогичное условию конечности экспоненциальных (и даже степенных) моментов, так что мы будем предполагать, что компенсирующий оператор задается не формулой (2.1.1), а более общей (1.3.1). Так как мы ограничиваемся случаем фазового пространства R^r, нам будет удобно записывать компенсирующий оператор в другом виде, с использованием лишь одной системы координат. А именно, определим функцию h от вещественного аргумента: $h(u)=u$ при $|u|\leqslant 1$, $h(u)=1$ при $u>1$, $h(u)=-1$ при $u<-1$. Будем записывать компенсирующий оператор $\mathfrak{A}$ в виде

$$\mathfrak{A}f(t, x)=\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)+\sum_i b^i(t, x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}(t, x)+\int_{R^r}\Big[f(t, y)-f(t, x)-$$
$$-\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)\,h(y^i-x^i)\Big]\lambda_{t,x}(dy). \qquad (6.1.1)$$

Требуется, чтобы $\int\limits_{R^r}[1\wedge|y-x|^2]\,\lambda_{t,x}(dy)<\infty$. Любой оператор вида (1.3.1) переписывается в этом виде, но с другими коэффициентами $b^i(t, x)$.

Пусть $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}^\theta_{t,x})$, $t\in[0, T]$, — семейство процессов одного из двух описанных классов, зависящее от параметра θ, пробегающего множество Θ с фильтром $\theta\to$. Будем обозначать характеристики этих процессов $\lambda^\theta_{t,x}$,

$b^\theta(t, x)$, $a^{\theta, i, j}(t, x)$; в случае процессов, изменяющихся лишь в моменты, кратные какому-то положительному числу, будем обозначать это число $\tau(\theta)$ (т. е. рассматриваются $\tau(\theta)$-процессы).

Условия, которые мы наложим на рассматриваемое семейство, обеспечат следующее. Во-первых, при достаточно далеких θ процесс с почти единичной вероятностью будет близок к константе; во-вторых, основная часть вероятности большого уклонения от этой константы будет образовываться за счет реализаций, совершающих один или несколько больших скачков, а между скачками остающихся почти постоянными; в-третьих, мы сможем вычислить асимптотику этой основной части вероятности.

Введем наши условия.

А. Существует положительная функция $g(\theta)$, $g(\theta) \to 0$ при $\theta \to$, и мера $\lambda_{t, x}$ на R^r такие, что для любой точки x и любой ограниченной непрерывной функции f, равной 0 в окрестности x, при почти всех t

$$\lim_{\substack{\theta \to \\ x' \to x}} g(\theta)^{-1} \int_{R^r} f(y)\, \lambda^\theta_{t, x'}(dy) = \int_{R^r} f(y)\, \lambda_{t, x}(dy).$$

Заметим, что не предполагается, что $\int_{R^r} [1 \wedge |y-x|^2] \times \lambda_{t, x}(dy) < \infty$ (т. е. предельная мера $\lambda_{t, x}$ не обязана быть мерой Леви какого-либо локально безгранично делимого процесса).

В теоремах 6.2.2, 6.2.2′ будет требоваться более слабое условие:

А′. Для данного x_0 существует мера λ_{t, x_0} на R^r такая, что для любой ограниченной непрерывной функции f, равной 0 в окрестности x_0, при почти всех t

$$\lim_{\substack{\theta \to \\ y \to x_0}} g(\theta)^{-1} \int_{R^r} f(x)\, \lambda^\theta_{t, y}(dx) = \int_{R^r} f(x)\, \lambda_{t, x_0}(dx).$$

Б. $\sup\limits_{t, x} \lambda^\theta_{t, x}\{y\colon |y-x| \geqslant \delta\} \leqslant K_1(\delta)\, g(\theta)$ при всех $\delta > 0$ и всех достаточно далеких θ, где $K_1(\delta) < \infty$.

В. Существует такое число $\beta \in (0, 1]$, что

$$\sup_{t, x} \left[\sum_{i, j} |a^{\theta, i, j}(t, x)| + \int_{R^r} [1 \wedge |y-x|^2]\, \lambda^\theta_{t, x}(dy) \right] \leqslant K_2 g(\theta)^\beta$$

при всех достаточно далеких θ, где $K_2 < \infty$.

Г. $\sup\limits_{t, x} |b^\theta(t, x)| \to 0$ при $\theta \to$.

Условия **А**, **А'**, наиболее точные, используются (вместе с условием $\tau(\theta) \to 0$ в случае $\tau(\theta)$-процессов) для нахождения асимптотики вероятностей больших уклонений, происходящих за счет реализаций с несколькими большими скачками, остающихся между ними почти постоянными; остальные — для того чтобы установить, что другими реализациями можно пренебречь.

2. Приведем примеры семейств марковских процессов, удовлетворяющих условиям **А**—**Г**.

а) Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные одномерные случайные величины с распределением μ со степенными «хвостами»: при $x \to \infty$

$$\mu(x, \infty) = \mathsf{P}\{X_i > x\} = c_+ x^{-\alpha} + o(x^{-\alpha}), \tag{6.1.2}$$

$$\mu(-\infty, -x] = \mathsf{P}\{X_i \leqslant -x\} = c_- x^{-\alpha} + o(x^{-\alpha}); \tag{6.1.3}$$

пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим семейство процессов $(\xi^{n, z}(t), \mathsf{P}^{n, z}_{t, x})$, зависящих от двумерного параметра $\theta = (n, z)$ (n — натуральное, z — положительное): для процесса, начинающегося в момент времени 0 в точке 0,

$$\xi^{n, z}(t) = (X_1 + \ldots + X_{[nt]})/z, \qquad t \in [0, 1] \tag{6.1.4}$$

$\left(\text{для процесса, начинающегося в момент } t_0 \text{ в точке } x_0,\right.$ $\left.\xi^{n, z}(t) = x_0 + z^{-1} \sum_{nt_0 < k \leqslant nt} X_k\right)$. В качестве фильтра на множестве пар (n, z) будем рассматривать $n \to \infty$, $z/n^{\frac{1}{\alpha}} \to \infty$ (последнее означает, что речь идет именно о больших уклонениях). Имеем (определение меры Леви в дискретном случае см. § 1.3, п. 3):

$$\tau(n, z) = n^{-1}; \tag{6.1.5}$$

$$\lambda^{n, z}_{t, x}(A) = n \cdot \mu(z(A - x)); \tag{6.1.6}$$

$$g(n, z) = nz^{-\alpha} \to 0; \tag{6.1.7}$$

$$\lambda_{t, x}(dy) = \begin{cases} c_+ \alpha (y - x)^{-\alpha - 1}\, dy, & y > x, \\ c_- \alpha |y - x|^{-\alpha - 1}\, dy, & y < x; \end{cases} \tag{6.1.8}$$

$$b^{n, z}(t, x) = n \int h(u/z)\, \mu(du). \tag{6.1.9}$$

Условия **А**, **Б** проверяются очень легко. Условия **В** и **Г** касаются предельного поведения интегралов (6.1.9) и

$$n \cdot \int [1 \wedge (u/z)^2]\, \mu(du). \tag{6.1.10}$$

Оба эти интеграла при достаточно малых $nz^{-\alpha}$ не превосходят $\mathrm{const}\, nz^{-\alpha}$, т. е. выполнены **В** (при $\beta = 1$) и **Г**;

доказательство в обоих случаях одинаковое. Проведем его для (6.1.10).

Выбираем A такое, что $o(x^{-\alpha})$ в (6.1.2), (6.1.3) не превосходят $x^{-\alpha}$ при $x \geqslant A$; разбиваем интеграл (6.1.10) на три:

$$n \int_{-\infty}^{-A} [1 \wedge (u/z)^2]\, \mu(du) + n \int_{-A}^{A} [1 \wedge (u/z)^2]\, \mu(du) + \\ + n \int_{A}^{\infty} [1 \wedge (u/z)^2]\, \mu(du). \qquad (6.1.11)$$

Средний интеграл не превосходит $n \cdot A^2 z^{-2} = o(nz^{-\alpha})$; крайние преобразуем, интегрируя по частям два раза в противоположных направлениях. Покажем, как это делается, на примере интеграла от A до ∞:

$$n \int_{A}^{\infty} [1 \wedge (u/z)^2]\, d(-\mu(u, \infty)) =$$

$$= n \left\{ \mu(A, \infty) \cdot [1 \wedge (A/z)^2] + \int_{A}^{\infty} \mu(u, \infty)\, d[1 \wedge (u/z)^2] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant n \left\{ (c_+ + 1) A^{-\alpha} \cdot [1 \wedge (A/z)^2] + \int_{A}^{\infty} (c_+ + 1)\, u^{-\alpha}\, d\, [1 \wedge (u/z)^2] \right\} =$$

$$= (c_+ + 1) \cdot n \int_{A}^{\infty} [1 \wedge (u/z)^2]\, d(-u^{-\alpha}) =$$

$$= (c_+ + 1) \cdot n \int_{A/z}^{\infty} [1 \wedge x^2]\, d(-(zx)^{-\alpha}) =$$

$$= (c_+ + 1) \cdot nz^{-\alpha} \int_{A/z}^{\infty} [1 \wedge x^2]\, \alpha x^{-\alpha-1}\, dx. \qquad (6.1.12)$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $1 \wedge (u/z)^2$ — неубывающая на правой полупрямой.

Интеграл в правой части стремится к конечному пределу при $z \to \infty$, т. е. интеграл (6.1.10) не превосходит $\mathrm{const} \cdot nz^{-\alpha}$.

При оценке интеграла (6.1.9) используется неравенство

$$\int_{A/z}^{\infty} h(x)\, dx^{-\alpha-1}\, dx < \int_{0}^{\infty} [1 \wedge x]\, \alpha x^{-\alpha-1}\, dx < \infty.$$

б) Тот же пример, что а), но $\alpha > 2$, и математическое ожидание $\mathsf{M}X_i = 0$; в качестве фильтра берется $n \to \infty$, $z \geqslant n^{\frac{1}{2}+\varkappa}$ ($\varkappa$ — положительная константа). Здесь фильтр охватывает не все большие уклонения (характеризуемые соотношениями $n \to \infty$, $z/n^{\frac{1}{2}} \to \infty$), а только часть их. Как и в примере а), сохраняются формулы (6.1.5)—(6.1.9) и условия **А**, **Б**; условия **В**, **Г** снова касаются интегралов (6.1.9), (6.1.10). Последний опять представляем в виде (6.1.11). Средний интеграл не больше nA^2z^{-2}, что не превосходит $\mathrm{const}\cdot(nz^{-\alpha})^{\beta}$ при $0 < \beta \leqslant \dfrac{2\varkappa}{\alpha\left(\frac{1}{2}+\varkappa\right)-1}$.

Интеграл в правой части (6.1.12) при $z \to \infty$ стремится к бесконечности; он имеет порядок $z^{\alpha-2}$. Итак, интеграл (6.1.10) не превосходит $\mathrm{const}\cdot nz^{-2} \leqslant \mathrm{const}\cdot(nz^{-\alpha})^{\beta}$ при указанных выше значениях β.

Рассмотрим интеграл (6.1.9), в силу $\mathsf{M}X_i = 0$ равный

$$n\int [h(u/z) - u/z]\,\mu(du) =$$
$$= -n\int_{-\infty}^{-z}(u/z+1)\,\mu(du) - n\int_{z}^{\infty}(u/z-1)\,\mu(du).$$

Каждый из интегралов оценивается аналогично [(6.1.12); так, второй вместе с множителем n при $z \geqslant A$ не превосходит

$$(c_+ + 1)\cdot n\int_z^{\infty}(u/z-1)\,d(-u^{-\alpha}) =$$
$$= (c_+ + 1)\cdot nz^{-\alpha}\int_1^{\infty}(x-1)\,\alpha x^{-\alpha-1}\,dx = \mathrm{const}\cdot nz^{-\alpha} \to 0.$$

Случай $1 < \alpha < 2$ рассматривается аналогично.

в) Пусть $(\xi(t), \mathsf{P}_{t,x})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — не зависящий от параметра локально безгранично делимый процесс с локальными характеристиками $b(t, x)$, $a^{ij}(t, x)$, $\Lambda_{t,x}$. Пусть $|b(t, x)|$, $|a^{ij}(t, x)|$, $\int [1 \wedge |y-x|^2]\,\Lambda_{t,x}(dy) \leqslant \mathrm{const} < \infty$; пусть при любом x для любой ограниченной непрерывной функции $f(y)$, обращающейся в 0 в окрестности точки x,

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \int f(y)\,\Lambda_{t,x'}(dy) = \int f(y)\,\Lambda_{0,x}(dy)$$

(т. е. значения меры $\Lambda_{t,x}$ вдали от точки x зависят от аргументов t, x слабо непрерывным при $t=0$ образом).

