А. В. ПОГОРЕЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

517.4
П 43
УДК 513.731

Несмотря на сравнительно небольшой объем, книга охватывает все разделы курса дифференциальной геометрии для математических специальностей университетов и пединститутов. Она отличается безупречностью изложения, содержит четкие и ясные доказательства, богато снабжена упражнениями и задачами повышенной трудности.

Книга является одним из лучших учебных руководств по курсу дифференциальной геометрии для университетов и пединститутов.

Алексей Васильевич Погорелов

Дифференциальная геометрия

М., 1974 г., 176 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *А. П. Колесникова* Корректор *О. А. Бутусова*

Печать с матриц. Подписано к печати 7/V 1974 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 5,5. Условн. печ. л. 9,24. Уч.-изд. л. 7,92. Тираж 50 000 экз. Цена книги 28 коп. Заказ № 612.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано в типографии № 2 изд-ва «Наука», Москва, Шубинский пер., 10, с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская ул., 26.

$$П\,\frac{20203-067}{053(02)-74}\,13\text{-}74$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание книги отличается от первого издания (1955 г.). Изменения внесены почти во все разделы книги. Эти изменения носят различный характер. В одних случаях улучшены доказательства, в других — изменен порядок изложения, в третьих — изложение дополнено иллюстрирующими примерами и рисунками.

Основные вопросы курса, соответствующие программе физико-математических факультетов, в книге изложены достаточно подробно. Материал, выходящий за пределы программы, подан, как правило, в описательном плане.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание книги отличается от предыдущего (1956) небольшими усовершенствованиями в ряде доказательств. Существенно изменено только изложение вопроса об огибающей однопараметрического семейства кривых и поверхностей.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальная геометрия — это часть математики, которая изучает геометрические образы, в первую очередь кривые и поверхности, а также семейства кривых и поверхностей методами анализа бесконечно малых. Характерным для дифференциальной геометрии является то, что она изучает прежде всего свойства кривых и поверхностей «в малом», т. е. свойства сколь угодно малых кусков кривых и поверхностей.

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к первой половине XVIII века и связано с именами Л. Эйлера и Г. Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей было написано Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795 г.).

В 1827 г. Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», которой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Открытие Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии сыграло огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной. Так, в 1854 г. Б. Риман своей лекцией «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» заложил основы так называемой римановой геометрии, которая в применении к многомерным многообразиям находится в таком же отношении к геометрии n-мерного евклидова пространства, как внутренняя геометрия произвольной поверхности к евклидовой геометрии на плоскости.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872 г.), в применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, построившим теорию пространств проективной и аффинной связности.

В России школу дифференциальной геометрии создали Ф. Миндинг и К. М. Петерсон, основные исследования которых посвящены вопросам изгибания поверхностей. Эти исследования были продолжены в работах многих русских и советских геометров.

В основу настоящей книги положены лекции автора по дифференциальной геометрии на физико-математическом факультете Харьковского университета. Автор преследовал цель дать строгое изложение основ дифференциальной геометрии и типичных для нее методов исследования, не нарушая при этом значительно установившихся традиций. Большой фактический материал по дифференциальной геометрии вынесен в упражнения и задачи, решение которых является обязательным условием при подготовке студентов-геометров.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ КРИВЫХ

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ КРИВОЙ

Кривая является одним из основных объектов, рассматриваемых в дифференциальной геометрии. В настоящей главе мы выясним понятие кривой в той мере, в какой этого требует дальнейшее изложение.

§ 1. Элементарная кривая. Простая кривая. Общая кривая.

Определению понятия кривой мы предпошлем некоторые сведения об отображениях произвольного множества точек в пространство.

Пусть M — любое множество точек пространства. Говорят, что задано *отображение* f множества M в пространство, если каждой точке X множества M поставлена в соответствие некоторая точка $f(X)$ пространства. Точка пространства $f(X)$ называется *образом* точки X. Множество точек $f(M)$, составленное из образов всех точек множества M, называется *образом* множества M.

Отображение f множества M называется *одно-однозначным*, если образы различных точек различны. Пусть f — одно-однозначное отображение. Тогда естественным образом определено отображение f^{-1} множества $f(M)$, которое точке $f(X)$ сопоставляет точку X. Это отображение называется *обратным* к f.

Отображение f множества M называется *непрерывным*, если, какова бы ни была точка X из M и число $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки Y из M расстояние точки $f(Y)$ от $f(X)$ меньше ε, коль скоро расстояние Y от X меньше δ.

Пусть f — одно-однозначное и непрерывное отображение M. Если отображение f^{-1} множества $f(M)$ также непрерывно, то f называется *топологическим отображением*. Относительно множества M и его образа $f(M)$ при топологическом отображении f говорят, что они *гомеоморфны* или *топологически эквивалентны*.

Определим элементарную кривую.

Множество γ точек пространства мы будем называть *элементарной кривой*, если это множество является образом открытого отрезка прямой при топологическом отображении его в пространство.

Пусть γ — элементарная кривая и $a < t < b$ — отрезок, образом которого при отображении f является кривая. Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ — координаты точки кривой, соответствующей точке t отрезка. Систему равенств

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$$

называют *уравнениями* кривой γ в параметрической форме.

Множество G точек пространства называется *открытым*, если для каждой точки X этого множества можно указать число $\varepsilon > 0$ такое, что все точки пространства, расстояния которых от X меньше ε, тоже принадлежат G. Очевидно, множество, составленное из любой совокупности открытых множеств, будет открытым.

Окрестностью точки X пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Множество M точек пространства называется связным, если не существует открытых множеств G' и G'', разбивающих множество M на две части — M' и M'', одна из которых принадлежала бы только G', а другая — только G''.

Определим теперь простую кривую.

Множество γ точек пространства мы будем называть *простой кривой*, если это множество связно и у каждой его точки X есть такая окрестность, что расположенная в ней часть γ является элементарной кривой.

Строение простой кривой «в целом» выясняется следующей теоремой:

Образ открытого отрезка или окружности при топологическом отображении в пространство есть простая кривая.

Обратно, любая простая кривая есть образ открытого отрезка или окружности при топологическом отображении в пространство. Коротко это выражают словами: *простая кривая гомеоморфна или открытому отрезку или окружности.*

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы. Заметим только, что указанное в ней свойство простой кривой быть гомеоморфной открытому отрезку или окружности полностью характеризует ее и, следовательно, простая кривая может быть определена этим свойством.

Рис. 1.

Простая кривая, гомеоморфная окружности, называется *замкнутой*.

Окрестностью точки X на простой кривой γ называется общая часть кривой γ и некоторой пространственной окрестности точки X. Согласно определению у каждой точки простой кривой есть окрестность, являющаяся элементарной кривой. В дальнейшем, говоря об окрестности точки на кривой, мы будем иметь в виду такую элементарную окрестность (рис. 1).

Пусть простая кривая γ является образом открытого отрезка или окружности g при топологическом отображении f. Пусть X — произвольная точка g и ω — любая ее окрестность. Тогда образ ω при отображении f является окрестностью точки $f(X)$ на кривой γ. Обратно, любая окрестность точки $f(X)$ может быть получена таким образом.

Отображение f множества M в пространство называется *локально топологическим*, если у каждой точки этого множества есть окрестность, в которой отображение f топологическое.

Множество γ точек пространства мы будем называть *общей кривой*, если это множество является образом простой кривой при локально топологическом отображении ее в пространство.

Мы будем говорить, что отображение f_1 простой кривой γ_1 и отображение f_2 простой кривой γ_2, определяют одну и ту же общую кривую γ, если между точками кривых γ_1 и γ_2 может быть установлено топологическое соответствие, при котором образы соответствующих точек этих кривых на кривой γ совпадают.

Чтобы пояснить вторую часть данного определения, приведем пример. На рис. 2 изображена общая кривая. Эту кривую можно представить как образ окружности при локально топологическом отображении двумя различными способами, которые с точки зрения данного определения дают различные кривые. Наглядно их можно представить себе так.

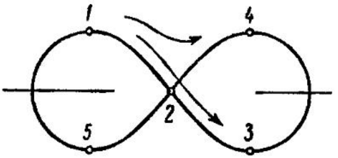

Рис. 2.

Пусть точка движется по окружности. Тогда образ ее движется по кривой. При этом точка-образ, проходя кривую, может занимать последовательно положения 1, 2, 3, 4, 2, 5, но может проходить кривую и в порядке 1, 2, 4, 3, 2, 5. Отображения, соответствующие этим обходам, определяют различные общие кривые, хотя как точечные множества они и совпадают.

Пусть общая кривая γ является образом при локально топологическом отображении f в пространство простой кривой $\bar{\gamma}$. Окрестностью точки $f(X)$ на кривой γ мы будем называть образ любой окрестности точки X на кривой $\bar{\gamma}$ при отображении f. Так как отображение f в достаточно малой окрестности точки X является топологическим, то $f(X)$ на γ имеет окрестность, являющуюся элементарной кривой.

Таким образом, *исследование любой кривой «в малом» может быть сведено к рассмотрению элементарной кривой.*

§ 2. Регулярная кривая. Способы аналитического задания кривой

Кривую γ мы будем называть *регулярной* (k раз дифференцируемой), если у каждой точки этой кривой есть окрестность, допускающая регулярную параметризацию, т. е. задание уравнениями в параметрической форме:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

где f_1, f_2, f_3 — регулярные (k раз непрерывно дифференцируемые) функции. При $k=1$ кривая называется *гладкой*.

Кривая называется *аналитической*, если она в достаточно малой окрестности каждой своей точки допускает аналитическую параметризацию (функции f_1, f_2, f_3 — аналитические).

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно регулярные кривые.

Как показано в предыдущем параграфе, кривая в окрестности каждой точки может быть задана уравнениями в параметрической форме

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — функции, определенные в некотором интервале $a<t<b$.

Естественно возникает вопрос, когда система равенств

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \qquad (a<t<b)$$

определяет регулярную кривую, т. е. когда эти равенства можно рассматривать как уравнения некоторой кривой? Ответ на этот вопрос во многих случаях дает следующая

Теорема. *Если $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — регулярные функции, удовлетворяющие условию*

$$x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0 \quad (a<t<b),$$

то система равенств

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \qquad (a<t<b)$$

является уравнениями некоторой кривой γ. Эта кривая есть образ отрезка $a<t<b$ при локально топологическом отображении, которое точке t отрезка сопоставляет точку пространства с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Здесь в доказательстве нуждается только утверждение о локальной одно-однозначности указанного отображения. Докажем это утверждение.

Если утверждение неверно, то существует такое t_0, в сколь угодно малой окрестности которого можно указать t_1 и t_2 ($t_1 \neq t_2$) такие, что

$$x(t_1)-x(t_2)=0, \quad y(t_1)-y(t_2)=0, \quad z(t_1)-z(t_2)=0.$$

По теореме о среднем отсюда получаем

$$x'(\vartheta_1)=0, \quad y'(\vartheta_2)=0, \quad z'(\vartheta_3)=0,$$

где ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 заключены между t_1 и t_2. Так как t_1 и t_2 сколь угодно близки к t_0, то по непрерывности функций $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$

$$x'(t_0)=0, \quad y'(t_0)=0, \quad z'(t_0)=0,$$

а, следовательно,

$$x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)=0.$$

Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Некоторые кривые при подходящем выборе осей координат x, y, z допускают параметризацию вида

$$x=t, \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \quad (a<t<b),$$

или, что то же,

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x) \quad (a<x<b).$$

Эта параметризация во многих случаях оказывается особенно удобной. В связи с этим возникает вопрос: когда кривая хотя бы «в малом» допускает такую параметризацию? Ответ на вопрос дает следующая теорема:

Теорема. *Пусть γ — регулярная кривая,*

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t) \quad (a<t<b)$$

ее регулярная параметризация в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), соответствующей $t=t_0$. Пусть в этой точке $f'_1(t)\neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки t_0 кривая γ может быть задана уравнениями:

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x),$$

где φ и ψ — регулярные функции от x.

Действительно, по теореме о неявных функциях существует регулярная функция $\chi(x)$, равная t_0 при $x=x_0$ и удовлетворяющая уравнению

$$x=f_1(\chi(x))$$

для всех x, близких к x_0. Дифференцируя это тождество при $x=x_0$, находим $1=f'_1(t_0)\chi'(x_0)$. Отсюда $\chi'(x)\neq 0$.

Таким образом, функция $\chi(x)$ в окрестности x_0 монотонна, и, следовательно, при достаточно малом δ отображение отрезка $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ на ось t, задаваемое равенством $t=\chi(x)$, будет топологическим.

Отсюда следует, что окрестность $\chi(x_0-\delta)<t<$ $<\chi(x_0+\delta)$ кривой γ может быть задана уравнениями

$$y=f_2(\chi(x)),\quad z=f_3(\chi(x))\qquad (x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь неявное задание кривой, причем для простоты сначала ограничимся плоскими кривыми.

Кривая называется *плоской*, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости. Будем считать, что этой плоскостью является плоскость xy.

Мы будем говорить, что плоская кривая задана уравнением

$$\varphi(x, y)=0,$$

выражая этим только то, что координаты точек кривой удовлетворяют данному уравнению. При этом могут существовать точки плоскости, удовлетворяющие этому уравнению и не принадлежащие кривой, а множество всех точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y)=0$, может не быть кривой в смысле определения, данного в предыдущем параграфе.

В связи с заданием кривых уравнением в неявном виде важную роль играет следующая

Теорема. *Пусть $\varphi(x, y)$ — регулярная функция переменных x, y. Пусть M — множество точек плоскости xy, удовлетворяющих уравнению*

$$\varphi(x, y)=0;$$

(x_0, y_0) — точка этого множества, в которой φ_x^2+ $+\varphi_y^2\neq 0$. Тогда у точки (x_0, y_0) есть окрестность такая, что все принадлежащие ей точки множества M образуют регулярную элементарную кривую.

Доказательство. Пусть для определенности в точке (x_0, y_0) $\varphi_y\neq 0$. По теореме о неявных функциях существуют числа δ и ε, большие нуля, и регулярная функция $\psi(x)$, определенная в интервале $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, такие, что все точки $(x, \psi(x))$, $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ удов-

летворяют уравнению $\varphi(x, y)=0$, причем этими точками исчерпываются все точки прямоугольника $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$, удовлетворяющие уравнению $\varphi(x, y)=0$. Элементарная кривая, о которой идет речь в теореме, задается уравнением

$$y=\psi(x) \quad (x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

Теорема доказана.

Соответствующая теорема для пространственных кривых состоит в следующем.

Теорема. *Пусть $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ — регулярные функции переменных x, y, z. Пусть M — множество точек пространства, удовлетворяющих уравнениям*

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0,$$

(x_0, y_0, z_0) — точка этого множества, в которой ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$$

равен двум. Тогда у точки (x_0, y_0, z_0) есть такая окрестность, что все принадлежащие ей точки множества M образуют регулярную элементарную кривую.

Доказательство этой теоремы также основано на применении теоремы о неявных функциях и принципиально не отличается от доказательства соответствующей теоремы для плоских кривых.

§ 3. Особые точки регулярных плоских кривых

Пусть γ — регулярная плоская кривая и P — точка на ней. Точка P кривой γ называется *обыкновенной точкой* по отношению к данной степени регулярности k, если кривая допускает k раз дифференцируемую параметризацию в окрестности этой точки

$$x=x(t), \quad y=y(t),$$

удовлетворяющую в точке P условию: $x'^2+y'^2\neq 0$. Если же такой параметризации не существует, то P называется *особой точкой*.

Пример. Точка $t=0$ кривой

$$x=t^3, \quad y=t^7 \qquad (-1<t<+1)$$

обыкновенная по отношению к дважды дифференцируемым параметризациям, ибо кривая допускает эквивалентное задание

$$x=\tau, \quad y=\mp|\tau|^{\frac{7}{3}} \qquad (-1<\tau<1).$$

Однако, как мы увидим ниже, точка $t=0$ является особой по отношению к аналитическим параметризациям.

В настоящем параграфе мы рассмотрим подробно вопрос об особых точках плоских аналитических кривых по отношению к аналитическим параметризациям.

Лемма. *Пусть γ — аналитическая кривая и O — точка на ней. Тогда при подходящем выборе осей координат кривую можно параметризовать так, что ее уравнения в окрестности точки O будут иметь вид*

$$x=a_1t^{n_1},$$

$$y=b_1t^{m_1}+b_2t^{m_2}+\ldots, \quad n_1\leqslant m_1.$$

Доказательство. Примем точку O за начало координат. Пусть

$$x=\alpha_1s^{n_1}+\alpha_2s^{n_2}+\ldots$$

$$y=\beta_1s^{m_1}+\beta_2s^{m_2}+\ldots$$

какая-нибудь аналитическая параметризация кривой. Не ограничивая общности, можно считать, что точке O соответствует значение параметра $s=0$. Можно считать также, что $n_1\leqslant m_1$. (Если $n_1>m_1$, можно поменять ролями x и y.)

Введем новый параметр t, связанный с s равенством

$$t=s\left(\frac{\alpha_1s^{n_1}+\alpha_2s^{n_2}+\ldots}{a_1s^{n_1}}\right)^{\frac{1}{n_1}}.$$

При таком выборе параметра уравнения кривой γ в окрестности точки O имеют вид

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \dots,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть в окрестности точки O аналитическая кривая задана уравнениями*

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \dots, \quad n_1 \leqslant m_1.$$

Тогда, для того чтобы точка O была особой точкой кривой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно m_k не делилось на n_1.

Доказательство. Необходимость. Во-первых, заметим, что все m_k и n_1 не могут быть четными, так как тогда для сколь угодно малых t $x(t) = x(-t)$, $y(t) = y(-t)$, т. е. нарушено условие одно-однозначности отображения в сколь угодно малой окрестности точки $t = 0$.

Пусть все m_k кратны n_1 (n_1, очевидно, нечетно). Введем вместо t параметр $s = t^{n_1}$. Тогда уравнения кривой в окрестности точки O примут вид

$$x = a_1 s,$$
$$y = b_1 s^{k_1} + b_2 s^{k_2} + \dots$$

Очевидно, точка O, соответствующая значению параметра $s = 0$, является обыкновенной точкой кривой.

Достаточность. Пусть хотя бы одно m_k не делится на n_1. Покажем, что точка O — особая точка. Если точка O обыкновенная, то в ее окрестности кривая допускает параметризацию $x = f_1(\sigma)$, $y = f_2(\sigma)$, где f_1 и f_2 — аналитические функции, удовлетворяющие при $\sigma = \sigma_0$, отвечающему точке O, условию $f_1'^2 + f_2'^2 \neq 0$.

Так как $f_2(\sigma)(f_1(\sigma))^{-1} = y(t)(x(t))^{-1}$, а $y(t)(x(t))^{-1}$ при $t \to 0$ стремится к конечному пределу, равному $f_2'(\sigma_0)(f_1'(\sigma_0))^{-1}$, то $f_1' \neq 0$ в точке O и, следовательно, наша кривая по теореме предыдущего параграфа допускает задание уравнением

$$y=\varphi(x)=c_1x+c_2x^2+\dots,$$

где $\varphi(x)$ — аналитическая функция от x. Подставляя в это уравнение $x=x(t)$ и $y=y(t)$, получим тождество

$$b_1t^{m_1}+b_2t^{m_2}+\dots=$$
$$=c_1a_1t^{n_1}+c_2a_1^2t^{2n_1}+\dots$$

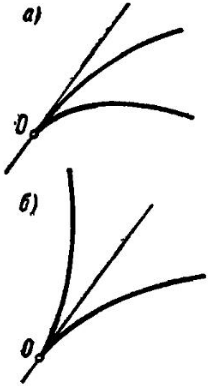

Рис. 3.

Отсюда следует, что все m_k кратны n_1. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Замечание. Если точка O особая, причем n_1 и m_1 четные, то она называется *точкой возврата второго рода*. Кривая в окрестности этой точки имеет вид, показанный на рис. 3, *а*.

Если точка O особая, причем m_1 не делится на n_1 и, кроме того, n_1 четное, а m_1 нечетное, то O называется *точкой возврата первого рода*. Вид кривой в окрестности такой особой точки показан на рис. 3, *б*.

Простой *достаточный* признак того, чтобы точка кривой была особой, дает следующая

Теорема. *Пусть аналитическая кривая γ в окрестности точки O задана уравнениями*

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — аналитические функции параметра t. Пусть первые отличные от нуля производные функций $x(t)$ и $y(t)$ имеют порядки n_1 и m_1 соответственно, причем $n_1<m_1$.

Тогда точка O будет особой, если m_1 не делится на n_1, причем точка O будет точкой возврата второго рода, если n_1 и m_1 оба четные, и точкой возврата первого рода, если n_1 четно, а m_1 нечетно.

Эта теорема непосредственно вытекает из предыдущей.

В заключение рассмотрим вопрос об особых точках плоских аналитических кривых в случае неявного задания.

Пусть плоская аналитическая кривая γ задана уравнением

$$\varphi(x, y) = 0,$$

где $\varphi(x, y)$ — аналитическая функция переменных x и y.

Если $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ в точке $O(x_0, y_0)$ кривой γ, то эта точка кривой является обыкновенной точкой, как показано в § 2. Таким образом, особыми могут быть только те точки кривой, в которых $\varphi_x = \varphi_y = 0$.

Не ограничивая общности, можно считать точку O началом координат. В окрестности точки O кривая γ допускает параметризацию вида

$$x = a_1 t^{n_1},$$

$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots,$$

причем можно считать, что $n_1 \leqslant m_1$. В противном случае можно поменять оси x и y. Для того чтобы определить, является ли точка O особой точкой кривой и выяснить характер особенности в этой точке, достаточно знать показатели $n_1, m_1, m_2, \ldots$

Для того чтобы определить эти показатели, воспользуемся тождеством

$$\varphi(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Пусть разложение функции $\varphi(x, y)$ по степеням x, y начинается членами второй степени

$$\varphi(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

Будем различать три случая:

1. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0.$

2. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0.$

3. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0.$

Поворотом осей координат можно добиться того, что в разложении функции $\varphi(x, y)$ в степенной ряд член, содержащий xy, будет отсутствовать.

Подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в разложение функции $\varphi(x, y)$, получим тождество относительно t. При $n_1 < m_1$ низшую степень t, равную $2n_1$, имеет только один член — $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$.

Отсюда $a_{20}=0$, что невозможно ни в первом, ни во втором случае. Остается предположить, что $n_1=m_1$. Тогда в первых двух случаях низшую степень имеют члены $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$ и $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$. В первом случае и это невозможно, так как a_{20} и a_{02} одного знака, а из тождества следует, что $a_{20}a_1^2+a_{02}b_1^2=0$.

Таким образом, в первом случае не существует аналитической кривой, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x, y)=0$ и содержащей точку O. В этом случае в достаточно малой окрестности точки O вообще не существует точек, отличных от O, удовлетворяющих уравнеиию $\varphi(x, y)=0$. Когда кривую определяют как геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y)=0$, такую точку называют *изолированной особой точкой*.

Пример. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x^2+y^2)(x-1)=0,$$

состоит из прямой $x=1$ и точки $(0, 0)$, которая является изолированной точкой этого геометрического места.

В третьем случае можно считать $a_{20}=0$, так как $a_{20}a_{02}=0$. Разложение функции $\varphi(x, y)$ имеет вид

$$\varphi(x, y)=a_{02}y^2+a_{30}x^3+\ldots$$

Предположим, что $a_{30}\neq 0$. Это соответствует в общем случае тому, что формы

$$\varphi_2=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2 \quad \text{и} \quad \varphi_3=a_{30}x^3+\ldots+a_{03}y^3$$

не имеют общих делителей.

Подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в разложение функции $\varphi(x, y)$, замечаем, что членами с низшими степенями t являются $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$ и $a_{30}a_1^3t^{3n_1}$. Отсюда следует, что $2m_1=3n_1$, т. е. m_1 не делится на n_1. Следовательно, точка O является особой точкой кривой.

Оказывается, что если считать m_1 и n_1 оба четными, то и все m_k оказываются четными, так как линейно и однородно выражаются через m_1 и n_1. Но, как было отмечено ранее, n_1 и все m_k не могут быть четными. Поэтому четно только n_1. Это значит, что особая точка O является точкой возврата первого рода.

Пример. Начало координат для полукубической параболы $y^2 - x^3 = 0$ является точкой возврата первого рода (рис. 4).

Рассмотрим, наконец, второй случай. В этом случае функцию $\varphi(x, y)$ можно представить в виде

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

где A, B, C — аналитические функции от x, y, равные соответственно a_{20}, 0, a_{02} в точке O и, следовательно,

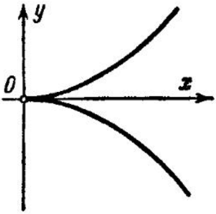

Рис. 4.

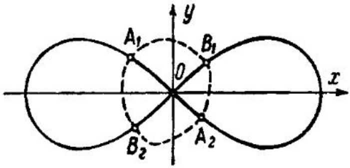

Рис. 5.

удовлетворяющие вблизи этой точки неравенству $AC - B^2 < 0$. Поэтому в малой окрестности точки O

$$\varphi(x, y) = C(y - x\xi_1(x, y))\,(y - x\xi_2(x, y)),$$

где ξ_1 и ξ_2 — корни квадратного уравнения

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0.$$

Следовательно, во втором случае геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y) = 0$ в окрестности точки O, состоит из двух аналитических кривых $y - x\xi_1(x, y) = 0$, $y - x\xi_2(x, y) = 0$, для каждой из которых точка O является обыкновенной точкой, так как

$$\frac{\partial}{\partial x}(y - x\xi_i(x, y))\Big|_O = -\xi_i(0, 0) \neq 0.$$

Когда кривую определяют как геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x, y) = 0,$$

точку O в рассматриваемом случае считают тем не менее особой и называют *узловой* точкой.

Пример. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

(лемниската Бернулли, рис. 5), в окрестности узловой точки (0, 0) состоит из двух аналитических кривых

$$\overset{\frown}{A_1A_2} \text{ и } \overset{\frown}{B_1B_2}.$$

§ 4. Асимптоты плоских кривых

Пусть γ — незамкнутая кривая,

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$
$$(a<t<b)$$

— ее уравнения. Говорят, что кривая уходит в бесконечность с одной стороны, если при $t\to a$ (или при $t\to b$) $x^2(t)+y^2(t)\to\infty$. Если же и при $t\to a$ и при $t\to b$ $x^2(t)+y^2(t)\to\infty$, то говорят, что кривая уходит в бесконечность с обеих сторон. Очевидно, свойство кривой уходить в бесконечность не зависит от ее параметризации.

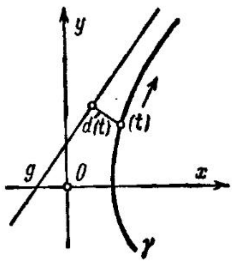

Рис. 6.

Пусть кривая γ уходит в бесконечность, например, $x^2+y^2\to\infty$ при $t\to a$. Прямая g называется *асимптотой* кривой γ, если расстояние $d(t)$ точки кривой γ от прямой g стремится к нулю, когда $t\to a$ (рис. 6).

Теорема. *Для того чтобы кривая γ, заданная уравнениями*

$$x=x(t),\quad y=y(t)\qquad (a<t<b),$$

уходя в бесконечность при $t\to a$, имела асимптоту необходимо и достаточно:

1. *При $t\to a$ хотя бы одно из двух отношений $y(t)(x(t))^{-1}$ или $x(t)(y(t))^{-1}$ стремится к конечному пределу. Пусть для определенности $y(t)(x(t))^{-1}\to k$.*

2. *При $t\to a$ и выполнении первого условия выражение $y(t)-kx(t)$ также стремится к пределу.*

Если этот предел обозначить l, то уравнение асимптоты будет

$$y-kx-l=0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть g:

$$y-kx-l=0$$

— асимптота кривой γ. Выражение

$$y(t)-kx(t)-l$$

с точностью до постоянного множителя равно расстоянию точки (t) кривой γ от прямой g. А так как g асимптота, то

$$y(t)-kx(t)-l\to 0 \qquad (*)$$

при

$$t\to a.$$

При $t\to a$ $x(t)\to\infty$, так как в противном случае $y(t)-kx(t)-l$ не может оставаться ограниченным при $t\to a$ $(x^2(t)+y^2(t)\to\infty)$. А тогда из $(*)$ получается, что

$$\frac{y(t)}{x(t)}\to k$$

и

$$y(t)-kx(t)\to l.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Так как при $t\to a$

$$\frac{y(t)}{x(t)}\to k \text{ и } y(t)-kx(t)\to l,$$

то

$$y(t)-kx(t)-l\to 0.$$

А это значит, то точка (t) кривой γ при $t\to a$ неограниченно приближается к прямой

$$y-kx-l=0,$$

которая является, таким образом, асимптотой.

Теорема доказана.

Пример. Кривая

$$x=t,\ y=\frac{1}{1-t} \qquad (-1<t<1)$$

(ветвь гиперболы) уходит в бесконечность при $t \to 1$ (рис. 7).

При $t \to 1$

$$\frac{x(t)}{y(t)} \to 0, \quad x(t) - 0 \cdot y(t) \to 1.$$

Следовательно, кривая имеет асимптоту

$$x - 1 = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотах кривой, заданной уравнением в неявном виде

$$\varphi(x, y) = 0.$$

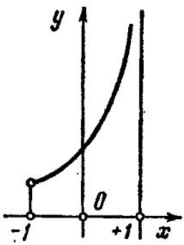

Рис. 7.

Как было отмечено, уравнение $\varphi(x, y) = 0$ определяет кривую лишь в том смысле, что точки кривой удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$, но, вообще говоря, не исчерпывают всех точек плоскости, обладающих этим свойством. Задача о разыскании асимптот кривой, заданной уравнением $\varphi(x, y) = 0$, является не вполне определенной. Представляется возможным указать только некоторую совокупность прямых, содержащую асимптоты.

Мы ограничимся случаем алгебраических кривых ($\varphi(x, y)$ — многочлен относительно переменных x и y).

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — произвольная точка асимптоты,

$$x = \bar{x} + \lambda u, \quad y = \bar{y} + \mu u$$

— уравнение асимптоты в параметрической форме. Обозначим $Q(u)$ точку кривой, ближайшую к точке (u) асимптоты. Координаты точки $Q(u)$

$$x(u) = \bar{x} + \lambda u + \xi(u),$$
$$y(u) = \bar{y} + \mu u + \eta(u),$$

где

$$\xi(u) \text{ и } \eta(u) \to 0 \text{ при } u \to \infty.$$

Обозначим φ_k совокупность членов степени k в многочлене φ. Тогда:

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \dots + \varphi_0.$$

Подставляя $x=x(u)$, $y=y(u)$ в $\varphi(x, y)$ и выделяя члены, содержащие u^n и u^{n-1}, получим

$$\varphi(x(u), y(u)) = u^n\varphi_n(\lambda, \mu) + \\ + u^{n-1}\{\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda + \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu)\} + \ldots$$

В правой части равенства не выписаны члены, имеющие порядок ниже u^{n-1}.

Так как $\varphi(x(u), y(u)) \equiv 0$, а следовательно,

$$\frac{1}{u^n}\varphi(x(u), y(u)) \to 0 \text{ при } u \to \infty, \text{ то } \varphi_n(\lambda, \mu) = 0.$$

Аналогично получаем

$$\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda + \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu) = 0.$$

Так как $(\bar{x}, \bar{y})$ — произвольная точка асимптоты, то это равенство есть уравнение асимптоты.

Пример. Составить уравнение асимптот гиперболы

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 1 = 0.$$

Имеем

$$\varphi_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 - 3\lambda\mu + 2\mu^2 = 0.$$

Отсюда для λ и μ получаем с точностью до несущественного множителя две системы значений $\lambda = 1$, $\mu = 1$; $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Подставляя эти значения в полученную выше формулу, находим асимптоты:

$$-\bar{x} + \bar{y} + 1 = 0, \quad \bar{x} - 2\bar{y} + 2 = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Точка M движется в пространстве так, что ее проекция на плоскость xy равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$ с угловой скоростью ω, а проекция на ось z движется равномерно со скоростью c. Кривая, которую описывает точка M, называется *простой винтовой линией*. Составить уравнение винтовой линии в параметрической форме, приняв за параметр время t. Считать, что в начальный момент ($t = 0$) координаты точки M суть a, 0, 0.

Ответ. $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = ct$.

2. Простая винтовая линия (упражнение 1) проектируется на плоскость xy пучком параллельных прямых, образующих угол ϑ с осью z. Найти уравнение проекции. При каком ϑ проекция будет иметь особые точки? Выяснить характер особых точек.

Ответ. Если пучок проектирующих прямых параллелен плоскости Oyz, то уравнения проекции будут

$$x = a\cos\omega t, \quad y = ct \operatorname{tg}\vartheta + a\sin\omega t.$$

Проекция будет иметь особые точки, если $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\frac{a\omega}{c}$. Особые точки — точки возврата первого рода.

3. Окружность радиуса a равномерно катится без проскальзывания по прямой g со скоростью v. Найти уравнение кривой γ, которую описывает точка M, неподвижно связанная с окружностью. При каком условии кривая γ имеет особые точки? Выяснить характер особых точек.