Для $\theta \in (0, 1]$ рассмотрим марковский процесс $\xi^\theta(t) = \xi(\theta t)$ с измененным в θ раз масштабом времени; устремлять параметр θ будем к 0. Здесь

$$\lambda^\theta_{t,x}(A) = \theta\Lambda_{\theta t,x}(A),$$
$$g(\theta) = \theta \to 0,$$
$$\lambda_{t,x}(A) = \Lambda_{0,x}(A),$$
$$b^\theta(t, x) = \theta b(\theta t, x),$$
$$a^{\theta, i, j}(t, x) = \theta a^{ij}(\theta t, x);$$

условия **А—Г** выполняются.

3. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant 0$ определим первый после s момент скачка величины $\geqslant \varepsilon$:

$$\tau^\varepsilon(s) = \min\{t > s:\ |\xi^\theta(t) - \xi^\theta(t-)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Если таких $t > s$ нет, положим $\tau^\varepsilon(s) = +\infty$. Определим по индукции последовательность марковских моментов: $\tau^\varepsilon_0 = 0$, $\tau^\varepsilon_k = \tau^\varepsilon(\tau^\varepsilon_{k-1})$ (момент k-го скачка величины $\geqslant \varepsilon$); обозначим через ν^ε число скачков величины $\geqslant \varepsilon$ (т. е. число всех таких $i \geqslant 1$, для которых $\tau^\varepsilon_i \leqslant T$).

Лемма 6.1.1. *При выполнении условия* **Б** *имеем* $\mathsf{M}^\theta_{0,x_0}\nu^\varepsilon(\nu^\varepsilon - 1)\ldots(\nu^\varepsilon - k + 1) = O(g(\theta)^k)$, $\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\nu^\varepsilon \geqslant k\} = O(g(\theta)^k)$ *равномерно по* x_0.

Доказательство. Имеем: $\mathsf{M}^\theta_{0,x_0}\nu^\varepsilon(\nu^\varepsilon - 1)\ldots(\nu^\varepsilon - k + 1) = k!\mathsf{M}^\theta_{0,x_0}\sum^k_{0,T}(V)$, где $V(t_1, y_1, x_1, \ldots, t_k, y_k, x_k) = 1$, если все $|x_i - y_i| \geqslant \varepsilon$, и $V = 0$, если $|x_i - y_i| < \varepsilon$ хотя бы для какого-то $i = 1, \ldots, k$ (обозначение см. § 1.3, доказательство леммы 1.3.2). Применяем лемму 1.3.2, получаем (в том числе и для $\tau(\theta)$-процесса):

$$\mathsf{M}^\theta_{0,x_0}\nu^\varepsilon(\nu^\varepsilon - 1)\ldots(\nu^\varepsilon - k + 1) \leqslant$$
$$\leqslant k! \int_0^T dt_1 \int_{t_1}^T dt_2 \ldots \int_{t_{k-1}}^T dt_k \cdot [\sup_{t,x} \lambda^\theta_{t,x}\{y:\ |y - x| \geqslant \varepsilon\}]^k \leqslant$$
$$\leqslant T^k \cdot K_1(\varepsilon)^k g(\theta)^k.$$

Второе утверждение получается применением чебышёвского неравенства. □

Мы будем использовать также следующий вариант этой леммы:

Лемма 6.1.2. *При выполнении условия* **Б** $\mathsf{P}^\theta_{t,x}\{\tau^\varepsilon(t) \leqslant T\} = O(g(\theta))$ *равномерно по* t *и по* x.

Лемма 6.1.1 означает, что с вероятностью $1-O(g(\theta)^k)$ процесс совершает не более $(k-1)$ «больших» скачков на промежутке $[0, T]$. Поведение процесса между скачками описывается следующими леммами.

Лемма 6.1.3. *При выполнении условий* **Б**, **В**, **Г**, $\varepsilon \leqslant 1$ *равномерно по* s, x

$$\mathbf{P}^\theta_{s,x}\{\sup\{|\xi^\theta(t)-x|:\ t\in[s,T]\cap[s,\tau^\varepsilon(s))\}\geqslant\varepsilon\}=O(g(\theta)^\beta).$$

Заметим, что здесь опять, как в § 2.4, идет речь о полуметрике $\rho_{s,\,T\wedge\tau_V-}$, где $V=\{(x,y):\ |x-y|<\varepsilon\}$.

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс, определенный при $t\in[s,T]$:

$$\xi^\theta_V(t)=\begin{cases}\xi^\theta(t) & \text{при } s\leqslant t<\tau^\varepsilon(s),\\ \xi^\theta(\tau^\varepsilon(s)-) & \text{при } \tau^\varepsilon(s)\leqslant t\leqslant T;\end{cases}$$

однако, в отличие от § 2.4, где вводился такой случайный процесс, не будем производить никакого преобразования меры $\mathbf{P}^\theta_{s,x}$. Для гладкой функции f компенсатор $f(\xi^\theta_V(t))$ относительно вероятности $\mathbf{P}^\theta_{s,x}$ задается формулой

$$\widetilde{f(\xi^\theta_V(t))}=f(x)+\int\limits_s^{t\wedge\tau^\varepsilon(s)}A^{\theta,V}_v f(\xi^\theta_V(v))\,dv,$$

$$A^{\theta,V}_t f(x)=\sum_i b^{\theta,i}_V(t,x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{\theta,i,j}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}(x)+$$
$$+\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}\left[f(y)-f(x)-\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\,h(y^i-x^i)\right]\lambda^\theta_{t,x}(dy),$$

$$b^{\theta,i}_V(t,x)=b^{\theta,i}(t,x)-\int\limits_{|y-x|\geqslant\varepsilon}h(y^i-x^i)\,\lambda^\theta_{t,x}(dy).$$

При наших соглашениях относительно обозначений эта формула действует и для $\tau(\theta)$-процессов, если s и t брать кратными $\tau(\theta)$.

Отсюда вытекают, в частности, выражения для компенсаторов и квадратичных компенсаторов координат процесса $\xi^\theta_V(t)$: при $\varepsilon\leqslant 1$

$$\widetilde{\xi^{\theta,i}_V(t)}=x^i+\int\limits_s^{t\wedge\tau^\varepsilon(s)}b^{\theta,i}_V(v,\xi^\theta_V(v))\,dv,$$

$$\langle\xi^{\theta,i}_V,\ \xi^{\theta,i}_V\rangle(t)=\int\limits_s^{t\wedge\tau^\varepsilon(s)}A^{\theta,i,i}_V(v,\ \xi^\theta_V(v))\,dv,$$

$$A^{\theta,i,i}_V(t,x)=a^{\theta,i,i}(t,x)+\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y^i-x^i)^2\,\lambda^\theta_{t,x}(dy).$$

Из условий **Г** и **Б** легко выводится, что $\sup\limits_{t,x} |b_V^\theta(t, x)| \to 0$ при $\theta \to$; из условия **В** — что $\sup\limits_{t,x} A_V^{\theta, i, i}(t, x) = O(g(\theta)^\beta)$. При достаточно далеких θ будет выполнено неравенство $T \cdot \sup\limits_{t,x} |b^\theta(t, x)| < \varepsilon/2$; пользуясь неравенством Колмогорова, получаем:

$$\mathbf{P}_{s,x}^\theta\{\sup\{|\xi^\theta(t) - x|: t \in [s, T] \cap [s, \tau^\varepsilon(s))\} \geqslant \varepsilon\} = \\ = \mathbf{P}_{s,x}^\theta\left\{\sup_{t \in [s, T]} |\xi_V^\theta(t) - x| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}_{s,x}^\theta\left\{\sup_{t \in [s, T]} |\xi_V^\theta(t) - \widetilde{\xi_V^\theta(t)}| \geqslant \varepsilon/2\right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{(T - s) \cdot \sup\limits_{t,x} \sum\limits_i A_V^{\theta, i, i}(t, x)}{(\varepsilon/2)^2} = O(g(\theta)^\beta). \quad \square$$

Лемма 6.1.4. *При условиях* **Б, В, Г** *для любого натурального m равномерно по s, x*

$$\mathbf{P}_{s,x}^\theta\{\sup\{|\xi^\theta(t) - x|: t \in [s, T] \cap [s, \tau^\varepsilon(s))\} \geqslant (2m - 1)\varepsilon\} = \\ = O(g(\theta)^{m\beta}). \quad (6.1.13)$$

Доказательство. Обозначим верхнюю грань вероятности в левой части по всем s, x через $A_m(\theta)$; мы хотим доказать, что $A_m(\theta) = O(g(\theta)^{m\beta})$. Поведем доказательство по индукции; при $m = 1$ это — утверждение предыдущей леммы. Введем марковский момент $\tau^\varepsilon(s, x) = \tau^\varepsilon(s) \wedge \min\{t \geqslant s: |\xi^\theta(t) - x| \geqslant \varepsilon\}$. Если выполнено событие под знаком вероятности в (6.1.13), то $\min\{t \geqslant s: |\xi^\theta(t) - x| \geqslant \varepsilon\} < \tau^\varepsilon(s)$. Левый предел $\xi^\theta(t)$ в этот момент времени отстоит от x не далее, чем на ε; скачок меньше ε, поэтому $|\xi^\theta(\tau^\varepsilon(s, x)) - x| \leqslant 2\varepsilon$, и из события под знаком вероятности вытекает событие $\{\sup\{|\xi^\theta(t) - x'|: t \in [s', T] \cap [s', \tau^\varepsilon(s'))\} \geqslant (2m - 3)\varepsilon\}$, где мы положили для краткости $s' = \tau^\varepsilon(s, x)$, $x' = \xi^\theta(s')$ (при этом $\tau^\varepsilon(s') = \tau^\varepsilon(s)$). Пользуясь строго марковским свойством относительно момента $\tau^\varepsilon(s, x)$, получаем, что вероятность в левой части (6.1.13) не превосходит

$$\mathbf{M}_{s,x}^\theta\{\tau^\varepsilon(s, x) < \tau^\varepsilon(s);\ \mathbf{P}_{s',x'}^\theta\{\sup\{|\xi^\theta(t) - x'|: \\ t \in [s', T] \cap [s', \tau^\varepsilon(s'))\} \geqslant (2m - 3)\varepsilon\}\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}_{s,x}^\theta\{\tau^\varepsilon(s, x) < \tau^\varepsilon(s)\} \cdot A_{m-1}(\theta) \leqslant A_1(\theta) \cdot A_{m-1}(\theta).$$

Итак, $A_m(\theta) \leqslant A_1(\theta) \cdot A_{m-1}(\theta)$, и с учетом предыдущей леммы лемма 6.1.4 доказана. $\square$

Лемма 6.1.5. *При условиях* **Б**, **В**, **Г** *для любых целых* $k \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ *равномерно по* x_0

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\sup\{|\xi^{\theta}(t)-\xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_k)|\colon t\in[0,\,T]\cap[\tau^{\varepsilon}_k,\,\tau^{\varepsilon}_{k+1})\}\geqslant \geqslant(2m-1)\,\varepsilon\}=O\,(g\,(\theta)^{m\beta}).$$

Доказательство — применение строго марковского свойства относительно момента τ^{ε}_k и предыдущей леммы. □

§ 6.2. Основные теоремы

1. Функции $X^{t_1\ldots t_k}_{x_0x_1\ldots x_k}$. Теорема 6.2.1. — 2. Меры $\mu^k_{x_0}$. Теорема 6.2.2 (один большой скачок). — 3. Теорема 6.2.2′ (дискретное время). — 4. Теорема 6.2.3 (k скачков). — 5. Возможные обобщения.

1. В предыдущем параграфе мы доказали, что при далеких значениях θ процесс $\xi^{\theta}(t)$ с вероятностью, очень близкой к 1, мало отличается от константы на каждом из промежутков $[0,\,T]\cap[\tau^{\varepsilon}_k,\,\tau^{\varepsilon}_{k+1})$. В связи с этим вводятся следующие обозначения.

Пусть даны моменты времени $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ и точки $x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_k\in R^r$, причем $x_i\neq x_{i-1}$, $i=1,\,\ldots,\,k$. Через $X^{t_1\ldots t_k}_{x_0x_1\ldots x_k}(t)$ обозначается функция, принимающая значение x_0 при $t_0\leqslant t<t_1$, x_1 при $t_1\leqslant t<t_2$, ..., наконец, x_k при $t_k\leqslant t\leqslant T$. В частности, $X_{x_0}(t)\equiv x_0$.