Ответ. Если прямую g принять за ось x и в начальный момент точка M находится на оси y ниже центра окружности, то уравнения кривой γ будут:

$$x = vt - b\sin\frac{vt}{a}, \; y = a - b\cos\frac{vt}{a},$$

где b — расстояние точки M от центра окружности. Кривая имеет особые точки, если точка M на окружности (в этом случае кривая γ называется *циклоидой*). Особые точки — суть точки возврата первого рода.

4. Доказать, что кривая, заданная уравнением

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\textit{астроида}),$$

является аналитической кривой. Найти ее особые точки. Выяснить характер особых точек.

Ответ. Кривая допускает очевидную аналитическую параметризацию

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$$

а следовательно, она аналитическая. Особые точки: $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$. Особые точки — точки возврата первого рода.

5. Составить уравнения асимптот кривых:

1. $x = a\sin t$

$$y = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) \; (\textit{трактриса}).$$

2. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*лист Декарта*).

Ответ.

1. $x = 0$.

2. $x + y + a = 0$.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ I

1. Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

— какая-нибудь параметризация элементарной кривой. Тогда любая другая параметризация имеет вид

$$x = x(\sigma(\tau)), \quad y = y(\sigma(\tau)), \quad z = z(\sigma(\tau)),$$

где $\sigma(\tau)$ — непрерывная строго монотонная функция.

2. Какая степень регулярности кривой, заданной уравнением в неявной форме $\varphi(x, y) = 0$, гарантируется n-кратной дифференцируемостью функции φ, если $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$? Может ли кривая обладать большей регулярностью? Построить пример.

3. Построить пример кривой, которая не допускала бы гладкой параметризации ни на какой своей части.

4. Пусть плоская аналитическая кривая γ в окрестности точки (x_0, y_0) задается уравнением $\varphi(x, y) = 0$, где φ — аналитическая функция. Пусть в точке (x_0, y_0) функция φ и все ее производные до $n-1$-го порядка равны нулю. Доказать, что если все корни многочлена

$$P(\xi) = \sum_{k+l=n} \xi^k \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^k \partial y^l}\bigg|_{(x_0,\, y_0)}$$

вещественны и различны, то для кривой γ точка (x_0, y_0) является обыкновенной точкой в смысле определения § 3.

5. Найти условия существования асимптоты пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, уходящей в бесконечность при $t \to a$, аналогичные полученным в § 8 для плоской кривой.

Составить уравнение асимптоты.

6. Составить уравнение асимптот алгебраической пространственной кривой, заданной уравнениями в неявном виде

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

где φ и ψ — многочлены относительно x, y и z, подобно тому как это сделано для плоских кривых в § 4.

ГЛАВА II

ПОНЯТИЯ ДЛЯ КРИВЫХ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЕМ СОПРИКОСНОВЕНИЯ

Пусть M и $\overline{M}$ — множества точек пространства, имеющие общую точку O. Пусть X — произвольная точка множества M, $h(X)$ — ее расстояние от множества $\overline{M}$ (точная нижняя грань расстояний точек множества $\overline{M}$ от точки X) и $d(X)$ — расстояние точки X от точки O.

Мы будем говорить, что множество $\overline{M}$ *соприкасается* с множеством M в точке O, если отношение $h(X)(d(X))^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ стремится к нулю, когда точка X неограниченно приближается к точке O.

С помощью понятия соприкосновения вводятся многие понятия для кривых. Мы рассмотрим их в настоящей главе.

§ 1. Векторная функция скалярного аргумента

В дальнейшем изложении мы будем широко пользоваться элементарными средствами векторного анализа. В связи с этим напомним определение некоторых понятий.

Пусть G — любое множество точек на прямой, плоскости или в пространстве. Говорят, что на множестве G задана *вектор-функция* $\boldsymbol{f}$, если каждой точке X этого множества сопоставлен вектор $\boldsymbol{f}(X)$.

Для вектор-функций, так же как и для скалярных функций в анализе, вводится понятие *предела*. Говорят, что $\boldsymbol{f}(X) \to \boldsymbol{a}$ при $X \to X_0$, если $|\boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{a}| \to 0$ при $X \to X_0$.

Для вектор-функций имеют место теоремы о пределе, аналогичные теоремам о пределе для скалярных функций.

Например, *если $\boldsymbol{f}(X)$ и $\boldsymbol{g}(X)$ вектор-функции, а $\lambda(X)$ — скалярная функция и $\boldsymbol{f}(X) \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}(X) \to \boldsymbol{b}$ и $\lambda(X) \to m$ при $X \to X_0$, то*

$$\boldsymbol{f}(X) \pm \boldsymbol{g}(X) \to \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b},$$

$$\lambda(X) \cdot \boldsymbol{f}(X) \to m \cdot \boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{f}(X) \cdot \boldsymbol{g}(X) \to \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{f}(X) \times \boldsymbol{g}(X) \to \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Доказательство этих утверждений принципиально не отличается от доказательства соответствующих утверждений для скалярных функций в анализе. Для примера докажем последнее утверждение. Имеем

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(X)\times\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\\ &=|(\boldsymbol{f}(X)-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{f}(X)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}-\\ &-(\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{f}(X)-\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{b}|+\\ &\qquad+|\boldsymbol{f}(X)-\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}|.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|\boldsymbol{f}(X)\times\boldsymbol{g}(X)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\to 0$ при $X\to X_0$. А это значит, что $\boldsymbol{f}(X)\times\boldsymbol{g}(X)\to\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Для вектор-функций вводится понятие *непрерывности* подобно тому, как для скалярных функций. Именно, функция $\boldsymbol{f}(X)$ называется *непрерывной в точке* X_0, если $\boldsymbol{f}(X)\to\boldsymbol{f}(X_0)$ при $X\to X_0$.

Пусть $\boldsymbol{f}(X)$ и $\boldsymbol{g}(X)$ — вектор-функции непрерывные в точке X_0, а $\lambda(X)$ — скалярная функция, непрерывная в этой точке. Тогда вектор-функции

$$\lambda(X)\boldsymbol{f}(X),\quad \boldsymbol{f}(X)\pm\boldsymbol{g}(X),\quad \boldsymbol{f}(X)\times\boldsymbol{g}(X),$$

а также скалярная функция $\boldsymbol{f}(X)\cdot\boldsymbol{g}(X)$, непрерывны в точке X_0.

Это свойство непрерывности является простым следствием свойств предела.

П о н я т и е п р о и з в о д н о й. Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ — вектор-функция, определенная на отрезке. Говорят, что вектор-функция $\boldsymbol{f}$ имеет в точке t отрезка *производную*, если существует предел отношения

$$\frac{\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)}{h}$$

при $h\to 0$. Производная в точке t обозначается $\boldsymbol{f}'(t)$.

Если $\boldsymbol{f}(t)$ и $\boldsymbol{g}(t)$ — дифференцируемые в точке t вектор-функции, а $\lambda(t)$ — дифференцируемая в этой точке скалярная функция, то $\lambda(t)\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)\pm\boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)$ суть функции, дифференцируемые в точке t, причем

$$(\lambda\boldsymbol{f})'=\lambda'\boldsymbol{f}+\lambda\boldsymbol{f}',$$

$$(\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\pm\boldsymbol{g}',$$

$$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}',$$

$$(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'.$$

Эти формулы дифференцирования получаются буквально так же, как соответствующие формулы дифференцирования скалярных функций в анализе.

Производная вектор-функции $f'(t)$ называется *второй производной функции* $f(t)$ и обозначается $f''(t)$. Аналогично определяется третья, четвертая и т. д. производные.

Функция, имеющая непрерывные производные до k-го порядка включительно на отрезке (a, b), называется *k раз дифференцируемой функцией на этом отрезке.*

Пусть e_1, e_2, e_3 — три вектора, не лежащие в одной плоскости. Каждый вектор r допускает представление в виде

$$r = xe_1 + ye_2 + ze_3;$$

числа x, y, z определяются однозначно и называются *координатами вектора* r относительно базиса e_1, e_2, e_3.

Пусть $r(t)$ — вектор-функция, заданная на отрезке. Определим три скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ условием

$$r(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3.$$

Тогда, *если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны или дифференцируемы, то вектор-функция $r(t)$ непрерывна, соответственно дифференцируема. Обратно, если вектор-функция $r(t)$ непрерывна или дифференцируема, то функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны, соответственно дифференцируемы.*

Для доказательства второго утверждения равенство $r(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$ умножим скалярно на вектор e'_1, перпендикулярный векторам e_2 и e_3. Тогда получим $x(t)(e_1 e'_1) = r(t)\, e'_1$. Отсюда видно, что непрерывность или дифференцируемость вектор-функции $r(t)$ влечет за собой непрерывность, соответственно дифференцируемость, функции $x(t)$. Аналогично для функции $y(t)$ и $z(t)$.

Для вектор-функций имеет место формула Тейлора. Именно, если $f(t)$ n раз дифференцируемая функция, то

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}\left(f^{(n)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)\right),$$

где $|\varepsilon(t, \Delta t)| \to 0$ *при* $\Delta t \to 0$.

В самом деле,

$$f(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t) e_3.$$

Но

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(x^{(n)}(t) + \varepsilon_1),$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(y^{(n)}(t) + \varepsilon_2),$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \Delta t z'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(z^{(n)}(t) + \varepsilon_3).$$

Умножая эти равенства на e_1, e_2, e_3 соответственно, складывая и замечая, что $x^{(k)}(t)\, e_1 + y^{(k)}(t)\, e_2 + z^{(k)}(t)\, e_3 = f^{(k)}(t)$, получаем формулу Тейлора для вектор-функции $f(t)$.

Понятие интеграла в смысле Римана для векторной функции вводится буквально так же, как для скалярной функции. Интеграл вектор-функции обладает обычными свойствами. Именно, *если $f(t)$ непрерывная на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ вектор-функция и $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Если m — постоянная, то

$$\int_a^b m f(t)\, dt = m \int_a^b f(t)\, dt.$$

Если r — постоянный вектор, то

$$\int_a^b r f(t)\, dt = r \int_a^b f(t)\, dt,$$

$$\int_a^b r \times f(t)\, dt = r \times \int_a^b f(t)\, dt.$$

Имеет место формула дифференцирования неопределенного интеграла

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

В заключение заметим, что параметрическое задание кривой уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

эквивалентно заданию ее с помощью одного векторного уравнения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{e}_1 + y(t)\,\boldsymbol{e}_2 + z(t)\,\boldsymbol{e}_3,$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы, имеющие направления координатных осей x, y, z.

§ 2. Касательная кривой

Пусть γ — кривая, P — точка на ней и g — прямая, проходящая через точку P. Возьмем на кривой точку Q и обозначим ее расстояние от точки P и прямой g через d и h соответственно.

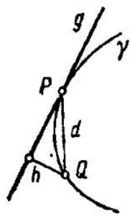

Рис. 8.

Мы будем называть прямую g *касательной* к кривой γ в точке P, если $\frac{h}{d} \to 0$, когда $Q \to P$ (рис. 8).

Если кривая γ в точке P имеет касательную, то прямая PQ при $Q \to P$ сходится к этой касательной. Обратно, если прямая PQ при $Q \to P$ сходится к некоторой прямой g, то эта прямая является касательной. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $\frac{h}{d}$ есть синус угла, образуемого прямыми g и PQ.

Теорема. *Гладкая кривая γ имеет в каждой точке касательную и притом единственную.*

Если

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

векторное уравнение кривой, то касательная в точке P, соответствующей значению параметра t, имеет направление вектора $\boldsymbol{r}'(t)$.

Доказательство. Допустим, что кривая γ в точке P, соответствующей значению параметра t, имеет касательную g. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, имеющий направление прямой g. Расстояние d точки Q, соответствующей значению параметра $t + \Delta t$, от точки P равно

$|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$. Расстояние h точки Q от касательной равно $|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|$. По определению касательной

$$\frac{h}{d}=\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to 0 \text{ при } \Delta t\to 0.$$

Но

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}=\frac{\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{\tau}\right|}{\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}=0.$$

А это возможно только тогда, когда вектор $\boldsymbol{\tau}$ имеет направление вектора $\boldsymbol{r}'(t)$. Таким образом, если касательная существует, то она имеет направление вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ и, следовательно, единственна.

То, что прямая g, проходящая через точку P и имеющая направление вектора $\boldsymbol{r}'(t)$, является касательной, также справедливо, ибо, как показывают предыдущие выкладки, для такой прямой

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2}=0.$$

Теорема доказана полностью.

Зная направление касательной, нетрудно составить ее уравнение. Действительно, если кривая задана векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, то вектор $\tilde{\boldsymbol{r}}$ произвольной точки на касательной можно представить так:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(t)+\lambda\boldsymbol{r}'(t).$$

Это и есть уравнение касательной в параметрической форме (параметр λ).

Выведем уравнение касательной для различных случаев аналитического задания кривой.

Пусть кривая задана уравнениями в параметрической форме

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

Такое задание кривой эквивалентно векторному заданию

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы по координатным осям. Заменяя векторное уравнение

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(t) + \lambda \boldsymbol{r}'(t)$$

тремя скалярными, получим уравнения касательной, соответствующие параметрическому способу задания

$$\tilde{x} = x(t) + \lambda x'(t), \quad \tilde{y} = y(t) + \lambda y'(t), \quad \tilde{z} = z(t) + \lambda z'(t)$$

или, в эквивалентной форме,

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)} = \frac{\tilde{z} - z(t)}{z'(t)}.$$

Если кривая плоская и задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

уравнение ее касательной запишется так:

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)}.$$

Уравнение касательной в случае задания кривой уравнениями

$$y = y(x), \qquad z = z(x) \tag{$*$}$$

просто получается из уравнения касательной для случая параметрического задания кривой. Достаточно заметить, что задание кривой уравнениями (*) эквивалентно параметрическому заданию

$$x = t, \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Уравнения касательной к кривой, заданной уравнениями (*), запишутся так:

$$\tilde{x} - x = \frac{\tilde{y} - y(x)}{y'(x)} = \frac{\tilde{z} - z(x)}{z'(x)}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\tilde{y} = y(x) + y'(x)(\tilde{x} - x),$$
$$\tilde{z} = z(x) + z'(x)(\tilde{x} - x).$$

В частности, если кривая плоская и задана уравнением $y = y(x)$, то уравнение касательной к ней будет

$$\tilde{y} = y(x) + y'(x)(\tilde{x} - x).$$

Составим, наконец, уравнение касательной к кривой, заданной уравнениями

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0,$$

в точке (x_0, y_0, z_0), где ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$$

равен двум. Пусть

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

какая-нибудь регулярная параметризация кривой в окрестности точки (x_0, y_0, z_0).

Уравнение касательной к кривой в точке (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{x_0'}=\frac{\tilde{y}-y_0}{y_0'}=\frac{\tilde{z}-z_0}{z_0'}.$$

Таким образом, для получения уравнения касательной достаточно знать $x_0' : y_0' : z_0'$. Вычислим эти отношения. Имеем тождества

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \quad \psi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя эти тождества по t, будем иметь:

$$\varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0,$$
$$\psi_x x' + \psi_y y' + \psi_z z' = 0.$$

Отсюда

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}}=\frac{y'}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}}=\frac{z'}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

и уравнение касательной примет вид

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}}=\frac{\tilde{y}-y_0}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}}=\frac{\tilde{z}-z_0}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}},$$

где производные $\varphi_x, \varphi_y, \ldots, \psi_z$ взяты в точке касания (x_0, y_0, z_0).

Если кривая плоская и задана уравнением $\varphi(x, y)=0$, то уравнение касательной будет

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\varphi_y}=\frac{\tilde{y}-y_0}{-\varphi_x}.$$

Для вывода этого уравнения достаточно заметить, что задание кривой в плоскости xy уравнением $\varphi(x, y)=0$ эквивалентно заданию ее в пространстве уравнениями

$$\varphi(x, y)=0, \quad z=0.$$

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно касательной в этой точке. Составить уравнение этой плоскости после того, как известно уравнение касательной для любого случая аналитического задания кривой, не составляет труда и предлагается в качестве легкого упражнения.

§ 3. Соприкасающаяся плоскость кривой

Пусть γ — кривая и P — точка на ней, α — плоскость, проходящая через точку P. Обозначим h расстояние произвольной точки Q кривой от плоскости α и d — расстояние этой точки от точки P.

Мы будем называть плоскость α *соприкасающейся* плоскостью кривой γ в точке P, если отношение $\frac{h}{d^2}\to 0$, когда $Q\to P$ (рис. 9).

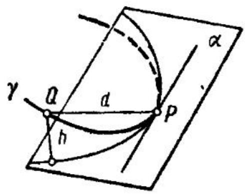

Рис. 9.

Теорема. *Регулярная (по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемая) кривая γ в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. При этом соприкасающаяся плоскость либо единственная, либо любая плоскость, содержащая касательную к кривой, является соприкасающейся. Если*

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

уравнение кривой γ, то соприкасающаяся плоскость в точке, соответствующей значению параметра t, параллельна векторам $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$.

Доказательство. Пусть α — соприкасающаяся плоскость кривой γ в точке P, соответствующей значению параметра t. Обозначим $\boldsymbol{e}$ единичный вектор нормали к плоскости α. Расстояние точки Q, соответствующей значению параметра $t+\Delta t$, от плоскости α

$$h=|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))|.$$

Расстояние этой точки от P

$$d=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|.$$

Имеем

$$\frac{h}{d^2}=\frac{|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))|}{(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))^2}=$$

$$=\frac{\left|\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t+\frac{\boldsymbol{r}''(t)}{2}\,\Delta t^2+\boldsymbol{\varepsilon}_1\Delta t^2\right)\right|}{(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t+\boldsymbol{\varepsilon}_2\Delta t)^2}=\frac{\left|\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)}{2}+\varepsilon_1'\right|}{\boldsymbol{r}'^2(t)+\varepsilon_2'}.$$

Так как $\frac{h}{d^2}\to 0$ при $\Delta t\to 0$, ε_1', $\varepsilon_2'\to 0$, а $|\boldsymbol{r}'(t)|\neq 0$, то $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)=0$, $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)=0$. Таким образом, если соприкасающаяся плоскость существует, то векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ параллельны ей.

В том, что соприкасающаяся плоскость всегда существует, нетрудно убедиться. Для этого возьмем плоскость α, параллельную векторам $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ (по отношению к нулевому вектору мы считаем любую плоскость ему параллельной). Тогда $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)=0$ и, следовательно,

$$\frac{h}{d^2}=\frac{|\varepsilon_1'|}{\boldsymbol{r}'^2(t)+\varepsilon_2'}\to 0 \text{ при } \Delta t\to 0.$$

Таким образом, в каждой точке кривой существует соприкасающаяся плоскость. Очевидно, соприкасающаяся плоскость, будучи параллельна векторам $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$, будет единственной, если векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ не параллельны. Если же эти векторы параллельны (или вектор $\boldsymbol{r}''(t)=0$), то любая плоскость, проведенная через касательную к кривой, будет соприкасающейся плоскостью.

Теорема доказана.

Составим уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — векторное уравнение кривой и t — значение параметра, соответствующее точке P кривой. Пусть в этой точке $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ не параллельные векторы. Тогда $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ будет вектором нормали соприкасающейся плоскости. Если $\tilde{\boldsymbol{r}}$ обозначить вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости в точке P, то векторы

$\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ перпендикулярны. Отсюда уравнение соприкасающейся плоскости

$$(\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t))(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))=0$$

или

$$(\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t),\ \boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{r}''(t))=0.$$

Из этого уравнения для случая параметрического задания кривой

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

получаем уравнение соприкасающейся плоскости в виде

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}-x(t), & \tilde{y}-y(t), & \tilde{z}-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}=0.$$

Вывод уравнения соприкасающейся плоскости для других случаев аналитического задания кривой предоставляется читателю.

Каждая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной, называется *нормалью* кривой. Среди этих прямых в случае, когда соприкасающаяся плоскость является единственной, выделяются две замечательные прямые: *главная нормаль* — нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, и *бинормаль* — нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости. Так как известно уравнение касательной и соприкасающейся плоскости, то вывод уравнений главной иормали и бинормали не составляет труда и предоставляется читателю в качестве упражнения.

§ 4. Соприкосновение кривых

Пусть γ и γ' — элементарные кривые, имеющие общую точку O. Возьмем на кривой γ' точку P и обозначим h ее расстояние от кривой γ, а d — расстояние от точки O.

Мы будем говорить, что кривая γ' имеет с кривой γ в точке O *соприкосновение порядка n*, если отношение

$$\frac{h}{d^n}\to 0,\ \text{когда}\ P\to O\ (\text{рис. } 10).$$

Пусть γ и γ' — общие кривые, имеющие общую точку O. Мы будем говорить, что кривая γ' имеет с кривой γ в точке O соприкосновение порядка n, если элементарная окрестность точки O кривой γ' имеет соприкосновение порядка n с элементарной окрестностью кривой γ.

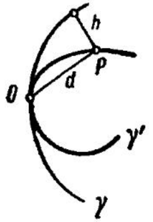

Рис. 10.

Теорема. *Пусть γ и γ' — регулярные плоские кривые, $\varphi(x, y)=0$ — уравнение кривой γ, а $x=x(t)$, $y=y(t)$ — уравнения кривой γ'. Пусть $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$ в точке $O(x_0, y_0)$.*

Тогда для того чтобы кривая γ' с кривой γ в точке O имела соприкосновение порядка n, необходимо и достаточно, чтобы при t, соответствующем точке O, выполнялись условия:

$$\varphi(x(t), y(t))=0,$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t))=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t), y(t))=0.$$

Доказательство. Пусть M — точка кривой γ'. По определению ее расстояние $h(M)$ от кривой γ есть точная нижняя грань расстояний точек кривой γ от точки M. При достаточной близости точки M к O эта точная нижняя грань достигается для некоторой точки $\overline{M}$ кривой γ.

Покажем, что отрезок $M\overline{M}$ направлен по нормали кривой γ в точке $\overline{M}$. В самом деле, пусть $\bar{r}(s)$ — вектор точки кривой γ, а m — вектор точки M. Квадрат расстояния точки M от точки кривой равен $(\bar{r}(s)-m)^2$. Для s, соответствующего минимуму этого расстояния, имеем

$$\frac{d}{ds}(\bar{r}(s)-m)^2=0,$$

откуда $(\bar{r}(s)-m)\bar{r}'(s)=0$, а это значит, что вектор $M\overline{M}$ направлен по нормали кривой γ в точке $\overline{M}$.

Пусть ξ, η — направляющие косинусы прямой $M\overline{M}$. Координаты точки $\overline{M}$ через координаты точки M могут быть выражены следующим образом:

$$\bar{x} = x + \xi h, \quad \bar{y} = y + \eta h,$$

где h — расстояние точки M от кривой γ.

Координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ точки $\overline{M}$, как точки кривой γ, удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$. Таким образом,

$$\varphi(x + \xi h, y + \eta h) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi(x, y) + \xi h \varphi_x(x, y) + \eta h \varphi_y(x, y) + h^2 R = 0,$$

где R ограничено в окрестности точки $O(x_0, y_0)$.

При $x \to x_0$, $y \to y_0$ выражение $\xi\varphi_x + \eta\varphi_y$ стремится к пределу, отличному от нуля, так как представляет собой скалярное произведение двух векторов с координатами ξ, η и φ_x, φ_y, которые в пределе отличны от нуля и направлены по нормали кривой γ в точке O. Таким образом, величина $h = \dfrac{-\varphi}{\xi\varphi_x + \eta\varphi_y} - h^2 R'$ при $M \to O$ имеет порядок φ.

Пусть точка M на кривой γ' соответствует значению параметра t. Тогда ее расстояние от O, равное

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)| = |(t - t_0)(\boldsymbol{r}'(t_0) + \boldsymbol{\varepsilon})|,$$

при достаточной близости M к O имеет порядок $|t - t_0|$. Отсюда следует, что для того чтобы кривая γ' имела с кривой γ в точке O соприкосновение порядка n, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\varphi(x(t), y(t))}{(t - t_0)^n} \to 0 \text{ при } t \to t_0.$$

Но это значит, что все члены разложения функции $\varphi(x(t), y(t))$ по степеням $(t - t_0)$ до n-го включительно равны нулю.

Теорема доказана.

П р и м е р. Найти параболу вида

$$y - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = 0,$$

которая с кривой

$$y = \varphi(x)$$

в точке $(0, \varphi(0))$ имеет соприкосновение n-го порядка.

Согласно теореме при $x=0$ и $k=0, 1, \ldots, n$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\varphi(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_nx^n)=0,$$

откуда

$$a_0=\varphi(0),\ a_1=\varphi'(0),\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

Искомая парабола:

$$y=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{1}{2}\varphi''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)x^n.$$

§ 5. Огибающая семейства кривых, зависящих от параметра

Пусть $S\{\gamma_\alpha\}$ — семейство гладких кривых на плоскости, зависящих от параметра α. Гладкая кривая γ называется *огибающей* семейства S, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и каждым своим отрезком касается бесконечного множества кривых семейства (рис. 11).

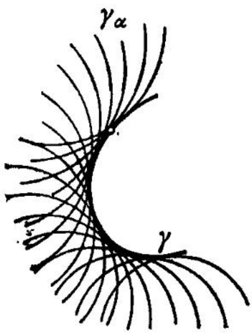

Рис. 11.

Пример. Гладкая кривая, не имеющая прямолинейных участков, является огибающей своих касательных.

Нижеследуюшая теорема в известной степени решает вопрос о нахождении огибающей.

Теорема. *Пусть кривые γ_α семейства S в области G задаются уравнениями*

$$\varphi(x, y, \alpha)=0, \qquad a\leqslant\alpha\leqslant b,$$

где φ — непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам, удовлетворяющая условию $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$.

Тогда огибающая γ семейства S (если она существует) задается уравнениями

$$\varphi(x, y, \alpha)=0, \qquad \varphi_\alpha(x, y, \alpha)=0$$

в том смысле, что для каждой точки (x, y) огибающей *можно указать такое α, что системой значений x, y, α будут удовлетворяться оба уравнения $\varphi=0$ и $\varphi_\alpha=0$.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка огибающей γ. Могут представиться два случая:

1. В точке P касается бесконечное множество кривых семейства: $\gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2}, \ldots$

2. В точке P касается только конечное число кривых семейства: $\gamma_{\alpha_1}, \ldots, \gamma_{\alpha_n}$.

Рассмотрим первый случай. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность чисел α_k сходится к некоторому α_0 $(a \leqslant \alpha_0 \leqslant b)$. Так как точка P принадлежит каждой кривой γ_{α_k}, то $\varphi(x, y, \alpha_k)=0$. Отсюда

$$\varphi(x, y, \alpha_k)-\varphi(x, y, \alpha_l)=(\alpha_k-\alpha_l)\,\varphi_\alpha(x, y, \alpha^*)=0,$$

где α^* заключено между α_k и α_l. Следовательно, $\varphi_\alpha(x, y, \alpha^*)=0$. При k и $l \to \infty$ α_k и $\alpha_l \to \alpha_0$, поэтому

$$\varphi(x, y, \alpha_0)=0, \qquad \varphi_\alpha(x, y, \alpha_0)=0$$

и утверждение теоремы в первом случае доказано.

Рассмотрим второй случай. Допустим, что теорема неверна и, следовательно, при любом α_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$.

Обозначим ω_k^ε замкнутую ε-окрестность точки α_k на отрезке (a, b) и δ малый отрезок огибающей γ, содержащий точку P. Если ε фиксировать, а δ взять достаточно малым, то для всякой кривой γ_α, которая касается δ, α принадлежит одной из окрестностей ω_k^ε. Если допустить противное, то легко приходим к выводу, что в точке P кривой γ касается некоторая кривая семейства, отличная от кривых γ_{α_k}, что невозможно.

Обозначим m_k множество точек отрезка δ, в которых касаются кривые γ_α при $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$. Очевидно, m_k является замкнутым множеством. Построим отрезок $\bar\delta$, принадлежащий δ, обладающий по отношению к каждому множеству m_k следующим свойством: либо множество m_k содержит полностью отрезок $\bar\delta$ либо оно не содержит ни одной его точки. Такой отрезок $\bar\delta$ строится просто. Сначала строим отрезок δ', причем, если отрезок δ содержится целиком в m_1, то полагаем $\delta'=\delta$, если δ не покрывается множеством

m_1, то в качестве δ' берем отрезок на дополнительном к m_1 множестве $\delta - m_1$. Дальше аналогичным способом строим отрезок δ'' с помощью отрезка δ' и множества m_2 и т. д. Конечным числом таких операций мы приходим к отрезку $\bar{\delta}$, обладающему указанными свойствами.

Пусть множество m_k содержит отрезок $\bar{\delta}$. При достаточно малом ε семейство кривых γ_α в окрестности точки P при $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ может быть задано уравнением

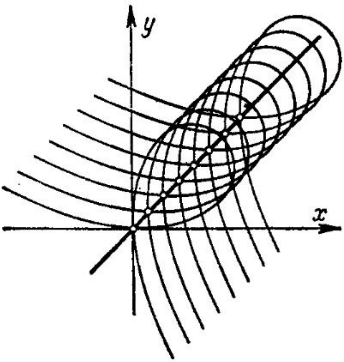

Рис. 12.

$$\psi(x, y) = \alpha,$$

где $\psi(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\psi_x^2 + \psi_y^2 \neq 0$. Это следует из нашего предположения о том, что $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$ в точке P.

Кривая γ на отрезке $\bar{\delta}$ может быть задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Обозначим $\alpha(t)$ значение параметра $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$, отвечающего кривой γ_α, касающейся отрезка $\bar{\delta}$ в точке $(x(t), y(t))$. Очевидно,

$$\alpha(t) = \psi(x(t), y(t))$$

является непрерывно дифференцируемой функцией.

Имеем

$$\alpha' = \psi_x x' + \psi_y y'.$$

Так как x' и y' — компоненты касательного вектора кривой γ, ψ_x и ψ_y — компоненты вектора нормали кривой $\gamma_{\alpha(t)}$, а кривые $\gamma_{\alpha(t)}$ и γ касаются в точке (t), то $\alpha' = 0$ и, следовательно, $\alpha = \text{const}$.

Таким образом, вдоль отрезка $\bar{\delta}$ кривой γ касается только одна кривая γ_α семейства при $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$, следовательно, во всем семействе S найдется не более n таких кривых. А по определению огибающей их должно быть бесконечное множество. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замечание. Системе уравнений

$$\varphi(x, y, \alpha)=0,$$
$$\varphi_\alpha(x, y, \alpha)=0,$$

вообще говоря, могут удовлетворять кривые и не являющиеся огибающей. Например, уравнению огибающей семейства кривых

$$(x-\alpha)^3+(y-\alpha)^3-3(x-\alpha)(y-\alpha)=0$$

удовлетворяет прямая $x=y$, которая, однако, не является огибающей. Эта прямая состоит из узловых точек кривых семейства (рис. 12).

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Для винтовой линии

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$$

в точке (1, 0, 0) составить уравнения:
а) касательной,
б) соприкасающейся плоскости,
в) нормальной плоскости,
г) главной нормали,
д) бинормали.

Ответ. Уравнение касательной:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};$$

уравнение соприкасающейся плоскости:

$$y-z=0;$$

уравнение нормальной плоскости:

$$y+z=0;$$

уравнение главной нормали:

$$y=z=0;$$

уравненне бинормали:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

2. Составить уравнение касательной к кривой, заданной уравнениями

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2=x$$

в точке (0, 0, 1).

Ответ. $$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}.$$

3. Найти уравнение параболы вида

$$y=x^2+ax+b,$$

касающейся окружности

$$x^2+y^2=2$$

в точке (1, 1).

Ответ. $y=x^2-3x+3$.

4. Найти кривую $y=y(x)$, если известно, что длина отрезка касательной между точкой касания и точкой пересечения касательной с осью x постоянна и равна a.

Ответ. Трактриса:

$$c\pm x=a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}.$$

5. На бинормалях простой винтовой линии отложены отрезки одной и той же длины. Найти уравнение кривой, образуемой концами этих отрезков.

Ответ. Винтовая линия.

6. Под каким углом пересекаются кривые

$$xy=c_1, \quad x^2-y^2=c_2?$$

7. Если кривая γ на плоскости пересекает кривые семейства

$$\varphi(x, y)=\mathrm{const} \qquad (\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0)$$

под прямым углом, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{\varphi_x}=\frac{dy}{\varphi_y}.$$

Доказать.

8. Найти семейство кривых, пересекающих под прямым углом все окружности, проходящие через две данные точки плоскости.

Ответ. Семейство окружностей.

9. Найти уравнение окружности, имеющей с параболой $y=x^2$ в ее вершине соприкосновение второго порядка.

Ответ. $x^2+y^2=y$.

10. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от координатного угла XOY треугольник с площадью $2a^2$.

Ответ. Ветвь равнобокой гиперболы $xy = a^2$, расположенная в угле XOY.

11. Найти огибающую семейства прямых, на которых координатные оси вырезают отрезок постоянной длины a.

Ответ. Астроида:

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

12. Найти огибающую траекторий материальной точки, выбрасываемой из начала координат со скоростью v_0.

Ответ. Парабола безопасности

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

(g — ускорение силы тяжести).

13. Найти огибающую световых лучей, исходящих из начала координат после их отражения от окружности

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Ответ. Улитка Паскаля:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 + \frac{4a^2}{3}\left(x^2 + y^2 - \frac{16ax}{9}\right) = 0.$$

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ II

1. Пусть γ — кривая и P — точка на ней, g — прямая, проходящая через различные точки R и S кривой. Говорят, что кривая γ имеет в точке P касательную в сильном смысле, если прямые g при R и $S \to P$ сходятся к некоторой прямой g_P.

Доказать, что если кривая гладкая, то она имеет в каждой точке касательную в сильном смысле, эта касательная совпадает с касательной в смысле обычного определения, данного в § 2.

Если кривая имеет в каждой точке касательную в сильном смысле, то она (кривая) гладкая.

2. Доказать, что если касательные гладкой кривой проходят через одну и ту же точку, то кривая представляет собой отрезок прямой, или полупрямую или целую прямую.

3. Показать, что касательные винтовой линии

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = bt$$

наклонены под постоянным углом к плоскости xy. Показать, что главные нормали винтовой линии пересекают ось z.

4. Инверсией называется такое преобразование, при котором соответствующие точки располагаются на одной, идущей из некоторой фиксированной точки S (центра инверсии) полупрямой, а произведение расстояний их от S постоянно. Доказать, что при инверсии углы между кривыми сохраняются.

5. Доказать, что если касательные кривой параллельны некоторой плоскости, то кривая плоская.

6. При каком условии прямые g_t

$$\begin{cases} a_1(t)\,x + b_1(t)\,y + c_1(t)\,z + d_1(t) = 0, \\ a_2(t)\,x + b_2(t)\,y + c_2(t)\,z + d_2(t) = 0 \end{cases}$$

являются касательными к некоторой кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найти эту кривую.

7. Составить уравнение соприкасающейся плоскости кривой, заданной уравнениями

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

8. Пусть γ — кривая и P — точка на ней, α — плоскость, проходящая через различные точки Q, R и S кривой. Говорят, что кривая γ имеет в точке P соприкасающуюся плоскость в сильном смысле, если плоскости α при Q, R и $S \to P$ сходятся к некоторой плоскости α_P.

Доказать, что если регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) кривая в точке P имеет единственную соприкасающуюся плоскость в обычном смысле (§ 3), то она имеет в этой точке соприкасающуюся плоскость в сильном смысле и они совпадают.

9. Восстановить кривую

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

по ее соприкасающимся плоскостям

$$A(t)\,x + B(t)\,y + C(t)\,z + D(t) = 0.$$

10 Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская.

11. Доказать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

была плоской, состоит в том, чтобы

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

12. Доказать, что свойство соприкосновения кривых взаимно, т. е., если гладкая кривая γ_1 имеет с гладкой кривой γ_2 соприкосновение порядка n, то кривая γ_2 имеет с кривой γ_1 в той же точке соприкосновение порядка n.

Показать на примере, что требование гладкости существенно.

13. Пусть кривые γ_1, γ_2, γ_3 имеют общую точку P, в которой кривые γ_1 и γ_2, γ_2 и γ_3 находятся в соприкосновении порядка n. Тогда кривые γ_1 и γ_3 имеют в P также соприкосновение порядка n.

14. Доказать, что если кривая в каждой точке имеет соприкосновение третьего порядка с соприкасающейся плоскостью, то эта кривая плоская.

15. Между точками координатных осей x и y установлено проективное соответствие

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

Доказать, что семейство прямых, соединяющих соответствующие точки осей, огибает кривую второго порядка.

16. Доказать, что если однопараметрическое семейство кривых на плоскости задается уравнениями

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta)=0, \quad f(\alpha, \beta)=0,$$

причем $f_\alpha^2+f_\beta^2\neq 0$, то огибающая этого семейства удовлетворяет уравнениям

$$\varphi=0, \quad f=0, \quad \varphi_\alpha+\lambda f_\alpha=0, \quad \varphi_\beta+\lambda f_\beta=0$$

в том смысле, что для каждой точки (x, y) огибающей можно указать такие α, β и λ, которые вместе с x и y будут удовлетворять указанным четырем уравнениям.

Уравнение огибающей в неявном виде может быть получено путем исключения α, β, λ из этих четырех уравнений.

ГЛАВА III

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КРИВЫХ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЕМ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

§ 1. Длина дуги криной. Естественная параметризация

Пусть γ — элементарная кривая, являющаяся образом открытого отрезка g при топологическом отображении f. Относительно ломаной Γ (рис. 13) мы будем говорить, что она *правильно вписана* в кривую γ, если прообразы ее вершин на g следуют в таком же порядке, как и на ломаной. Свойство ломаной быть правильно вписанной в кривую не зависит от гомеоморфизма f. Кривая называется *спрямляемой в окрестности точки P*, если эта точка имеет элементарную окрестность такую, что все правильно вписанные в нее ломаные равномерно ограничены по длине. Кривая, спрямляемая в окрестности каждой своей точки, называется просто *спрямляемой.*

Отрезком кривой мы будем называть ее часть, гомеоморфную замкнутому прямолинейному отрезку. *Длиной дуги отрезка* (или просто дугой) будем называть верхнюю грань длин правильно вписанных в этот отрезок ломаных.

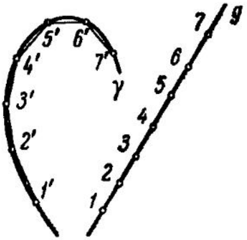

Рис. 13.

Теорема. *Гладкая кривая γ спрямляема. Если*

$$r = r(t)$$

ее гладкая параметризация и $\tilde{\gamma}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — отрезок кривой γ, то длина этого отрезка

$$s(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |r'(t)|\, dt.$$

Доказательство. Пусть P — произвольная точка кривой и $r = r(t)$ — гладкая параметризация кривой в окрестности этой точки. Оценим длину правильно вписанной в окрестность $\alpha < t < \beta$ точки P ломаной Γ.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — значения параметра, соответствующие последовательным вершинам ломаной. Длина звена ломаной, соединяющего вершины (t_{i-1}) и (t_i), равна $|r(t_i) - r(t_{i-1})|$. Длина всей ломаной

$$s(\Gamma) = \sum_i |r(t_i) - r(t_{i-1})|.$$

Имеем

$$r(t_i) - r(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(t)\, dt.$$

Отсюда

$$|r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |r'(t)|\, dt \leqslant (t_i - t_{i-1}) M,$$

где M — постоянная, удовлетворяющая условию $|r'(t)| \leqslant M$. Следовательно,

$$s(\Gamma) \leqslant M \sum (t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

Таким образом, ломаные Γ, вписанные в достаточно малую окрестность точки P, ограничены в совокупности и, следовательно, кривая γ спрямляема.

Найдем длину отрезка $\tilde{\gamma}$ кривой γ, заданного уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Во-первых, заметим, что, дословно повторяя предыдущее рассуждение, убеждаемся в равномерной ограниченности длин ломаных, вписанных в отрезок $\tilde{\gamma}$. Следовательно, длина дуги отрезка $\tilde{\gamma}$ конечна.

Впишем в отрезок $\tilde{\gamma}$ ломаную Γ, удовлетворяющую следующим условиям: 1) длина ломаной Γ отличается от длины дуги отрезка $\tilde{\gamma}$ не более чем на ε; 2) для всех i $|t_{i+1}-t_i|<\delta$. Здесь ε и δ — любые положительные числа. Существование такой ломаной нетрудно усмотреть. В самом деле, существует ломаная Γ, удовлетворяющая первому условию по определению длины дуги отрезка кривой. Пополняя ее новыми вершинами, мы не нарушаем первого условия. Вместе с тем этим пополнением можно удовлетворить и второму условию. При этом можно считать также, что начальной вершиной ломаной является точка (a), а конечной — (b).

Имеем

$$\sum_i |\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})| = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt + \\ + \left\{\sum_i (t_i-t_{i-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_i)| - \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\right\} + \\ + \left\{\sum_i |\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})| - \sum_i (t_i-t_{i-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_i)|\right\}. \quad (*)$$

Левая часть этого равенства отличается не более чем на ε от $s(\gamma)$ по построению Γ. Что касается правой части, то она сколь угодно близка к

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

Действительно, второй член правой части мал вместе с δ по определению интеграла.

Третий член допускает представление

$$\sum\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(t)\,dt\right| - \sum\int_{t_{i-1}}^{t_i} |r'(t_i)|\,dt$$

и, следовательно, по абсолютной величине не превосходит

$$\sum\int_{t_{i-1}}^{t_i} |r'(t)-r'(t_i)|\,dt = \int_a^b \varepsilon(t)\,dt,$$

где $\varepsilon(t)\to 0$ при $\delta\to 0$ в силу равномерной непрерывности функции $r'(t)$. Итак, третий член равенства (*) мал вместе с δ.

Таким образом, мы приходим к выводу, что длина отрезка $\tilde\gamma$ кривой γ сколь угодно мало отличается от

$$\int_a^b |r'(t)|\,dt,$$

а, следовательно, равна ему.

Теорема доказана полностью.

Пусть γ — спрямляемая кривая, $r=\overline{r}(t)$ — какая-нибудь ее параметризация. Пусть $s(t)$ — длина дуги отрезка t_0t кривой γ. Определим функцию $\sigma(t)$ условиями:

$$\sigma(t)=s(t),\qquad \text{если } t_0<t,$$
$$\sigma(t)=-s(t),\qquad \text{если } t_0>t,$$
$$\sigma(t_0)=0.$$

Функция $\sigma(t)$ строго монотонна. Поэтому σ можно принять в качестве параметра на кривой. Такую параметризацию мы будем называть *естественной.*

Т е о р е м а. *Естественная параметризация регулярной (k раз дифференцируемой, аналитической) кривой без особых точек является регулярной (k раз дифференцируемой, соответственно аналитической). Если $r=r(\sigma)$ — естественная параметризация кривой, то*

$$|r'(\sigma)|=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r=\tilde r(t)$ — какая-нибудь регулярная параметризация кривой γ в окрестности произвольной точки, соответствующей значению параметра

σ_1. Для каждого отрезка, принадлежащего этой окрестности, имеем

$$\sigma - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\, dt.$$

Так как $\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{r}}'^2(t)} > 0$, а $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ — k раз дифференцируемая функция от t, то t является k раз дифференцируемой функцией σ. Но для σ, близких к σ_1, $\boldsymbol{r}(\sigma) = \tilde{\boldsymbol{r}}(t(\sigma))$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{r}(\sigma)$ — регулярная (k раз дифференцируемая) функция. Имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\left|\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}\right|}.$$

Следовательно,

$$|\boldsymbol{r}'(\sigma)| = 1.$$

Теорема доказана.

В заключение дадим формулы для длины дуги регулярной кривой для различных случаев аналитического задания кривой.

1. Кривая задана уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

$$s(t_1,\ t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

2. Кривая задана уравнениями

$$y = y(x),\ \ z = z(x),$$

$$s(x_1,\ x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Для плоских кривых, лежащих в плоскости xy, в этих формулах надо положить $z' = 0$.

§ 2. Кривизна кривой

Пусть P — произвольная точка регулярной кривой γ и Q — точка кривой, близкая к P. Обозначим $\Delta\vartheta$ угол между касательными кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длину дуги отрезка PQ кривой (рис. 14).

Кривизной кривой γ в точке P мы будем называть предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда точка $Q \to P$.

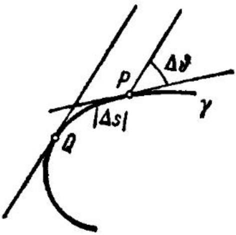

Рис. 14.

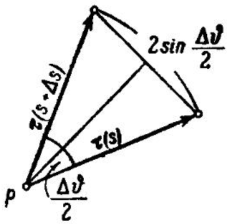

Рис. 15.

Теорема. *Регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) кривая имеет в каждой точке определенную кривизну k_1. Если*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

естественная параметризация кривой, то

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)|.$$

Пусть точкам P и Q соответствуют значения параметра s и $s+\Delta s$. Угол $\Delta\vartheta$ равен углу между единичными касательными векторами $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) = \boldsymbol{r}'(s+\Delta s)$.

Так как векторы $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$ единичные и образуют угол $\Delta\vartheta$, то $|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$ (рис. 15).

Поэтому

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Замечая, что $\Delta\vartheta \to 0$ при $|\Delta s| \to 0$ по непрерывности $\boldsymbol{\tau}(s)$, и переходя к пределу, получим:

$$|\boldsymbol{r}''(s)| = k_1.$$

Теорема доказана.

Пусть в данной точке кривой кривизна отлична от нуля. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{k_1}\boldsymbol{r}''(s)$. Вектор $\boldsymbol{\nu}$ единичный и расположен в соприкасающейся плоскости кривой (§ 3 гл. II). Кроме того, этот вектор перпендикулярен касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$, так как $\boldsymbol{\tau}^2=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}'=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}k_1=0$. Таким образом, этот вектор направлен по главной нормали кривой. Очевидно, направление вектора $\boldsymbol{\nu}$ не изменится, если изменить начало отсчета дуг s или направление отсчета. В дальнейшем, говоря об единичном векторе главной нормали кривой, мы будем иметь в виду вектор $\boldsymbol{\nu}$.

Очевидно, вектор $\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}$ направлен по *бинормали* кривой. Этот вектор мы будем называть *единичным вектором бинормали кривой.*

Найдем выражение для кривизны кривой в случае любого параметрического задания. Пусть кривая задана векторным уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

Выразим вторую производную вектор-функции $\boldsymbol{r}$ по дуге s через производные по t. Имеем

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'_s s'.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}'^2=s'^2.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{r}'_s=\frac{\boldsymbol{r}'}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}.$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим:

$$\boldsymbol{r}''_{ss}s'=\frac{\boldsymbol{r}''}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}-\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')\,\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{\boldsymbol{r}'^2})^3}.$$

Возводя это равенство в квадрат и замечая, что $s'^2=\boldsymbol{r}'^2$, будем иметь

$$k_1^2=\frac{\boldsymbol{r}''^2\boldsymbol{r}'^2-(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3},$$

или, что то же самое,

$$k_1^2=\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}.$$

Отсюда для кривизны кривой, заданной уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

получаем

$$k_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Если кривая плоская и расположена в плоскости xy,

$$k_1^2 = \frac{(x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$,

$$k_1^2 = \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^3}.$$

Замечание. Кривизна кривой по определению неотрицательна. Для плоских кривых во многих случаях целесообразно отнести кривизне знак, считая ее в одних случаях положительной, в других — отрицательной. При этом пользуются следующим соображением. Касательный вектор $r'(t)$ кривой при движении вдоль кривой в направлении возрастающих t поворачивается. *В зависимости от направления вращения вектора $r'(t)$ кривизну считают положительной или отрицательной* (рис. 16). Если определить этим условием знак кривизны плоской кривой, то для нее получается формула

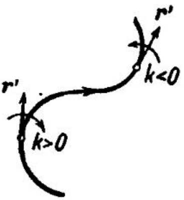

Рис. 16.

$$k = \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{или} \quad k = -\frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В частности, для задания кривой уравнением $y = y(x)$

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{или} \quad k = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В заключение найдем все кривые, имеющие в каждой точке кривизну, равную нулю. Имеем

$$k_1 = |r''(s)| = 0.$$

Отсюда $\boldsymbol{r}''(s)=0$ и, следовательно, $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

Таким образом, *кривая, имеющая всюду кривизну, равную нулю, является либо прямой, либо открытым отрезком прямой.* Обратное также верно.

§ 3. Кручение кривой

Пусть P — произвольная точка кривой γ и Q — точка кривой, близкая к P. Обозначим $\Delta\vartheta$ угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длину отрезка PQ кривой. Под *абсолютным кручением* $|k_2|$ кривой γ в точке P мы будем понимать предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда $Q\to P$ (рис. 17).

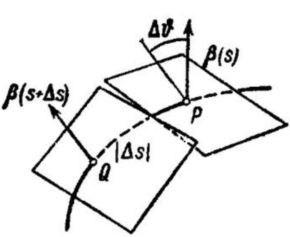

Рис. 17.

Теорема. *Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) кривая в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет определенное абсолютное кручение* $|k_2|$. *Если*

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

естественная параметризация кривой, то

$$|k_2|=\frac{|(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')|}{k_1^2}.$$

Доказательство. Если кривизна кривой γ в точке P отлична от нуля, то по непрерывности она отлична от нуля в точках, близких к P. В каждой точке, где кривизна отлична от нуля, векторы $\boldsymbol{r}'(s)$ и $\boldsymbol{r}''(s)$ отличны от нуля и не параллельны. Поэтому в каждой точке Q, близкой к P, существует определенная соприкасающаяся плоскость.

Пусть $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$ — единичные векторы бинормали в точках P и Q кривой γ. Угол $\Delta\vartheta$ равен углу между векторами $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$.

Так как векторы $\boldsymbol\beta(s)$ и $\boldsymbol\beta(s+\Delta s)$ единичные и образуют угол $\Delta\vartheta$, то $|\boldsymbol\beta(s+\Delta s)-\boldsymbol\beta(s)|=2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$. Поэтому

$$\frac{|\boldsymbol\beta(s+\Delta s)-\boldsymbol\beta(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $|\Delta s|\to 0$, получаем

$$|k_2|=|\boldsymbol\beta'|.$$

Вектор $\boldsymbol\beta'$ перпендикулярен $\boldsymbol\beta$, так как $\boldsymbol\beta'\boldsymbol\beta=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol\beta^2\right)'=0$. Нетрудно видеть, что он перпендикулярен и $\boldsymbol\tau$.

В самом деле,

$$\boldsymbol\beta'=(\boldsymbol\tau\times\boldsymbol\nu)'=\boldsymbol\tau'\times\boldsymbol\nu+\boldsymbol\tau\times\boldsymbol\nu'.$$

Но $\boldsymbol\tau'\parallel\boldsymbol\nu$. Поэтому $\boldsymbol\beta'=\boldsymbol\tau\times\boldsymbol\nu'$, откуда следует, что $\boldsymbol\beta'$ перпендикулярен $\boldsymbol\tau$. Таким образом, вектор $\boldsymbol\beta'$ параллелен вектору $\boldsymbol\nu$ и, следовательно,

$$|k_2|=|(\boldsymbol\beta'\boldsymbol\nu)|.$$

Подставляя сюда $\boldsymbol\nu=\frac{1}{k_1}\boldsymbol r''$ и $\boldsymbol\beta=\frac{\boldsymbol r'\times\boldsymbol r''}{k_1}$, получим:

$$|k_2|=\frac{|(\boldsymbol r',\boldsymbol r'',\boldsymbol r''')|}{k_1^2}.$$

Теорема доказана полностью.

Определим теперь *кручение* кривой.

Из параллельности векторов $\boldsymbol\beta'$ и $\boldsymbol\nu$ следует, что при движении вдоль кривой в сторону возрастающих s соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается около касательной кривой. В связи с этим мы *определим кручение кривой равенством*

$$k_2=\pm|k_2|$$

и будем брать знак $(+)$, *если вращение касательной плоскости происходит в направлении от* $\boldsymbol\beta$ *к* $\boldsymbol\nu$ (рис. 18), *и* $(-)$, *если вращение происходит в направлении от* $\boldsymbol\nu$ *к* $\boldsymbol\beta$. Определив так кручение кривой, будем иметь $k_2=\boldsymbol\beta'\boldsymbol\nu$ или

$$k_2=-\frac{(\boldsymbol r',\boldsymbol r'',\boldsymbol r''')}{k_1^2}.$$

Найдем выражение для кручения кривой в случае любой регулярной параметризации $r = r(t)$. Имеем

$$r'_s = r't', \quad r''_{ss} = r''t'^2 + r't'',$$
$$r'''_{sss} = r'''t'^3 + \{r', r''\},$$

где $\{r', r''\}$ — линейная комбинация векторов r' и r''. Подставляя найденные выражения для r'_s, r''_{ss} и r'''_{sss} в формулу для k_2 и замечая, что $t'^2 = \frac{1}{r'^2}$, получим

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2}.$$

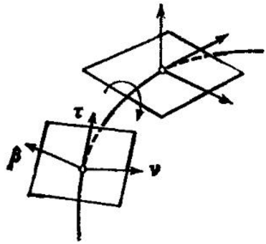

Рис. 18.

В заключение этого параграфа найдем все кривые, у которых в каждой точке кручение равно нулю. Имеем

$$k_2 = \beta'\nu = 0.$$

Так как, кроме того, $\beta'\tau = 0$ и $\beta'\beta = 0$, то $\beta' = 0$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$.

Векторы τ и β перпендикулярны. Поэтому $r'\beta_0 = 0$. Отсюда $(r(s) - r_0)\beta_0 = 0$; это значит, что кривая лежит в плоскости, заданной векторным уравнением $(r - r_0)\beta_0 = 0$.

Итак, *кривая, у которой кручение в каждой точке равно нулю, — плоская.* Обратное также верно.

§ 4. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой

Три полупрямые, исходящие из точки кривой и имеющие направления векторов τ, ν, β, являются ребрами трехгранного угла. Этот трехгранный угол называется *естественным трехгранником*.

При исследовании свойств кривой в окрестности произвольной точки P во многих случаях оказывается удобным выбрать декартову систему координат, приняв точку P кривой за начало координат, а оси естественного трехгранника — за оси координат. Ниже мы получим уравнение кривой при таком выборе системы координат.

Выразим производные векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ по дуге кривой через сами векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$. Имеем

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{r}'' = k_1\boldsymbol{\nu}.$$

Для получения $\boldsymbol{\beta}'$ вспомним, что вектор $\boldsymbol{\beta}'$ параллелен $\boldsymbol{\nu}$ а $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu} = k_2$. Отсюда

$$\boldsymbol{\beta}' = k_2\boldsymbol{\nu}.$$

Наконец,

$$\boldsymbol{\nu}' = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau})' = \boldsymbol{\beta}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}' = k_2\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} + k_1\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu} = \\ = -(k_1\boldsymbol{\tau} + k_2\boldsymbol{\beta}).$$

Систему формул

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \qquad\quad k_1\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k_1\boldsymbol{\tau} \qquad\quad -k_2\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= \qquad\quad k_2\boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

называют *формулами Френе.*

Найдем разложение радиус-вектора $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ в окрестности произвольной точки P, соответствующей дуге s, по осям естественного трехгранника в этой точке. Имеем

$$\boldsymbol{r}(s+\Delta s) = \boldsymbol{r}(s) + \Delta s\boldsymbol{r}'(s) + \frac{\Delta s^2}{2}\boldsymbol{r}''(s) + \frac{\Delta s^3}{6}\boldsymbol{r}'''(s) + \ldots$$

Но в точке P $\boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{r}'' = k_1\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{r}''' = k_1'\boldsymbol{\nu} - k_1^2\boldsymbol{\tau} - k_1k_2\boldsymbol{\beta}$, ... и т. д. Таким образом,

$$\boldsymbol{r}(s+\Delta s) = \left(\Delta s - \frac{k_1^2\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{k_1\Delta s^2}{2} + \frac{k_1'\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\nu} + \\ + \left(-\frac{k_1k_2\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\beta}.$$

Отсюда, принимая касательную, главную нормаль и бинормаль за оси x, y, z декартовой системы координат, получаем уравнение кривой, отнесенной к осям естественного трехгранника

$$x = \Delta s - \frac{k_1^2\Delta s^3}{6} + \ldots,$$

$$y = \frac{k_1\Delta s^2}{2} + \frac{k_1'\Delta s^3}{6} + \ldots,$$

$$z = -\frac{k_1k_2\Delta s^3}{6} + \ldots$$

Проекции кривой на плоскости естественного трехгранника в окрестности его вершины задаются соответствующими парами этих уравнений. Вид проекций при $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$ показан на рис. 19.

Мы видели, что коэффициенты разложения функции $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ в ряд по степеням Δs выражаются только через кривизну и кручение кривой. Это дает основание полагать, что кривизна и кручение в какой-то мере определяют кривую. И действительно, имеет место

Теорема. *Пусть $k_1(s)$ и $k_2(s)$ — любые регулярные функции, причем $k_1(s) > 0$. Тогда существует и притом единственная, с точностью до положения в пространстве, кривая, для которой $k_1(s)$ является кривизной, а $k_2(s)$ — кручением в точке, соответствующей дуге s.*

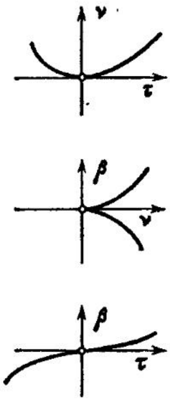

Рис. 19.

Доказательство. Если кривая, существование которой утверждается теоремой, действительно существует, то единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали этой кривой $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \qquad\quad k_1\eta, \\ \eta' &= -k_1\xi \qquad\quad -k_2\zeta, \\ \zeta' &= \qquad\quad k_2\eta \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

в силу формул Френе.

Естественно поэтому при разыскании интересующей нас кривой (с кривизной $k_1(s)$ и кручением $k_2(s)$) обратиться к решениям системы $(*)$.

Пусть $\xi(s)$, $\eta(s)$, $\zeta(s)$ — решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям: при $s=s_0$ $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\zeta=\zeta_0$, где ξ_0, η_0, ζ_0 — три единичные взаимно перпендикулярные векторы, смешанное произведение которых $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)=1$.

Покажем, что векторы $\xi(s)$, $\eta(s)$, $\zeta(s)$ единичные и взаимно перпендикулярные при любом s и $(\xi, \eta, \zeta)=1$.

Для этого вычислим $(\xi^2)'$, $(\eta^2)'$ $(\zeta^2)'$, $(\xi\eta)'$, $(\eta\zeta)'$, $(\zeta\xi)'$. Используя уравнения системы, для этих производных получаем следующие выражения:

$$(\xi^2)' = 2k_1(\xi\eta), \qquad (\xi\eta)' = k_1(\eta^2) - k_1(\xi^2) - k_2(\xi\zeta),$$
$$(\eta^2)' = -2k_1(\xi\eta) - 2k_2(\eta\zeta), \quad (\eta\zeta)' = k_2(\eta^2) - k_2(\zeta^2) - k_1(\xi\zeta),$$
$$(\zeta^2)' = 2k_2(\eta\zeta), \qquad (\zeta\xi)' = k_1(\eta\zeta) + k_2(\xi\eta).$$

Рассматривая эти равенства как систему дифференциальных уравнений для ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, замечаем, что она удовлетворяется значениями $\xi^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, $\zeta^2 = 1$, $\xi\eta = 0$, $\eta\zeta = 0$, $\zeta\xi = 0$. С другой стороны, эта система удовлетворяется значениями $\xi^2 = \xi^2(s)$, $\eta^2 = \eta^2(s)$, ... $(\zeta\xi) = \zeta(s)\,\xi(s)$. Оба эти решения совпадают при $s = s_0$, а следовательно, по теореме о единственности решения совпадают тождественно. Итак, для всех s

$$\xi^2(s) = 1, \quad \eta^2(s) = 1, \ \ldots \ \zeta(s)\,\xi(s) = 0.$$

Покажем, что $(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) = 1$. Так как ξ, η, ζ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, то $(\xi, \eta, \zeta) = \pm 1$. Смешанное произведение (ξ, η, ζ) непрерывно зависит от s, при $s = s_0$ оно равно $+1$, поэтому оно равно $+1$ для всех s.

Рассмотрим теперь кривую γ, определяемую векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \int_{s_0}^{s} \xi(s)\,ds.$$

Во-первых, заметим, что параметризация кривой γ естественная. В самом деле, длина дуги отрезка $s_0 s$ кривой γ равна

$$\int_{s_0}^{s} |\boldsymbol{r}'(s)|\,ds = \int_{s_0}^{s} |\xi(s)|\,ds = s - s_0.$$

Кривизна кривой γ равна $|\boldsymbol{r}''(s)| = |\xi'(s)| = k_1(s)$. Кручение кривой γ равно

$$-\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{k_1^2} = -\frac{(\xi,\ k_1\eta,\ k_1'\eta + k_1\eta')}{k_1^2} =$$
$$= -\frac{(\xi,\ k_1\eta,\ k_1'\eta + k_1(-k_1\xi - k_2\zeta))}{k_1^2} = k_2(s).$$

Таким образом, кривая γ имеет в точке, соответствующей дуге s, кривизну $k_1(s)$ и кручение $k_2(s)$.

Существование кривой доказано. Докажем единственность.

Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые, которые в точках, соответствующих дуге s, имеют одинаковые кривизны $k_1(s)$ и кручения $k_2(s)$. Совместим кривые γ_1 и γ_2 точками, соответствующими дуге s_0, и естественными трехгранниками в этих точках. Пусть $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ — единичные векторы касательных, главных нормалей и бинормалей кривых γ_1 и γ_2 соответственно.

Тройки вектор-функций $\boldsymbol{\tau}_1(s)$, $\boldsymbol{\nu}_1(s)$, $\boldsymbol{\beta}_1(s)$ и $\boldsymbol{\tau}_2(s)$, $\boldsymbol{\nu}_2(s)$, $\boldsymbol{\beta}_2(s)$ являются решениями системы уравнений для $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$. Начальные значения этих решений совпадают. Отсюда следует, что решения совпадают тождественно. В частности, $\boldsymbol{\tau}_1(s) \equiv \boldsymbol{\tau}_2(s)$, или $\boldsymbol{r}_1'(s) \equiv \boldsymbol{r}_2'(s)$. Интегрируя это равенство в пределах s_0, s, получим:

$$\boldsymbol{r}_1(s) \equiv \boldsymbol{r}_2(s).$$

Таким образом, кривая γ_2 отличается от γ_1 только положением в пространстве.

Теорема доказана полностью.

Систему равенств

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s)$$

называют *натуральными уравнениями кривой*. Согласно доказанной теореме *кривая натуральными уравнениями определяется однозначно с точностью до движения.*

§ 5. Плоские кривые

В этом параграфе мы рассмотрим соприкасающуюся окружность плоской кривой, эволюту и эвольвенту.

Пусть γ — плоская кривая, P — точка на ней. Окружность $\varkappa$, проходящая через точку P, называется *соприкасающейся окружностью* кривой γ в точке P, если кривая в этой точке с окружностью имеет соприкосновение второго порядка. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны* кривой.

Найдем соприкасающуюся окружность регулярной кривой γ в точке P, где кривизна отлична от нуля. Пусть

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — естественная параметризация кривой. Уравнение произвольной окружности имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^2-R^2=0,$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор центра окружности, а R — радиус.

Согласно теореме § 4 гл. II для соприкосновения второго порядка кривой γ с окружностью в точке P необходимо и достаточно выполнение в этой точке следующих условий:

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2=0,$$

$$\frac{d}{ds}\{(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}'(s)=0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\{(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2\boldsymbol{r}'^2(s)+2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}''(s)=0.$$

Из этих трех условий первое выражает собой то, что точка P лежит на окружности. Из второго условия видно, что вектор $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$, направленный из центра окружности в точку P, перпендикулярен касательной к кривой; это значит, что центр окружности лежит на нормали кривой (рис. 20). Третье условие определяет радиус круга. В самом деле, $\boldsymbol{r}'^2(s)=1$, $\boldsymbol{r}''(s)=k\boldsymbol{\nu}$ и так как $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|$ в точке P есть радиус круга R и вектор $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$ параллелен вектору $\boldsymbol{\nu}$, то $1-Rk=0$. Таким образом, радиус соприкасающегося круга равен радиусу кривизны кривой. Отсюда следует, что если кривизна в точке P равна нулю, то не существует соприкасающейся окружности кривой в точке P. В этом случае окружность вырождается в прямую, и касательная кривой имеет с ней (кривой) соприкосновение второго порядка.

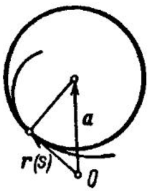

Рис. 20.

Мы нашли радиус и положение центра соприкасающегося круга. Определим теперь эволюту кривой.

Эволютой кривой называется геометрическое место центров кривизны кривой.

Найдем уравнение эволюты регулярной кривой γ. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — естественная параметризация кривой. Тогда вектор центра кривизны кривой

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}.$$

Выясним, что представляет собой эволюта кривой. Мы ограничимся рассмотрением следующих основных случаев:

1. Вдоль всей кривой $k'(s) > 0$ или $k'(s) < 0$ и $k(s)$ не обращается в нуль.

2. Вдоль всей кривой $k'(s) > 0$ или $k'(s) < 0$, $k(s)$ обращается в нуль при $s = s_0$.

3. Для $s < s_0$ $k'(s) > 0$, для $s > s_0$ $k'(s) < 0$, $k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) \neq 0$, $k(s)$ не обращается в нуль.

В первом случае эволюта представляет собой регулярную кривую без особых точек (рис. 21, *а*). Действительно,

$$\tilde{r}' = \left(r + \frac{\nu}{k}\right)' = \tau + \left(-\frac{\tau k}{k} + \nu\left(\frac{1}{k}\right)'\right) = -\nu\frac{k'}{k^2} \neq 0.$$

Во втором случае эволюта распадается на две регулярные кривые, являющиеся эволютами частей кривой γ при $s < s_0$ и $s > s_0$ (рис. 21, *б*).

В третьем случае эволюта представляет собой регулярную кривую. Точка эволюты, соответствующая точке s_0 кривой, является особой точкой, именно точкой возврата первого рода (рис. 21, *в*). Покажем это.