Непосредственное следствие леммы 6.1.5:

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon}=k,\ \rho_{0,\,T}\left(\xi^{\theta},\ X^{\tau^{\varepsilon}_1\ldots\tau^{\varepsilon}_k}_{x_0\xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)\ldots\xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_k)}\right)\geqslant(2m-1)\,\varepsilon\right\}= =O\,(g\,(\theta)^{m\beta}).\qquad(6.2.1)$$

Мы можем сразу получить первую предельную теорему — типа закона больших чисел:

Теорема 6.2.1. *Пусть для семейства процессов* $(\xi^{\theta}(t),\ \mathsf{P}^{\theta}_{t,\,x})$ *выполнены условия* **Б**, **В**, **Г** *предыдущего параграфа. Тогда* $\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},\,X_{x_0})\geqslant\delta\}=O\,(g\,(\theta))$ *при* $\theta\to$ *для любого* $\delta>0$, *равномерно относительно* x_0.

Доказательство. Имеем для произвольного $\varepsilon>0$:

$$\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},\,X_{x_0})\geqslant\delta\}\leqslant\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\nu^{\varepsilon}\geqslant 1\}+\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\nu^{\varepsilon}=0,\ \rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},\,X_{x_0})\geqslant\delta\}.$$

К первому слагаемому применяется лемма 6.1.1, ко второму — оценка (6.2.1) (ε берется равным $\delta/(2m-1)$, где $m\geqslant\beta^{-1}$). □

Множество всех функций $X_{x_0 x_1 \ldots x_k}^{t_1 \ldots t_k}$ с данными x_0 и k будем обозначать $B_{x_0}^k$; в частности, $B_{x_0}^0$ состоит из одной функции, тождественно равной x_0.

Лемма 6.1.1 и (6.2.1) дают нам также следующий результат, который мы будем использовать далее:

Лемма 6.2.1. $\mathsf{P}_{0, x_0}^\theta \{\rho_{0, T}(\xi^\theta, B_{x_0}^k) \geqslant \delta\} = O(g(\theta)^{k+1})$ *для любого* $\delta > 0$, *равномерно по* x_0.

Заметим, что $\rho_{0, T}(\xi^\theta, B_{x_0}^k) = \rho_{0, T}(\xi^\theta, B_{x_0}^0 \cup \ldots \cup B_{x_0}^k)$.

2. Для формулировки основных результатов введем дальнейшие обозначения. Для $x_0 \in R^r$ и целого $k \geqslant 1$ введем на множестве $E_{x_0}^k = \{(t_1, x_1, \ldots, t_k, x_k)\colon 0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant T, x_i \neq x_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ σ-конечную меру $\mu_{x_0}^k$, определив ее равенством $\mu_{x_0}^k(dt_1\, dx_1 \ldots dt_k\, dx_k) = dt_1 \lambda_{t_1, x_0}(dx_1) \ldots dt_k \times \lambda_{t_k, x_{k-1}}(dx_k)$. При фиксированных x_0 и k через $X_{x_0, k}$ будем обозначать отображение, ставящее в соответствие точке $(t_1, x_1, \ldots, t_k, x_k) \in E_{x_0}^k$ функцию $X_{x_0 x_1 \ldots x_k}^{t_1 \ldots t_k} \in \boldsymbol{D}_{x_0}$. Отображение $X_{x_0, k}$ измеримо; оно удовлетворяет условию Липшица с константой 1 по каждому из аргументов $x_1, \ldots, x_k$.

Теорема 6.2.2. *Пусть* $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}_{t, x}^\theta)$ — *семейство локально безгранично делимых процессов, удовлетворяющее условиям* **А**′, **Б** — **Г** *предыдущего параграфа. Пусть* A — *измеримое подмножество* $\boldsymbol{D}_{x_0}$, *удовлетворяющее условиям* $\rho_{0, T}(A, B_{x_0}^0) > 0$, $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \mu_{x_0}^1(X_{x_0, 1}^{-1}(A_{+\delta} \setminus A_{-\delta})) = 0$ (*напоминаем, что* $A_{+\delta}$ — δ-*окрестность множества* A, $A_{-\delta}$ — *множество точек* A, *находящихся на расстоянии более* δ *от его дополнения* $\overline{A}$).

Тогда при $\theta \to$

$$\mathsf{P}_{0, x_0}^\theta \{\xi^\theta \in A\} = \mu_{x_0}^1(X_{x_0, 1}^{-1}(A))\, g(\theta) + o(g(\theta)). \tag{6.2.2}$$

Доказательство. Для произвольного $\varkappa > 0$ нужно доказать, что при достаточно далеких θ вероятность $\mathsf{P}_{0, x_0}^\theta\{\xi^\theta \in A\}$ лежит в пределах $[\mu_{x_0}^1(X_{x_0, 1}^{-1}(A)) \mp \varkappa]\, g(\theta)$. По данному положительному $\varkappa$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \leqslant \rho_{0, T}(A, X_{x_0})/6$ и $\mu_{x_0}^1(X_{x_0, 1}^{-1}(A_{+2\delta} \setminus A_{-2\delta})) < \varkappa/3$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы приближенно представить вероятность $\mathsf{P}_{0, x_0}^\theta\{\xi^\theta \in A\}$ в виде математического ожидания функционала вида $\sum_{0, T}^1(V)$ (см. § 1.3) и воспользоваться леммой 1.3.1. При этом из-за того, что основная часть вероятности образуется за счет реализаций, близких к ступенчатым функциям, в выборе функции $V(t, y, x)$ остается большая свобода.

Введем функцию $H(x)$, равную 1 при $x \geqslant 1$, 0 при $x \leqslant 0$, и $H(x)=x$ при x между 0 и 1. Положим

$$\chi^-(t, x)=H(\rho_{0,T}(X^t_{x_0x}, \bar{A})/\delta-1),$$
$$\chi^+(t, x)=1-H(\rho_{0,T}(X^t_{x_0x}, A)/\delta-1).$$

Это — ограниченные измеримые функции, непрерывные по x. Функция χ^- обращается в 0 при $(t, x)\notin X^{-1}_{x_0,1}(A_{-\delta})$ и в 1 при $(t, x)\in X^{-1}_{x_0,1}(A_{-2\delta})$; в свою очередь, $\chi^+(t, x)=0$ при $(t, x)\notin$ $\notin X^{-1}_{x_0,1}(A_{+2\delta})$ и 1 при $(t, x)\in X^{-1}_{x_0,1}(A_{+\delta})$. В силу $\rho_{0,T}(A, B^0_{x_0})\geqslant 6\delta$ обе функции $\chi^\pm$ обращаются в 0 при $|x-x_0|\leqslant 3\delta$.

Определим функции

$$V^\pm(t, y, x)=\chi^\pm(t, x)\left[1-H(|x-y|/\delta-1)\right].$$

По условию $\mathbf{A}'$ для почти всех t при $y\to x_0$, $\theta\to$

$$g(\theta)^{-1}\int\chi^\pm(t, x)\lambda^\theta_{t,y}(dx)\to\int\chi^\pm(t, x)\lambda_{t,x_0}(dx),$$

причем левая часть мажорируется константой $K_1(\delta)$. Поэтому

$$g(\theta)^{-1}\int_0^T dt\int\chi^\pm(t, x)\lambda^\theta_{t,y}(dx)\to\int_0^T dt\int\chi^\pm(t, x)\lambda_{t,x_0}(dx). \tag{6.2.3}$$

Выберем положительное $\delta'\leqslant\delta$ так, чтобы при $|y-x_0|<\delta'$ и достаточно далеких θ левая часть отличалась от правой меньше, чем на $\varkappa/3$. Положим $\varepsilon=\delta'/(2m-1)$, где $m\geqslant 2\beta^{-1}$ — целое.

Разобьем $\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\xi^\theta\in A\}$ на ряд слагаемых:

$$\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\xi^\theta\in A\}=\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\nu^\varepsilon=0,\ \xi^\theta\in A\}+$$
$$+\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\left\{\nu^\varepsilon=1,\ \rho_{0,T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0\xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right)<\delta',\ \xi^\theta\in A\right\}+$$
$$+\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\left\{\nu^\varepsilon=1,\ \rho_{0,T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0\xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right)\geqslant\delta',\ \xi^\theta\in A\right\}+$$
$$+\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\nu^\varepsilon\geqslant 2,\ \xi^\theta\in A\}. \tag{6.2.4}$$

Первое слагаемое в силу $\rho_{0,T}(A, X_{x_0})\geqslant 6\delta'$ не превосходит $\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\nu^\varepsilon=0,\ \rho_{0,T}(\xi^\theta, X_{x_0})\geqslant\delta'\}=O(g(\theta)^2)$; точно так же оценивается третье слагаемое. Четвертое не больше, чем $\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\nu^\varepsilon\geqslant 2\}=O(g(\theta)^2)$, в силу леммы 6.1.1.

Основное слагаемое — второе. При $\nu^\varepsilon=1$, $\rho_{0,T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0\xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right)<\delta'$ из $\xi^\theta\in A$ вытекает $X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0\xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\in A_{+\delta}$, откуда

$\chi^+(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)) = 1$; и наоборот, из $\chi^-(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)) > 0$ вытекает $X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)} \in A_{-\delta}$ и $\xi^\theta \in A$. Кроме того, при этом $V^\pm(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon -), \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)) = \chi^\pm(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon))$. Поэтому второе слагаемое в (6.2.4) не превосходит

$$\mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\{\nu^\varepsilon = 1, \rho_{0, T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right) < \delta'; \\ V^+(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon -), \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon))\} \quad (6.2.5)$$

и не меньше, чем

$$\mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\{\nu^\varepsilon = 1, \rho_{0, T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right) < \delta'; \\ V^-(\tau_1^\varepsilon, \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon -), \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon))\}. \quad (6.2.6)$$

Воспользуемся обозначением $\sum^1_{0, T}(V^\pm)$ (см. § 1.3, доказательство леммы 1.3.2). Математические ожидания (6.2.5), (6.2.6) равны

$$\mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\left\{\nu^\varepsilon = 1, \rho_{0, T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right) < \delta'; \textstyle\sum^1_{0, T}(V^\pm)\right\} = \\ = \mathsf{M}^\theta_{0, x_0} \textstyle\sum^1_{0, T}(V^\pm) - \\ - \mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\left\{\nu^\varepsilon = 1, \rho_{0, T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right) \geqslant \delta'; \textstyle\sum^1_{0, T}(V^\pm)\right\} - \\ - \mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\{\nu^\varepsilon \geqslant 2; \textstyle\sum^1_{0, T}(V^\pm)\} \quad (6.2.7)$$

($\sum^1_{0, T}(V^\pm) = 0$ при $\nu^\varepsilon = 0$). Второе и третье математические ожидания в правой части не превосходят

$$\mathsf{P}^\theta_{0, x_0}\left\{\nu^\varepsilon = 1, \rho_{0, T}\left(\xi^\theta, X^{\tau_1^\varepsilon}_{x_0 \xi^\theta(\tau_1^\varepsilon)}\right) \geqslant \delta'\right\} = O(g(\theta)^2), \\ \mathsf{M}^\theta_{0, x_0}\{\nu^\varepsilon \geqslant 2; \nu^\varepsilon\} \leqslant \mathsf{M}^\theta_{0, x_0} \nu^\varepsilon(\nu^\varepsilon - 1) = O(g(\theta)^2)$$

в силу леммы 6.1.1.

Первое слагаемое в (6.2.7) по лемме 1.3.1 равно

$$\mathsf{M}^\theta_{0, x_0} \int_0^T dt \int_{R^r} \lambda^\theta_{t, \xi^\theta(t)}(dx) V^\pm(t, \xi^\theta(t), x). \quad (6.2.8)$$

Это математическое ожидание в свою очередь разбиваем на части:

$$\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon}=0,\ \rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},\ X_{x_0})<\delta';\ \int\limits_0^T\right\}+$$
$$+\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon}=0,\ \rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},\ X_{x_0})\geqslant\delta';\ \int\limits_0^T\right\}+$$
$$+\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon}\geqslant 1;\ \int\limits_0^T\right\},\qquad(6.2.9)$$

где интеграл от 0 до T — тот самый, который стоит под знаком математического ожидания в (6.2.8). Этот интеграл есть $O(g(\theta))$, поэтому второе и третье математические ожидания не превосходят $O(g(\theta))$, умноженного на соответствующие вероятности, т. е. $O(g(\theta)^2)$.

Мы знаем, что из $\chi^{\pm}(t,\ x)>0$ вытекает $|x-x_0|>3\delta$; значит, из $|\xi^{\theta}(t)-x_0|<\delta'\leqslant\delta$ вытекает $V^{\pm}(t,\ \xi^{\theta}(t),\ x)=$ $=\chi^{\pm}(t,\ x)$. Интеграл от 0 до T в первом математическом ожидании в (6.2.9) оценивается сверху и снизу выражениями

$$g(\theta)\left[\int\limits_0^T dt\int\limits_{R^r}\lambda_{t,\,x_0}(dx)\,\chi^{+}(t,\ x)+\varkappa/3\right]\leqslant$$
$$\leqslant g(\theta)\left[\mu^1_{x_0}\left(X^{-1}_{x_0,\,1}(A_{+2\delta})\right)+\varkappa/3\right]\leqslant$$
$$\leqslant g(\theta)\left[\mu^1_{x_0}\left(X^{-1}_{x_0,\,1}(A)\right)+2\varkappa/3\right],$$
$$g(\theta)\left[\int\limits_0^T dt\int\limits_{R^r}\lambda_{t,\,x_0}(dx)\,\chi^{-}(t,\ x)-\varkappa/3\right]\geqslant$$
$$\geqslant g(\theta)\left[\mu^1_{x_0}\left(X^{-1}_{x_0,\,1}(A_{-2\delta})\right)-\varkappa/3\right]\geqslant$$
$$\geqslant g(\theta)\left[\mu^1_{x_0}\left(X^{-1}_{x_0,\,1}(A)\right)-2\varkappa/3\right].$$

Итак, первый член в (6.2.8) находится в пределах

$$g(\theta)\left(\mu^1_{x_0}(X^{-1}_{x_0,\,1}(A))\mp 2\varkappa/3\right)\cdot\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\nu^{\varepsilon}=0,\rho_{0,\,T}(\xi^{\theta},X_{x_0})<\delta'\}=$$
$$=g(\theta)\left(\mu^1_{x_0}(X^{-1}_{x_0,\,1}(A))\mp 2\varkappa/3\right)+O(g(\theta)^2).$$

Окончательно получаем, что $\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\xi^{\theta}\in A\}$ при достаточно далеких θ находится в пределах

$$g(\theta)\cdot\mu^1_{x_0}(X^{-1}_{x_0,\,1}(A))\mp[g(\theta)\cdot 2\varkappa/3+O(g(\theta)^2)],$$

т. е. отличается от $\mu^1_{x_0}(X^{-1}_{x_0,1}(A))\cdot g(\theta)$ менее, чем на $\varkappa\cdot g(\theta)$. Это доказывает теорему. □

3. Теорема 6.2.2′. *Пусть* $(\xi^\theta(t), \mathsf{P}^\theta_{t,x})$ — *семейство* $\tau(\theta)$-*процессов, удовлетворяющее условиям* **А′**, **Б—Г** *предыдущего параграфа; пусть* $\tau(\theta)\to 0$ *при* $\theta\to$. *Пусть* A — *измеримое подмножество* D_{x_0}, *удовлетворяющее условиям* $\rho_{0,T}(A, B^0_{x_0})>0$, $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\mu^1_{x_0}([X^{-1}_{x_0,1}(A_{+\delta})]\setminus(X^{-1}_{x_0,1}(A_{-\delta})))=0$ (*квадратные скобки означают замыкание, круглые — внутреннюю часть множества*).

Тогда при $\theta\to$

$$\mathsf{P}^\theta_{0,x_0}\{\xi^\theta\in A\}=\mu^1_{x_0}(X^{-1}_{x_0,1}(A))\,g(\theta)+o(g(\theta)).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Выбираем $\delta>0$ так, чтобы $\delta<\rho_{0,T}(A, X_{x_0})/6$ и

$$\mu^1_{x_0}([X^{-1}_{x_0,1}(A_{+\delta})]\setminus(X^{-1}_{x_0,1}(A_{-\delta})))<\varkappa/4. \tag{6.2.10}$$

Определяем равномерно непрерывные функции

$$\chi^-(t, x)=H(\rho((t, x), X^{-1}_{x_0,1}(\overline{A_{-\delta}}))/\delta'-1),$$
$$\chi^+(t, x)=1-H(\rho((t, x), X^{-1}_{x_0,1}(A_{+\delta}))/\delta'-1).$$

Положительное $\delta'\leqslant\delta$ выбираем так, чтобы

$$\int\int[\chi^+(t, x)-\chi^-(t, x)]\,\mu^1_{x_0}(dt\,dx)\leqslant\varkappa/2.$$

Такое δ' существует потому, что предел этого интеграла при $\delta'\downarrow 0$ равен левой части (6.2.10).

Пусть $\gamma>0$ таково, что $|\chi^\pm(s, x)-\chi^\pm(s', x)|<\varkappa/8TK_1(\delta)$ при $|s-s'|<\gamma$.

Определяем функции $V^\pm$, как раньше. Единственное изменение, которое вносится в доказательство, состоит в том, что интеграл в формуле (6.2.8) заменяется суммой

$$\sum_{0\leqslant t=k\tau(\theta)<T}\tau(\theta)\cdot\int_{R^r}\lambda^\theta_{t,\xi^\theta(t)}(dx)V^\pm(t+\tau(\theta), \xi^\theta(t), x) \tag{6.2.11}$$

(см. формулу (1.3.3)). Учтем, что $\lambda^\theta_{s,\xi^\theta(s)}$ при $k\tau(\theta)\leqslant s<(k+1)\tau(\theta)$ совпадает с $\lambda^\theta_{k\tau(\theta),\xi^\theta(k\tau(\theta))}$. При θ таких, что $\tau(\theta)<\gamma$, сумма (6.2.11) не более, чем на $g(\theta)\cdot\varkappa/4$, отличается от

$$\int_0^T ds\int_{R^r}\lambda^\theta_{s,\xi^\theta(s)}(dx)\,V^\pm(s, \xi^\theta(s), x)$$

($|\chi^\pm(s, x)-\chi^\pm(t+\tau(\theta), x)| < \varkappa/8TK_1(\delta)$ при $t=k\tau(\theta)\leqslant \leqslant s < t+\tau(\theta)$; и учитывается также интеграл от T до $(k_0+1)\tau(\theta)$, $k_0\tau(\theta) < T \leqslant (k_0+1)\tau(\theta)$). Последующая часть доказательства воспроизводится без изменений. □

4. Теорема 6.2.3. *Пусть* $(\xi^\theta(t), \mathbf{P}^\theta_{t,x})$ — *семейство процессов, удовлетворяющее условиям* **А**—**Г** *предыдущего параграфа; в случае* $\tau(\theta)$-*процессов предполагается* $\tau(\theta)\to 0$ *при* $\theta\to$. *Пусть* A — *измеримое подмножество* $\boldsymbol{D}_{x_0}$, *удовлетворяющее условиям* $\rho_{0,T}(A, B^{k-1}_{x_0}) > 0$, $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\mu^k_{x_0}(X^{-1}_{x_0,k}(A_{+\delta}\setminus A_{-\delta}))=0$ *или, в случае* $\tau(\theta)$-*процессов,* $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\mu^k_{x_0}([X^{-1}_{x_0,k}(A_{+\delta})]\setminus(X^{-1}_{x_0,k}(A_{-\delta})))=0.$

Тогда при $\theta\to$

$$\mathbf{P}^\theta_{0,x_0}\{\xi^\theta\in A\}=\mu^k_{x_0}(X^{-1}_{x_0,k}(A))\cdot g(\theta)^k+o(g(\theta)^k). \qquad (6.2.12)$$

Доказательство для простоты проведем в случае $k=2$ и локально безгранично делимых процессов $(\xi^\theta(t), \mathbf{P}^\theta_{t,x})$. Пусть задано $\varkappa > 0$. Прежде всего выбираем функции $\chi^\pm(t_1, x_1, t_2, x_2)$ аналогично тому, как это делалось при доказательстве теорем 6.2.2, 6.2.2′, — равномерно непрерывные по x_1, x_2 (в случае $\tau(\theta)$-процессов — по совокупности всех аргументов) приближения к индикатору $\chi_A(X^{t_1t_2}_{x_0x_1x_2})$, обращающиеся в 0 при $\rho(X^{t_1t_2}_{x_0x_1x_2}, A)\geqslant 2\delta$. Далее, из выполнения условия **А** автоматически вытекает определенная равномерность выполнения этого условия и непрерывность предела по y. А именно, имеет место

Лемма 6.2.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное в каждой ограниченной области семейство числовых функций на* R^r. *Тогда для любых* K, $\delta > 0$ *при почти всех* t

$$\lim_{\substack{\delta'\downarrow 0\\ \theta\to}}\sup\left\{\left|\int_{R^r} g(\theta)^{-1}\lambda^\theta_{t,y'}(dx)f(x)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_{R^r}\lambda_{t,y}(dx)f(x)\right|\right\}=0, \qquad (6.2.13)$$

$$\lim_{\delta'\downarrow 0}\sup\left\{\left|\int_{R^r}\lambda_{t,y'}(dx)f(x)-\int_{R^r}\lambda_{t,y}(dx)f(x)\right|\right\}=0, \qquad (6.2.14)$$

где верхняя грань берется по всем $|y|\leqslant K$, $|y'-y|\leqslant\delta'$ *и по всем функциям* $f\in\mathfrak{F}$, *обращающимся в* 0 *в* δ-*окрестности точки* y.

Доказательство приводить не будем.

Пользуясь этой леммой, выбираем C так, чтобы при достаточно далеких θ для всех y, $|y-x_0|\leqslant 2\delta$, было

$$\int_0^T dt \int_{R^r} g(\theta)^{-1}\lambda^{\theta}_{t,\,y}(dx)\,H(|x|-C)\leqslant \varkappa/10TK_1(\delta).$$

Чтобы выбрать такое C, возьмем в качестве $\mathfrak{F}$ множество всех функций вида $f(x)=H(|x|-C)$. Выберем сначала такое положительное δ', чтобы верхняя грань в (6.2.13) при достаточно далеких θ не превосходила $\varkappa/20TK_1(\delta)$. Затем в шаре $\{y\colon |y-x_0|\leqslant 2\delta\}$ выберем конечную δ'-сеть $y_1, \ldots, y_N$. Наконец, выбираем $C\geqslant |x_0|+3\delta+1$ так, чтобы

$$\int_0^T dt \int_{R^r} \lambda_{t,\,y_i}(dx)\,H(|x|-C)<\varkappa/20TK_1(\delta)$$

при $i=1, \ldots, N$.

Далее берем в качестве $\mathfrak{F}$ множество функций $\chi^{\pm}$, рассматриваемых как функция от последнего аргумента при фиксированных первых трех t_1, x_1, t_2, $0<t_1<t_2\leqslant T$, $|x_1|\leqslant C+1$. Выбираем δ_1, $0<\delta_1\leqslant\delta$, так, чтобы при достаточно далеких θ при всех t_1, x_1, y_2, $|x_1|\leqslant C+1$, $|y_2-x_1|\leqslant 2\delta_1$, было

$$\int_{t_1}^T dt_2\left|\int_{R^r} g(\theta)^{-1}\lambda^{\theta}_{t_2,\,y_2}(dx_2)\,\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)-\right.$$
$$\left.-\int_{R^r}\lambda_{t_2,\,x_1}(dx_2)\,\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)\right|\leqslant\varkappa/10TK_1(\delta).$$

Если мы умножим $\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)$ на функцию $[1-H(|x_1|-C)]\,[1-H(|y_2-x_1|/\delta_1-1)]$, то соответствующее неравенство будет выполнено уже при *всех* t_1, x_1, y_2.