При $s = s_0$

$$\tilde{r}' = \nu\left(\frac{1}{k}\right)' = 0,$$

$$\tilde{r}'' = -k\tau\left(\frac{1}{k}\right)' + \nu\left(\frac{1}{k}\right)'',$$

$$\tilde{r}''' = -2k\tau\left(\frac{1}{k}\right)'' + \nu\left(\frac{1}{k}\right)'''.$$

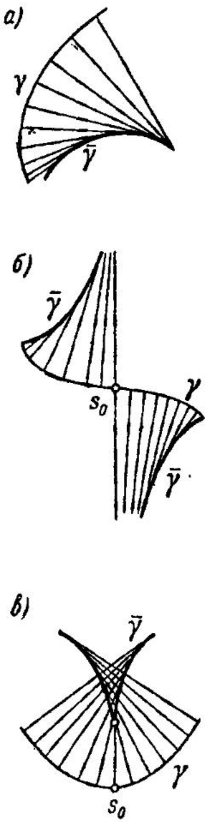

Рис. 21.

Отнесем эволюту к прямоугольным координатам, приняв точку $\tilde{Q}(s_0)$ эволюты за начало координат, а касательную и нормаль кривой γ в точке $Q(s_0)$ за направления осей

x и y. При таком выборе системы координат будем иметь

$$\tilde{x} = -\frac{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^3 + \ldots,$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^2 + \ldots$$

Отсюда следует, что точка $\tilde{Q}(s_0)$ эволюты является особой точкой, именно точкой возврата первого рода.

Рассмотрим некоторые свойства эволюты.

Пусть γ — регулярная кривая, для которой всюду $k'(s)$ сохраняет знак и $k(s)$ нигде не обращается в нуль. В этом случае, как мы показали, эволюта $\tilde{\gamma}$ кривой γ является регулярной кривой без особых точек.

Найдем длину дуги отрезка эволюты, соответствующего отрезку s_1s_2 кривой. Имеем

$$\tilde{s}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} |\tilde{\boldsymbol{r}}'|\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \left|\left(\frac{1}{k}\right)'\right| ds.$$

Отсюда, так как k' сохраняет знак, получаем:

$$\tilde{s}(s_1, s_2) = \left|\frac{1}{k(s_2)} - \frac{1}{k(s_1)}\right|.$$

Таким образом, *длина дуги отрезка эволюты равна абсолютной величине разности радиусов кривизны кривой в точках, соответствующих концам этого отрезка.*

Покажем, что *эволюта* $\tilde{\gamma}$ *является огибающей нормалей кривой* γ. Действительно, точка $\tilde{Q}(s)$ эволюты лежит на нормали кривой в точке $Q(s)$. Касательная эволюты в точке $\tilde{Q}(s)$ имеет направление $\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'$, а следовательно, совпадает с нормалью кривой в точке $Q(s)$.

Пусть кривая задана уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Найдем ее эволюту как огибающую нормалей кривой. Уравнение нормали

$$(\tilde{x} - x(t))\, x'(t) + (\tilde{y} - y(t))\, y'(t) = 0.$$

Следовательно, огибающая задается уравнениями

$$(\tilde{x} - x)\, x' + (\tilde{y} - y)\, y' = 0,$$

$$(\tilde{x} - x)\, x'' + (\tilde{y} - y)\, y'' - (x'^2 + y'^2) = 0.$$

Отсюда получаем для $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ следующие выражения:

$$\tilde{x}=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-x''y'},\quad \tilde{y}=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-x''y'}.$$

Эвольвентой кривой γ называется такая кривая $\tilde{\gamma}$, по отношению к которой кривая γ является эволютой. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — естественная параметризация кривой γ. Вектор точки эвольвенты $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$, очевидно, допускает представление

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\tau}(s).$$

Дифференцируя это равенство по s, получим

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\tau}+\lambda'\boldsymbol{\tau}+\lambda k\boldsymbol{\nu}.$$

Отсюда, так как $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ перпендикулярен $\boldsymbol{\tau}$, $\lambda'=-1$. Следовательно, $\lambda=c-s$.

Таким образом, если кривая имеет эвольвенту, то она задается уравнением

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{\tau}(c-s), \qquad (*)$$

где $c=\text{const}$. Легко убедиться, что каждая кривая, задаваемая уравнением (*), имеет своей эволютой кривую γ и, следовательно, является для нее эвольвентой. Уравнение эвольвенты в случае произвольной параметризации кривой γ, очевидно,

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(t)-\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}}\int\sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\,dt,$$

или, в скалярной форме,

$$\tilde{x}=x(t)-\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\int\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

$$\tilde{y}=y(t)-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\int\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Наглядно образование эвольвенты можно представить следующим образом. Представим себе нерастяжимую нить, натянутую на часть кривой γ, соответствующую $s<c$ с концом в точке $Q(c)$. Если эту нить, оттягивая за конец, сматывать с кривой, конец нити описывает эвольвенту кривой (рис. 22).

Выясним, что представляет собой эвольвента в двух основных случаях;

1) для всех $s < c$ кривой $k(s)$ не обращается в нуль;

2) $k(s)$ обращается в нуль только при $s = s_1$, причем $k'(s_1) \neq 0$.

В первом случае эвольвента есть регулярная кривая без особенностей. Действительно,

$$\tilde{r}' = (r - (s-c)\tau)' = -(s-c)k\nu \neq 0.$$

Во втором случае эвольвента также является регулярной кривой, но точка $\bar{Q}(s_1)$ эвольвенты является особой

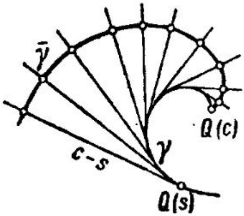

Рис. 22.

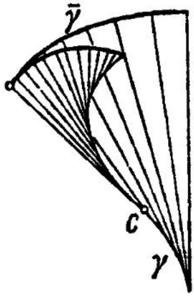

Рис. 23.

точкой, именно точкой возврата второго рода (рис. 23). Для доказательства этого утверждения надо отнести эвольвенту к прямоугольным декартовым координатам, приняв точку $\bar{Q}(s_1)$ за начало координат, а за оси координат — прямые, параллельные касательной и нормали кривой γ в точке $Q(s_1)$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Найти длину отрезка $-a \leqslant x \leqslant a$ параболы

$$y = bx^2.$$

Ответ. $s = \dfrac{2ab\sqrt{1+4a^2b^2} + \ln\left(2ab + \sqrt{1+4a^2b^2}\right)}{2b}$.

2. Найти длину отрезка кривой

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = a\,\mathrm{sh}\,t,\ z = at$$

между точками 0 и t.

Ответ. $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$.

3. Найти длину дуги астроиды

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$$

Ответ. $s = 6a$.

4. Найти длину отрезка $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Ответ. $s = 8a$.

5. Найти выражение длины дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\rho = \rho(\vartheta).$$

Ответ. $s(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\vartheta.$

6. Найти кривизну кривой:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4\sin\frac{t}{2}.$$

Ответ. $k_1 = \frac{1}{4}\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}.$

7. Найти кривизну кривой, заданной уравнениями в неявном виде

$$x + \operatorname{sh} x = \sin y + y,$$
$$z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1$$

в точке $(0, 0, 0)$.

Ответ. $k_1 = \frac{\sqrt{6}}{9}.$

8. Найти кривизну и кручение в произвольной точке кривой, заданной в упражнении 2.

Ответ. $k_1 = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}, \quad k_2 = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}.$

9. Вычислить кручение кривой

$$x = a\operatorname{ch} t\cos t,\ y = a\operatorname{ch} t\sin t,\ z = at.$$

Ответ. $k_2 = -a\operatorname{ch} t.$

10. Показать, что кривизна и кручение простой винтовой линии постоянны.

11. Найти выражение для кривизны плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

Ответ. $k_1 = \frac{\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''}{\left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

12. Показать, что кручение кривой

$$r = a \int b(t) \times b'(t)\, dt,$$

где $b(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям $|b(t)| = 1$ $|b'(t)| \neq 0$, $a = \text{const}$, постоянно.

13. Показать, что отношение кривизны к кручению кривой

$$x = a \int \sin \alpha(t)\, dt, \quad y = a \int \cos \alpha(t)\, dt, \quad z = bt$$

постоянно.

14. Найти эволюту параболы

$$y^2 = 2px.$$

Ответ. Полукубическая парабола:

$$27py^2 = 8(x - p)^3.$$

15. Найти эволюту трактрисы

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \sin t.$$

Ответ. Цепная линия:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

16. Найти эволюту астроиды

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Ответ. Астроида:

$$|x + y|^{\frac{2}{3}} + |x - y|^{\frac{2}{3}} = 2.$$

17. Найти эвольвенты круга

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Ответ. $x = R(\cos \vartheta + (\vartheta - c)\sin \vartheta)$,

$$y = R(\sin \vartheta - (\vartheta - c)\cos \vartheta).$$

18. Найти все плоские кривые с данным натуральным уравнением $k = k(s)$.

Ответ. $x = \int \sin \alpha(s)\, ds$, $y = \int \cos \alpha(s)\, ds$, где $\alpha(s) = \int k(s)\, ds$.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ III

1. Функция $f(t)$, заданная в интервале $a < t < b$, называется функцией ограниченной вариации, если для любых $t_1, t_2, \dots, t_n$ таких, что $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$, суммы

$$\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

равномерно ограничены.

Доказать, что кривая γ спрямляема тогда и только тогда, когда она допускает в окрестности каждой своей точки параметризацию

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — функции ограниченной вариации.

2. Доказать, что если кривая обладает одним из следующих четырех свойств:

1) касательные кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

2) бинормали кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

3) главные нормали кривой параллельны некоторой плоскости,

4) отношение кривизны к кручению кривой постоянно, то она обладает остальными тремя свойствами.

Найти общий вид кривой, обладающей этими свойствами.

3. Доказать, что если кривизна и кручение кривой постоянны и отличны от нуля, то эта кривая есть простая винтовая линия.

4. Доказать, что если между точками двух кривых установлено взаимно однозначное соответствие, при котором бинормали кривых в соответствующих точках совпадают, то кривые плоские.

5. Доказать, что любая кривая с постоянным кручением и отличной от нуля кривизной может быть задана векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = c\int \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)\, dt,$$

где $\boldsymbol{b}(t)$ — некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$|\boldsymbol{b}(t)| = 1, \quad \boldsymbol{b}'(t) \neq 0.$$

6. Восстановить кривую, если задана одна из трех вектор-функций $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$ или $\boldsymbol{\beta}(s)$.

7. Если между точками двух кривых может быть установлено соответствие так, что в соответствующих точках этих кривых касательные параллельны, то главные нормали и бинормали тоже параллельны. Доказать.

8. Кривые γ_1 и γ_2 называются кривыми Бертрана, если между ними может быть установлено взаимно однозначное точечное

соответствие, при котором главные нормали в соответствующих точках совпадают.

Показать следующие свойства кривых γ_1, γ_2:

а) расстояние между соответствующими точками кривых γ_1 и γ_2 постоянно;

б) касательные кривых γ_1 и γ_2 в соответствующих точках образуют постоянный угол;

в) кривизна и кручение каждой из кривых связаны соотношением

$$a \sin \vartheta \, k_1 - a \cos \vartheta \, k_2 = \sin \vartheta,$$

где a — расстояние между соответствующими точками кривых γ_1, γ_2, а ϑ — угол между касательными в соответствующих точках.

9. Доказать, что если кривизна и кручение кривой связаны линейной зависимостью

$$a \sin \vartheta \, k_1 - a \cos \vartheta \, k_2 = \sin \vartheta,$$

то кривая является кривой Бертрана.

10. Доказать, что кривая, задаваемая векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = a \int \boldsymbol{e}(t)\, dt + b \int \boldsymbol{e}(t) \times \boldsymbol{e}'(t)\, dt,$$

где $\boldsymbol{e}(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям $|\boldsymbol{e}(t)| = 1$, $|\boldsymbol{e}'(t)| = 1$, является кривой Бертрана. И обратно, любая кривая Бертрана может быть задана векторным уравнением такого вида.

11. Пусть кривая γ_2 получается проективным преобразованием из кривой γ_1. Доказать, что если в точке P кривой γ_1 кривизна (кручение) равна нулю, то в соответствующей точке кривой γ_2 кривизна (соответственно кручение) также равна нулю.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ГЛАВА IV

ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Элементарная поверхность. Простая поверхность. Общая поверхность.

Область на плоскости мы будем называть *элементарной* областью, если она является образом открытого круга при топологическом отображении. Таким образом, элементарная область — это область гомеоморфная кругу.

Пусть γ — простая замкнутая кривая на плоскости. Известна теорема Жордана о том, что простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области и является границей для каждой из этих областей. Одна из областей конечна, другая — бесконечна. Оказывается, конечная область гомеоморфна кругу. Таким образом, ***внутренность квадрата, прямоугольника, внутренность эллипса — все это элементарные области.***

Определим элементарную поверхность.

Множество Φ точек пространства мы будем называть *элементарной поверхностью*, если оно является образом элементарной области на плоскости при топологическом отображении ее в пространство.

Пусть Φ — элементарная поверхность и G — элементарная область в плоскости, образом которой при топологическом отображении f является поверхность Φ. Пусть u и v — декартовы координаты произвольной точки, принадлежащей области, x, y, z — координаты соответствующей точки поверхности. Координаты x, y, z точки поверхности суть функции координат точки области G:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v). \qquad (*)$$

Эту систему равенств, задающую отображение f области G

в пространство, называют *уравнениями* поверхности в параметрической форме; u и v называют *криволинейными координатами* на поверхности.

Уравнения (*) при фиксированном u или v задают кривую, лежащую на поверхности. Эти кривые называются *координатными линиями*.

Множество Φ точек пространства мы будем называть *простой поверхностью*, если это множество связно и каждая точка X этого множества имеет окрестность G такую, что часть Φ, расположенная в G, является элементарной поверхностью.

Элементарная поверхность является простой поверхностью. Но элементарными поверхностями далеко не исчерпываются все простые поверхности. Например, сфера является простой поверхностью, но не элементарной.

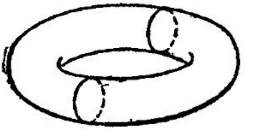

Рис. 24.

Простые поверхности нельзя охарактеризовать в целом общо и просто, как это было сделано для простых кривых. Некоторое представление о разнообразии простых поверхностей дает следующее соображение. *Если из произвольной простой поверхности удалить любое замкнутое множество точек, но так, чтобы не нарушить связности оставшейся части, то эта оставшаяся часть будет также простой поверхностью.*

Простая поверхность называется *полной*, если предельная точка для любой сходящейся последовательности точек поверхности также является точкой поверхности. Например, сфера, параболоид суть полные поверхности, а сферический сегмент не является полной поверхностью (речь идет о сферическом сегменте без ограничивающей его окружности).

Если простая полная поверхность является конечной, то она называется *замкнутой*. Кроме сферы, замкнутой поверхностью является, например, тор — поверхность, получаемая вращением окружности около прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей окружность (рис. 24).

Определим понятие *окрестности* точки на простой поверхности.

Окрестностью точки X на простой поверхности Φ называется общая часть поверхности Φ и некоторой пространственной окрестности точки X. Согласно определению у каждой точки простой поверхности есть окрестность, являющаяся элементарной поверхностью. В дальнейшем, говоря об окрестности точки на поверхности, мы будем иметь в виду такую элементарную окрестность.

Множество Φ точек пространства мы будем называть *общей поверхностью*, если оно является образом простой поверхности при локально топологическом отображении ее в пространство.

Мы будем говорить, что отображение f_1 простой поверхности Φ_1 и отображение f_2 простой поверхности Φ_2 определяют одну и ту же общую поверхность Φ, если между точками поверхностей Φ_1 и Φ_2 может быть установлено топологическое соответствие, при котором образы соответствующих точек этих поверхностей на поверхности Φ совпадают.

Пусть общая поверхность Φ является образом простой поверхности $\overline{\Phi}$ при локально топологическом отображении f. Окрестностью точки $f(X)$ на поверхности Φ мы будем называть образ любой окрестности точки X на поверхности $\overline{\Phi}$ при отображении f. Так как отображение f в достаточно малой окрестности точки X является топологическим, то $f(X)$ на Φ имеет окрестность, являющуюся элементарной поверхностью. Таким образом, *исследование любой поверхности «в малом» сводится к рассмотрению элементарной поверхности.*

§ 2. Регулярная поверхность. Аналитическое задание поверхности

Из определения общей поверхности следует, что у каждой ее точки существует окрестность, являющаяся элементарной поверхностью.

Поверхность Φ мы будем называть *регулярной* (k раз дифференцируемой), если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, допускающая регулярную параметризацию, т. е. задание уравнениями в параметрической форме

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

где f_1, f_2, f_3 — регулярные (k раз непрерывно дифференцируемые) функции, заданные в элементарной области G плоскости uv. При $k=1$ поверхность называется *гладкой.*

Поверхность называется *аналитической,* если она в достаточно малой окрестности каждой своей точки допускает аналитическую параметризацию (функции f_1, f_2, f_3 — аналитические).

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно регулярные поверхности.

Согласно определению, регулярная поверхность в окрестности каждой своей точки может быть задана уравнениями в параметрической форме

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v),$$

где $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ — регулярные функции переменных u, v, заданные в некоторой области G плоскости uv. Естественно возникает вопрос: когда система равенств

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v),$$

где $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ — регулярные функции в некоторой области G плоскости uv, — задает поверхность? Ответ на этот вопрос во многих случаях дает следующая

Теорема. *Если $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ — регулярные функции в области G плоскости uv, удовлетворяющие условию, что ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

всюду в G равен двум, то система равенств

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v)$$

задает некоторую поверхность Ф. *Эта поверхность есть образ простой поверхности G при локально топологическом отображении, которое точке $(u,\ v)$ области G сопоставляет точку пространства с координатами $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$.*

В этой теореме в доказательстве нуждается, очевидно, только утверждение о локальной одно-однозначности указанного отображения. Докажем это.

Допустим, утверждение неверно, тогда существует точка (u_0, v_0) в области G, в сколь угодно малой окрестности которой можно указать две различные точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) такие, что

$$x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) = 0, \quad y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) = 0,$$
$$z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) = (x(u_1, v_1) - x(u_1, v_2)) + \\ + (x(u_1, v_2) - x(u_2, v_2)) = \\ = (v_1 - v_2)\, x_v(u_1, \vartheta_1) + (u_1 - u_2)\, x_u(\vartheta_1', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) = \\ = (v_1 - v_2)\, y_v(u_1, \vartheta_2) + (u_1 - u_2)\, y_u(\vartheta_2', v_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) = \\ = (v_1 - v_2)\, z_v(u_1, \vartheta_3) + (u_1 - u_2)\, z_u(\vartheta_3', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$ не равны нулю одновременно, из полученных трех равенств заключаем, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u(\vartheta_1', v_2) & y_u(\vartheta_2', v_2) & z_u(\vartheta_3', v_2) \\ x_v(u_1, \vartheta_1) & y_v(u_1, \vartheta_2) & z_v(u_1, \vartheta_3) \end{pmatrix}$$

меньше двух, т. е. ее детерминанты второго порядка равны нулю. По непрерывности функций $x_u, x_v, \ldots, z_v$ отсюда следует, что все детерминанты второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

в точке (u_0, v_0) равны нулю, т. е. ранг матрицы меньше двух. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Некоторые поверхности при подходящем выборе осей координат x, y, z допускают параметризацию для всей поверхности вида

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v),$$

где $f(u, v)$ — функция, определенная в области G плоскости uv. Уравнения этой поверхности могут быть записаны в эквивалентной форме $z = f(x, y)$.

Такая параметризация поверхности отличается большой наглядностью. Соответствие между точками поверхности и точками области плоскости xy осуществляется проектированием прямыми, параллельными оси z.

Мы будем говорить, что поверхность Ф *неявно задана уравнением*

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

выражая этим только то, что координаты точек поверхности удовлетворяют данному уравнению. При этом могут существовать точки пространства, удовлетворяющие данному уравнению и не принадлежащие поверхности Ф.

При рассмотрении поверхностей, заданных уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, важную роль играет следующая

Теорема. *Пусть $\varphi(x y, z)$ — регулярная функция переменных x, y, z. Пусть M — множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$, (x_0, y_0, z_0) — точка этого множества, в которой $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. Тогда у точки (x_0, y_0, z_0) есть окрестность такая, что все точки множества M, принадлежащие этой окрестности, образуют регулярную элементарную поверхность.*

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi_z \neq 0$ в точке (x_0, y_0, z_0). По теореме о неявных функциях существуют числа δ и ε больше нуля и регулярная функция $\psi(x, y)$, определенная в области $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, такие, что все точки $(x, y, \psi(x, y))$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$, причем этими точками исчерпываются все точки параллелепипеда $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $|z - z_0| < \varepsilon$, удовлетворяющие уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$. Элементарная поверхность, о которой идет речь в теореме, задается уравнением

$$z = \psi(x, y), \quad |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

Теорема доказана.

§ 3. Специальные параметризации поверхности

Регулярная поверхность в окрестности каждой своей точки допускает бесчисленное множество параметризаций.

Действительно, пусть

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v)$$

— какая-нибудь параметризация поверхности в окрестности точки $Q(u_0, v_0)$.

Если $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$ — любые регулярные функции, удовлетворяющие в точке (α_0, β_0) условиям

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi(\alpha_0, \beta_0), \\ v_0 &= \psi(\alpha_0, \beta_0), \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

то уравнения

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)), \\ y &= y(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)), \\ z &= z(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)) \end{aligned}$$

дают также регулярную параметризацию поверхности. Это очевидным образом вытекает из того, что формулами

$$u=\varphi(\alpha, \beta), \quad v=\psi(\alpha, \beta)$$

задается топологическое отображение достаточно малой окрестности точки (α_0, β_0) плоскости $\alpha\beta$ на некоторую окрестность точки (u_0, v_0) плоскости uv.

При исследованни регулярных поверхностей бывает полезно пользоваться специальными параметризациями. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

Теорема. *Пусть Φ — регулярная поверхность и*

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v)$$

какая-нибудь ее регулярная параметризация в окрестности точки P. Пусть в точке P

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в окрестности P поверхность Φ допускает задание уравнением

$$z=f(x, y),$$

где f — регулярная функция.

Доказательство. По теореме о неявных функциях существуют регулярные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, которые при подстановке их в уравнения $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ обращают последние в тождества.

Так как

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 1,$$

то

$$\begin{vmatrix} u_x, & v_x \\ u_y, & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вводя новые параметры α и β согласно формулам

$$u = u(\alpha, \beta), \qquad v = v(\alpha, \beta),$$

получаем:

$$x = \alpha, \; y = \beta, \; z = z(u(\alpha, \beta), \; v(\alpha, \beta)),$$

или, что то же самое,

$$z = f(x, y).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Пусть Φ — регулярная поверхность, u, v — ее регулярная параметризация. Пусть в окрестности точки (u_0, v_0) заданы два дифференциальных уравнения*

$$\left. \begin{array}{l} A_1(u, v)\,du + B_1(u, v)\,dv = 0, \\ A_2(u, v)\,du + B_2(u, v)\,dv = 0, \end{array} \right\} \qquad (*)$$

коэффициенты которых в точке (u_0, v_0) удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в окрестности этой точки поверхность Φ можно параметризовать так, что координатные линии будут интегральными кривыми уравнений (*).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $A_2 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$. Пусть $v = \varphi(\alpha, u)$ — решение первого из уравнений (*), которое при $u = u_0$ обращается в α, а $u = \psi(\beta, v)$ — решение второго уравнения, которое при $v=v_0$ обращается в β. Уравнения $v=\varphi(\alpha, u)$ и $u=\psi(\beta, v)$ разрешимы относительно α и β соответственно в окрестности точки u_0, v_0, так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=1\neq 0 \text{ при } u=u_0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=1\neq 0 \text{ при } v=v_0.$$

Пусть $\alpha=\alpha(u, v)$ и $\beta=\beta(u, v)$ — эти решения. Покажем, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ \alpha_v & \beta_v \end{vmatrix}\neq 0.$$

Так как $\alpha(u, v)=\text{const}$ есть интеграл первого из уравнений (*), то уравнения

$$A_1du+B_1dv=0 \text{ и } \alpha_u du+\alpha_v dv=0$$

совместны. Отсюда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \alpha_u & \alpha_v \end{vmatrix}=0.$$

Аналогично,

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix}=0.$$

Если предположить, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix}=0,$$

то немедленно получается

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,$$

а это невозможно. Итак,

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix}\neq 0,$$

Отсюда следует, что $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ можно ввести в качестве новых параметров на поверхности. Если это сделать, то координатные линии ($\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$) будут интегральными кривыми уравнений (*).

Теоремы доказана.

Замечание. Система уравнений (*), которая фигурирует в формулировке теоремы, часто бывает задана одним уравнением второй степени

$$A\,du^2+2B\,du\,dv+C\,dv^2=0.$$

Соответствующее условие на коэффициенты сводится к неравенству

$$AC-B^2<0.$$

§ 4. Особые точки на регулярной поверхности

Точку P регулярной поверхности мы будем называть *обыкновенной* точкой по отношению к данной степени регулярности k, если поверхность допускает k раз дифференцируемую параметризацию

$$x=x(u,\ v),\qquad y=y(u,\ v),\qquad z=z(u,\ v)$$

в окрестности этой точки, удовлетворяющую условию: ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

в точке P равен двум. В противном случае точка P называется *особой*. Линия на поверхности, все точки которой являются особыми точками, называется *особой линией*.

Для поверхностей рассмотрение вопроса об особых точках представляет собой более трудную задачу, чем для кривых. Мы ограничимся исследованием простейших случаев.

Пусть

$$x=x(u,\ v),\qquad y=y(u,\ v),\qquad z=z(u,\ v)$$

регулярная параметризация поверхности в окрестности точки Q. Пусть ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

всюду в окрестности Q равен двум, кроме самой точки Q, в которой он меньше двух.

Будем пользоваться векторной записью уравнения поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, где $\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{e}_1+y(u, v)\boldsymbol{e}_2+$ $+z(u, v)\boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы, направленные по осям x, y, z). Тогда условие того, что ранг упомянутой матрицы равен двум или меньше двух, сводится к тому, что $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$ или $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=0$ соответственно.

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\xi=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}. \tag{*}$$

Непосредственно проверяется, что она инвариантна относительно преобразования координат с якобианом большим нуля. Если же якобиан меньше нуля, то эта функция меняет только знак.

Точка Q поверхности будет заведомо особой, если ξ_P не стремится к определенному пределу при $P\to Q$. В самом деле, если Q обыкновенная точка, то в ее окрестности может быть введена регулярная параметризация (α, β) такая, что $\boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{r}_\beta\neq 0$ в точке Q и, следовательно, при $P\to Q$

$$\frac{\boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{r}_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{r}_\beta|}=\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

стремится к определенному пределу.

Забегая несколько вперед, заметим, что $\xi(u, v)$ является единичным вектором нормали к поверхности в точке P. Нормаль к поверхности определяется независимо от какой-либо конкретной параметризации поверхности. Если точка Q — обыкновенная точка поверхности, то нормаль поверхности в окрестности этой точки непрерывно зависит от положения точки и, следовательно, единичный вектор $\xi_P(u, v)$ при $P\to Q$ стремится к определенному пределу — единичному вектору нормали поверхности в точке Q.

Пример. Точка (0, 0) на поверхности

$$x=u^3,\quad y=v^3,\quad z=(u^6+v^6)^{\frac{1}{3}}$$

(рис. 25) является особой точкой. Нетрудно проверить, что $\xi(u, v)$ не стремится к определенному пределу, когда u и v произвольным образом стремятся к нулю.

Допустим теперь что при $P \to Q$ ξ_P стремится к определенному пределу ξ_Q. Тогда рассмотренный только что признак не дает ответа на вопрос, будет ли точка Q особой точкой или обыкновенной.

Пусть криволинейные координаты точки Q — u_0 и v_0. Возьмем в плоскости uv малый простой контур $\bar{\gamma}$, охватывающий точку (u_0, v_0). Пусть γ — соответствующий контур на поверхности. Спроектируем контур γ на плоскость σ, проходящую через точку Q, перпендикулярную вектору ξ_Q.

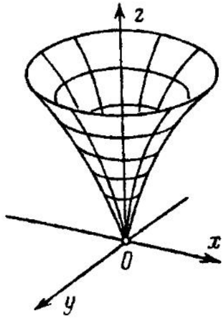

Рис. 25.

Если проекция $\tilde{\gamma}$ контура γ на плоскость σ не охватывает точки Q или охватывает ее более одного раза, то Q заведомо особая точка.

Допустим, что утверждение неверно и Q — обыкновенная точка. Тогда поверхность допускает параметризацию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha, \beta)$, удовлетворяющую в Q условию $\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta \neq 0$, откуда следует, что $\boldsymbol{r}_\alpha$ и $\boldsymbol{r}_\beta$ неравные нулю и непараллельные векторы.

Пусть $\alpha = \alpha_0 + \xi(t)$ и $\beta = \beta_0 + \eta(t)$ — уравнение контура γ. Тогда контур в плоскости σ, заданный уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(Q) + \xi(t)\boldsymbol{r}_\alpha(Q) + \eta(t)\boldsymbol{r}_\beta(Q),$$

мало отличается от $\tilde{\gamma}$. И так как этот контур получается аффинным преобразованием из $\bar{\gamma}$, то он, а с ним и контур $\tilde{\gamma}$, один раз охватывает точку Q подобно тому как контур $\bar{\gamma}$ охватывает точку (α_0, β_0).

Пример. Точка (0, 0) на поверхности

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv, \qquad z = u^3$$

(рис. 26) является особой. При обходе окружности $\bar{\gamma}$ $u^2 + v^2 = \varepsilon^2$ соответствующая точка $\tilde{\gamma}$ проходит дважды окружность $x^2 + y^2 = \varepsilon^4$. Таким образом, $\tilde{\gamma}$ охватывает точку (0,0) дважды.

Пример. Все точки поверхности

$$x = u, \quad y = v^2, \quad z = v^3,$$

расположенные на оси x-ов ($v = 0$), являются особыми (рис. 27). Здесь плоскость σ является плоскостью xy. Контур γ соответствующей окружности $\bar{\gamma}$: $(x-a)^2 + y^2 = \varepsilon^2$ располагается целиком в полуплоскости $y \geqslant 0$ (так как $y = v^2$) и, следовательно, ни разу не охватывает точку $Q(a, 0)$ оси x-ов.

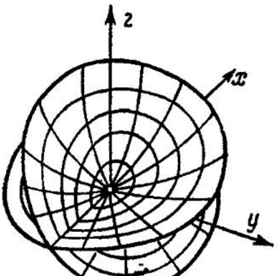

Рис. 26.

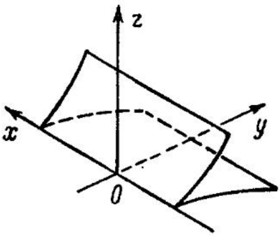

Рис. 27.

Особая линия типа, рассмотренного в этом примере, называется *ребром возврата* поверхности. Каждая плоскость, перпендикулярная ребру возврата, пересекает поверхность по кривой, для которой точка ребра возврата является особой точкой — точкой возврата. В рассмотренном примере такими сечениями являются полукубические параболы.

В заключение — несколько слов об особых точках поверхности, заданной уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$.

Во-первых, особыми точками поверхности могут быть только те ее точки, где $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$. Действительно, если в точке Q поверхности одна из частных производных, например, $\varphi_z \neq 0$, то поверхность в окрестности точки Q допускает регулярную параметризацию вида $z = \psi(x, y)$, откуда следует, что Q является обыкновенной точкой.

Пусть $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ в точке поверхности $Q(x_0, y_0, z_0)$. Разлагая функцию φ по формуле Тейлора в окрестности точки Q, получим:

$$a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2+\\+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+2a_{13}(x-x_0)(z-z_0)+\\+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)+R=0.$$

Оказывается, что если квадратичная форма $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ является определенной, т. е. обращается в нуль только когда все ξ_k равны нулю, то в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) ни одна точка пространства, кроме самой точки (x_0, y_0, z_0), не удовлетворяет уравнению $\varphi(x, y, z)=0$. Поэтому поверхность Φ не может быть задана уравнением $\varphi=0$ в окрестности точки Q.

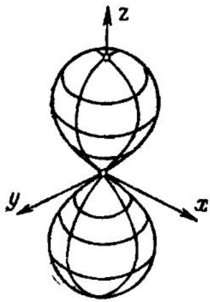

Рис. 28.

Замечание. Часто под поверхностью, заданной уравнением $\varphi(x, y, z)=0$, понимают геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих уравнению $\varphi=0$. При таком определении поверхности точку в рассмотренном только что случае называют *изолированной* особой точкой.

Пример. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)=0$, состоит из сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и точки $(0, 0, 0)$, которая является изолированной точкой этого геометрического места.

Если квадратичная форма $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ является знакопеременной, но не разлагается в произведение двух линейных форм, геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y, z)=0$, вблизи точки (x_0, y_0, z_0) имеет форму, близкую к конусу второго порядка, уравнение которого $\varphi(x, y, z)-R=0$. Если поверхность определяют как геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y, z)=0$, то в этом случае точку (x_0, y_0, z_0) называют *конической* точкой.

Пример. Начало координат является конической точкой геометрического места точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(z^2-x^2-y^2)=0$$

(рис. 28).

Если квадратичная форма $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ распадается в произведение двух линейных форм, могут представиться различные случаи. Точка может быть особой (например, точка (0, 0, 0) поверхности $xy-z^3=0$) или обыкновенной (например, точка (0, 0, 0) поверхности $xy-xz^2=0$). В этом случае необходимо исследовать дальнейшие члены разложения функции φ.

Рассмотрения всех последующих глав относятся только к областям поверхности с обыкновенными точками. В частности, для употребляемых параметризаций предполагается выполненным условие $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$. В дальнейшем это специально не оговаривается.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

1. Составить уравнение поверхности, образуемой полупрямыми, которые исходят из точки (a, b, c) и пересекают параболу

$$z=0,\quad y^2=2px.$$

Ответ. $(bz-cy)^2=2p(z-c)(az-cx)$.

2. Найти уравнение цилиндра с образующими параллельными прямой $x=y=z$, описанного около эллипсоида

$$x^2+4y^2+9z^2=1.$$

Ответ. $(x+4y+9z)^2-14(x^2+4y^2+9z^2-1)=0$.

3. Найти геометрическое место проекций центра эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

на его касательные плоскости.

Ответ. $x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2=(x^2+y^2+z^2)^2$.

4. Составить уравнение поверхности, которая получается при вращении кривой

$$x=\varphi(u),\quad z=\psi(u),\quad y=0$$

около оси z.

Ответ. $x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)$.

5. Прямая g движется в пространстве так, что выполняются следующие условия:

а) прямая все время пересекает ось z под прямым углом;

б) точка пересечения прямой g с осью z равномерно движется со скоростью a;

в) прямая равномерно вращается около оси z с угловой скоростью ω.

Составить уравнение поверхности, которую описывает при своем движении прямая g.

Ответ. $x=v\cos\omega u,\qquad y=v\sin\omega u,\qquad z=au.$

Здесь u — время, а v — расстояние точки поверхности от оси z. Поверхность называется простой винтовой поверхностью или *геликоидом*.

6. Пусть три семейства поверхностей задаются уравнениями:

$$\varphi(x, y, z) = u = \text{const},$$
$$\psi(x, y, z) = v = \text{const},$$
$$\chi(x, y, z) = w = \text{const}.$$

Доказать, что если в точке (x_0, y_0, z_0) якобиан

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0,$$

то все три семейства в окрестности этой точки можно задать векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w).$$

Поверхности различных семейств получаются при $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$.

7. Поверхностью переноса называется поверхность, образуемая при поступательном перемещении одной кривой вдоль другой кривой. Доказать, что поверхность переноса может быть задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u) + \boldsymbol{\psi}(v),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ — вектор-функции, из коих первая зависит только от u, а вторая только от v.

8. Показать, что поверхность, являющаяся геометрическим местом средин отрезков, концы которых принадлежат двум данным кривым, есть поверхность переноса.

9. Найти особую линию на псевдосфере

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Ответ. Особая линия $u = \frac{\pi}{2}$ — ребро возврата.

ГЛАВА V

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЕМ СОПРИКОСНОВЕНИЯ

§ 1. Касательная плоскость поверхности

Пусть Φ — поверхность, P — точка на ней и α — плоскость, проходящая через точку P. Возьмем на поверхности точку Q и обозначим ее расстояния от точки P и плоскости α через d и h соответственно.

Мы будем называть плоскость α *касательной плоскостью* поверхности в точке P, если отношение $\frac{h}{d} \to 0$, когда $Q \to P$ (рис. 29).

Теорема. *Гладкая поверхность Ф имеет в каждой точке касательную плоскость и притом единственную.*

Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ какая-нибудь гладкая параметризация поверхности, то касательная плоскость в точке $P(u, v)$ параллельна векторам $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$.

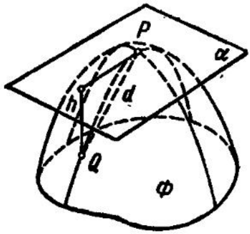

Рис. 29.

Доказательство. Допустим, что поверхность Ф в точке $P(u, v)$ имеет касательную плоскость α. Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости α. Расстояние d точки $Q(u+\Delta u, v+\Delta v)$ от точки $P(u, v)$ равно $|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|$. Расстояние точки Q от плоскости α равно

$$|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|,$$

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|}.$$

Согласно определению $\frac{h}{d} \to 0$, когда Δu и Δv независимо стремятся к нулю. В частности,

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)|} \to 0 \text{ при } \Delta u \to 0.$$

Но

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)|} =$$

$$= \frac{\left|\frac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\left|\frac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}\right|} \to \frac{|\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}_u(u, v)|}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n} = 0.$$

Так как $\boldsymbol{r}_u(u, v) \neq 0$ $(\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v) \neq 0)$, то равенство $\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n} = 0$ возможно только в том случае, если вектор $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ параллелен плоскости α.

Аналогично показывается, что и вектор $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ тоже параллелен плоскости α, и так как векторы $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ отличны от нуля и непараллельны ($\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v) \neq 0$), то касательная плоскость, если она существует, единственная.

Докажем теперь существование касательной плоскости. Пусть плоскость α параллельна векторам $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$. Покажем, что она является касательной плоскостью поверхности в точке $P(u, v)$.

Имеем

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|} =$$
$$= \frac{|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\,\Delta u + (\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,\Delta v + \varepsilon_1\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}|}{|\boldsymbol{r}_u\,\Delta u + \boldsymbol{r}_v\,\Delta v + \varepsilon_2\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}|} =$$
$$= \frac{\left|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + (\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \varepsilon_1\right|}{\left|\boldsymbol{r}_u\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \boldsymbol{r}_v\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \varepsilon_2\right|},$$

где $|\varepsilon_1|$ и $|\varepsilon_2|$ стремятся к нулю, когда $\Delta u, \Delta v \to 0$.

Допустим, что существует последовательность пар Δu, Δv, сходящихся к нулю и таких, что соответствующее им $\frac{h}{d} > \varepsilon > 0$. Из последовательности пар Δu, Δv можно выделить такую подпоследовательность, для которой отношения

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}$$

будут сходиться. Пусть ξ и η — предельные значения этих выражений. Очевидно, $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Переходя к пределу отношения $\frac{h}{d}$ по выделенной подпоследовательности пар Δu, Δv, получим:

$$\frac{h}{d} \to \frac{|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\,\xi + (\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,\eta|}{|\boldsymbol{r}_u\xi + \boldsymbol{r}_v\eta|}.$$

Так как $(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}) = 0$, $(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}) = 0$, а $\boldsymbol{r}_u\xi + \boldsymbol{r}_v\eta \neq 0$ ($\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непараллельны), то $\frac{h}{d} \to 0$. Но это противоречит тому, что все допредельные значения $\frac{h}{d}$ по предположению больше $\varepsilon > 0$.

Теорема доказана полностью.

Зная направление касательной плоскости, нетрудно написать ее уравнение.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{r}}$ — вектор произвольной точки касательной плоскости поверхности в точке $P(u, v)$. Тогда векторы $\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(u, v)$, $\boldsymbol{r}_u(u, v)$, $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ параллельны касательной плоскости, следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Отсюда уравнение касательной плоскости

$$(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(u, v),\ \boldsymbol{r}_u(u, v),\ \boldsymbol{r}_v(u, v)) = 0.$$

Пусть поверхность задана уравнениями

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Из векторного уравнения касательной плоскости следует, что уравнение касательной плоскости, соответствующее такой форме задания поверхности, будет

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u, v) & \tilde{y} - y(u, v) & \tilde{z} - z(u, v) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение касательной плоскости поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$, получается из найденного только что. Достаточно заметить, что задание поверхности уравнением $z = z(x, y)$ есть лишь краткая запись параметрического задания

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = z(u, v).$$

Поэтому уравнение касательной плоскости в случае задания поверхности уравнением $z = z(x, y)$ будет

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ 1 & 0 & z_x(x, y) \\ 0 & 1 & z_y(x, y) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\tilde{z} - z - p(\tilde{x} - x) - q(\tilde{y} - y) = 0,$$

где через p и q обозначены первые производные функции $z(x, y)$.

Найдем, наконец, уравнение касательной плоскости для случая задания поверхности уравнением $\varphi(x, y, z)=0$. Пусть (x, y, z) — точка поверхности, в которой $\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\neq 0$ и $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$ — какая-нибудь гладкая параметризация поверхности в окрестности этой точки. Если подставить вместо x, y, z в уравнение поверхности $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, то получим тождество относительно u и v. Дифференцируя это тождество, в точке (x, y, z) получим:

$$\varphi_x x_u+\varphi_y y_u+\varphi_z z_u=0,$$

$$\varphi_x x_v+\varphi_y y_v+\varphi_z z_v=0.$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений для φ_x φ_y, φ_z и решая ее, получим:

$$\frac{\varphi_x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{\varphi_y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{\varphi_z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

Для случая параметрического задания поверхности уравнение касательной плоскости будет

$$(\tilde{x}-x)\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}+(\tilde{y}-y)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}+(\tilde{z}-z)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}=0.$$

Принимая во внимание полученную выше пропорцию, получаем уравнение касательной плоскости поверхности $\varphi(x, y, z)=0$ в точке (x, y, z)

$$(\tilde{x}-x)\varphi_x+(\tilde{y}-y)\varphi_y+(\tilde{z}-z)\varphi_z=0.$$

Нормалью поверхности в точке P называется прямая, проходящая через точку P перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Составить уравнение нормали после того, как известно уравнение касательной плоскости для различных случаев задания поверхности, не составляет труда и предлагается в качестве упражнения.

§ 2. Лемма о расстоянии точки от поверхности. Соприкосновение кривой и поверхности

Пусть Ф — поверхность и Q — произвольная точка пространства. Расстоянием точки Q от поверхности Ф называется точная нижняя грань расстояний точек поверхности от точки Q.

Лемма. *Пусть Ф — гладкая поверхность, заданная уравнением $\varphi(x, y, z)=0$. Пусть в точке $O(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2 \neq 0$.*

Если $Q(x, y, z)$ — точка пространства, близкая к точке O, но не принадлежащая поверхности, то при подстановке координат точки Q в уравнение поверхности Ф, получается величина λ, имеющая порядок величины h — расстояния точки Q от поверхности в том смысле, что отношение $\frac{\lambda}{h}$ стремится к определенному пределу, отличному от нуля, когда точка Q неограниченно приближается к O, оставаясь вне поверхности.

Доказательство. Так как точка O принадлежит поверхности Ф, то существует $\varepsilon>0$ такое, что все точки пространства, удаленные от точки O на расстояние, не превосходящее ε, и удовлетворяющие уравнению $\varphi(x, y, z)=0$, принадлежат поверхности Ф.

Пусть точка Q находится на расстоянии меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$ от точки O. Пусть P_n — последовательность точек поверхности, расстояния которых от Q стремятся к расстоянию этой точки от поверхности Ф. Точки P_n образуют ограниченную последовательность $\left(\text{их расстояния от } Q \text{ меньше } \frac{\varepsilon}{2}\right)$, поэтому можно выделить сходящуюся подпоследовательность из последовательности точек P_n. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность P_n сходится к некоторой точке P. В силу непрерывности функции φ в окрестности точки O точка P удовлетворяет уравнению $\varphi(x, y, z)=0$. Отсюда следует, что точка P принадлежит поверхности Ф. Таким образом, если точка Q достаточно близка к O, нижняя грань расстояний точек поверхности от точки Q достигается для некоторой точки P, принадлежащей поверхности.

Покажем теперь, что отрезок PQ направлен по нормали к поверхности в точке P. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь гладкая параметризация поверхности в точке P и $\boldsymbol{a}$ — вектор точки Q. Так как функция $(\boldsymbol{r}(u, v)-\boldsymbol{a})^2$ достигает минимума в точке P, то должно быть

Рис. 30.

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}_u=0,$$
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}_v=0,$$

но это и значит, что отрезок PQ направлен по нормали к поверхности в точке P.

Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты точки P, ξ, η, ζ — направляющие косинусы нормали поверхности в точке P, x, y, z — координаты точки Q и h — расстояние между точками P и Q (рис. 30).

Имеем

$$\bar{x}=x+\xi h, \quad \bar{y}=y+\eta h, \quad \bar{z}=z+\zeta h.$$

Так как точка P принадлежит поверхности, то

$$\varphi(x+\xi h,\ y+\eta h,\ z+\zeta h)=0.$$

Отсюда

$$\varphi(x, y, z)+h(\varphi_x\xi+\varphi_y\eta+\varphi_z\zeta)+h\varepsilon=0,$$

где $\varepsilon\to 0$ при $Q\to O$.

Деля это равенство на h и переходя к пределу при $Q\to O$, получим:

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{h}\to-(\varphi_x\xi+\varphi_y\eta+\varphi_z\zeta)_{(O)}.$$

Выражение в правой части отлично от нуля, так как представляет собой скалярное произведение параллельных, отличных от нуля векторов (ξ, η, ζ) и $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$.

Лемма доказана полностью.

Применим доказанную лемму к вопросу соприкосновения кривой с поверхностью.

Пусть Φ — элементарная поверхность и γ — элементарная кривая, имеющие общую точку O. Пусть h — расстояние произвольной точки Q кривой от поверхности. Мы будем говорить, что кривая γ с поверхностью Φ имеет *соприкосновение порядка* n, если $\frac{h}{d^n} \to 0$, когда $Q \to P$. Соприкосновение общей кривой с общей поверхностью будем понимать как соприкосновение элементарных окрестностей общей точки.

Теорема. *Пусть* Φ — *элементарная регулярная поверхность и* γ — *регулярная кривая, имеющие общую точку* O. *Пусть* $\varphi(x, y, z) = 0$ — *уравнение поверхности в окрестности точки* O, *причем* $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$ *в точке* O; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — *регулярная параметризация кривой* γ *в окрестности точки* O, *причем* $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ *в точке* O.

Тогда для того, чтобы кривая γ *имела с поверхностью* Φ *в точке* O *соприкосновение порядка* n, *необходимо и достаточно, чтобы при* t, *соответствующем точке* O, *выполнялись условия*

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad \frac{d}{dt}\varphi = 0, \ \ldots \ \frac{d^n}{dt^n}\varphi = 0.$$

Доказательство. Пусть точке O соответствует значение $t = t_0$. При $Q \to O$ $t \to t_0$.

Согласно лемме $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ имеет порядок расстояния точки Q от поверхности Φ. Что касается расстояния между точками Q и O, то оно имеет порядок $|t - t_0|$, так как

$$\left| \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \right| \to |r'(t_0)| \neq 0.$$

Поэтому для соприкосновения n-го порядка кривой γ с поверхностью Φ в точке O необходимо и достаточно, чтобы при $t \to t_0$

$$\frac{\varphi(x(t), y(t), z(t))}{(t - t_0)^n} \to 0.$$

А это возможно тогда и только тогда, когда при $t = t_0$ функция $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ и ее производные до n-го порядка равны нулю.

Теорема доказана.

Пример. Найдем *соприкасающуюся сферу* кривой, т. е. такую сферу, с которой кривая имеет соприкосновение третьего порядка.

Пусть $r = r(s)$ — естественная параметризация кривой

Уравнение сферы

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^2=R^2,$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор центра сферы, а R — радиус. Подставляя в это уравнение $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ и дифференцируя, последовательно получаем:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{\tau}=0,$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})k_1\boldsymbol{\nu}+1=0,$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})(k_1'\boldsymbol{\nu}-k_1^2\boldsymbol{\tau}-k_1k_2\boldsymbol{\beta})=0,$$

откуда

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})k_1k_2\boldsymbol{\beta}+\frac{k_1'}{k_1}=0.$$

Итак,

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{\tau}=0,$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{k_1},\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1'}{k_1^2k_2}.$$

Отсюда

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{k_1}\right)^2+\left(\frac{k_1'}{k_1^2k_2}\right)^2},$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{\nu}}{k_1}+\frac{\boldsymbol{\beta}k_1'}{k_1^2k_2}.$$

§ 3. Соприкасающийся параболоид. Классификация точек поверхности

Пусть Φ — регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) поверхность и P — точка на ней. Пусть U — параболоид с вершиной P, касающийся поверхности в этой точке. Обозначим h и d расстояния произвольной точки Q поверхности от параболоида и точки P соответственно (рис. 31).

Параболоид U называется *соприкасающимся параболоидом* поверхности в точке P, если отношение $\frac{h}{d^2}\to 0$, когда $Q\to P$. При этом вырождение параболоида в параболический цилиндр или плоскость не исключается.

Т е о р е м а. *В каждой точке P регулярной (дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности Φ сущест-*

вует и притом единственный соприкасающийся параболоид U, в частности, вырождающийся в параболический цилиндр или плоскость.

Доказательство. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв точку P за начало координат, касательную плоскость в точке P — за плоскость xy и нормаль к ней — нормаль к поверхности — за ось z.

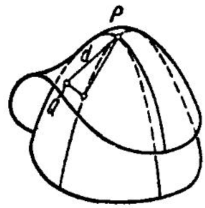

Рис. 31.

При таком выборе системы координат поверхность в окрестности точки P может быть задана уравнением

$$z = z(x, y),$$

где $z(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция в окрестности точки $(0, 0)$. Покажем это.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь дважды дифференцируемая параметризация поверхности. Так как вектор $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ и направлен по оси z, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда, как показано в § 3 гл. IV, следует, что поверхность в окрестности P допускает задание уравнением

$$z = z(x, y),$$

где $z(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция. Заметим, что $z(0, 0) = 0$, так как точка P принадлежит поверхности, а $z_x(0, 0)$ и $z_y(0, 0)$ равны нулю, так как касательная плоскость Φ в P: $z = z_x(0, 0)\,x + z_y(0, 0)\,y$ должна совпадать с плоскостью $z = 0$.

Уравнение параболоида U, а также его вырождения в параболический цилиндр и плоскость могут быть заданы уравнением вида

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

Допустим, что в точке P существует соприкасающийся параболоид. Покажем, что он единственный. Пусть

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0$$

— уравнение соприкасающегося параболоида. Согласно лемме предыдущего параграфа, при подстановке координат точки Q в уравнение параболоида получается величина λ, имеющая порядок расстояния точки Q от параболоида. Поэтому $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ при $Q \to P$.

Разлагая функцию $z(x, y)$ в окрестности начала координат по формуле Тейлора, получим:

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon_1(x, y),$$

где r, s, t — обозначения вторых производных z, а $\varepsilon_1(x, y) \to 0$, когда x, $y \to 0$. Подставляя координаты x, y, $z(x, y)$ точки Q поверхности в уравнение параболоида, получим:

$$\lambda = \frac{1}{2}\{(r-a)x^2 + 2(s-b)xy + (t-c)y^2\} + \\ + (x^2 + y^2)\,\varepsilon_1(x, y).$$

Квадрат расстояния точки Q от P

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\,\varepsilon_2(x, y),$$

где $\varepsilon_2 \to 0$ при $Q \to P$.

Так как отношение $\frac{\lambda}{d^2}$ стремится к нулю, когда x и y независимо стремятся к нулю, то это будет иметь место и тогда, когда, например, $y = 0$, а $x \to 0$. Но в этом случае

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{\frac{1}{2}(r-a)x^2 + x^2\varepsilon_1}{x^2 + x^2\varepsilon_2}$$

и, следовательно, $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ при $x \to 0$ тогда и только тогда, когда $a = r$. Аналогично показывается, что $c = t$. Покажем, наконец, что $b = s$. Для этого предположим, что x и y стремятся к нулю, но так, что всегда $x = y$. Тогда

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{(s-b)x^2 + 2x^2\varepsilon_1}{2x^2 + 2x^2\varepsilon_2}.$$

Отсюда видно, что условие $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ при $x \to 0$ влечет за собой равенство $b = s$.

Таким образом, если соприкасающийся параболоид в точке P существует, то он единственный. Его уравнение относительно выбранной нами системы координат будет

$$z-\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)=0. \quad (*)$$

Покажем теперь, что параболоид (*) всегда является соприкасающимся. В самом деле, для этого параболоида

$$\frac{\lambda}{d^2}=\frac{(x^2+y^2)\,\varepsilon_1}{x^2+y^2+(x^2+y^2)\,\varepsilon_2}\to 0$$

при $x, y\to 0$.

Теорема доказана полностью.

Существование и единственность соприкасающегося параболоида позволяет дать следующую классификацию точек поверхности:

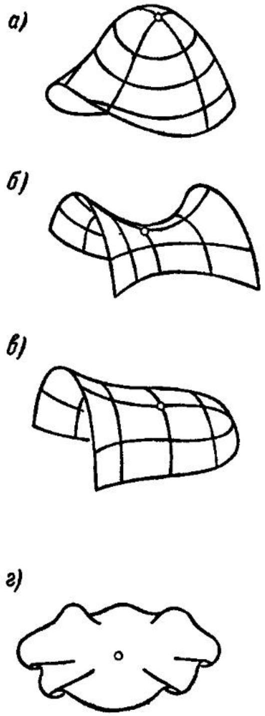

Рис. 32.

1. Точка поверхности называется *эллиптической*, если соприкасающийся параболоид в этой точке является эллиптическим параболоидом (см. рис. 32, *а*).

2. Точка поверхности называется *гиперболической*, если соприкасающийся параболоид в этой точке является гиперболическим параболоидом (рис. 32, *б*).

3. Точка поверхности называется *параболической*, если соприкасающийся параболоид в этой точке вырождается в параболический цилиндр (рис. 32, *в*).

4. Точка поверхности называется *точкой уплощения*, если соприкасающийся параболоид в этой точке вырождается в плоскость (касательную плоскость поверхности) (рис. 32, *г*).

В заключение заметим, что *подобно тому как касательная плоскость поверхности воспроизводит форму поверхности в окрестности точки касания в первом приближении, соприкасающийся параболоид воспроизводит ее во втором приближении.*

§ 4. Огибающая семейства поверхностей, зависящих от одного или двух параметров

Пусть $S\{F_\alpha\}$ — однопараметрическое семейство гладких поверхностей, зависящее от параметра α. Гладкая поверхность F называется *огибающей* семейства S, если она в каждой своей точке касается по крайней мере одной поверхности семейства и каждым своим куском касается бесчисленного множества поверхностей семейства.

Теорема. *Пусть задано однопараметрическое семейство гладких поверхностей $S\{F_\alpha\}$:*

$$\varphi(x, y, z, \alpha)=0, \qquad a\leqslant\alpha\leqslant b,$$

где φ непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция, удовлетворяющая условию $\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\neq 0$.

Тогда, если гладкая поверхность F является огибающей этого семейства, она задается уравнениями

$$\varphi(x, y, z, \alpha)=0, \qquad \varphi_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$$

в том смысле, что для каждой точки (x, y, z) поверхности F можно указать такое α, что четырьмя величинами x, y, z, α будут удовлетворяться оба уравнения $\varphi=0$ и $\varphi_\alpha=0$.

Доказательство этой теоремы по существу представляет собой повторение доказательства соответствующей теоремы для кривых (§ 5, гл. II), поэтому мы изложим его менее подробно.

Пусть $P(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности F. Будем различать два случая:

1. В точке P касается бесконечное множество поверхностей семейства: $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots$

2. В точке P касается только конечное число поверхностей семейства: $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$.

Рассмотрим первый случай. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность чисел α_k сходится к некоторому α_0. Так как $\varphi(x, y, z, \alpha_k)=0$ при любом k, то

$$\varphi(x, y, z, \alpha_k)-\varphi(x, y, z, \alpha_l)= \\ =(\alpha_k-\alpha_l)\,\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha^*)=0,$$

откуда $\varphi(x, y, z, \alpha^*)=0$. Переходя к пределу при $k, l\to\infty$, получаем

$$\varphi(x, y, z, \alpha_0)=0, \qquad \varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_0)=0.$$

И в первом случае утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим второй случай. Допустим, что утверждение теоремы неверно и, следовательно, при любом k ($k=1, 2, \ldots, n$), $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k)\neq 0$. Обозначим ω_k^ε замкнутую ε-окрестность точки α_k и f малый кусок поверхности F, содержащий точку P. (Под куском поверхности мы понимаем замкнутую область на поверхности, т. е. область вместе с ее границей.) Если кусок f достаточно мал и F_α касается f, то α принадлежит одной из окрестностей ω_k^ε.

Обозначим m_k множество точек f, в которых касаются поверхности F_α с параметром α, принадлежащим ω_k^ε. Каждое множество m_k замкнутое. Существует кусок поверхности $\bar f$, содержащийся в f и обладающий по отношению к каждому множеству m_k следующим свойством: каждое множество m_k либо содержит $\bar f$ либо не содержит ни одной его точки. Кусок $\bar f$ строится точно так же, как отрезок δ в доказательстве соответствующей теоремы для кривых.

Пусть $\bar f$ принадлежит m_k. Так как $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k)\neq 0$, то при достаточно малом ε поверхности F_α, для которых $\alpha\subset\omega_k^\varepsilon$, в окрестности точки P задаются уравнением

$$\psi(x, y, z)=\alpha,$$

где ψ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2\neq 0$. Поверхность F на куске $\bar f$ может быть задана уравнениями: $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$.

Обозначим $\alpha(u, v)$ значение параметра $\alpha\subset\omega_k^\varepsilon$, отвечающего поверхности F_α, касающейся куска $\bar f$ в точке (u, v):

$$\alpha(u, v)=\psi(x(u, v), y(u, v), z(u, v));$$

$\alpha(u, v)$ — очевидно, непрерывно дифференцируемая функция.

Имеем

$$\alpha_u = \psi_x x_u + \psi_y y_u + \psi_z z_u,$$

$$\alpha_v = \psi_x x_v + \psi_y y_v + \psi_z z_v.$$

Так как векторы (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) являются касательными векторами поверхности F, (ψ_x, ψ_y, ψ_z) — вектор нормали поверхности F_α, а поверхности F и F_α касаются, то $\alpha_u = 0$, $\alpha_v = 0$. Следовательно, $\alpha = \text{const}$.

Таким образом, куска $\bar{f}$ касается только одна поверхность семейства при $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$, и, следовательно, во всем семействе найдется не более n таких поверхностей. Но по определению огибающей их должно быть бесконечное множество. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Пусть $S\{F_{\alpha\beta}\}$ — двупараметрическое семейство гладких поверхностей. Гладкая поверхность F называется *огибающей* семейства S, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной поверхности семейства и вдоль каждой кривой на поверхности F ее касается бесчисленное множество поверхностей семейства.

Теорема. *Огибающая двупараметрического семейства поверхностей*

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad a \leqslant \alpha \leqslant b, \qquad c \leqslant \beta \leqslant d,$$

если $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$, *задается уравнениями*

$$\varphi = 0, \quad \varphi_\alpha = 0 \quad \varphi_\beta = 0.$$

В дальнейшем изложении эта теорема нами не используется, поэтому мы не будем приводить ее доказательства.

§ 5. Огибающая семейства плоскостей, зависящих от одного параметра

Выясним строение поверхности F, являющейся огибающей однопараметрического семейства плоскостей.

Уравнение плоскостей семейства запишем в векторной форме

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}(\alpha) + a(\alpha) = 0,$$

что соответствует скалярной записи

$$xb_1(\alpha)+yb_2(\alpha)+zb_3(\alpha)+a(\alpha)=0.$$

Не ограничивая общности, можно считать вектор $\boldsymbol{b}$ единичным, так как уравнение всегда можно разделить на $|\boldsymbol{b}(\alpha)|$ ($\boldsymbol{b}(\alpha)\neq \boldsymbol{0}$). Относительно вектор-функции $\boldsymbol{b}(\alpha)$ и скалярной функции $a(\alpha)$ мы будем предполагать двукратную дифференцируемость и, кроме того, будем считать, что $\boldsymbol{b}'(\alpha)$ и $\boldsymbol{b}''(\alpha)$ отличны от нуля.

Огибающая F удовлетворяет уравнениям

$$\boldsymbol{rb}+a=0,\quad \boldsymbol{rb}'+a'=0. \tag{*}$$

При фиксированном α эти уравнения определяют прямую g_α. Таким образом, поверхность F описывается прямой g_α.

Рассмотрим три плоскости:

$$\boldsymbol{rb}+a=0,\quad \boldsymbol{rb}'+a'=0,\quad \boldsymbol{rb}''+a''=0, \tag{**}$$

из коих первые две определяют огибающую. Относительно этих трех плоскостей можно сделать три основных предположения:

1. Три плоскости (**) не имеют общих точек ни при каком α.

2. Три плоскости (**) пересекаются в единственной точке S, одной и той же для всех α.

3. Три плоскости (**) пересекаются в точке $S(\alpha)$, положение которой существенно зависит от α в том смысле, что если $\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ — вектор точки $S(\alpha)$, то $\tilde{\boldsymbol{r}}'(\alpha)\neq 0$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\boldsymbol{n}(\alpha)$ — единичный вектор прямой g_α. Имеем:

$$\boldsymbol{bn}=0,\quad \boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n}=0.$$

Дифференцируя первые два равенства, получим:

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}+\boldsymbol{bn}'=0,\quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}'=0.$$

Отсюда $\boldsymbol{bn}'=0$, $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}'=0$. Так как, кроме того, $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}=0$, то $\boldsymbol{n}'=0$ и, следовательно, $\boldsymbol{n}$ не зависит от α. Итак, в этом случае все прямые g_α параллельны и поверхность F, будучи образована прямыми g_α, является *цилиндрической* (рис. 33, *а*).

Во втором случае прямые g_α проходят через фиксированную точку пространства (S) и, следовательно, поверхность F — *коническая* (рис. 33, *б*).

Рассмотрим, наконец, третий случай. Покажем, что *в этом случае прямые g_α, образующие поверхность F, касаются некоторой кривой* (рис. 33, *в*).

Пусть $\tilde{\boldsymbol r}(\alpha)$ — вектор точки пересечения плоскостей (**). Имеем

$$\tilde{\boldsymbol r}\boldsymbol b + a = 0, \quad \tilde{\boldsymbol r}\boldsymbol b' + a' = 0, \quad \tilde{\boldsymbol r}\boldsymbol b'' + a'' = 0.$$

Дифференцируя первое равенство и вычитая из него второе, получим $\tilde{\boldsymbol r}'\boldsymbol b = 0$. Аналогично из второго и третьего получается $\tilde{\boldsymbol r}'\boldsymbol b' = 0$. Отсюда $\tilde{\boldsymbol r}' \parallel (\boldsymbol b \times \boldsymbol b')$.

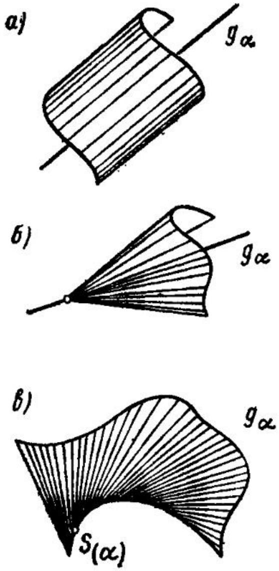

Рис. 33.

Так как прямая g_α проходит через точку $S(\alpha)$ и перпендикулярна векторам $\boldsymbol b$ и $\boldsymbol b'$, то она параллельна вектору $\boldsymbol b \times \boldsymbol b' \parallel \tilde{\boldsymbol r}'$ и является, таким образом, касательной к кривой

$$\boldsymbol r = \tilde{\boldsymbol r}(\alpha),$$

описываемой точкой $S(\alpha)$. Эта кривая называется *ребром возврата* поверхности.

Результаты настоящего параграфа можно резюмировать следующей теоремой:

Теорема. *Огибающая однопараметрического семейства плоскостей в основных случаях представляет собой область либо на цилиндрической поверхности либо на конической поверхности, либо на поверхности, образованной касательными пространственной кривой.*

Легко убедиться непосредственно, что и, обратно, в каждом из этих случаев касательные плоскости образуют однопараметрическое семейство. Предлагается проверить это в качестве упражнения.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в точке (x', y', z').

Ответ. $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1$.

2. Составить уравнение касательной плоскости к сфере

$$x=a\cos v\sin u,\quad y=a\cos v\cos u,\quad z=a\sin v$$

в точке $(a, 0, 0)$.

Ответ. $x-a=0$.

3. Показать, что все касательные плоскости поверхности, заданной уравнением

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

проходят через начало координат.

4. Показать, что поверхности

$$x^2+y^2+z^2=\alpha x,\quad x^2+y^2+z^2=\beta y,\quad x^2+y^2+z^2=\gamma z$$

пересекаются под прямым углом.

5. Показать, что нормали поверхности

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)$$

пересекают ось z.

6. Найти поверхность, образованную нормалями к поверхности

$$y=x\operatorname{tg} z$$

вдоль прямой

$$y=x,\quad z=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. Гиперболический параболоид.

7. Составить уравнение соприкасающегося параболоида к эллипсоиду, заданному в упражнении 1 в точке $(0, 0, c)$.

Ответ. $z=c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$.

8. Исследовать характер точек (эллиптические, гиперболические, параболические, точки уплощения) на поверхностях второго порядка.

9. Найти положение центра и радиус соприкасающейся сферы винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

в точке $(a, 0, 0)$.

Ответ. Центр $\left(-\frac{b^2}{a}, 0, 0\right)$; радиус $a + \frac{b^2}{a}$.

10. Найти огибающую семейства шаров

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ответ. Цилиндр $y^2 + z^2 = 1$.

11. Найти огибающую семейства плоскостей, отсекающих от координатного угла $x, y, z > 0$ тетраэдр постоянного объема.