Теперь берем в качестве $\mathfrak{F}$ множество функций

$$f^{\pm}_{t_1,\,y_2}(x_1)=[1-H(|x_1|-C)]\,[1-H(|y_2-x_1|/\delta_1-1)]\times$$
$$\times\int_{t_1}^T dt_2\int_{R^r}\lambda_{t_2,\,x_1}(dx_2)\,\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)$$

при всевозможных t_1, y_2. Все эти функции ограничены одной и той же константой $T\cdot K_1(\delta)$ и равностепенно непрерывны по x_1. Выбираем δ_0, $0<\delta_0\leqslant\delta_1\leqslant\delta$, так, чтобы при достаточно далеких θ при всех y_1, $|y_1-x_0|\leqslant\delta_0$, и всех y_2 было

$$\int_0^T dt_1 \left| \int_{R^r} g(\theta)^{-1} \lambda^{\theta}_{t_1, y_1}(dx_1) f^{\pm}_{t_1, y_2}(x_1) - \right.$$
$$\left. - \int_{R^r} \lambda_{t_1, x_0}(dx_1) f^{\pm}_{t_1, y_2}(x_1) \right| \leqslant \varkappa/10.$$

Определяем функции

$$V^{\pm}(t_1, y_1, x_1, t_2, y_2, x_2) = [1 - H(|y_1 - x_0|/\delta_0 - 1)] \times$$
$$\times [1 - H(|y_2 - x_1|/\delta_1 - 1)] \chi^{\pm}(t_1, x_1, t_2, x_2),$$
$$V^{\pm}_C(t_1, y_1, x_1, t_2, y_2, x_2) =$$
$$= [1 - H(|x_1| - C)] V^{\pm}(t_1, y_1, x_1, t_2, y_2, x_2).$$

Берем положительное $\varepsilon \leqslant \delta_0/(2m-1)$, где целое $m \geqslant 3\beta^{-1}$; вводим моменты τ^{ε}_1, τ^{ε}_2, ... и величину ν^{ε} — число таких $i \geqslant 1$, для которых $\tau^{\varepsilon}_i \leqslant T$. Если $\nu^{\varepsilon} = 0$ и $\rho_{0,T}(\xi^{\theta}, X_{x_0}) < \delta_0$ или $\nu^{\varepsilon} = 1$, $\rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)}\right) < \delta_0$, то событие $\xi^{\theta} \in A$ не может произойти. Вероятность этого события разбивается на ряд слагаемых:

$$\mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\{\xi^{\theta} \in A\} = \mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\{\nu^{\varepsilon} = 0,\ \rho_{0,T}(\xi^{\theta}, X_{x_0}) \geqslant \delta_0,\ \xi^{\theta} \in A\} +$$
$$+ \mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon} = 1,\ \rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)}\right) \geqslant \delta_0,\ \xi^{\theta} \in A\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon} = 2,\ \rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1 \tau^{\varepsilon}_2}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)\, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_2)}\right) \geqslant \delta_0,\ \xi^{\theta} \in A\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon} = 2,\ \rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1 \tau^{\varepsilon}_2}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)\, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_2)}\right) < \delta_0,\ \xi^{\theta} \in A\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}^{\theta}_{0,x_0}\{\nu^{\varepsilon} \geqslant 3,\ \xi^{\theta} \in A\}.$$

В силу лемм 6.1.1, 6.1.4 первое, второе, третье и пятое слагаемые суть $O(g(\theta)^3)$; основное — четвертое. Оно оценивается снизу и сверху математическими ожиданиями

$$\mathbf{M}^{\theta}_{0,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon} = 2,\ \rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1 \tau^{\varepsilon}_2}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)\, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_2)}\right) < \delta_0;\right.$$
$$\left. \chi^{\pm}(\tau^{\varepsilon}_1, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1), \tau^{\varepsilon}_2, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_2))\right\} =$$
$$= \mathbf{M}^{\theta}_{0,x_0}\left\{\nu^{\varepsilon} = 2,\ \rho_{0,T}\left(\xi^{\theta}, X^{\tau^{\varepsilon}_1 \tau^{\varepsilon}_2}_{x_0 \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_1)\, \xi^{\theta}(\tau^{\varepsilon}_2)}\right) < \delta_0;\right.$$
$$\left. \Sigma^2_{0,T}(V^{\pm})\right\}. \qquad (6.2.15)$$

Выражение (6.2.15) лишь на $O(g(\theta)^3)$ отличается от

$$\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\sum\nolimits^{2}_{0,\,T}(V\pm)=\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\int\limits_0^T dt_1\Bigg[\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_1,\,y_1}(dx_1)\times$$
$$\times\mathsf{M}^{\theta}_{t_1,\,x_1}\int\limits_{t_1}^T dt_2\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_2,\,\xi^\theta(t_2)}(dx_2)\times$$
$$\times V\pm(t_1,\ y_1,\ x_1,\ t_2,\ \xi^\theta(t_2),\ x_2)\Bigg]_{y_1=\xi^\theta(t_1)}. \qquad (6.2.16)$$

В случае $\tau(\theta)$-процесса вместо интегралов берутся соответствующие суммы:

$$\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\sum\nolimits^{2}_{0,\,T}(V\pm)=$$
$$=\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\sum_{0\leqslant t_1=k_1\tau(\theta)<T}\tau(\theta)\cdot\Bigg[\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_1,\,y_1}(dx_1)\times$$
$$\times\mathsf{M}^{\theta}_{t_1+\tau(\theta),\,x_1}\sum_{t_1+\tau(\theta)\leqslant t_2=k_2\tau(\theta)<T}\tau(\theta)\cdot\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_2,\,\xi^\theta(t_2)}(dx_2)\times$$
$$\times V\pm(t_1,\ y_1,\ x_1,\ t_2,\ \xi^\theta(t_2),\ x_2)\Bigg]_{y_1=\xi^\theta(t_1)}.$$

Интеграл от t_1 до T под знаком $\mathsf{M}^{\theta}_{t_1,\,x_1}$ в (6.2.16) при достаточно далеких θ не превосходит $g(\theta)\cdot(T-t_1)\cdot K_1(\delta)\leqslant\leqslant g(\theta)TK_1(\delta)$; заменяя это математическое ожидание на

$$\mathsf{M}^{\theta}_{t_1,\,x_1}\Bigg\{\sup_{t_1\leqslant s\leqslant T}|\xi^\theta(s)-x_1|<\delta_0;$$
$$\int\limits_{t_1}^T dt_2\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_2,\,\xi^\theta(t_2)}(dx_2)V\pm(t_1,\ y_1,\ x_1,\ t_2,\ \xi^\theta(t_2),\ x_2)\Bigg\},$$

мы в силу леммы 6.1.2 изменяем его лишь на $O(g(\theta)^2)$, а все математическое ожидание (6.2.16) — на $O(g(\theta)^3)$. К такому же результату приводит сужение области интегрирования в $\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}$ до $\left\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi^\theta(s)-x_0|<\delta_0\right\}$.

Итак, $\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\xi^\theta\in A\}$ заключено в пределах

$$\mathsf{M}^{\theta}_{0,x_0}\Bigg\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi^\theta(s)-x_0|<\delta_0;\ \int\limits_0^T dt_1\Bigg[\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_1,\,y_1}(dx_1)\times$$
$$\times\mathsf{M}^{\theta}_{t_1,\,x_1}\Bigg\{\sup_{t_1\leqslant s\leqslant T}|\xi^\theta(s)-x_1|<\delta_0;\ \int\limits_{t_1}^T dt_2\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_2,\,\xi^\theta(t_2)}(dx_2)\times$$
$$\times V\pm(t_1,\ y_1,\ x_1,\ t_2,\ \xi^\theta(t_2),\ x_2)\Bigg\}\Bigg]_{y_1=\xi^\theta(t_1)}\Bigg\}+O(g(\theta)^3).$$

Заменив здесь функции $V^{\pm}$ на $V_C^{\pm}$, мы изменим математическое ожидание при достаточно далеких θ не более, чем на

$$\mathsf{M}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi^{\theta}(s)-x_0|<\delta_0;\ \int\limits_0^T dt_1\int\limits_{R^r}\lambda^{\theta}_{t_1,\,\xi^{\theta}(t_1)}(dx_1)\times\right.$$
$$\left.\times H(|x_1|-C)\cdot(T-t_1)\,g(\theta)\,K_1(\delta)\right\}\leqslant 0{,}1\varkappa g(\theta)^2$$

(последнее — в силу выбора C). Далее пользуемся выбором δ_1, δ_0, заменяем $\lambda^{\theta}_{t_2,\,\xi^{\theta}(t_2)}(dx_2)$ на $g(\theta)\cdot\lambda_{t_2,\,x_1}(dx_2)$, а $\lambda^{\theta}_{t_1,\,y_1}(dx_1)$ на $g(\theta)\cdot\lambda_{t_1,\,x_0}(dx_1)$, внося каждый раз дополнительное слагаемое, не превосходящее $0{,}1\varkappa g(\theta)^2$. Так как в областях интегрирования $|\xi^{\theta}(t_1)-x_0|$, $|\xi^{\theta}(t_2)-x_1|<\delta_0\leqslant\delta$, то функция $V_C^{\pm}$, стоящая под знаками интегралов, совпадает с $[1-H(|x_1|-C)]\,\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)$. Заменяя эту функцию на $\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)$, вносим еще раз ошибку, не превосходящую $0{,}1\varkappa\cdot g(\theta)^2$. Итак, $\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\xi^{\theta}\in A\}$ при достаточно далеких θ находится в пределах

$$g(\theta)^2\cdot\int\limits_0^T dt_1\int\limits_{R^r}\lambda_{t_1,\,x_0}(dx_1)\int\limits_{t_1}^T dt_2\int\limits_{R^r}\lambda_{t_2,\,x_1}(dx_2)\times$$
$$\times\chi^{\pm}(t_1,\ x_1,\ t_2,\ x_2)\,\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi^{\theta}(s)-x_0|<\delta_0\right\}\times$$
$$\times\mathsf{P}^{\theta}_{t_1,\,x_1}\left\{\sup_{t_1\leqslant s\leqslant T}|\xi^{\theta}(s)-x_1|<\delta_0\right\}\mp 0{,}4\varkappa\cdot g(\theta)^2+O(g(\theta)^3).$$

Заменяя вероятности единицей, мы вносим еще ошибку порядка $O(g(\theta)^3)$.

Окончательно получаем, что при достаточно далеких θ вероятность $\mathsf{P}^{\theta}_{0,\,x_0}\{\xi^{\theta}\in A\}$ лежит в пределах $g(\theta)^2\times\times[\mu^2_{x_0}(X^{-1}_{x_0,\,2}(A))\mp\varkappa]$. □

5. В работе Годованьчука [2] приведены более общие варианты теорем этого параграфа. Главное обобщение состоит в том, что вместо условия **Г** сходимости $b^{\theta}(t,\ x)$ к нулю требуется сходимость к какой-то функции $b(t,\ x)$. При этом между большими скачками процесс $\xi^{\theta}(t)$, вместо того, чтобы оставаться почти постоянным, с подавляющей вероятностью движется вблизи решений уравнения $\dot{x}(t)=b(t,\ x(t))$. В связи с этим функция $X^{t_1t_2\ldots t_k}_{x_0x_1x_2\ldots x_k}$ определяется при $t\in[t_i,\ t_{i+1})$ (для $i=k$ — при $t\in[t_k,\ T]$) не как константа x_i, а как решение $\dot{x}(t)=b(t,\ x(t))$ с начальным условием $x(t_i)=x_i$.

§ 6.3. Применения к суммам независимых случайных величин

1. Теорема 6.3.1.— 2. Теорема 6.3.2. Слагаемые P_0, P_1, P_2, P_3. Оценка P_3, P_0. Асимптотика P_2.— 3. Асимптотика P_1. Окончание доказательства теоремы 6.3.2.

1. Рассмотрим некоторые применения теорем предыдущего параграфа к теоремам о больших уклонениях для сумм независимых случайных величин со степенными «хвостами». С их помощью можно получить теоремы об асимптотике вероятностей больших уклонений с точностью до эквивалентности и, при более ограничительных условиях, с дополнительными уточняющими членами. Мы ограничимся случаем односторонних степенных «хвостов» с показателем $\alpha \in (0, 1)$ (в работе Виноградова [1] получены теоремы с уточнениями о больших уклонениях для двусторонних степенных «хвостов» как при $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, т. е. для величин, притягивающихся к ненормальному устойчивому распределению, так и при $\alpha > 2$).

Следующий результат содержится в работе: Ткачук [1] (при более ограничительных условиях см. Фортус [1], Хейде [1]), но мы его докажем с помощью результатов § 6.2.