Ответ. $xyz = \text{const}$.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ V

1. Доказать, что если гладкая поверхность Φ и плоскость α имеют только одну общую точку P, то плоскость является касательной плоскостью поверхности в точке P.

2. Доказать, что касательные плоскости поверхности переноса

$$r = U(u) + V(v)$$

вдоль каждой кривой переноса (линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$) параллельны некоторой прямой.

3. Доказать, что семейства софокусных эллипсоидов, однополых и двуполых гиперболоидов, задаваемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1,$$

пересекаются под прямым углом.

4. Доказать, что если поверхность касается плоскости вдоль некоторой линии, то каждая точка этой линии является либо параболической точкой, либо точкой уплощения.

5. Пусть Φ — поверхность, P — точка на ней и α — касательная плоскость в точке P. Доказать следующее:

1) если точка P эллиптическая, то все точки поверхности Φ, достаточно близкие к P, расположены с одной стороны плоскости α;

2) если точка P гиперболическая, то найдутся сколь угодно близкие к P точки поверхности, расположенные с разных сторон плоскости α;

3) если точка P параболическая или точка уплощения, то могут представиться обе возможности (привести примеры).

6. Доказать, что при проективном, в частности, аффинном, преобразовании свойство точки быть эллиптической, гиперболической или точкой уплощения сохраняется.

7. Доказать, что если все точки кривой γ на поверхности являются точками уплощения, то кривая плоская.

8. Будем называть кривую *сферической*, если все ее точки принадлежат некоторой сфере.

Пусть

$$r = r(t)$$

некоторая кривая и $P(t_0)$ — произвольная точка на ней. Для того чтобы эта кривая была сферической, необходимо и достаточно, чтобы кривая, заданная уравнением

$$r = \frac{r(t) - r(t_0)}{|r(t) - r(t_0)|^2},$$

была плоской. Доказать.

9. Пусть γ — произвольная кривая на поверхности Φ, проходящая через точку P. Показать, что касательная к кривой γ в точке P лежит в касательной плоскости к поверхности в этой точке.

10. Пусть U — соприкасающийся параболоид поверхности Φ в точке P. Доказать, что любая кривая на поверхности, проходящая через точку P, имеет в этой точке с параболоидом соприкосновение второго порядка.

11. Доказать, что при любом аналитическом преобразовании пространства

$$x' = \varphi_1(x, y, z), \qquad y' = \varphi_2(x, y, z), \qquad z' = \varphi_3(x, y, z),$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — аналитические функции с якобианом, отличным от нуля, свойство кривой и поверхиости находиться в соприкосновении данного порядка сохраняется.

12. Доказать, что если край поверхности принадлежит некоторой плоскости, то либо эта поверхность является областью на этой плоскости, либо на поверхности есть эллиптические точки.

Доказать, что иа замкнутой поверхности есть эллиптические точки.

13. Доказать, что если прямая имеет с поверхностью второго порядка соприкосновение второго порядка, то эта прямая вся лежит на поверхности.

14. Доказать, что семейство поверхностей, задаиных уравнениями

$$\varphi(x, y, z) = a,$$

где φ — регулярная функция переменных x, y, z, не имеет огибающей.

15. Если все нормали поверхности пересекают некоторую прямую, то поверхность является поверхностью вращения. Доказать.

16. Доказать, что если иормали поверхности проходят через одну и ту же точку, то эта поверхность есть сфера или область на сфере.

ГЛАВА VI

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть Φ — регулярная поверхность, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь ее регулярная параметризация и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке (u, v).

В теории поверхностей важную роль играют три квадратичные формы, связанные с поверхностью:

$$d\boldsymbol{r}^2, \quad -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n}, \quad d\boldsymbol{n}^2.$$

Первая квадратичная форма $I=d\boldsymbol{r}^2$ является положительно определенной, так как она принимает только неотрицательные значения и обращается в нуль только при $du=dv=0$. В самом деле, если $d\boldsymbol{r}^2=0$, то $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv=0$. А так как $(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\neq 0$, то это возможно только при условии $du=dv=0$.

Для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности мы будем употреблять обозначения: $\boldsymbol{r}_u^2=E$, $(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)=F$, $\boldsymbol{r}_v^2=G$. Таким образом,

$$I=d\boldsymbol{r}^2=(\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv)^2=\boldsymbol{r}_u^2\,du^2+2(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv+\boldsymbol{r}_v^2\,dv^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые вопросы теории поверхностей, связанные с первой квадратичной формой.

§ 1. Длина кривой на поверхности

Пусть Φ — простая поверхность и γ — лежащая на ней кривая, P_0 — точка, общая для кривой и поверхности, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь параметризация поверхности в окрестности точки P_0, а $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — какая-нибудь параметризация кривой в окрестности этой точки. Пусть u_0, v_0 и t_0 — значения параметров, соответствующие точке P_0.

При достаточно малом δ каждая точка $P(t)$ кривой, $|t-t_0|<\delta$, принадлежит параметризованной окрестности точки P_0 поверхности. Следовательно, каждой точке $P(t)$ однозначно соответствуют значения $u(t)$ и $v(t)$ так, что

$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. Равенства $u=u(t)$, $v=v(t)$ мы будем называть уравнениями кривой на поверхности.

Пусть Φ — регулярная поверхность и γ — регулярная кривая на ней. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — их регулярные параметризации в окрестности точки P_0, удовлетворяющие обычным условиям $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, $\boldsymbol{r}'^2(t) \neq 0$. Тогда в уравнениях кривой на поверхности

$$u=u(t), \qquad v=v(t)$$

функции $u(t)$ и $v(t)$ суть регулярные функции, причем $u'^2(t)+v'^2(t) \neq 0$.

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему о неявных функциях к системе уравнений

$$x(t)=x(u, v), \quad y(t)=y(u, v), \quad z(t)=z(u, v),$$

относительно которых заранее известно, что функции $u(t)$, $v(t)$ им удовлетворяют.

Пусть теперь Φ — общая поверхность и γ — общая кривая. По определению поверхность Φ является образом некоторой простой поверхности $\overline{\Phi}$ при некотором локально топологическом отображении φ в пространство. Мы будем говорить, что кривая γ лежит на поверхности Φ, если на поверхности $\overline{\Phi}$ существует кривая $\bar{\gamma}$, образом которой при отображении φ является кривая γ.

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — параметризация поверхности Φ в окрестности точки $\varphi(\overline{P})$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — параметризация кривой в окрестности этой точки, то найдутся функции $u=u(t)$, $v=v(t)$, удовлетворяющие равенству $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. Таким образом, *кривую на поверхности всегда можно задать в окрестности каждой точки равенствами $u=u(t)$, $v=v(t)$, причем, если поверхность и кривая регулярны, то $u(t)$ и $v(t)$ — регулярные функции.*

Рассмотрим длину кривой на поверхности. Пусть Φ — регулярная поверхность и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — ее регулярная параметризация. Пусть γ — регулярная кривая на поверхности, заданная уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$. Найдем выражение длины дуги отрезка кривой с концами в точках $P_0(t_0)$ и $P(t)$.

Имеем

$$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(u(t), v(t))|\, dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma(P_0, P)} |d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int\limits_{\gamma(P_0, P)} \sqrt{I},$$

где I — первая квадратичная форма поверхности.

Мы видим, что для измерения длин кривых на поверхности достаточно знать первую квадратичную форму поверхности. В связи с этим говорят, что первая квадратичная форма задает *метрику* поверхности, и часто называют ее *линейным элементом поверхности.*

Первая квадратичная форма не определяет поверхность однозначно. Легко привести примеры различных поверхностей, которые при соответствующей параметризации будут иметь одинаковые квадратичные формы. Но для двух произвольно взятых поверхностей, вообще говоря, не существует параметризаций, для которых первые квадратичные формы поверхностей совпадали бы. Мы еще вернемся к этому вопросу.

§ 2. Угол между кривыми на поверхности

Введем понятие направления на поверхности. *Направлением* $(du : dv)$ на поверхности Φ, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, мы будем называть направление вектора $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$. Это направление мы будем называть иногда просто (d).

Углом между направлениями $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$ мы будем называть угол между векторами

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv \quad \text{и} \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, \delta u + \boldsymbol{r}_v\, \delta v.$$

Найдем выражение для угла между направлениями (d) и (δ).

Имеем

$$d\boldsymbol{r} \cdot \delta\boldsymbol{r} = |d\boldsymbol{r}|\, |\delta\boldsymbol{r}| \cos\vartheta,$$

$$d\boldsymbol{r}^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = I(d),$$

$$\delta\boldsymbol{r}^2 = E\, \delta u^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G\, \delta v^2 = I(\delta),$$

$$d\boldsymbol{r}\, \delta\boldsymbol{r} = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v = I(d, \delta).$$

Отсюда для $\cos\vartheta$ получаем следующее выражение:

$$\cos\vartheta = \frac{I(d, \delta)}{\sqrt{I(d)\,I(\delta)}}.$$

Мы будем говорить, что кривая γ на поверхности, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, в точке (u, v) имеет направление $(du : dv)$, если вектор $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv$ является касательным вектором кривой в этой точке.

Кривая на поверхности, заданная уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, в точке $(u(t), v(t))$ имеет направление $(u'(t) : v'(t))$.

Если две кривые γ и $\bar{\gamma}$ на поверхности Φ имеют общую точку (u, v), то *углом* между ними в точке (u, v) будем называть угол между их направлениями в этой точке. Таким образом, угол между кривыми на поверхности — это угол между касательными к кривым и, следовательно, он не зависит ни от параметризации поверхности, ни от параметризации кривой.

Пример. Координатные линии на поверхности (линии $u = \text{const}$ и линии $v = \text{const}$) имеют направления $(0 : dv)$, $(\delta u : 0)$. Поэтому для угла между координатными линиями получаем выражение

$$\cos\vartheta = \frac{F\,dv\,\delta u}{\sqrt{G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда следует, что *координатная сеть на поверхности ортогональна (координатные линии пересекаются под прямым углом) тогда и только тогда, когда* $F = 0$.

Пусть в окрестности точки (u_0, v_0) регулярной поверхности Φ задано семейство кривых на поверхности уравнениями $\varphi(u, v) = \text{const}$, причем в точке (u_0, v_0) $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$. Построим второе семейство кривых, ортогональное первому. Для этого, предполагая, что второе семейство существует, составим дифференциальное уравнение для линий второго семейства.

Направление линии первого семейства в точке (u, v) будет $(\varphi_v : -\varphi_u)$. Если обозначить направление линии второго семейства в этой точке $(du : dv)$, условие ортогональности этих направлений будет

$$E\varphi_v\,du + F(\varphi_v\,dv - \varphi_u\,du) - G\varphi_u\,dv = 0$$

или

$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\,du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\,dv = 0. \qquad (*)$$

Это и есть дифференциальное уравнение линий второго семейства.

Теорема. *В окрестности каждой точки поверхности можно ввести регулярную ортогональную параметризацию, причем одно семейство координатных линий может быть взято произвольно.*

Действительно, пусть $\varphi(u, v) = \text{const}$ — семейство кривых на поверхности, где $\varphi(u, v)$ — регулярная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$. Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0,$$
$$(E\varphi_v - F\varphi_u) du + (F\varphi_v - G\varphi_u) dv = 0.$$

Интегральные кривые первого уравнения суть кривые заданного семейства, а интегральные кривые второго семейства — их ортогональные траектории.

Согласно § 3 гл. IV поверхность можно параметризовать так, что указанные семейства будут координатными линиями, так как

$$\begin{vmatrix} E\varphi_v - F\varphi_u & F\varphi_v - G\varphi_u \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} = E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2 \neq 0$$

в силу определенности первой квадратичной формы.

Теорема доказана.

§ 3. Площадь поверхности

Пусть F — гладкая поверхность, G — область на ней, ограниченная конечным числом кусочно-гладких кривых. Разобьем область G на малые области кусочно-гладкими кривыми. Пусть g — одна из таких областей. Возьмем в области g произвольную точку P и спроектируем эту область на касательную плоскость в точке P. Если область g достаточно мала, то это проектирование одно-однозначное, и в касательной плоскости получится область $\bar{g}$, ограниченная также кусочно-гладкими кривыми. Обозначим $\sigma(\bar{g})$ площадь области $\bar{g}$ (рис. 34).

Под *площадью* области G поверхности F мы будем понимать

$$\lim \sum \sigma(\bar{g}),$$

где суммирование распространяется на все области g разбиения G, а предельный переход осуществляется при условии, что области g разбиения G неограниченно убывают по своим размерам.

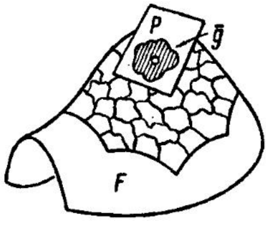

Рис. 34.

Данное определение площади поверхности вполне соответствует наглядному представлению об измерении площади, которое обычно связывают с разбиением поверхности и «спрямлением» отдельных кусков. Мы покажем, что площадь поверхности в смысле данного определения действительно обладает характерным для нее свойством аддитивности, а также найдем формулу для вычисления площади в случае произвольной параметризации поверхности.

Предположим для простоты вывода, что на поверхности может быть введена единая гладкая параметризация

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v).$$

Области G на поверхности соответствует некоторая область $\tilde{G}$ плоскости uv, ограниченная кусочно-гладкими кривыми, а разбиению области G кусочно-гладкими кривыми на области g соответствует разбиение области $\tilde{G}$ кусочно-гладкими кривыми на области $\tilde{g}$.

Определим площадь $\sigma(\bar{g})$ области $\bar{g}$. Для этого введем прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв точку P поверхности за начало координат, касательную плоскость в P за плоскость xy, а нормаль к ней — за ось z.

Кусок g поверхности F в декартовых координатах задается уравнениями

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad (u, v)\subset\tilde{g}.$$

Равенствами

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad (u, v)\subset\tilde{g}$$

устанавливается взаимно однозначное отображение области $\bar{g}$ на $\tilde{g}$. Числа u, v можно рассматривать как криволинейные координаты в области $\bar{g}$.

Площадь области в криволинейных координатах, как известно, вычисляется по формуле

$$\sigma(\bar{g}) = \iint\limits_{\tilde{g}} \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| du\, dv.$$

Вектор $r_u \times r_v$ направлен по нормали к поверхности, а так как в точке P нормаль совпадает с осью z, то в этой точке абсолютная величина вектора $r_u \times r_v$ равна абсолютной величине его компоненты по оси z, т. е.

$$|r_u \times r_v| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда, по непрерывности, следует, что для любых u, v из $\tilde{g}$

$$\left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = |r_u \times r_v| + \varepsilon_g(u, v),$$

где ε_g сколь угодно мало, если малы размеры области g.

Для суммы площадей $\sigma(\bar{g})$ имеем

$$\sum \sigma(\bar{g}) = \sum \iint\limits_{\tilde{g}} (|r_u \times r_v| + \varepsilon_g(u, v))\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{G} |r_u \times r_v|\, du\, dv + \sum \iint\limits_{\tilde{g}} \varepsilon_g\, du\, dv.$$

Если разбиение области G на области g достаточно мелкое, величины ε_g в силу равномерной непрерывности $r_u \times r_v$ в $\tilde{G}$ меньше произвольно малого $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\left| \sum \iint\limits_{\tilde{g}} \varepsilon_g\, du\, dv \right| < \varepsilon \sum \sigma(\tilde{g}) = \varepsilon\sigma(\tilde{G}),$$

где $\sigma(\tilde{G})$ — площадь области $\tilde{G}$.

Отсюда следует, что при неограниченном убывании областей g разбиения области G

$$\sum \sigma(\bar{g}) \to \iint\limits_{\tilde{G}} |r_u \times r_v|\, du\, dv.$$

Тем самым доказано существование площади и найдено выражение для нее

$$\sigma(G)=\iint |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv.$$

Аддитивность площади поверхности следует из аддитивности интеграла. Действительно, пусть область G разбивается кусочно-гладкой кривой на две области — G_1 и G_2, пусть $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ — соответствующие области плоскости uv. Имеем

$$\iint\limits_{\tilde{G}} |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv=\iint\limits_{\tilde{G}_1} |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv+\iint\limits_{\tilde{G}_2} |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv.$$

А это значит:

$$\sigma(G)=\sigma(G_1)+\sigma(G_2),$$

что и выражает собой свойство аддитивности площади поверхности.

Теперь, когда аддитивность площади доказана, при фактическом вычислении площади поверхности мы можем разбить поверхность на части и в каждой из этих частей пользоваться своей параметризацией.

В заключение покажем, что площадь поверхности определяется только ее первой квадратичной формой. Действительно,

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2=\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2=EG-F^2.$$

Отсюда

$$\sigma=\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z=$ $=z(x, y)$,

$$\sigma=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

§ 4. Конформное отображение

Пусть Φ_1 и Φ_2 — регулярные поверхности. Топологическое отображение поверхности Φ_1 на поверхность Φ_2 называется ***конформным***, если оно сохраняет углы между кривыми в том смысле, что соответствующие кривые на этих поверхностях пересекаются под одинаковыми углами.

Теорема. *Если регулярные поверхности Φ_1 и Φ_2 параметризованы так, что коэффициенты их первых квадратичных форм пропорциональны, то отображение одной поверхности на другую, при котором сопоставляются точки с одинаковыми координатами, конформно.*

Обратно, если поверхности Φ_1 и Φ_2 параметризовать так, что соответствие точек с одинаковыми координатами конформно, то первые квадратичные формы поверхностей пропорциональны.

Доказательство. Пусть

$$I_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$I_2 = \lambda(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

первые квадратичные формы поверхностей Φ_1 и Φ_2. Если отображение Φ_1 на Φ_2 заключается в сопоставлении точек с одинаковыми координатами, то соответствующие кривые имеют одинаковые внутренние уравнения $u = u(t)$, $v = v(t)$ и, следовательно, для угла между соответствующими кривыми получается одно и то же выражение, т. е. отображение конформно. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть (u, v) — произвольная параметризация поверхности Φ_1. Параметризуем поверхность Φ_2, сопоставляя произвольной ее точке в качестве координат координаты соответствующей точки Φ_1 при конформном отображении. Пусть

$$I_1 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$
$$I_2 = E_2\,du^2 + 2F_2\,du\,dv + G_2\,dv^2$$

первые квадратичные формы поверхностей, соответствующие этим параметризациям. Покажем, что коэффициенты E_1, F_1, G_1 пропорциональны E_2, F_2, G_2.

В силу конформности отображения ортогональность направлений (d) и (δ) относительно формы I_1 влечет за собой ортогональность их относительно формы I_2. Поэтому из

$$E_1\,du\,\delta u + F_1(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_1\,dv\,\delta v = 0$$

следует

$$E_2\,du\,\delta u + F_2(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_2\,dv\,\delta v = 0.$$

Отсюда, исключая δu, δv, получаем:

$$\frac{E_1du+F_1dv}{E_2du+F_2dv}=\frac{F_1du+G_1dv}{F_2du+G_2dv}.$$

Ввиду произвола du и dv при $dv=0$, получаем

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{F_1}{F_2},$$

а при $du=0$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{G_1}{G_2}.$$

Теорема доказана полностью.

Конформное отображение, помимо того, что оно сохраняет углы, обладает еще одним замечательным свойством. Именно, *достаточно малые соответствующие фигуры на поверхностях при конформном отображении в первом приближении подобны.* Действительно, пусть F_1 — малая фигура на поверхности Φ_1. Расстояние между ее точками (u, v) и $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ в первом приближении равно

$$E\,\Delta u^2+2F\,\Delta u\,\Delta v+G\,\Delta v^2.$$

Расстояние между соответствующими точками фигуры F_2 на поверхности Φ_2 в первом приближении равно

$$\lambda\,(E\,\Delta u^2+2F\,\Delta u\,\Delta v+G\,\Delta v^2).$$

Таким образом, коэффициент искажения равен λ и, следовательно, почти постоянен, если фигура F_1 достаточно мала.

Теорема. *Пусть Φ_1 и Φ_2 — регулярные поверхности и P_1, P_2 — произвольные точки на этих поверхностях.*

Тогда существует конформное отображение некоторой окрестности точки P_1 поверхности Φ_1 на некоторую окрестность точки P_2 поверхности Φ_2.

Доказательство этой теоремы основано на возможности параметризовать регулярную поверхность в окрестности произвольной точки так, что ее первая квадратичная форма при этой параметризации имеет вид

$$I=\lambda(u, v)(du^2+dv^2).$$

Мы не будем приводить доказательства этого утверждения, укажем только, что если поверхности Φ_1 и Φ_2 параметризовать таким образом в окрестностях точек P_1 и P_2 соответственно, то конформное отображение окрестности точки P_1 поверхности Φ_1 на окрестность точки P_2 поверхности Φ_2 получается при сопоставлении точек с одинаковыми координатами.

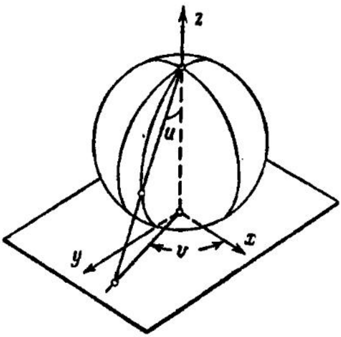

Рис. 35.

В заключение приведем пример конформного отображения сферы на плоскость.

Пусть ω — сфера радиуса R с центром в точке $(0, 0, R)$. Рассмотрим отображение сферы ω на плоскость xy, которое заключается в проектировании ее из полюса $S(0, 0, 2R)$. Это отображение называется *стереографической проекцией* (рис. 35).

Введем в качестве криволинейных координат углы u и v, показанные на рис. 35. При этом уравнения плоскости

$$x = 2R \operatorname{tg} u \cos v, \quad y = 2R \operatorname{tg} u \sin v,$$

а сферы —

$$x = 2R \sin u \cos u \cos v, \quad y = 2R \sin u \cos u \sin v,$$

$$z = 2R \sin^2 u.$$

Линейный элемент плоскости

$$ds^2 = \frac{4R^2}{\cos^4 u}(du^2 + \sin^2 u \cos^2 u \, dv^2),$$

а сферы —

$$ds^2 = 4R^2 (du^2 + \sin^2 u \cos^2 u \, dv^2).$$

Отсюда заключаем, что отображение конформно.

§ 5. Изометричные поверхности. Изгибание поверхностей.

Поверхности Φ_1 и Φ_2 называются *изометричными*, если существует одно-однозначное отображение поверхности Φ_1 на поверхность Φ_2, при котором соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины.

Теорема. *Если регулярные поверхности Φ_1 и Φ_2 можно параметризовать так, что их первые квадратичные формы будут одинаковы, то поверхности изометричны. Изометрическое отображение заключается в сопоставлении точек с одинаковыми координатами.*

Обратно, если поверхности Φ_1 и Φ_2 изометричны, то они могут быть параметризованы так, что их первые квадратичные формы будут одинаковы.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Достаточно заметить, что если кривая γ_1 на поверхности Φ_1 задается уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$, то соответствующая ей кривая на поверхности Φ_2 задается теми же уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$, и воспользоваться формулой для длины дуги кривой.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть P_1 — произвольная точка поверхности Φ_1 и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u, v)$ — любая регулярная параметризация поверхности в окрестности этой точки.

Пусть $P_2(u, v)$ — точка поверхности Φ_2, соответствующая по изометрии $P_1(u, v)$, и $\boldsymbol{r}_2(u, v)$ — вектор этой точки. Уравнение

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u, v)$$

задает некоторую параметризацию поверхности Φ_2 в окрестности точки P_2. Регулярность этой параметризации пока не может быть установлена, это может быть сделано в гл. IX. Но допустим, что параметризация $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u, v)$ поверхности Φ_2 регулярна. Покажем, что первая квадратичная форма поверхности Φ_2 при такой параметризации совпадает с первой квадратичной формой поверхности Φ_1.

Пусть γ_1 — произвольная кривая на поверхности Φ_1, $u=u(t)$, $v=v(t)$ — ее уравнения. Соответствующая ей по изометрии кривая на поверхности Φ_2 задается теми же уравнениями. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E_1 u'^2 + 2F_1 u'v' + G_1 v'^2}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E_2 u'^2 + 2F_2 u'v' + G_2 v'^2}\,dt.$$

Так как это равенство верно при любом t, то подынтегральные функции равны. Кривая γ_1 совершенно произвольна, поэтому подынтегральные функции равны для любых значений u' и v', а это возможно только при $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Теорема доказана.

Равные поверхности, очевидно, изометричны. Обратное, вообще говоря, неверно. Нетрудно указать примеры изометричных и в то же время не равных друг другу поверхностей. Приведем пример.

Прямоугольная область $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$ на плоскости xy изометрична области на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, определяемой условиями: $0 < z < 1$, $x > 0$, $y > 0$. Достаточно заметить, что указанная область на цилиндре допускает параметризацию: $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 1$. Линейный элемент цилиндра, соответствующий такой параметризации, $du^2 + dv^2$. Отсюда видно, что отображение, задаваемое равенствами $x = u$, $y = v$, изометрическое.

Так как углы между кривыми на поверхности и площадь поверхности определяются первой квадратичной формой поверхности, а изометричные поверхности при соответствующей параметризации имеют одинаковые первые квадратичные формы, то *при изометрическом отображении сохраняются углы между кривыми и площади*, т. е. соответствующие кривые изометричных поверхностей образуют одинаковые углы, а соответствующие области имеют одинаковые площади.

Мы показали на примере, что различные поверхности могут иметь при соответствующей параметризации одинаковые первые квадратичные формы. Возникает вопрос: в какой степени определяется поверхность первой квадратичной формой и существует ли поверхность, имеющая произвольно заданную квадратичную форму своей первой квадратичной формой?

Оказывается, поверхность «в малом» далеко не определяется своей первой квадратичной формой. Известна, например, следующая теорема. *Для каждой достаточно малой окрестности ω точки P аналитической поверхности существуют поверхности, изометричные ω и не равные ей.*

Некоторые поверхности «в целом» первой квадратичной формой определяются однозначно. Так, например, *любая регулярная замкнутая выпуклая поверхность Φ первой квадратичной формой определяется однозначно,* в том смысле, что любая регулярная поверхность Φ', изометричная Φ, равна Φ. Можно назвать достаточно широкий класс бесконечных поверхностей, однозначно определяемых первой квадратичной формой. В качестве примера поверхности этого класса можно указать любой эллиптический параболоид.

Изгибанием поверхности называется такая непрерывная ее деформация, при которой длины кривых на поверхности не изменяются. Наглядное представление об изгибании поверхности может дать изгибание листа бумаги.

Так как при изгибании поверхности длины кривых не изменяются и, следовательно, поверхность в любой момент изгибания изометрична исходной поверхности, то *при соответствующей параметризации первая квадратичная форма при изгибании поверхности не изменяется.*

Оказывается, поверхности «в малом», как правило, изгибаемы. Так, например, имеет место теорема: *у каждой точки аналитической поверхности, не являющейся точкой уплощения, существует окрестность, допускающая непрерывные изгибания.*

Среди поверхностей «в целом» существуют поверхности, не допускающие непрерывных изгибаний. Таковы, например, все замкнутые выпуклые поверхности.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u).$$

Ответ. $I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\,du^2 + \varphi^2 dv^2$.

2. Показать, что поверхность вращения можно параметризовать так, что ее первая квадратичная форма будет иметь вид

$$I = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $u = v$, на поверхности с первой квадратичной формой

$$I = du^2 + \mathrm{sh}^2 u\, dv^2.$$

Ответ. $s = |\mathrm{sh}\, u_2 - \mathrm{sh}\, u_1|$.

4. Найти угол, под которым пересекаются координатные линии $x = x_0$, $y = y_0$ на поверхности $z = axy$.

Ответ. $\cos\vartheta = \dfrac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1 + a^2 x_0^2}\sqrt{1 + a^2 y_0^2}}$.

5. Показать, что на геликоиде

$$x = au\cos v, \quad y = au\sin v, \quad z = bv$$

координатная сеть u, v ортогональна.

6. Найти семейство кривых, пересекающих под прямым углом прямолинейные образующие $x = \mathrm{const}$ параболоида $z = axy$.

Ответ. $(1 + a^2x^2)\, y^2 = \mathrm{const}$.

7. Найти кривые на сфере, пересекающие ее меридианы под постоянным углом (такие кривые называются локсодромы).

8. Найти площадь четырехугольника на геликоиде (упражнение 5), ограниченного кривыми:

$$u = 0, \quad u = \frac{b}{a}, \quad v = 0, \quad v = 1.$$

Ответ. $\sigma = \dfrac{b^2}{a}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

9. Показать, что площади областей на параболоидах

$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2), \qquad z = axy,$$

проектирующиеся на одну и ту же область плоскости xy, равны.

10. Показать, что если поверхность допускает такую параметризацию, при которой коэффициенты первой квадратичной формы не зависят от u и v, то эта поверхность локально изометрична плоскости.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ VI

1. Доказать, что если $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — вещественная и соответственно мнимая часть функции комплексного переменного $x + iy$, то площади областей поверхностей

$$z = U(x, y), \quad z = V(x, y),$$

проектирующихся на одну и ту же область плоскости xy, равны.

2. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения (упражнение 1) на плоскость, при котором ме-

ридианы поверхности (линии $v = \text{const}$) переходят в прямые, проходящие через начало координат, а параллели (линии $u = \text{const}$) — в круги с центром в начале координат.

Рассмотреть частный случай, когда

$$\varphi(u) = \cos u, \quad \psi(u) = \sin u \text{ (сфера)}.$$

3. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы и параллели поверхности переходят в прямые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Рассмотреть частный случай, когда поверхность — сфера.

4. Доказать, что сферу даже локально нельзя изометрически отобразить на плоскость.

5. Если $U(x, y) + iV(x, y)$ — аналитическая функция комплексной переменной $x + iy$, причем в точке (x_0, y_0)

$$\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

то отображение плоскости на себя, при котором точке с декартовыми координатами x, y сопоставляется точка с декартовыми координатами $U(x, y)$, $V(x, y)$, конформно. Доказать.

6. Пусть

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

линейный элемент аналитической поверхности. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

в комплексной области. Пусть $\varphi(u, v) = \text{const}$ — решение этого уравнения, $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — вещественная и мнимая части функции $\varphi(x, y)$. Тогда, если

$$\begin{vmatrix} U_u & V_u \\ U_v & V_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

то отображение поверхности на плоскость, при котором точке (u, v) поверхности сопоставляется точка плоскости с декартовыми координатами U и V, является конформным. (На этом может быть основано доказательство теоремы § 4 гл. 6 для случая аналитических поверхностей.)

7. Отображение одной поверхности на другую называется *эквиареальным*, если соответствующие при этом отображении области имеют одинаковые площади.

Доказать, что если отображение одной поверхности на другую конформно и эквиареально, то оно изометрическое.

8. Доказать, что любое изометрическое отображение плоскости на себя есть либо движение либо движение с зеркальным отображением.

9. Φ_1 и Φ_2 — изометричные поверхности, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ — их параметризации. Изометрическое отображение заключается в сопоставлении друг другу точек с одинаковыми координатами.

Пусть $\Phi_{\lambda,\mu}$ — поверхность, задаваемая уравнением $\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r}_1(u, v) + \mu \boldsymbol{r}_2(u, v)$. Доказать, что поверхности $\Phi_{\lambda,\mu}$ и $\Phi_{\mu,\lambda}$ изометричны.

10. Показать, что существует изометрическое отображение геликоида

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = mv$$

на катеноид

$$x = a\cos\beta, \ y = a\sin\beta, \quad z = m \operatorname{arch}\frac{a}{m},$$

при котором прямолинейным образующим геликоида соответствуют меридианы катеноида.

11. Доказать, что любая винтовая поверхность допускает изометрическое отображение на некоторую поверхность вращения, при котором винтовым линиям соответствуют параллели (теорема Бура).

12. Сеть кривых на поверхности называется сетью Чебышёва, если у любого четырехугольника, образуемого линиями сети, противоположные стороны равны.

Для того чтобы координатная сеть на поверхности была чебышёвской, необходимо и достаточно, чтобы $E_v = G_u = 0$. Доказать.

13. Доказать, что если координатная сеть чебышёвская, то координаты u, v можно выбрать таким образом, что линейный элемент поверхности примет вид

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

где ω — угол, образуемый координатными линиями.

14. Доказать, что на поверхности переноса

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

координатные линии образуют чебышёвскую сеть.

ГЛАВА VII

ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть Φ — регулярная поверхность, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь ее регулярная параметризация, $\boldsymbol{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали поверхности в точке $P(u, v)$.

Второй квадратичной формой поверхности называется квадратичная форма

$$-d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n} = (-\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{n}_u)\, du^2 + (-\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{n}_u)\, du\, dv + (-\boldsymbol{r}_v \boldsymbol{n}_v)\, dv^2.$$

Для коэффициентов этой формы мы будем употреблять следующие обозначения:

$$-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u = L, \quad -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u = 2M, \quad -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v = N.$$

Так как $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ и, следовательно,

$$d(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = (d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) + (d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}) = 0,$$

то

$$II = d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,du\,dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,dv^2.$$

Отсюда

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}, \quad M = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n}, \quad N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}.$$

Так как $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$, а $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG-F^2}$, то

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

§ 1. Кривизна кривой, лежащей на поверхности

Пусть Φ — регулярная поверхность, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь ее регулярная параметризация, γ — регулярная кривая на поверхности, проходящая через точку $P(u, v)$

и имеющая в этой точке направление $(du:dv)$. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — естественная параметризация кривой γ.

Рассмотрим скалярное произведение $(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n})$. Вектор $\boldsymbol{r}''$ направлен по главной нормали кривой, а по величине равен кривизне кривой. Отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n})=k\cos\vartheta,$$

где k — кривизна кривой, а ϑ — угол, образуемый главной нормалью кривой и нормалью к поверхности (рис. 36). Но

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_{uu}u'^2+2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_u u''+\boldsymbol{r}_v v'')\,\boldsymbol{n}=$$
$$=(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,u'^2+2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,u'v'+(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,v'^2.$$

Поэтому

$$k\cos\vartheta=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\frac{II}{I}.$$

Правая часть этого равенства зависит только от направления кривой в точке $P(u,\ v)$. Таким образом,

$$k\cos\vartheta=k_0=\mathrm{const}$$

в точке $P(u,\ v)$ для всех кривых γ, проходящих через эту точку и имеющих в ней одно и то же направление (т. е. одну и ту же касательную).

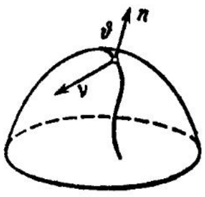

Рис. 36.

Равенство

$$k\cos\vartheta=k_0=\mathrm{const}$$

составляет содержание теоремы Менье.

Величина k_0 называется *нормальной кривизной* поверхности в данном направлении $(du:dv)$. С точностью до знака она равна кривизне кривой, которая получается в сечении поверхности с плоскостью, перпендикулярной касательной плоскости и содержащей направление $(du:dv)$.

Нормальная кривизна поверхности в данном направлении совпадает с нормальной кривизной соприкасающегося параболоида в том же направлении.

Действительно, если поверхность и соприкасающийся параболоид ее в точке P отнести к прямоугольным декартовым координатам, приняв касательную плоскость в этой точке за плоскость xy, а нормаль к ней за ось z, то поверхность и параболоид задаются уравнениями

$$z = z(x, y),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(z_{xx}|_P x^2 + 2z_{xy}|_P xy + z_{yy}|_P y^2\right).$$

Отсюда видно, что первая и вторая квадратичные формы поверхности и параболоида в точке P одинаковы, а следовательно, равны нормальные кривизны.

Приведенное соображение позволяет найти уравнение соприкасающегося параболоида в системе координат, естественно связанной с произвольной параметризацией (u, v) поверхности, приняв касательную плоскость в точке $P(u_0, v_0)$ за плоскость xy, нормаль к ней — за ось z и $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ — за базисные векторы.

Уравнение параболоида, очевидно, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r} = (u - u_0)\boldsymbol{r}_u + (v - v_0)\boldsymbol{r}_v + \\ + \frac{1}{2}\left\{A(u - u_0)^2 + 2B(u - u_0)(v - v_0) + C(v - v_0)^2\right\}\boldsymbol{n}.$$

Нормальная кривизна параболоида в направлении $(du : dv)$ будет

$$\frac{A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2}{\boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2}.$$

Сравнивая это выражение с нормальной кривизной поверхности в том же направлении и принимая во внимание, что du и dv произвольны, заключаем:

$$A = L, \quad B = M, \quad C = N.$$

Поэтому уравнение параболоида в параметрической форме

$$x = u - u_0, \quad y = v - v_0,$$

$$z = \frac{1}{2}\left\{L(u - u_0)^2 + 2M(u - u_0)(v - v_0) + N(v - v_0)^2\right\},$$

что эквивалентно

$$z = \frac{1}{2}\left(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right).$$

Отложим из произвольной точки $P(u, v)$ поверхности в каждом направлении $(du:dv)$ отрезок, равный $\left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}}$, где k — нормальная кривизна поверхности в этом направлении.

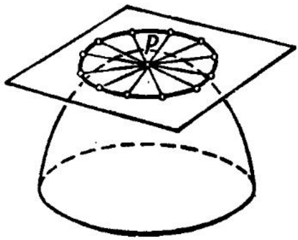

Рис. 37.

Геометрическое место концов этих отрезков называется *индикатрисой кривизны* поверхности в точке P (рис. 37).

Часто называют ее также *индикатрисой Дюпена.*

Выясним, что представляет собой индикатриса кривизны. Для этого введем в касательной плоскости поверхности декартовы координаты, приняв точку касания за начало координат, прямые, содержащие векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — за оси координат, а сами векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — за базисные векторы. Пусть x и y — координаты точки индикатрисы кривизны, соответствующей направлению $(du:dv)$. Имеем

$$x\boldsymbol{r}_u + y\boldsymbol{r}_v = \left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv}{|\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv|}.$$

Возводя это равенство в квадрат и замечая, что $x:y = du:dv$, получаем:

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{|L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|}.$$

Отсюда

$$|Lx^2 + 2M\,xy + Ny^2| = 1.$$

Это и есть уравнение индикатрисы кривизны.

Таким образом, *индикатриса кривизны представляет собой эллипс — в эллиптической точке поверхности* ($LN - M^2 > 0$), *пару сопряженных гипербол — в гиперболической точке* ($LN - M^2 < 0$), *пару параллельных прямых — в параболической точке* ($LN - M^2 = 0$).

Очевидно, *поверхность и ее соприкасающийся параболоид имеют одну и ту же индикатрису кривизны.*

Индикатриса кривизны может быть введена и другим, более геометрическим способом. Пусть P — произвольная точка поверхности и α — касательная плоскость в этой точке. Обозначим M_h геометрическое место точек поверхности, расстояние которых от α равно h. Подвергнем его преобразованию подобия относительно центра P с коэффициентом подобия $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Полученное множество точек обозначим $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$.

Уравнение поверхности, если касательную плоскость в P принять за плоскость xy, а нормаль за ось z, будет

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y),$$

где $\varepsilon(x, y) \to 0$ при $x, y \to 0$. Отсюда точки M_h удовлетворяют уравнению

$$h = \frac{1}{2}\left|(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y)\right|.$$

Так как координаты точки из $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ отличаются от координат соответствующей точки M_h множителем $\sqrt{h}$, то они удовлетворяют уравнению

$$1 = \left|\frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x\sqrt{h}, y\sqrt{h})\right|.$$

Отсюда видно, что $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ сходится к индикатрисе кривизны при $h \to 0$.

§ 2. Асимптотические направления. Асимптотические линии. Сопряженные направления. Сопряженные сети на поверхности

Направление $(du : dv)$ на регулярной поверхности Φ в точке $P(u, v)$ называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении равна нулю. Таким образом, направление $(du : dv)$ будет асимптотическим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Отсюда следует, что *в эллиптической точке поверхности не существует асимптотических направлений, в гиперболической точке существует два асимптотических направления, в параболической точке — одно асимптотическое направление, наконец, в точке уплощения любое направление является асимптотическим.*

Кривая на поверхности называется *асимптотической линией*, если ее направление в каждой точке является асимптотическим.

Отсюда следует, что

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

есть дифференциальное уравнение асимптотических линий.

Если на поверхности расположена прямая, то она, очевидно, будет асимптотической линией.

Отметим одно простое свойство асимптотических. *Касательная плоскость поверхности в каждой точке асимптотической линии является соприкасающейся плоскостью.* Действительно, если в точке P асимптотической линии γ кривизна равна нулю, то касательная плоскость поверхности в точке P является соприкасающейся уже потому, что она проходит через касательную кривой. Если же кривизна γ в точке P отлична от нуля, то касательная плоскость содержит векторы $d\boldsymbol{r}$ и $d^2\boldsymbol{r}$ (первый потому, что плоскость касательная, а второй потому, что кривая γ асимптотическая и, следовательно, удовлетворяет условию $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$). Отсюда следует, что и в этом случае касательная плоскость является соприкасающейся плоскостью асимптотической.

Выясним, при каком условии координатные линии на поверхности $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ будут асимптотическими. Подставляя последовательно $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ в уравнение асимптотических, заключаем, что *координатная сеть будет асимптотической тогда и только тогда, когда коэффициенты L и N второй квадратичной формы равны нулю.*

Теорема. *В окрестности гиперболической точки поверхности всегда может быть введена параметризация, при которой координатными линиями будут асимптотические.*

Это следует из общей теоремы § 3 гл. IV, так как асимптотические линии удовлетворяют уравнению

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

для которого условия упомянутой теоремы выполнены ($LN - M^2 < 0$).

Пусть P — произвольная точка поверхности Φ, $(du:dv)$, $(\delta u:\delta v)$ — два направления в точке P на поверхности. Направления (d) и (δ) называются *сопряженными*, если содержащие их прямые g_d и g_δ являются сопряженными диаметрами индикатрисы Дюпена в точке P.

Таким образом, для того чтобы направления (d) и (δ) были сопряженными, необходимо и достаточно выполнения условия

$$L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие сопряженности направлений d и δ допускает компактную запись:

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{n} = 0$$

или

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n} = 0.$$

Асимптотические направления являются самосопряженными.

Пусть на поверхности имеем два семейства линий — γ'_α и γ''_β, — образующие сеть в том смысле, что через каждую точку поверхности проходит по одной линии каждого семейства. Тогда сеть линий, образованная семействами γ'_α и γ''_β, называется *сопряженной сетью*, если линии сети различных семейств в каждой точке имеют сопряженные направления.

Если координатная сеть является сопряженной сетью, то коэффициент M второй квадратичной формы поверхности равен нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать условие сопряженности для направлений $(du:0)$ и $(0:\delta v)$.

В окрестности каждой точки поверхности, не являющейся точкой уплощения, может быть введена параметризация так, что координатные линии будут *образовывать сопряженную сеть. При этом одно семейство координатных линий можно взять произвольно, лишь бы линии этого семейства не имели асимптотических направлений.*

§ 3. Главные направления на поверхности. Линии кривизны

Направление $(du : dv)$ на поверхности называется *главным направлением*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении достигает экстремального значения. Таким образом, *это не что иное, как направления, совпадающие с направлениями осей индикатрисы кривизны.*

Отсюда следует, что в каждой точке поверхности в общем случае имеется два главных направления. Совпадая с направлениями осей индикатрисы кривизны, *главные направления ортогональны и сопряжены*, а следовательно, удовлетворяют условиям

$$I(d, \delta) = E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

(ортогональность),

$$II(d, \delta) = L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$$

(сопряженность).

Исключая из этих уравнений δu и δv, получим:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы направление $(du : dv)$ было главным направлением. Его можно записать и в другой, более симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Главные направления не определены в двух случаях: в случае точки уплощения, так как в ней любое направление является главным (нормальная кривизна в любом направлении равна нулю), и в специальном случае эллиптической точки, когда индикатриса кривизны — круг; такая точка называется *шаровой*. В шаровой точке, так же как и в точке уплощения, любое направление является главным. Это обстоятельство отражено в условии (*), определяющем главные направления. Оно удовлетворяется тождественно только в двух случаях: $L=M=N=0$ (точка уплощения) и в случае пропорциональности коэффициентов первой квадратичной формы коэффициентам второй квадратичной формы (шаровая точка).

Нормальные кривизны поверхности, соответствующие главным направлениям, называются *главными кривизнами*.

Теорема Родрига. *Если направление (d) является главным направлением, то*

$$d\boldsymbol{n} = -k\,d\boldsymbol{r},$$

где k — нормальная кривизна поверхности в этом направлении. Обратно, если в направлении (d)

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\,d\boldsymbol{r},$$

то (d) является главным направлением.

Доказательство. Пусть (δ) — другое главное направление, перпендикулярное первому. Вектор $d\boldsymbol{n}$, будучи перпендикулярен $\boldsymbol{n}$, допускает представление

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\,d\boldsymbol{r} + \mu\,\delta\boldsymbol{r}.$$

Умножая это равенство на $\delta\boldsymbol{r}$ и замечая, что $d\boldsymbol{n}\,\delta\boldsymbol{r}=0$ в силу сопряженности направлений (d) и (δ) и $d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$ в силу ортогональности этих направлений, получим:

$$\mu\,\delta\boldsymbol{r}^2 = 0.$$

Отсюда $\mu=0$. Итак, $d\boldsymbol{n}=\lambda\,d\boldsymbol{r}$. Умножая это равенство на $d\boldsymbol{r}$, получим:

$$(d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}) = \lambda\,d\boldsymbol{r}^2.$$

Отсюда следует, что $\lambda=-k$. Прямое утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть направление (d) таково, что

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\,d\boldsymbol{r}.$$

Покажем, что оно является главным. Пусть (δ) — направление, перпендикулярное (d). Тогда, умножая равенство $dn = \lambda\, dr$ на δr, получим $dn\, \delta r = 0$. Но это значит, что направления (d) и (δ) сопряженные. Так как они, кроме того, ортогональны, то они главные.

Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если ее направление в каждой точке является главным направлением.

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

является дифференциальным уравнением линий кривизны.

Если координатные линии на поверхности являются линиями кривизны, то коэффициенты F и M первой и соответственно второй квадратичных форм равны нулю.

$F = 0$ в силу ортогональности координатной сети, а $M = 0$ в силу сопряженности.

Теорема. *В окрестности каждой точки P поверхности, не являющейся шаровой точкой или точкой уплощения, поверхность можно параметризовать так, что координатные линии будут линиями кривизны.*

Действительно, дифференциальное уравнение линий кривизны имеет вид

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0. \qquad (**)$$

Так как в каждой точке, близкой к P, есть два и только два главных направления, то трехчлен

$$A + 2B\xi + C\xi^2$$

имеет два вещественных корня. Поэтому $AC - B^2 < 0$. По теореме § 3 гл. IV отсюда следует, что существует параметризация, при которой координатные линии будут интегральными кривыми уравнения (**), т. е. линиями кривизны.

В заключение докажем одну теорему, которая в некоторых случаях позволяет просто находить линии кривизны поверхности.

Теорема. *Если две поверхности пересекаются вдоль некоторой кривой γ под постоянным углом и* *если эта кривая является линией кривизны на одной из поверхностей, то она будет линией кривизны и на другой.*

Доказательство. При дифференцировании вдоль кривой γ на первой поверхности имеем:

$$d\boldsymbol{n}_1 = \lambda_1\, d\boldsymbol{r}$$

Для второй поверхности

$$d\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2\, d\boldsymbol{r} + \mu \boldsymbol{n}_1 + \nu \boldsymbol{n}_2.$$

Умножим это равенство скалярно на $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Тогда получим

$$\boldsymbol{n}_1\, d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1^2) + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2), \qquad \boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu(\boldsymbol{n}_2^2).$$

Но $\boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_2 = 0$, $\boldsymbol{n}_1\, d\boldsymbol{n}_2 = d(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) - \boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\lambda_1\, d\boldsymbol{r} = 0$. Таким образом,

$$\mu \boldsymbol{n}_1^2 + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) = 0, \quad \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu \boldsymbol{n}_2^2 = 0. \qquad (***)$$

Если поверхности не касаются вдоль кривой γ, то $\boldsymbol{n}_1^2\boldsymbol{n}_2^2 - (\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)^2 = |\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2|^2 \neq 0$ и, следовательно, равенства (***) возможны только, если $\mu = \nu = 0$. Но тогда для второй поверхности $d\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2\, d\boldsymbol{r}$, а значит, γ является линией кривизны для второй поверхности.

Если поверхности касаются вдоль кривой γ, то утверждение теоремы очевидно, так как в силу теоремы Родрига, если направление линии γ является главным на одной поверхности, то оно будет главным и на другой.

Следствие. *Если сфера (или плоскость) пересекает какую-либо поверхность под постоянным углом, то линия пересечения является линией кривизны.*

Это следует из того, что *на сфере (или на плоскости) любая кривая является линией кривизны.*

§ 4. Связь между главными кривизнами поверхности и нормальной кривизной в произвольном направлении. Средняя и гауссова кривизна поверхности

Выразим нормальную кривизну поверхности в произвольном направлении через главные нормальные кривизны. Для этого введем прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв касательную плоскость поверхности в произвольной точке O за плоскость xy, а нормаль поверхности — за ось z. Выберем направления осей x, y так, чтобы они совпадали с главными направлениями в точке O.

Пусть $z=z(x, y)$ — уравнение поверхности в окрестности точки O при таком выборе координат. В точке O $z_x=0$, $z_y=0$. Поэтому в точке O

$$I=dx^2+dy^2,$$

$$II=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

Так как направления $(0:dy)$ и $(\delta x:0)$ в точке O, как главные направления, сопряжены, то $s=0$ и, следовательно,

$$II=r\,dx^2+t\,dy^2.$$

Отсюда нормальная кривизна в произвольном направлении $(dx:dy)$

$$k=\frac{r\,dx^2+t\,dy^2}{dx^2+dy^2}. \qquad (*)$$

Беря направления $(0:dy)$ и $(\delta x:0)$, видим, что r и t являются главными кривизнами.

Пусть ϑ — угол, образуемый произвольным направлением $(dx:dy)$ с главным направлением $(dx:0)$, k_ϑ — нормальная кривизна в этом направлении, k_1 и k_2 — главные кривизны, соответствующие направлениям $(dx:0)$ и $(0:\delta y)$ соответственно. Тогда из выражения нормальной кривизны (*) получается *формула Эйлера для нормальной кривизны в произвольном направлении*

$$k_\vartheta=k_1\cos^2\vartheta+k_2\sin^2\vartheta.$$

Из формулы Эйлера следует, что для получения нормальной кривизны поверхности в произвольном направлении достаточно знать главные кривизны поверхности.

Найдем выражение для главных кривизн в случае любого параметрического задания поверхности.

Пусть k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности и пусть для определенности $k_1 \geqslant k_2$. В таком случае, как мы знаем, k_1 является максимумом, а k_2 — минимумом отношения квадратичных форм

$$\frac{II}{I}=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}.$$

Пусть $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ — значения переменных ξ, η, для которых это отношение достигает максимума (существование таких ξ и η нам уже известно). Тогда для всех ξ, η

$$II-k_1 I\leqslant 0,$$

причем для $\xi=\bar{\xi}$ и $\eta=\bar{\eta}$ достигается равенство. Отсюда следует, что для этих значений

$$(II-k_1 I)'_\xi=0,$$

$$(II-k_1 I)'_\eta=0,$$

т. е.

$$L\bar{\xi}+M\bar{\eta}-k_1(E\bar{\xi}+F\bar{\eta})=0,$$

$$M\bar{\xi}+N\bar{\eta}-k_1(F\bar{\xi}+G\bar{\eta})=0.$$

Исключая из этих равенств $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, получим уравнение для k_1

$$\begin{vmatrix} L-k_1E & M-k_1F \\ M-k_1F & N-k_1G \end{vmatrix}=0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для k_2, получаем то же уравнение. Таким образом, *главные кривизны k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения*

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$k^2(EG-F^2)-k(LG-2MF+NE)+(LN-M^2)=0.$$

Определим теперь понятие средней и гауссовой кривизны поверхности. Полусумма главных кривизн поверхности

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

называется *средней кривизной* поверхности.

Название «средняя кривизна» оправдывается следующими ее свойствами.

Если k_ϑ и $k_{\vartheta+\frac{\pi}{2}}$ — нормальные кривизны поверхности в двух взаимно перпендикулярных направлениях, то их полусумма равна средней кривизне поверхности.

Среднее значение нормальных кривизн поверхности в данной точке поверхности

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\vartheta \, d\vartheta$$

равно средней кривизне поверхности. Оба эти свойства без труда получаются из формулы Эйлера.

Произведение главных кривизн поверхности называется *гауссовой*, или *полной кривизной* поверхности

$$K = k_1 k_2.$$

Найдем выражение для средней и гауссовой кривизны поверхности через коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

Поскольку главные кривизны k_1, k_2 поверхности удовлетворяют уравнению

$$k^2(EG-F^2) - k(LG-2MF+NE) + (LN-M^2) = 0,$$

то по свойству корней квадратного уравнения получаем

$$H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}\,\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$,

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

где p, q, r, s, t — обычные обозначения для производных функции $z(x, y)$.

Заметим, что знак гауссовой кривизны определяется выражением $LN-M^2$. Поэтому *гауссова кривизна положительна в эллиптических точках, отрицательна в ги-*

перболических и равна нулю в параболических точках и точках уплощения.

Пусть M — любое множество точек на поверхности. Отложим из произвольной точки O единичные векторы нормалей поверхности в точках множества M. Концы этих нормалей образуют некоторое множество M' на единичной сфере. Это множество называется *сферическим изображением* множества M (рис. 38).

Существует замечательная связь между площадью поверхности, площадью ее сферического изображения и гауссовой кривизной поверхности. Эта связь выражается следующей теоремой:

Рис. 38.

Теорема Гаусса. *Отношение площади сферического изображения области на поверхности к площади этой области стремится к абсолютному значению гауссовой кривизны в данной точке O поверхности, когда область стягивается к этой точке.*

Мы приведем доказательство этой теоремы в предположении, что гауссова кривизна в точке O отлична от нуля, а область G, стягивающаяся к точке O, ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых. Дело в том, что сферическое изображение области G, если в точке O гауссова кривизна равна нулю, может не быть областью. Поэтому для рассмотрения общего случая следовало бы определить понятие площади для любого множества.

Итак, пусть O — эллиптическая или гиперболическая точка поверхности и G — область, расположенная в достаточно малой окрестности точки O, ограниченная конечным числом кусочно-гладких кривых.

Параметризуем поверхность в окрестности точки O так, чтобы координатные линии, проходящие через точку O, имели в этой точке главные направления.

Уравнение

$$\tilde{r} = n(u, v),$$

где $\boldsymbol{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали к поверхности, представляет собой параметризацию единичной сферы в окрестности точки O', соответствующей точке O поверхности. Действительно, в точке O' условие $\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v \neq 0$ очевидным образом выполняется, так как $\boldsymbol{n}_u = -k_1\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{n}_v = -k_2\boldsymbol{r}_v$, а по непрерывности оно выполняется и в некоторой окрестности этой точки. Сферическое изображение G' области G, если область G расположена в достаточно малой окрестности точки O, представляет собой область, ограниченную конечным числом кусочно-гладких кривых. Ее площадь

$$\sigma(G') = \iint\limits_G |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| \, du \, dv.$$

Так как площадь области G

$$\sigma(G) = \iint\limits_G |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv,$$

то

$$\frac{\sigma(G')}{\sigma(G)} \to \frac{|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|_{(O)}}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{(O)}} = |k_1 k_2|.$$

Теорема доказана.

§ 5. Линейчатые поверхности

Поверхность Φ называется *элементарной линейчатой поверхностью*, если через каждую точку P этой поверхности проходит прямая, которая имеет с поверхностью общий отрезок, содержащий точку P, причем концы этого отрезка не принадлежат поверхности.

Пример. Пусть $\boldsymbol{a}(u)$ и $\boldsymbol{b}(u)$ — две вектор-функции, определенные в окрестности точки $u = u_0$, удовлетворяющие в этой точке условию: $\boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$, $\boldsymbol{b}(u_0) \times \boldsymbol{a}'(u_0) \neq 0$. Тогда векторное уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u), \quad |u - u_0| < \varepsilon, \quad |v| < \varepsilon \qquad (*)$$

при достаточно малом ε определяет элементарную линейчатую поверхность.

Действительно, $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ при достаточно малом ε, так как при $u = u_0$, $v = 0$, $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a}'(u_0) \times \boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$. Отсюда следует, что при достаточно малом ε уравнение

(*) действительно определяет поверхность. То, что эта поверхность есть элементарная линейчатая поверхность, следует из того, что через произвольную точку (u', v') этой поверхности проходит прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u') + t\boldsymbol{b}(u')$. Ее отрезок $|t| < \varepsilon$ лежит на поверхности, а концы не принадлежат ей.

Поверхность Φ называется *общей линейчатой поверхностью,* если каждая ее точка имеет окрестность, являющуюся элементарной линейчатой поверхностью.

Прямолинейные отрезки на линейчатой поверхности называются *прямолинейными образующими.*

Так как через каждую точку линейчатой поверхности проходит прямолинейная образующая, то в каждой точке линейчатой поверхности есть направление, в котором нормальная кривизна поверхности равна нулю. Отсюда следует, что *на линейчатой поверхности не может быть эллиптических точек. Гауссова кривизна линейчатой поверхности отрицательна или равна нулю.*

Прямолинейные образующие являются асимптотическими линиями.

Найдем локальное параметрическое представление произвольной линейчатой поверхности, т. е. параметрическое представление в достаточно малой окрестности произвольной точки P.

Будем различать следующие случаи:

1. Точка P гиперболическая.

2. Все точки достаточно малой окрестности точки P параболические.

3. Все точки в окрестности точки P — точки уплощения.

В первом случае по крайней мере одно семейство асимптотических линий в окрестности точки P — прямые.

Действительно, либо все асимптотические линии в окрестности точки P прямые, либо найдутся сколь угодно близкие к P асимптотические γ, не являющиеся прямыми. Но тогда все асимптотические пересекающие γ суть прямые.

Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ — уравнение асимптотической γ, а $\boldsymbol{b}(u)$ — единичный вектор второго асимптотического направления, то поверхность в окрестности точки P может быть задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Рассмотрим второй случай. В этом случае прямолинейные образующие являются линиями кривизны. Через каждую точку Q, близкую к P, проходит только одна прямолинейная образующая. Проведем через точку P кривую γ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ на поверхности так, чтобы направление ее в точке P не совпадало с направлением образующей. Единичный вектор $\boldsymbol{b}(u)$ образующей является регулярной функцией от u. В окрестности точки P поверхность может быть задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Теперь рассмотрим третий случай. Так как все точки, близкие к P, суть точки уплощения, а в точке уплощения любое направление является главным и нормальная кривизна в любом направлении равна нулю, то по теореме Родрига $d\boldsymbol{n} = 0$ в окрестности точки P. Следовательно, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 = \text{const}$. Так как $\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{r} = 0$, то $\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. Таким образом, в третьем случае достаточно малая окрестность точки P есть область плоскости. Пусть $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$ — любые независимые постоянные векторы, принадлежащие этой плоскости. Тогда поверхность в окрестности точки P может быть задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_0 u + \boldsymbol{b}_0 v.$$

Итак, во всех рассмотренных нами случаях *линейчатая поверхность в достаточно малой окрестности каждой точки допускает параметризацию вида*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Теперь мы рассмотрим важный класс линейчатых поверхностей, так называемых развертывающихся поверхностей.

Поверхность Φ называется *развертывающейся поверхностью*, если она локально изометрична плоскости, т. е. если у каждой точки такой поверхности есть окрестность, изометричная области на плоскости.

Оказывается, *для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы у нее гауссова кривизна всюду была равна нулю* (гл. VIII § 2, гл. IX § 6). Таким образом, развертывающиеся поверхности можно определить как поверхности с нулевой гауссовой кривизной.

Поверхность, являющаяся огибающей однопараметрического семейства плоскостей, является развертывающейся поверхностью. Действительно, в силу теоремы Родрига направление вдоль прямолинейной образующей является главным направлением. И так как нормальная кривизна в этом направлении равна нулю, то равна нулю и гауссова кривизна.

Изучим строение развертывающейся поверхности в окрестности произвольной точки P. Будем различать два случая:

1. В окрестности точки P средняя кривизна $H=0$.
2. В окрестности точки P средняя кривизна $H\neq 0$.

В первом случае главные кривизны поверхности в каждой точке, близкой к точке P, равны нулю. Следовательно, каждая точка, близкая к P, является точкой уплощения. Но тогда, как было показано выше, у точки P есть окрестность, являющаяся областью плоскости.

Рассмотрим второй случай. Введем на поверхности координатную сеть из линий кривизны. Пусть линии u (т. е. $v=\text{const}$) будут те линии кривизны, вдоль которых нормальная кривизна поверхности равна нулю.

По теореме Родрига $\boldsymbol{n}_u=0$, так как нормальная кривизна в направлении линии u равна нулю. Отсюда следует, что нормали к поверхности вдоль линии u параллельны.

Покажем, что линии u — прямые линии. Имеем $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}=0$. Отсюда вдоль линии u получаем $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}=0$. Таким образом, линия u плоская. Далее, вектор $\boldsymbol{n}_v\neq 0$ направлен по нормали линии u. А так как $(\boldsymbol{n}_v)_u=(\boldsymbol{n}_u)_v=0$, то нормали линии u параллельны. Но это может быть только тогда, когда линия u прямая.

Итак, в обоих случаях *развертывающаяся поверхность является линейчатой, вдоль прямолинейных образующих касательная плоскость не меняется.* Таким образом, во втором из рассмотренных случаев касательная плоскость зависит только от одного параметра (v) и, следовательно, *развертывающаяся поверхность является огибающей однопараметрического семейства плоскостей.*

§ 6. Поверхности вращения

Поверхность F называется *поверхностью вращения*, если она образуется при вращении некоторой кривой около оси. Линии пересечения поверхности с плоскостями, проходящими через ось вращения, называются *меридианами*, а линии пересечения с плоскостями, перпендикулярными оси, называются *параллелями* (рис. 39).

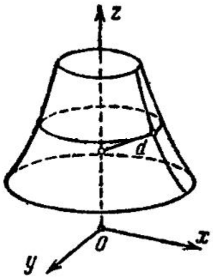

Рис. 39.

Составим уравнение поверхности вращения, которая образуется при вращении кривой γ:

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u),$$

расположенной в плоскости xz около оси z. Точка $(\varphi(u), 0, \psi(u))$ кривой γ при повороте кривой на угол v переходит в точку

$$(\varphi(u)\cos v, \quad \varphi(u)\sin v, \ \psi(u)).$$

Отсюда уравнение поверхности вращения:

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u).$$

Линии $v = \text{const}$ суть меридианы поверхности, а $u = \text{const}$ — параллели.

Первая квадратичная форма поверхности —

$$I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\,du^2 + \varphi^2\,dv^2.$$

Мы видим, что *меридианы и параллели поверхности вращения образуют ортогональную сеть* ($F = 0$). Впрочем, геометрически это очевидно.

Вторая квадратичная форма поверхности —

$$II = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\,du^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\,dv^2.$$

Мы видим, что параллели и меридианы образуют сопряженную сеть ($M = 0$). Так как, кроме того, эта сеть ортогональна, то *параллели и меридианы являются линиями кривизны*. Это ясно и геометрически, ибо плоскости, проходящие через ось и перпендикулярные оси, пересекают поверхность вращения под постоянными углами. Согласно следствию теоремы § 3 гл. VII линии пересечения (т. е. меридианы и параллели) должны быть линиями кривизны.

Относительно первой и второй квадратичных форм поверхности вращения существенно заметить, что коэффициенты этих форм зависят только от u.

Найдем главные кривизны поверхности вращения. Пусть k_1 — кривизна меридиана, k_2 — кривизна параллели, ϑ — угол, образуемый касательной меридиана с осью поверхности. Так как плоскость меридиана пересекает поверхность под прямым углом, то *нормальная кривизна поверхности в направлении меридиана равна кривизне меридиана*, т. е. k_1. Для кривизны поверхности в направлении параллели по теореме Менье получаем значение $k_2 \cos\vartheta$. Величина $k_2 \cos\vartheta$ имеет простой геометрический смысл. Именно, *если обозначить d длину отрезка нормали поверхности до точки пересечения с осью* (рис. 39), *то*

$$k_2 \cos\vartheta = \frac{1}{d}.$$

В заключение этого параграфа *построим пример поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Пусть осью вращения является ось z. Уравнение меридиана поверхности в плоскости xz

$$x = x(z).$$

Нормальная кривизна поверхности в направлении меридиана

$$k_1 = \frac{x''}{(1 + x'^2)^{3/2}}.$$

Нормальная кривизна поверхности в направлении параллели

$$k_2 = -\frac{1}{x(1 + x'^2)^{1/2}}.$$

Отсюда гауссова кривизна поверхности

$$K = \frac{-x''}{x(1 + x'^2)^2}.$$

Умножая это уравнение на xx', получим:

$$Kxx' = \frac{-x'x''}{(1+x'^2)^2}.$$

Интегрируя, получим:

$$Kx^2 + c = \frac{1}{1+x'^2},$$

где c — произвольная постоянная. Для возможности дальнейшего интегрирования в элементарных функциях положим $c=1$. Тогда

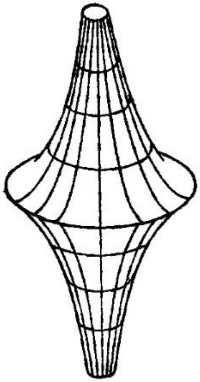

Рис. 40.

$$Kx^2 = \frac{-x'^2}{1+x'^2}.$$

Положим $x' = \operatorname{tg}\vartheta$. Имеем

$$Kx^2 = -\sin^2\vartheta, \quad x = \frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\vartheta.$$

Далее,

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg}\vartheta, \quad dz = \frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} - \sin\vartheta\right)d\vartheta.$$

Отсюда

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\cos\vartheta + \ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) + c.$$

Постоянная c не существенна, она соответствует сдвигу меридиана параллельно оси.

Уравнение меридиана:

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\vartheta, \quad z = \frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\cos\vartheta + \ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Эта кривая называется *трактрисой*. Отличительным свойством ее является то, что отрезок касательной от точки касания до оси z постоянен. Таким образом, найденная нами поверхность получается вращением трактрисы. Эта поверхность называется *псевдосферой*.