Теорема 6.3.1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; пусть $X_i \geqslant 0$, и функция распределения F этих случайных величин имеет на $+\infty$ асимптотику*

$$F(x) = 1 - c_\alpha x^{-\alpha} + o(x^{-\alpha}), \tag{6.3.1}$$

$0 < \alpha < 1$. *Тогда при $n \to \infty$, $z/n^{1/\alpha} \to \infty$*

$$\mathsf{P}\{X_1 + \ldots + X_n > z\} \sim nc_\alpha z^{-\alpha}. \tag{6.3.2}$$

Доказательство. Мы видели (§ 6.1), что для семейства случайных функций $\xi^{n,z}(t) = (X_1 + \ldots + X_{[nt]})/z$ при $n \to \infty$, $z/n^{1/\alpha} \to \infty$ выполнены условия **А—Г** с $g(n, z) = nz^{-\alpha}$,

$$\lambda_{t,y}(dx) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y, \\ c_\alpha d(-(x-y)^{-\alpha}), & x > y. \end{cases} \tag{6.3.3}$$

Рассматриваем множество $A = \{x \in \boldsymbol{D}_0\colon\ x(1) > 1\}$. Имеем: $\rho_{0,1}(A, B_0^0) = 1 > 0$; $A_{+\delta} = \{x \in \boldsymbol{D}_0\colon\ x(1) > 1 - \delta\}$, $A_{-\delta} = \{x \in \boldsymbol{D}_0\colon\ x(1) > 1 + \delta\}$; $X_{0,1}^{-1}(A) = (0, 1] \times (1, \infty)$, $[X_{0,1}^{-1}(A_{+\delta})] \diagdown (X_{0,1}^{-1}(A_{-\delta})) = [0, 1] \times [1-\delta, 1+\delta] \cup \{0, 1\} \times$

$\times(1+\delta, \infty)$; соответствующие μ_0^1-меры равны, соответственно, c_α и $c_\alpha[(1-\delta)^{-\alpha}-(1+\delta)^{-\alpha}]$ ($\to 0$ при $\delta\downarrow 0$). Пользуемся теоремой 6.2.2′:

$$\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z\}=\mathsf{P}\{\xi^{n,z}\in A\}=nc_\alpha z^{-\alpha}+o(nz^{-\alpha}). \quad \square$$

2. Теорема 6.3.2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — неотрицательные независимые случайные величины с функцией распределения F,*

$$F(x)=1-c_{\alpha_1}x^{-\alpha_1}-c_{\alpha_2}x^{-\alpha_2}-\ldots-c_{\alpha_k}x^{-\alpha_k}+o\left(x^{-\alpha_k}\right) \tag{6.3.4}$$

при $x\to\infty$, $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k$, $0<\alpha_1<1$. Тогда при $n\to\infty$, $z/n^{\frac{1}{\alpha_1}}\to\infty$

$$\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z\}=n\cdot\sum_{j=1}^{k}c_{\alpha_j}z^{-\alpha_j}+o\left(nz^{-\alpha_k}\right)-$$
$$-\frac{n^2}{2}\frac{(1-2\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_1)^2}{\Gamma(2-2\alpha_1)}c_{\alpha_1}^2z^{-2\alpha_1}+o\left(n^2z^{-2\alpha_1}\right). \tag{6.3.5}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon\in(0, 2/5)$. Вероятность $\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z\}$ разбивается на $P_0=\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z,\ X_i\leqslant\varepsilon z,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ и $\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_1+\ldots+X_n>z, X_i>\varepsilon z\}\right)$. Последняя вероятность в силу известных формул, связывающих вероятность суммы с вероятностями пересечений, заключена между

$$\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z,\ X_i>\varepsilon z\}-$$
$$-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z,\ X_i>\varepsilon z,\ X_j>\varepsilon z\} \tag{6.3.6}$$

и разностью этих же двух сумм с добавкой

$$\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant n}\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z,\ X_i>\varepsilon z,\ X_j>\varepsilon z,\ X_l>\varepsilon z\}. \tag{6.3.7}$$

Обозначим первую сумму в (6.3.6) через P_1, вторую — через P_2, сумму (6.3.7) — через P_3. Имеем:

$$\mathsf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z\}=P_0+P_1-P_2+O(P_3). \tag{6.3.8}$$

Оцениваем P_3:

$$P_3 \leqslant C_n^3 \mathsf{P}\{X_1 > \varepsilon z, \quad X_2 > \varepsilon z, \quad X_3 > \varepsilon z\} \leqslant n^3 \mathsf{P}\{X_i > \varepsilon z\}^3 \sim \\ \sim (nc_{\alpha_1}(\varepsilon z)^{-\alpha_1})^3 = O(n^3 z^{-3\alpha_1}) = o(n^2 z^{-2\alpha_1}).$$

Вероятность P_0 можно представить в виде $\mathsf{P}\{\xi^{n,z} \in A^0\}$, где множество A^0 состоит из функций $x \in \boldsymbol{D}_0$, $x(1) > 1$, не имеющих скачков, превосходящих ε. Легко находится

$$\rho_{0,1}(A^0, B_0^2) = (1-2\varepsilon)/5 > 0;$$

в силу леммы 6.2.1

$$P_0 = \mathsf{P}\{\xi^{n,z} \in A^0\} \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\{\rho_{0,1}(\xi^{n,z}, B_0^2) \geqslant (1-2\varepsilon)/5\} = O(n^3 z^{-3\alpha_1}).$$

Сумма P_2 с точностью до бесконечно малых высшего порядка также совпадает с вероятностью попадания $\xi^{n,z}$ в определенное множество, а именно, множество A^2, состоящее из функций $x \in \boldsymbol{D}_0$, $x(1) > 1$, совершающих по крайней мере два скачка, превосходящие ε. Действительно, $\xi^{n,z} \in A^2$ означает одновременное наступление хотя бы двух из событий $\{X_1 + \ldots + X_n > z, \ X_i > \varepsilon z\}$, и легко показывается, что

$$P_2 - 2P_3 \leqslant \mathsf{P}\{\xi^{n,z} \in A^2\} \leqslant P_2,$$

так что

$$P_2 = \mathsf{P}\{\xi^{n,z} \in A^2\} + O(n^3 z^{-3\alpha_1}).$$

К вероятности $\mathsf{P}\{\xi^{n,z} \in A^2\}$ применяем теорему 6.2.3 с $g(n, z) = nz^{-\alpha_1}$ и мерой $\lambda_{t,y}(dx)$, задаваемой формулой (6.3.3) с $\alpha = \alpha_1$. Находим $\rho_{0,1}(A^2, B_0^1) = \varepsilon/2 > 0$; $A^2_{\pm\delta}$ при $0 < \delta < \varepsilon/2$ состоит из функций $x \in \boldsymbol{D}_0$, $x(1) > 1 \mp \delta$, совершающих по крайней мере два скачка, превосходящие $\varepsilon \mp 2\delta$. Далее,

$$X_{0,2}^{-1}(A^2) = \{(t_1, x_1, t_2, x_2)\colon 0 < t_1 < t_2 \leqslant 1, \ x_1 > \varepsilon, \\ x_2 - x_1 > \varepsilon, \ x_2 > 1\},$$

а множество $[X_{0,2}^{-1}(A^2_{+\delta})] \setminus (X_{0,2}^{-1}(A^2_{-\delta}))$ с точностью до множеств меньшей размерности состоит из четверок (t_1, x_1, t_2, x_2), $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, для которых

$$x_1 \in [\varepsilon - 2\delta, \varepsilon + 2\delta], x_2 - x_1 \geqslant \varepsilon - 2\delta, x_2 \geqslant 1 - \delta$$

или

$$x_1 \geqslant \varepsilon - 2\delta, \quad x_2 - x_1 \in [\varepsilon - 2\delta, \quad \varepsilon + 2\delta], \quad x_2 \geqslant 1 - \delta$$

или

$$x_1 \geqslant \varepsilon - 2\delta, \quad x_2 - x_1 \geqslant \varepsilon - 2\delta, \quad x_2 \in [1-\delta,\ 1+\delta].$$

Значение μ_0^2-меры для этого множества стремится к 0 при $\delta \downarrow 0$, а

$$\mu_0^2(X_{0,2}^{-1}(A^2)) = \frac{c_{\alpha_1}^2}{2} \iint\limits_{\substack{x_1>\varepsilon,\ x_2-x_1>\varepsilon \\ x_2>1}} d(-x_1^{-\alpha_1})\, d(-(x_2-x_1)^{-\alpha_1}) =$$
$$= \frac{c_{\alpha_1}^2}{2}\left[\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1-t)^{-\alpha_1}\, d(-t^{-\alpha_1}) + (1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\varepsilon^{-\alpha_1}\right].$$

Итак,

$$P_2 = \frac{c_{\alpha_1}^2}{2} C(\varepsilon)\cdot n^2 z^{-2\alpha_1} + o(n^2 z^{-2\alpha_1}), \tag{6.3.9}$$

где $C(\varepsilon)$ — выражение в квадратных скобках в предыдущей формуле.

3. Сумму P_1 мы оценим более точно, пользуясь разложением (6.3.4) и уже доказанной теоремой 6.3.1:

$$P_1 = n\mathsf{P}\{X_1 + \ldots + X_n > z,\ X_n > \varepsilon z\} =$$
$$= n\Bigg[\mathsf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n-1} > (1-\varepsilon) z\}\cdot \mathsf{P}\{X_n > \varepsilon z\} +$$
$$+ \int\limits_0^{(1-\varepsilon)z} dF_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x)\cdot \mathsf{P}\{X_n > z - x\}\Bigg] =$$
$$= n\Bigg[((n-1)c_{\alpha_1}((1-\varepsilon)z)^{-\alpha_1} + o(nz^{-\alpha_1}))\cdot(c_{\alpha_1}(\varepsilon z)^{-\alpha_1} +$$
$$+ o(z^{-\alpha_1})) + \int\limits_0^{(1-\varepsilon)z} dF_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x)\left(\sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j}(z-x)^{-\alpha_j} +\right.$$
$$\left. + o((z-x)^{-\alpha_k})\right)\Bigg].$$

Здесь $o((z-x)^{-\alpha_k})$, в силу

$$x \leqslant (1-\varepsilon) z, \qquad z - x \geqslant \varepsilon z,$$

можно заменить на $o(z^{-\alpha_k})$, равномерное по x. Пользуясь также эквивалентностью $n-1 \sim n$, переписываем выражение для P_1:

$$P_1 = c_{\alpha_1}^2 (1-\varepsilon)^{-\alpha_1} \varepsilon^{-\alpha_1} n^2 z^{-2\alpha_1} + o(n^2 z^{-2\alpha_1}) + \\ + n \sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} \int_0^{(1-\varepsilon)z} (z-x)^{-\alpha_j} dF_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x). \quad (6.3.10)$$

Переписываем j-й интеграл в виде

$$z^{-\alpha_j} \left[\int_0^{(1-\varepsilon)z} 1\, dF_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x) + \right. \\ \left. + \int_0^{(1-\varepsilon)z} ((1-xz^{-1})^{-\alpha_j} - 1)\, dF_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x) \right]. \quad (6.3.11)$$

Первый интеграл здесь равен

$$1 - \mathsf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n-1} > (1-\varepsilon) z\} = \\ = 1 - (n-1) c_{\alpha_1} ((1-\varepsilon) z)^{-\alpha_1} + o(nz^{-\alpha_1}); \quad (6.3.12)$$

докажем, что второй равен

$$c_{\alpha_1} D_{\alpha_j}(\varepsilon)(n-1) z^{-\alpha_1} + o(nz^{-\alpha_1}), \quad (6.3.13)$$

где $D_{\alpha_j}(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} ((1-t)^{-\alpha_j} - 1)\, d(-t^{-\alpha_1})$ (интеграл сходится, так как $\alpha_1 < 1$).

Достаточно показать, что для любого $\varkappa > 0$ второй интеграл в (6.3.11) при достаточно больших n и $z/n^{\frac{1}{\alpha_1}}$ отличается от $c_{\alpha_1} D_{\alpha_j}(\varepsilon)(n-1) z^{-\alpha_1}$ не больше, чем на $\varkappa (n-1) z^{-\alpha_1}$. В силу теоремы 6.3.1

$$F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x) = 1 - (n-1) c_{\alpha_1} x^{-\alpha_1} + o((n-1) x^{-\alpha_1})$$

при $n \to \infty$, $x/n^{\frac{1}{\alpha_1}} \to \infty$; значит, существуют такие n_0 и A, что при $n \geqslant n_0$, $x/n^{\frac{1}{\alpha_1}} \geqslant A$

$$|F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x) - 1 + (n-1) c_{\alpha_1} x^{-\alpha_1}| \leqslant \frac{\varkappa}{K} (n-1) x^{-\alpha_1}, \quad (6.3.14)$$

где K — большая положительная константа. Разбиваем при достаточно больших n второй интеграл в (6.3.11) на два: от 0 до $An^{\frac{1}{\alpha_1}}$ и от $An^{\frac{1}{\alpha_1}}$ до $(1-\varepsilon)z$. Первый не превосходит

$$\max_{0\leqslant x\leqslant An^{\frac{1}{\alpha_1}}} ((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1) \sim \alpha_j A n^{\frac{1}{\alpha_1}} z^{-1} =$$

$$= \alpha_j A (nz^{-\alpha_1})^{\frac{1}{\alpha_1}} = o(nz^{-\alpha_1}).$$

В интеграле от $An^{\frac{1}{\alpha_1}}$ до $(1-\varepsilon)z$ производим интегрирование по частям:

$$\int_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z} ((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1)\, d[F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x)-1] =$$

$$= -(\varepsilon^{-\alpha_j}-1)[1-F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}((1-\varepsilon)z)] +$$

$$+\left(\left(1-An^{\frac{1}{\alpha_1}}z^{-1}\right)^{-\alpha_j}-1\right)\left[1-F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}\left(An^{\frac{1}{\alpha_1}}\right)\right]+$$

$$+\int_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z} [1-F_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(x)]\, d((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1).$$

В силу (6.3.14) это выражение находится в пределах

$$(n-1)\Bigg\{-(\varepsilon^{-\alpha_j}-1)(c_{\alpha_1}\pm\varkappa/K)((1-\varepsilon)z)^{-\alpha_1}+$$

$$+(c_{\alpha_1}\mp\varkappa/K)\Bigg[\left(\left(1-An^{\frac{1}{\alpha_1}}z^{-1}\right)^{-\alpha_j}-1\right)\left(An^{\frac{1}{\alpha_1}}\right)^{-\alpha_1}+$$

$$+\int_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z} x^{-\alpha_1}\, d((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1)\Bigg]\Bigg\}=$$

$$=(n-1)\Bigg\{(c_{\alpha_1}\mp\varkappa/K)\Bigg[-x^{-\alpha_1}((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1)\Big|_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z}+$$

$$+\int\limits_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z} x^{-\alpha_1}\, d\left((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1\right)\Bigg]\mp$$

$$\mp 2\left(\varepsilon^{-\alpha_j}-1\right)\left((1-\varepsilon)\,z\right)^{-\alpha_1}\cdot\varkappa/K\Bigg\}.$$

Выражение в квадратных скобках обратным интегрированием по частям приводится к виду

$$\int\limits_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}}^{(1-\varepsilon)z} \left((1-xz^{-1})^{-\alpha_j}-1\right) d\left(-x^{-\alpha_1}\right)=$$

$$=z^{-\alpha_1}\int\limits_{An^{\frac{1}{\alpha_1}}z^{-1}}^{1-\varepsilon} \left((1-t)^{-\alpha_j}-1\right) d\left(-t^{-\alpha_1}\right)=$$

$$=z^{-\alpha_1}\left(D_{\alpha_j}(\varepsilon)+o(1)\right)\left(\leqslant D_{\alpha_j}(\varepsilon)\,z^{-\alpha_1}\right).$$

Окончательно получаем, что второй интеграл в (6.3.11) находится в пределах

$$(n-1)\,z^{-\alpha_1}\left[c_{\alpha_1}\mp\frac{\varkappa}{K}\left(D_{\alpha_j}(\varepsilon)+2\left(\varepsilon^{-\alpha_j}-1\right)(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\right)\mp o(1)\right].$$

Выбирая $K>D_{\alpha_j}(\varepsilon)+2\left(\varepsilon^{-\alpha_j}-1\right)(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}$, получаем нужную оценку.

Собирая вместе формулы (6.3.10)—(6.3.13) и пользуясь эквивалентностью $n-1\sim n$, получаем:

$$P_1=c_{\alpha_1}^2(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\varepsilon^{-\alpha_1}n^2z^{-2\alpha_1}+o\left(n^2z^{-2\alpha_1}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}c_{\alpha_j}nz^{-\alpha_j}+o\left(nz^{-\alpha_k}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\left[c_{\alpha_j}c_{\alpha_1}\left(D_{\alpha_j}(\varepsilon)-(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\right)n^2z^{-\alpha_1-\alpha_j}+\right.$$
$$\left.+o\left(n^2z^{-\alpha_1-\alpha_j}\right)\right].\qquad(6.3.15)$$

Члены $o\left(n^2z^{-\alpha_1-\alpha_j}\right)$ и члены с $n^2z^{-\alpha_1-\alpha_j}$ при $j>1$ включаются в $o\left(n^2z^{-2\alpha_1}\right)$.

Подставляя в (6.3.8) выражение (6.3.15) для P_1, (6.3.9) для P_2 и оценки для P_0, P_3, получаем:

$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_n>z\}=\sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} n z^{-\alpha_j}+o\left(nz^{-\alpha_k}\right)+$$
$$+c_{\alpha_1}^2 n^2 z^{-2\alpha_1}\left[\int_0^{1-\varepsilon}((1-t)^{-\alpha_1}-1)\,d(-t^{-\alpha_1})-(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}+\right.$$
$$+(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\varepsilon^{-\alpha_1}-\frac{1}{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}(1-t)^{-\alpha_1}\,d(-t^{-\alpha_1})-$$
$$\left.-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{-\alpha_1}\varepsilon^{-\alpha_1}\right]+o\left(n^2 z^{-2\alpha_1}\right).$$

Выражение в квадратных скобках, естественно, не должно зависеть от ε. Дифференцирование по ε подтверждает это. Это выражение может быть найдено переходом к пределу при $\varepsilon\downarrow 0$; оно оказывается равным

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1((1-t)^{-\alpha_1}-1)\,d(-t^{-\alpha_1})-1\right]=-\frac{1}{2}\frac{(1-2\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_1)^2}{\Gamma(2-2\alpha_1)}.$$

Это доказывает (6.3.5). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Азенкотт, Рюже (Azencott R., Ruget G.)

1. Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1977, v. 38, № 1, p. 1—54.

Андерсон, Ори (Anderson R. F., Orey S.)

1. Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary.— Nagoya Math. J., 1976, v. 60, p. 189—216.

Бахадур (Bahadur R. R.)

1. On the asymptotic efficiency of tests and estimates.— Sankhyā, 1960, v. 22, № 3—4, p. 229—252.

Биллингсли П.

1. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.

Боровков А. А.

1. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, т. 12, № 4, с. 635—654.

Боровков А. А., Могульский А. А.

1. О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004; II, 1980, т. 21, № 1, с. 12—26.

Бурбаки Н.

1. Общая топология. Основные структуры.— М.: Наука, 1968.

Варадан (Varadhan S. R. S.)

1. Asymptotic probabilities and differential equations.— Comm. Pure Appl. Math. 1966, v. 19, № 3, p. 261—286.
2. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients.— Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, № 2, p. 431—455.
3. Diffusion processes in a small time interval.— Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, № 4, p. 659—685.

Вентцель А. Д.

1. Об асимптотике наибольшего собственного значения эллиптического дифференциального оператора с малым параметром при старших производных.— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 1, с. 19—21.
2. Об асимптотике собственных значений матриц с элементами порядка $\exp\{-V_{ij}/2\varepsilon^2\}$.— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 2, с. 263—266.
3. Теоремы, касающиеся функционала действия для гауссовских случайных функций. — Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, № 3, с. 541—543.
4. Предельные теоремы о больших уклонениях для случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, т. 18, № 4, с. 875—879.

5. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов.— В кн.: Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов.— Вильнюс, 1973, т. I, с. 133—136.
6. Об асимптотике первого собственного значения дифференциального оператора второго порядка с малым параметром при старших производных.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, № 3, с. 610—613.
7. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. I.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 2, с. 235—252; II, 1976, т. 21, № 3, с. 512—526; III, 1979, т. 24, № 4, с. 673—691; IV, 1982, т. 27, № 2, с. 209—227.

Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.
1. Малые случайные возмущения динамической системы с устойчивым положением равновесия.— Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 3, с. 506—509.
2. О предельном поведении инвариантной меры при малых случайных возмущениях динамических систем.— Докл. АН СССР, 1969, т. 188, № 1, с. 13—16.
3. О движении диффундирующей частицы против течения.— УМН, 1969, т. 24, № 5, с. 229—230.
4. О малых случайных возмущениях динамических систем.— УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 3—55.
5. Некоторые задачи, касающиеся устойчивости при малых случайных возмущениях.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, № 2, с. 281—295.
6. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.

Виноградов В. В.
1. Асимптотические разложения в предельных теоремах о больших уклонениях.— В кн.: Материалы XXII Всесоюзной научной студенческой конференции. Математика.— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1984, с. 17—21.

Гертнер Ю.
1. О больших уклонениях от инвариантной меры.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, т. 22, № 1, с 27—42.

Гихман И. И., Скороход А. В.
1. Теория случайных процессов. Т. II.— М.: Наука, 1973.

Годованьчук В. В.
1. Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, № 3, с. 624—630.
2. Асимптотика вероятностей больших уклонений, происходящих в результате больших скачков марковского процесса.— Теория вероятностей и ее применения, 1981, т. 26, № 2, с. 321—334.

Григелионис Б.
1. О структуре плотностей мер, соответствующих случайным процессам.— Литов. мат. сб., 1973, т. 13, № 1, с. 71—78.

Гринь А. Г.
1. О возмущениях динамических систем регулярными гауссовскими процессами.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, № 2, с. 456—457.

Джахангирова А. Д., Нагаев А. В.
1. Многомерная центральная предельная теорема, учитывающая большие уклонения.— В кн.: Случайные процессы и смежные вопросы. Ч. II.— Ташкент: Фан, 1971, с. 25—35.
Донскер, Варадан (Donsker M. D., Varadhan S. R. S.)
1. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time: I.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, № 1, p. 1—47; II, 1975, v. 28, № 2, p. 279—301; III, 1976, v. 29, № 4, p. 389—461.
2. Asymptotics for the Wiener sausage.— Comm. Pure Appl. Math, 1975, v. 28, № 4, p. 525—565.
Дубровский В. Н.
1. Асимптотическая формула лапласовского типа для разрывных марковских процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 1, с. 219—222.
2. Точные асимптотические формулы лапласовского типа для марковских процессов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 5, с. 1001—1004.
Дынкин Е. Б.
1. Основания теории марковских процессов.— М.: Физматгиз, 1959.
Живоглядова Л. В., Фрейдлин М. И.
1. Краевые задачи с малым параметром для диффузионного процесса с отражением.— УМН, 1976, т. 31, № 5, с. 241—242.
Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.
1. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.
Кифер Ю. И.
1. Об асимптотике переходных плотностей процессов с малой диффузией.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 3, с. 527—536.
Комацу (Komatsu T.)
1. Markov processes associated with certain integro-differential equations.— Osaka J. Math. 1973, v. 10, p. 271—303.
Коростелев А. П.
1. Критерий сходимости непрерывных процедур стохастической аппроксимации.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, т. 22, № 3, с. 592—602.
2. Затухающие возмущения динамических систем и условия сходимости рекуррентных стохастических процедур.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, № 2, с. 298—317.
Крамер (Cramér H.)
1. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités.— Act. Sci. et Ind. 1938, f. 736. Русский перевод: Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей.— УМН, 1944, вып. X, с. 166—178.
Кунита, Ватанабе (Kunita H., Watanabe S.)
1. On square integrable martingales.— Nagoya Math. J., 1967, v. 30, p. 209—245. Русский перевод: О мартингалах, интегрируемых с квадратом.— Сб. переводов «Математика», 1971, т. 15, № 1, с. 66—102.
Лепельтье, Маршаль (Lepeltier J. P., Marchal B.)
1. Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1976, v. B 12, № 1, p. 43—103.

Липцер, Ширяев (Liptser R. S., Shiryayev A. N.)
1. Statistics of random processes. Vol. II, Applications.— Berlin etc.: Springer, 1978.
Маслов В. П.
1. Глобальное асимптотическое разложение вероятности больших уклонений и его связь с квазиклассикой.— УМН, 1979, т. 34, № 5, с. 213.
2. Глобальная экспоненциальная асимптотика решений уравнений туннельного типа.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с. 1059—1062.
Мейер (Meyer P.-A.)
1. Un cours sur les intégrales stochastiques.— In: Lecture Notes in Math., v. 511.— Berlin etc.: Springer, 1976, p. 245—400.
Могульский А. А.
1. Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 2, 309—323.
2. Вероятности больших уклонений для траекторий случайных блужданий.— В кн.: Предельные теоремы для сумм случайных величин.— Новосибирск: Наука, 1984, с. 93—124.
Молчанов С. А.
1. Диффузионные процессы и риманова геометрия.— УМН, 1975, т. 30, № 1, с. 3—59.
Нагаев А. В.
1. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин.— Докторская диссертация.— Ташкент, 1970.
Нгуен Вьет Фу
1. К одной задаче об устойчивости при малых случайных возмущениях.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1974, № 5, с. 8—13.
2. Малые гауссовские возмущения и уравнения Эйлера.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1974, № 6, с. 12—18.
Пинелис И. Ф.
1. Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий.— Теория вероятностей и ее применения, 1981, т. 26, № 1, с. 73—87.
Рокафеллар Р.
1. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
Санов И. Н.
1. О вероятностях больших уклонений случайных величин.— Мат. сб., 1957, т. 42 (84), № 1, с. 11—44.
Струк (Stroock D. W.)
1. Diffusion processes with Lévy generators.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw Gebiete, 1975, v. 32, p. 209—241.
Струк, Варадан (Stroock D. W., Varadhan S. R. S.)
1. Diffusion processes with continuous coefficients: I.— Comm. Pure Appl. Math., 1969, v. 22, № 3, p. 345—400; II, 1969, v. 22, № 4, p. 479—530. Русский перевод: Диффузионные процессы с непрерывными коэффициентами.— Сб. переводов «Математика», 1971, т. 15, № 6, с. 66—113; 1972, т. 16, № 1, с. 100—142.
2. Multidimensional diffusion processes.— Berlin etc.: Springer, 1979.
Ткачук С. Г.
1. Теорема о больших уклонениях в случае распределений с правильно меняющимися хвостами.— В сб.: Случайные процессы и статистические выводы.— Ташкент: Фан, 1975, вып. 5, с. 164—174.

Фортус М. И.
1. Равномерная предельная теорема для распределений, притягивающихся к устойчивому закону с показателем, меньшим единицы.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, № 4, с. 486—487.

Фрейдлин М. И.
1. Функционал действия для одного класса случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, № 3, с. 536—541.
2. О стабильности высоконадежных систем.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, № 3, с. 584—595.
3. Флуктуации в динамических системах с усреднением.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 2, с. 273—276.
4. Субпредельные распределения и стабилизация решений параболических уравнений с малым параметром.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 5, с. 1042—1045.
5. Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях.— УМН, 1978, т. 33, № 5, с. 107—160.

Фридман (Friedman A.)
1. Small random perturbations of dynamical systems and applications to parabolic equations.— Indiana Univ. Math. J., 1974, v. 24, № 6, p. 533—553; Erratum к этой статье там же, 1975, v. 24, № 9.
2. The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of the second order elliptic operator with a small parameter in the highest derivatives.— Indiana Univ. Math. J., 1973, v. 22, № 10, p. 1005—1015.

Халмош П.
1. Теория меры.— М.: ИЛ, 1953.

Хейде (Heyde C. C.)
1. On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law.— Sankhyā, 1968, v. A 30, № 3, p. 253—258.

Шильдер (Schilder M.)
1. Some asymptotic formulas for Wiener integrals.— TAMS, 1966, v. 125, № 1, p. 63—85.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Некоторые понятия употребляются, начиная с некоторого места, регулярно во всем или почти всем тексте (например: функционал действия для семейства случайных процессов — регулярно в главах 3—5). Эти употребления не прослеживаются в Указателе. Также не даются указания страницы в тех случаях употребления понятия, когда это можно установить по оглавлению.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

χ_A — индикатор множества A;

$\overline{A}$ — дополнение множества A;

$[A]$ — замыкание A;

(A) — множество внутренних точек A;

$A_{+\delta}$ — δ-окрестность A;

$A_{-\delta}$ — множество точек A, находящихся на расстоянии, большем чем δ от $\overline{A}$;

$a \wedge b$, $a \vee b$ — минимум, максимум двух чисел a, b;

$[\ \ ]$ — а) целая часть; б) просто скобки;

$f(t-)$ — левый предел функции f в точке t;

zu — скалярное произведение z на u;

$G(z) \leftrightarrow H(u)$ — обозначение для преобразования Лежандра;

zA, Au — обозначение двух сопряженных друг другу линейных операторов;

$\theta \longrightarrow$, $\lim\limits_{\theta \to}$ — обозначения для предела по фильтру;

(W, ψ) — карта на многообразии;

$\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ — частные производные изображения функции на карте многообразия;

TX_x, T^*X_x — касательное и кокасательное пространства в точке x многообразия X;

A_x — отображение касательного пространства TX_x на R^r, задающее координаты в данной локальной системе координат;

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}[0, T]$ — пространство непрерывных функций на $[0, T]$;

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}[0, T]$ — пространство непрерывных справа функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода;

$\boldsymbol{C}^1[0, T]$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на $[0, T]$;

$\boldsymbol{W}^{1,2}[0, T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций на $[0, T]$ с интегрируемой в квадрате производной;

$\boldsymbol{C}_{x_0}$, $\boldsymbol{D}_{x_0}$, $\boldsymbol{C}^1_{x_0}[0, T]$, $\boldsymbol{W}^{1,2}_{x_0}[0, T]$ — подпространства этих пространств, состоящие из функций, равных x_0 при $t = 0$;

$\mathfrak{T}$ — упорядоченное множество точек $t \in [0, T]$ и $t-$, $t \in (0, T]$;

$\boldsymbol{C}(\mathfrak{T})$ — пространство непрерывных функций на $\mathfrak{T}$;

$\|\ \ \|$ — норма верхней грани модуля;

ρ — метрика в произвольном функциональном пространстве;

$\rho_{0,T}$ — метрика верхней грани расстояния в пространствах C, D;

$\rho_{0,T\wedge\tau_B\wedge\tau_V-}$ — полуметрика верхней грани расстояния по $[0, T]\cap[0, \tau_B]\cap[0, \tau_V)$ в пространстве $D[0, T]$;

$\rho_{\{0,T\}}$ — метрика в $D[0, T]$, определяемая как $\rho_{0,T}$ для функций φ, ψ с $\varphi(0)=\psi(0)$, $\varphi(T)=\psi(T)$ и как $+\infty$ в противном случае;

$\rho_{\{t_m, t_{m+1}\}}$, $\rho_{\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}}$ — то же с $\varphi(t_i)=\psi(t_i)$;

$\mathcal{B}_X$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X;

$\mathcal{B}^{[0,T]}(X)$ — σ-алгебра в функциональном пространстве X, порожденная цилиндрическими подмножествами;

$\mathcal{F}_{[t_0,t]}$ — σ-алгебра в пространстве элементарных событий, порожденная значениями случайного процесса $\xi(s)$, $s\in[t_0, t]$;

$\mathcal{F}_{t_0t}$ — та же σ-алгебра, пополненная относительно соответствующей вероятностной меры и дополненная по непрерывности справа по t;

$\mathcal{P}$ — σ-алгебра предсказуемых множеств;

μ_ξ — распределение случайного процесса ξ в функциональном пространстве;

$\mathbf{P}^z_{0,x_0}$ — вероятностная мера, получаемая в результате обобщенного преобразования Крамера;

$\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^\theta_{t,x}$, $\mathbf{M}^z_{0,x_0}$ — математические ожидания случайных величин относительно вероятностных мер $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^\theta_{t,x}$, $\mathbf{P}^z_{0,x_0}$ и т. п.;

$\mathbf{M}(A; \xi)$ — обозначение для $\int\limits_A \xi(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$;

$\tilde{\eta}(t)$ — компенсатор случайной функции $\eta(t)$;

$\langle\eta, \zeta\rangle(t)$ — бикомпенсатор случайных функций $\eta(t)$, $\zeta(t)$;

$\eta^c(t)$ — непрерывная часть локального мартингала;

$\eta^d(t)$ — чисто разрывная часть локального мартингала;

$\tilde{\eta}^z(t)$, $\langle\eta, \zeta\rangle^z(t)$ — компенсатор, бикомпенсатор относительно преобразованной вероятностной меры $\mathbf{P}^z_{0,x_0}$;

$\sum\limits_{[t_0,t)} z\Delta\eta$ — дискретный аналог стохастического интеграла;

$\Sigma^k_{t_0T}(V)$ — сумма по скачкам случайного процесса;

$\lambda_{t,x}(dy)$ — а) мера Леви, соответствующая скачкам случайного процесса; б) предельная мера для $g(\theta)^{-1}\lambda^\theta_{t,x'}(dy)$ при $\theta\to$, $x'\to x$ (гл. 6);

$\mathfrak{A}$ — компенсирующий оператор марковского процесса;

A_t — производящий оператор марковского процесса;

$\mathfrak{A}^z$ — компенсирующий оператор процесса после применения обобщенного преобразования Крамера;

$\mathfrak{A}_V$ — оператор, через который задается компенсатор случайной функции $f(t, \xi_V(t))$;

$w(t)$ — винеровский процесс;

$\xi^{n,z}(t)$, $\xi^{n,x}(t)$ — случайные процессы, построенные по суммам независимых случайных величин X_i; $\xi^{n,z}(t)=(X_1+\ldots+X_{[nt]})/z$; $\xi^{n,x}(t)=(X_1+\ldots+X_{nt})/x\sigma\sqrt{n}$;

$\xi^{\tau,h}(t)$ — процесс с малыми частыми скачками (см. § 4.2);

$\eta^{h,\beta}_{x_0}(t)$, $\zeta^{h,\beta}_{x_0}(t)$ — процесс $\xi^{h,h}(t)$, подвергнутый преобразованию, «выпрямляющему» наиболее вероятные траектории, и растянутый в β раз;

$\xi_V(t)$ — процесс $\xi(t)$, остановленный в последний момент перед первым скачком, не принадлежащим множеству V;

τ_B — первый момент выхода из множества B;

τ_V — первый момент скачка, не принадлежащего V;

$G(t, x; z)$ — кумулянта марковского процесса;

$G_V(t, x; z)$ — урезанная кумулянта;

$G_0(t, x; z)$ — функция, являющаяся пределом соответствующим образом преобразованной кумулянты (урезанной кумулянты);

$G_*(t, x; z)$ — функция, через которую выражается кумулянта процессов из данного семейства;

$\overline{G}(z)$, $\overline{G}_V(z)$, $\overline{G}_0(z)$ — функции, мажорирующие соответствующие функции G, G_V, G_0 от аргументов t, x; z;

$H(t, x; u)$, $H_V(t, x; u)$, $H_0(t, x; u)$, $\underline{H}(u)$, $\underline{H}_0(u)$ — преобразования Лежандра от соответствующих функций $G(t, x; z), \ldots, \overline{G}_0(z)$;

$\overline{U}$ — замыкание множества всех точек u, где конечна функция $\underline{H}(u)$ или $\underline{H}_0(u)$;

$k(\theta)$ — нормирующий коэффициент;

$S(\varphi)$ — нормированный функционал действия;

$I(\varphi)$ — функционал действия для отдельного случайного процесса;

$\Phi(s)$, $\Phi(i)$, $\tilde{\Phi}(i), \ldots$ — множество функций, на которых соответствующий функционал принимает значения, не превосходящие указанного числа;

$I_V(\varphi)$ — урезанный функционал действия;

$S_{T_1, T_2}(\varphi)$, $I_{T_1, T_2}(\varphi), \ldots$ — функционалы, связанные с марковскими процессами на отрезке времени $[T_1, T_2]$;

$\Phi_{x; [T_1, T_2]}(s)$, $\Phi_{x; [T_1, T_2]}(i)$, $\tilde{\Phi}_{x; [T_1, T_2]}(i), \ldots$ — множества функций $\varphi(t)$ на отрезке $[T_1, T_2]$, $\varphi(T_1)=x$, для которых соответствующий функционал не превосходит указанного числа;

$\pi(0, t)$ (при $t=T$) — плотность обобщенного преобразования Крамера;

$\pi_{B,\,V}(0,\ t)$ (при $t=T$) — плотность урезанного преобразования Крамера;

$g(\theta)$ — бесконечно малая функция, задающая порядок $\lambda^{\theta}_{t,\,x}(dy)$ при $\theta \longrightarrow$ (гл. 6);

$X^{t_1 \ldots t_k}_{x_0 x_1 \ldots x_k}(t)$ — функция, принимающая значения x_i при $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, x_k при $t_k \leqslant t \leqslant T$;

$B^k_{x_0}$ — множество всех функций $X^{t_1 \ldots t_k}_{x_0 x_1 \ldots x_k}$ с данными x_0 и k;

$E^k_{x_0}$ — множество $\{(t_1,\ x_1,\ \ldots,\ t_k,\ x_k)\colon\ 0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant T,\ x_i \neq x_{i-1},\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$;

$X_{x_0,\,k}$ — отображение, ставящее в соответствие точке $(t_1,\ x_1,\ \ldots,\ t_k,\ x_k) \in E^k_{x_0}$ функцию $X^{t_1 \ldots t_k}_{x_0 x_1 \ldots x_k} \in D_{x_0}$;

$\mu^k_{x_0}$ — мера на $E^k_{x_0}$, определяемая формулой $\mu^k_{x_0}(dt_1\,dx_1 \ldots dt_k\,dx_k) = dt_1\,\lambda_{t_1,\,x_0}(dx_1) \ldots dt_k\,\lambda_{t_k,\,x_{k-1}}(dx_k)$;

$\tau^{\varepsilon}(s)$ — первый после s момент скачка случайного процесса величины, большей ε;

τ^{ε}_i — момент i-го скачка величины, большей ε;

ν^{ε} — число скачков величины, большей ε, на отрезке от 0 до T.

Александр Дмитриевич Вентцель

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ
ДЛЯ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Редактор *С. Е. Кузнецов*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Т. Г. Егорова, М. Л. Медведская*

ИБ № 12681

Сдано в набор 15.05.85. Подписано к печати 06.02.86. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,45. Уч.-изд. л. 10,68. Тираж 4000 экз. Заказ № 1460. Цена 1 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука»,
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6 Зак. 2312