Ее уравнения:

$$x=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\cos\vartheta+\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Представление о форме псевдосферы дает рис. 40.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Вычислить вторую квадратичную форму для винтовой поверхности

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v.$$

Ответ. $\dfrac{-2du\,dv}{\sqrt{u^2+1}}$.

2. Найти нормальную кривизну параболоида $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ в точке (0, 0) в направлении $(dx:dy)$.

Ответ. $k=\dfrac{a\,dx^2+b\,dy^2}{dx^2+dy^2}$.

3. Показать, что при любой параметризации плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю; при любой параметризации сферы вторая квадратичная форма пропорциональна первой.

4. Найти асимптотические линии поверхности

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Ответ. $x=c_1y,\quad \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=c_2$.

5. Определить асимптотические линии катеноида

$$x=\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=\operatorname{ch}u\sin v,\quad z=u.$$

Ответ. $u+v=\mathrm{const},\quad u-v=\mathrm{const}$.

6. Показать, что на геликоиде одно семейство асимптотических состоит из прямых, а другое из винтовых линий.

7. На поверхности

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

найти семейство линий, сопряженное семейству $y=\mathrm{const}$.

Ответ. $1-by^2=\lambda x^2$, где λ — произвольное постоянное.

8. Показать, что кривые переноса ($u=\text{const}$, $v=\text{const}$) на поверхности переноса

$$r=U(u)+V(v)$$

образуют сопряженную сеть.

9. Определить главные кривизны параболоида

$$z=a(x^2+y^2) \text{ в точке } (0,\ 0,\ 0).$$

Ответ. $2a$, $2a$.

10. Определить линии кривизны на геликоиде

$$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=cv.$$

Ответ.

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+c^2}\right)-v=\text{const},$$

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+c^2}\right)+v=\text{const}$$

11. Найти линии кривизны параболоида

$$z=axy.$$

Ответ.

$$\ln\left(ay+\sqrt{1+a^2y^2}\right)\pm\ln\left(ax+\sqrt{1+a^2x^2}\right)=\text{const}.$$

12. Найти среднюю и гауссову кривизну параболоида $z=axy$ в точке $x=y=0$.

Ответ. $K=-a^2$, $H=0$.

13. Показать, что средняя кривизна геликоида равна нулю.

14. Показать, что средняя кривизна катеноида

$$z=a\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

равна нулю.

15. Показать, что если средняя кривизна поверхности равна нулю, то асимптотическая сеть — ортогональная.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ VII

1. Пусть $r=r(u, v)$ — произвольная поверхность, (u_k, v_k) — последовательность точек, сходящаяся к точке (u_0, v_0), и $(a:b)$ — направление в точке (u_0, v_0), в котором нормальная кривизна поверхности отлична от нуля.

Показать, что если при $k\to\infty$

$$\frac{u_k-u_0}{v_k-v_0}\to\frac{a}{b},$$

то направление прямой пересечения касательных плоскостей поверхности в точках (u_0, v_0) и (u_k, v_k) сходится к направлению, сопряженному $(a:b)$.

2. Доказать, что при проективном, в частности, аффинном, преобразовании поверхности сопряженная сеть переходит в сопряженную, асимптотическая сеть переходит в асимптотическую.

3. Сечения поверхности пучком плоскостей, проходящих через произвольную прямую g, и линии касания этой поверхности с описанными около нее конусами, имеющими вершины на прямой g, образуют сопряженную сеть (*теорема Кенигса*). Доказать.

4. Доказать, что кривые переноса на поверхности переноса

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

(т. е. кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$) образуют сопряженную сеть.

5. Доказать, что на поверхностях Петерсона

$$\boldsymbol{r} = \frac{\overline{\boldsymbol{U}}(u) + \overline{\boldsymbol{V}}(v)}{U(u) + V(v)},$$

где $\overline{\boldsymbol{U}}$ и $\overline{\boldsymbol{V}}$ — векторные, а U и V — скалярные функции указанных аргументов, семейства $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ образуют сопряженную сеть.

6. Если каждая точка поверхности является шаровой, то поверхность есть сфера или область на сфере. Доказать.

7. Найти шаровые точки на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8. Доказать, что если асимптотические линии различных семейств имеют в их общей точке отличные от нуля кривизны, то они имеют равные по величине, но противоположные по знаку кручения.

Абсолютная величина кручения равна абсолютному значению гауссовой кривизны поверхности в данной точке (*теорема Бельтрами — Эннепера*).

9. Пусть $\boldsymbol{r}(u, v, w)$ — вектор-функция аргументов u, v, w. Доказать, что если

$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{r}_w\boldsymbol{r}_u = 0,$$

то

$$\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{r}_{vw}\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_{wu}\boldsymbol{r}_v = 0.$$

10. Пусть имеем три семейства поверхностей:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const}, \quad \chi(x, y, z) = \text{const},$$

причем якобиан

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Говорят, что указанные семейства образуют *триортогональную* систему поверхностей, если любые две поверхности различных семейств пересекаются под прямым углом.

Доказать, что поверхности различных семейств триортогональной системы пересекаются по линиям кривизны.

11. Найти линии кривизны на поверхности второго порядка

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

включив ее в триортогональную систему софокусных поверхностей второго порядка.

12. Поверхность Ф называется *параллельной* поверхности F, если она является геометрическим местом концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности F. Будем считать соответствующими точками поверхностей F и Ф концы отрезков, о которых идет речь в определении.

Показать, что:

1) касательные плоскости в соответствующих точках поверхностей F и Ф параллельны;

2) свойство параллельности взаимно (т. е. если Ф параллельна F, то F параллельна Ф);

3) линиям кривизны поверхности F соответствуют линии кривизны поверхности Ф.

13. Если точка P поверхности F не является ни шаровой точкой, ни точкой уплощения, то в окрестности точки P поверхности параллельные F и развертывающиеся поверхности, образованные нормалями поверхности F вдоль линий кривизны, образуют триортогональную систему поверхностей. Доказать.

14. Доказать, что при инверсии линии кривизны данной поверхности переходят в линии кривизны преобразованной поверхности.

15. Доказать, что при конформном отображении пространства на себя сфера переходит в сферу или плоскость. Опираясь на это, доказать в свою очередь, что любое конформное преобразование получается применением преобразований подобия, движения, зеркального отображения и инверсии.

16. Выразить среднюю и гауссову кривизну параллельной поверхности через среднюю и гауссову кривизну данной поверхности и расстояние между поверхностями.

17. Пусть поверхность F

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v)$$

подвергается деформации так, что к моменту t она переходит в поверхность F_t

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v) + t\lambda(u, v)\,\boldsymbol{n}.$$

Доказать, что при малых t изменение площади поверхности, обусловленное деформацией с точностью до членов порядка t, равно

$$2t \int\limits_F \lambda H \, d\sigma,$$

где H — средняя кривизна поверхности F, а $d\sigma$ — элемент площади этой поверхности.

18. Поверхность F называется *минимальной*, если у каждой точки P этой поверхности есть окрестность ω, ограниченная простой кривой γ, такая, что любая поверхность с краем γ имеет площадь не меньшую, чем окрестность ω поверхности F. Доказать, что минимальная поверхность имеет равную нулю среднюю кривизну.

19. Доказать, что сферическое отображение минимальной поверхности в окрестности каждой точки, не являющейся точкой уплощения, конформно.

20. Показать, что площадь области G ограниченной кривой γ на минимальной поверхности равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$$

(*формула Шварца*).

21. Доказать, что если минимальная поверхность линейчатая, то она либо плоскость, либо геликоид.

22. Доказать, что если минимальная поверхность является поверхностью вращения, то она либо плоскость, либо катеноид.

23. Найти в квадратурах все поверхности вращения с постоянной гауссовой кривизной.

ГЛАВА VIII

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В двух предыдущих главах мы рассмотрели ряд вопросов теории поверхностей, для решения которых достаточно знать только первую и вторую квадратичные формы поверхности.

Естественно возникает вопрос: в какой степени первая и вторая квадратичные формы поверхности определяют поверхность и каким условиям должны удовлетворять квадратичные формы

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

для того, чтобы существовала поверхность, для которой эти квадратичные формы были первой и соответственно второй квадратичными формами?

Ответ на этот вопрос будет дан в последнем параграфе настоящей главы теоремой Бонне.

§ 1. Деривационные формулы

Деривационные формулы для поверхности являются аналогом формул Френе для кривых. Они дают выражения для производных векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ через эти векторы и коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Получим эти формулы.

Так как векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ не лежат в одной плоскости, то любой вектор допускает представление в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$. В частности,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{11}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{12}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{22}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_u &= \alpha_{11}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{12}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{10}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_v &= \alpha_{21}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{22}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{20}\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Покажем, что коэффициенты Γ^k_{ij}, λ_{ij}, α_{ij} действительно выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности.

Во-первых, заметим, что коэффициенты α_{10} и α_{20} равны нулю. Для этого достаточно умножить последние два равенства скалярно на $\boldsymbol{n}$. При этом получим:

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n} = \alpha_{10}, \qquad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n} = \alpha_{20}.$$

Но

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_u = 0, \quad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_v = 0.$$

Чтобы получить выражения для α_{11} и α_{12}, умножим равенство

$$\boldsymbol{n}_u = \alpha_{11}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{12}\boldsymbol{r}_v$$

скалярно на $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Получим:

$$\begin{aligned}
-L &= \alpha_{11}E + \alpha_{12}F,\\
-M &= \alpha_{11}F + \alpha_{12}G.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha_{11} = \frac{-LG + MF}{EG - F^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}.$$

Аналогично получаются α_{21} и α_{22}.

$$\alpha_{21} = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{-NE + MF}{EG - F^2}.$$

Для получения коэффициентов λ_{11}, λ_{12}, λ_{22} умножим первые три формулы на $\boldsymbol{n}$. Получим:

$$\lambda_{11} = L, \quad \lambda_{12} = M, \quad \lambda_{22} = N.$$

Чтобы получить выражения для коэффициентов Γ_{ij}^k, умножим первые три равенства на $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. При этом получим шесть соотношений для коэффициентов Γ_{ij}^k:

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u,$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v,$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u;$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v.$$

Из этих шести уравнений можно найти выражение для шести коэффициентов Γ_{ij}^k. Мы не будем выписывать значения коэффициентов Γ_{ij}^k, заметим лишь, что они в отличие от других коэффициентов *выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.*

Таким образом, мы показали, что производные векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ действительно выражаются через векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{n}$ с коэффициентами, зависящими только от коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности.

В заключение найдем коэффициенты Γ_{ij}^k для случая, когда первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$I = du^2 + G dv^2.$$

Подставляя $E = 1$, $F = 0$ в уравнения для Γ_{ij}^k, получим:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \qquad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}.$$

§ 2. Формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци

Первая и вторая квадратичные формы поверхности не независимы. Связь между коэффициентами этих форм может быть получена следующим образом.

Имеем очевидные равенства:

$$(\boldsymbol{r}_{uu})_v-(\boldsymbol{r}_{uv})_u=0,\quad (\boldsymbol{r}_{vv})_u-(\boldsymbol{r}_{uv})_v=0,\quad (\boldsymbol{n}_u)_v-(\boldsymbol{n}_v)_u=0.$$

Если в этих равенствах выражения в скобках заменить согласно деривационным формулам и после дифференцирования еще раз воспользоваться такой заменой, то мы получим три векторных равенства вида

$$\begin{gathered} A_1\boldsymbol{r}_u+B_1\boldsymbol{r}_v+C_1\boldsymbol{n}=0,\\ A_2\boldsymbol{r}_u+B_2\boldsymbol{r}_v+C_2\boldsymbol{n}=0,\\ A_3\boldsymbol{r}_u+B_3\boldsymbol{r}_v+C_3\boldsymbol{n}=0, \end{gathered}$$

где $A_1, A_2, \ldots, C_3$ — известным образом построенные выражения из коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности и их производных. Из этих трех векторных соотношений следует девять скалярных:

$$\begin{matrix} A_1=0, & B_1=0, & C_1=0,\\ A_2=0, & B_2=0, & C_2=0,\\ A_3=0, & B_3=0, & C_3=0. \end{matrix}$$

Найдем для примера соотношение $B_1=0$. B_1 представляет собой коэффициент при $\boldsymbol{r}_v$ в выражении $\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{r}_{uu})_v-(\boldsymbol{r}_{uv})_u$ после соответствующей замены производных векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ согласно деривационным формулам. Имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}=(\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_v+L\boldsymbol{n})_v-(\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{n})_u=\\ =\{(\Gamma_{11}^2)_v\boldsymbol{r}_v+\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_{uv}+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_{vv}+L\boldsymbol{n}_v\}-\\ -\{(\Gamma_{12}^2)_u\boldsymbol{r}_v+\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_{uu}+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_{uv}+M\boldsymbol{n}_u\}+\{\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{n}\}, \end{aligned}$$

где $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}$ содержит только векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{n}$. Заменяя векторы $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{uv}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$, $\boldsymbol{n}_u$ и $\boldsymbol{n}_v$ согласно деривационным формулам, получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}=\Big\{(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-(\Gamma_{12}^2)_u-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-\\ -E\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\Big\}\boldsymbol{r}_v+\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение $B_1 = 0$ имеет вид

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{E}\{(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \ldots - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2\}.$$

Из этого соотношения получаются важные следствия:

1. *Гауссова кривизна поверхности выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные (теорема Гаусса).*

2. Так как изометричные поверхности при соответствующей параметризации имеют одинаковые первые квадратичные формы, то *в соответствующих точках изометричные поверхности имеют одинаковые гауссовы кривизны.*

3. Так как развертывающиеся поверхности локально изометричны плоскости, то *гауссова кривизна у развертывающихся поверхностей равна нулю.*

Оказывается, среди девяти соотношений $A_1 = 0, \ldots, C_3 = 0$ различных только три. Одно из них, выведенное нами, впервые получено Гауссом. Два других получены К. М. Петерсоном, позже Майнарди и Кодацци.

Этим трем соотношениям можно придать следующую форму:

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4(EG - F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_u\right\}$$

(*формула Гаусса*);

$$(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) - \\ - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$(EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) - \\ - (EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0$$

(*формулы Петерсона — Кодацци*).

§ 3. Существование и единственность поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами

Имеет место следующая

Теорема Бонне. *Пусть*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

две любые квадратичные формы, из коих первая является положительно определенной. Пусть для коэффициентов этих форм выполняются условия Гаусса — Петерсона — Кодацци.

Тогда существует и притом единственная с точностью до положения в пространстве поверхность, для которой эти формы являются первой и соответственно второй квадратичными формами.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений для вектор-функций ξ, η, ζ:

$$\xi_u = \Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta,$$
$$\xi_v = \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,$$
$$\eta_u = \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,$$
$$\eta_v = \Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta,$$
$$\zeta_u = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta,$$
$$\zeta_v = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta,$$

где коэффициенты Γ_{ij}^k и α_{ij} известным образом выражены через коэффициенты заданных квадратичных форм.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что эта система имеет и притом единственное решение при заданных начальных значениях (значениях ξ, η, ζ в какой-нибудь точке (u_0, v_0)), если выполнены условия интегрируемости, т. е. если равенства

$$(\Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta)_v - (\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_u = 0,$$
$$(\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_v - (\Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta)_u = 0,$$
$$(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta)_v - (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta)_u = 0$$

выполняются тождественно в силу уравнений системы. Таким образом, условия интегрируемости сводятся к условиям Гаусса — Петерсона — Кодацци.

Так как для заданных нам квадратичных форм условия Гаусса — Петерсона — Кодацци выполнены, то для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений выполнены условия интегрируемости.

Пусть $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$, $\boldsymbol{\zeta}_0$ — три вектора, удовлетворяющие условиям

$$\boldsymbol{\xi}_0^2 = E(u_0, v_0), \quad \boldsymbol{\xi}_0\boldsymbol{\eta}_0 = F(u_0, v_0), \quad \boldsymbol{\eta}_0^2 = G(u_0, v_0),$$
$$\boldsymbol{\xi}_0\boldsymbol{\zeta}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\eta}_0\boldsymbol{\zeta}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0^2 = 1.$$

Пусть $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ — решение нашей системы, удовлетворяющее начальному условию: $\boldsymbol{\xi}(u_0, v_0) = \boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}(u_0, v_0) = \boldsymbol{\eta}_0$, $\boldsymbol{\zeta}(u_0, v_0) = \boldsymbol{\zeta}_0$.

Так как $\boldsymbol{\xi}_v = \boldsymbol{\eta}_u$, то существует вектор-функция $\boldsymbol{r}(u, v)$, для которой $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{\eta}$. Покажем, что поверхность, задаваемая векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, в окрестности точки (u_0, v_0) имеет первой квадратичной формой

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

а второй квадратичной формой

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Выразим производные по u и v шести величин $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\eta}^2$, $\boldsymbol{\zeta}^2$, $\boldsymbol{\xi\eta}$, $\boldsymbol{\eta\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta\xi}$ через эти же величины, используя уравнения нашей системы. Тогда получим двенадцать равенств:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{\xi}^2)_u &= R_1(\boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\eta}^2, \ldots), \\ (\boldsymbol{\xi}^2)_v &= R_2(\boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\eta}^2, \ldots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\boldsymbol{\zeta\xi})_v &= R_{12}(\boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\eta}^2, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где R_1, R_2, ..., R_{12} — линейные однородные выражения относительно $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\eta}^2$, ..., $\boldsymbol{\zeta\xi}$.

Двенадцать равенств $(*)$ можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений для $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\eta}^2$, ..., $\boldsymbol{\zeta\xi}$. Эта система удовлетворится, если вместо $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\eta}^2$, ..., $\boldsymbol{\zeta\xi}$ подставить E, G, ..., 0 соответственно, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Оба эти решения имеют одинаковые начальные значения (значения в точке (u_0, v_0)). Отсюда в силу единственности решения следует, что

$$\xi^2 = E, \ \eta^2 = G, \ \xi\eta = F, \ \xi\zeta = 0, \ \zeta\eta = 0, \ \zeta^2 = 1.$$

Так как $\boldsymbol{r}_u = \xi$, $\boldsymbol{r}_v = \eta$, то

$$\boldsymbol{r}_u^2 = \xi^2 = E, \ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \xi\eta = F, \ \boldsymbol{r}_v^2 = \eta^2 = G.$$

Таким образом, построенная нами поверхность имеет первой квадратичной формой

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Далее, так как $\xi\zeta = \eta\zeta = 0$ и $\zeta^2 = 1$, то ζ является единичным вектором нормали построенной поверхности, и, следовательно, коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ равны

$$\xi_u\zeta, \ \xi_v\zeta, \ \eta_v\zeta.$$

Принимая во внимание выражения производных ξ_u, ξ_v и η_v через ξ, η, ζ и соотношения $\zeta\xi = 0$, $\eta\zeta = 0$, $\zeta^2 = 1$, находим:

$$\xi_u\zeta = L, \quad \xi_v\zeta = M, \quad \eta_v\zeta = N.$$

Таким образом, построенная поверхность имеет

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

второй квадратичной формой.

Существование поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами доказано.

Докажем теперь единственность такой поверхности с точностью до положения в пространстве.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — две поверхности, у которых совпадают первые и вторые квадратичные формы. Совместим поверхности Φ_1 и Φ_2 двумя соответствующими точками (точками, отвечающими одинаковым значениям параметров, например (u_0, v_0)), соответствующими направлениями и нормалями. Такое совмещение возможно благодаря совпадению первых квадратичных форм. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ — уравнения поверхностей после такого совмещения.

Система дифференциальных уравнений для ξ, η, ζ, очевидно, удовлетворяется, если взять

$$\xi = r_{1u}, \quad \eta = r_{1v}, \quad \zeta = n_1$$

или

$$\xi = r_{2u}, \quad \eta = r_{2v}, \quad \zeta = n_2.$$

А так как оба эти решения совпадают в точке (u_0, v_0), то они совпадают тождественно. Итак,

$$r_{1u}(u, v) = r_{2u}(u, v), \quad r_{1v}(u, v) = r_{2v}(u, v)$$

или

$$dr_1(u, v) = dr_2(u, v),$$

откуда

$$r_1(u, v) = r_2(u, v) + c.$$

Так как при $u = u_0$, $v = v_0$, $r_1 = r_2$, то $c = 0$ и, следовательно, $r_1(u, v) = r_2(u, v)$.

Итак, поверхности Φ_1 и Φ_2 равны с точностью до движения и зеркального отражения.

Теорема доказана полностью.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ VIII

1. Показать, что если линейный элемент поверхности

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2),$$

то гауссова кривизна поверхности

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda,$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

2. Показать, что поверхность с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c)^2}$$

имеет постоянную гауссову кривизну.

3. Показать, что если линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega \, du \, dv + dv^2,$$

то гауссова кривизна поверхности

$$K = -\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}.$$

4. Доказать, что любая чебышёвская сеть на плоскости задается векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u) + \boldsymbol{\psi}(v).$$

Сеть образуют кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.

5. Найти символы Кристофеля Γ_{ij}^{k} для случая, когда линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2).$$

6. Показать, что если координатная сеть на поверхности асимптотическая, то имеют место равенства:

$$\frac{1}{2}(EG - F^2)(\ln|K|)_u - FE_v + EG_u = 0,$$

$$\frac{1}{2}(EG - F^2)(\ln|K|)_v - FG_u + GE_v = 0,$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

7. Доказать, что асимптотические линии на поверхности с постоянной отрицательной кривизной образуют чебышёвскую сеть. И обратно, если асимптотическая сеть на поверхности чебышёвская, то гауссова кривизна поверхности постоянна.

8. Если координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны, то формулы Петерсона — Кодацци принимают вид

$$L_v = HE_v,$$

$$N_u = HG_u,$$

где H — средняя кривизна поверхности. Показать.

9. Если на минимальной поверхности за координатные линии принять линии кривизны и соответствующим образом выбрать параметры u и v, то первая и вторая квадратичные формы примут вид

$$I = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

$$II = du^2 - dv^2.$$

Доказать.

10. Пусть на минимальной поверхности введены координаты u, v как в задаче 9. Доказать последовательно следующие утверждения:

1) если $\boldsymbol{r}(u, v)$ — вектор точки поверхности, то

$$\Delta \boldsymbol{r} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Таким образом, координаты $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ суть гармонические функции;

2) если $f_1(w)$, $f_2(w)$, $f_3(w)$ $(w = u + iv)$ — аналитические функции с вещественной частью $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ соответственно, то

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0.$$

11. Если $f_1(w)$, $f_2(w)$, $f_3(w)$ — три любые аналитические функции переменной $w = u + iv$, удовлетворяющие условию

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0$$

и $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$, $\varphi_3(u, v)$ — вещественные части этих функций, то поверхность, задаваемая уравнениями

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

минимальная. Доказать.

12. Доказать, что любая минимальная поверхность может быть задана уравнениями

$$x = \operatorname{Re} \int (\varphi^2(w) + \psi^2(w))\, dw, \quad y = \operatorname{Re} i \int (\varphi^2(w) - \psi^2(w))\, dw,$$

$$z = \operatorname{Re} \int 2i\varphi(w)\, \psi(w)\, dw,$$

где φ и ψ — аналитические функции $w = u + iv$, а Re обозначает вещественную часть.

ГЛАВА IX

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Под внутренней геометрией поверхности понимают раздел геометрии, в котором изучают свойства поверхности и фигур на ней, зависящие только от длин кривых на поверхности.

По отношению к регулярным поверхностям можно сказать, что их внутренняя геометрия изучает свойства поверхностей и фигур на них, определяемые первой квадратичной формой.

Объектами внутренней геометрии являются длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площади областей, гауссова кривизна поверхности.

В настоящей главе будут рассмотрены новые понятия для поверхностей, связанные только с ее первой квадратичной формой, и, таким образом, принадлежащие внутренней геометрии поверхности.

§ 1. Геодезическая кривизна кривой на поверхности

Пусть Φ — регулярная поверхность и $\tilde{\gamma}$ — кривая на ней. Проведем в произвольной точке P кривой $\tilde{\gamma}$ касательную плоскость α к поверхности и спроектируем малую окрестность точки P кривой $\tilde{\gamma}$ на эту плоскость.

Тогда получим некоторую кривую γ в плоскости α. Кривизна этой кривой в точке P называется *геодезической кривизной* кривой $\tilde{\gamma}$ в точке P. Геодезическая кривизна в точке P считается положительной или отрицательной в зависимости от того, образует ли вращение касательной кривой γ при прохождении точки P с направлением нормали к поверхности правый или левый винт. Найдем выражение для геодезической кривизны кривой.

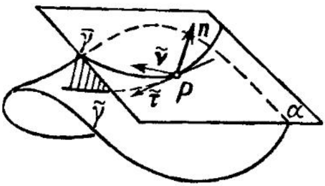

Рис. 41.

Проведем через кривую $\tilde{\gamma}$ цилиндрическую поверхность с образующими перпендикулярными плоскости α (рис. 41). По теореме Менье кривизна k кривой $\tilde{\gamma}$ в точке P и кривизна $\varkappa$ кривой γ в той же точке связаны соотношением

$$k \cos \vartheta = \varkappa,$$

где ϑ — угол, образуемый главными нормалями этих кривых.

Пусть $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ — естественная параметризация кривой $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ — единичные векторы касательной и главной нормали кривой $\tilde{\gamma}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Тогда $\tilde{\boldsymbol{r}}'' = k\tilde{\boldsymbol{\nu}}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \times \boldsymbol{n}$ направлен по нормали кривой γ в точке P и, следовательно, с точностью до знака

$$\varkappa = k \cos \vartheta = (\tilde{\boldsymbol{r}}'', \boldsymbol{r}', \boldsymbol{n}).$$

Перейдем к произвольной параметризации кривой $\tilde{\gamma}$. Имеем

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'_s = \tilde{\boldsymbol{r}}'_t t'_s = \tilde{\boldsymbol{r}}'_t \cdot \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|},$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''_{ss} = \tilde{\boldsymbol{r}}''_{tt} \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|^2} + \tilde{\boldsymbol{r}}'_t \left(\frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|}\right)'_s.$$

Подставляя найденные выражения $\tilde{\boldsymbol{r}}'_s$ и $\tilde{\boldsymbol{r}}''_{ss}$ в формулу для $\varkappa$, получим:

$$\varkappa = \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'|^3} (\boldsymbol{r}'', \tilde{\boldsymbol{r}}', \boldsymbol{n}),$$

где дифференцирование произведено по параметру t.

Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ какая-нибудь регулярная параметризация поверхности в окрестности точки P и $u=u(t)$, $v=v(t)$ — уравнения кривой $\tilde{\gamma}$ в окрестности этой точки. Тогда

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t)),$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}_u u'+\boldsymbol{r}_v v',$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''=\boldsymbol{r}_{uu}u'^2=2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_u u''+\boldsymbol{r}_v v''=$$
$$=(u''+A)\boldsymbol{r}_u+(v''+B)\boldsymbol{r}_v+C\boldsymbol{n},$$

где

$$A=\Gamma_{11}^1 u'^2+2\Gamma_{12}^1 u'v'+\Gamma_{22}^1 v'^2,$$
$$B=\Gamma_{11}^2 u'^2+2\Gamma_{12}^2 u'v'+\Gamma_{22}^2 v'^2,$$
$$C=Lu'^2+2Mu'v'+Nv'^2.$$

Подставляя выражения $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ и $\tilde{\boldsymbol{r}}''$ в формулу для $\varkappa$, после простых вычислений получаем:

$$\varkappa=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)^{3/2}}(u''v'-v''u'+Av'-Bu').$$

Так как величины Γ_{ij}^k выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, то *геодезическая кривизна кривой на поверхности определяется только метрикой поверхности и, следовательно, не изменяется при изгибании поверхности.*

Найдем формулу для геодезической кривизны кривой в случае, если первая квадратичная форма

$$I=du^2+G\,dv^2.$$

В этом случае, как показано в § 1 гл. VIII,

$$\Gamma_{11}^1=0, \qquad \Gamma_{11}^2=0,$$

$$\Gamma_{12}^1=0, \qquad \Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$

$$\Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}G_u, \qquad \Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}.$$

Отсюда

$$A=-\frac{1}{2}G_u v'^2,$$

$$B=\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}v'^2.$$

Следовательно,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u v'^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}u'v'^2 - \frac{G_u}{G}u'^2v'\right).$$

§ 2. Геодезические линии на поверхности

Кривая на поверхности называется ***геодезической линией***, если у нее в каждой точке геодезическая кривизна равна нулю.

Теорема. *Для того чтобы кривая γ была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадала с нормалью к поверхности.*

Доказательство. Как показано в предыдущем параграфе, геодезическая кривизна

$$\varkappa = \frac{1}{|\tilde{r}'|^3}(\tilde{r}''\tilde{r}'n),$$

где $\tilde{r}$ — вектор точки кривой, а дифференцирование — по дуге. Так как $\tilde{r}'' = k\tilde{\nu}$, то $\varkappa = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\nu} \parallel n$ при $k \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если две поверхности касаются вдоль кривой, которая является геодезической на одной из них, то она будет геодезической и на другой.*

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение геодезических, достаточно приравнять нулю выражение для геодезической кривизны. Таким образом, дифференциальное уравнение геодезических

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

Некоторая неопределенность в этом уравнении (уравнение одно, а неизвестных функций две — $u(t)$ и $v(t)$) объясняется тем, что на кривой могут быть введены различные параметризации.

Теорема. *Через каждую точку на регулярной поверхности в любом направлении можно провести и притом единственную геодезическую.*

Доказательство. Пусть $P(u_0, v_0)$ — произвольная точка поверхности и (u_0', v_0') — произвольное направление в этой точке.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$u'' + A = 0, \quad v'' + B = 0.$$

Пусть $u = u(t)$ и $v = v(t)$ — решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(t_0) = u_0, \; v(t_0) = v_0, \; u'(t_0) = u_0', \; v'(t_0) = v_0'.$$

Тогда кривая на поверхности, заданная уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

является геодезической, так как

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

Эта геодезическая проходит через точку (u_0, v_0) и имеет в точке (u_0, v_0) направление $(u_0' : v_0')$. Покажем, что она единственная.

Пусть через точку (u_0, v_0) на поверхности проходят две геодезические γ_1 и γ_2, имеющие в этой точке одно и то же направление $(u_0' : v_0')$. Пусть для определенности $u_0' \neq 0$. Тогда в окрестности точки (u_0, v_0) обе кривые могут быть заданы уравнениями

$$v = v_1(u), \quad v = v_2(u).$$

Условие равенства нулю геодезической кривизны кривых γ_1, γ_2

$$-v_1'' + Av_1' - B = 0,$$
$$-v_2'' + Av_2' - B = 0.$$

Таким образом, функции $v_1(u)$ и $v_2(u)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению при одних и тех же начальных условиях

$$v_1(u_0) = v_0, \quad v_1'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'},$$
$$v_2(u_0) = v_0, \quad v_2'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'}.$$

Отсюда следует, что $v_1(u) \equiv v_2(u)$, т. е. кривые γ_1 и γ_2 совпадают в окрестности точки (u_0, v_0), а следовательно, совпадают вообще.

Теорема доказана.

Пример. *Геодезические линии на сфере суть большие круги и только они.* Действительно, каждый большой круг является геодезической по первой теореме. Из каждой точки в любом направлении можно провести большой круг и, следовательно, по второй теореме большими кругами исчерпываются все геодезические.

§ 3. Полугеодезическая параметризация поверхности

Параметризация поверхности называется *полугеодезической,* если она ортогональна и одно семейство координатных линий состоит из геодезических.

Теорема. *Пусть γ — кривая на поверхности и P — точка на ней. Тогда в окрестности точки P может быть введена полугеодезическая параметризация так, что одно семейство координатных линий состоит из геодезических перпендикулярных γ, а второе — из их ортогональных траекторий.*

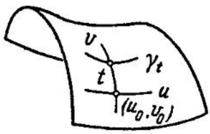

Рис. 42.

Доказательство. Пусть (u, v) — какая-нибудь параметризация поверхности. Кривая γ в окрестности P может быть задана либо уравнением $v=f(u)$, либо уравнением $u=f(v)$. Пусть для определенности γ задается уравнением $v=f(u)$.

Рассмотрим семейство кривых в окрестности P, заданное уравнениями

$$v-f(u)=\text{const}.$$

Согласно теореме § 2 гл. VI поверхность допускает ортогональную параметризацию, при которой одно семейство координатных линий состоит из кривых $v-f(u)=\text{const}$.

Отсюда следует, что, не ограничивая общности, можно считать кривую γ координатной линией $u=u_0$ (u_0 и v_0 — координаты точки P).

Проведем через произвольную точку (u_0, t) кривой геодезическую γ_t, перпендикулярную γ (рис. 42). При t, близком к v_0, эта геодезическая может быть задана уравнением

$$v=v(u, t),$$

где $v(u, t)$ — функция, удовлетворяющая по u уравнению геодезических

$$-v'' + Av' - B = 0.$$

Из теоремы о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным данным следует регулярность функции $v(u, t)$ по t.

Так как $v(u_0, t) = t$, то при малом $|u - u_0|$

$$\frac{\partial v(u, t)}{\partial t} \neq 0.$$

Это позволяет разрешить уравнение $v = v(u, t)$ в окрестности P относительно t. Получим:

$$t = \varphi(u, v).$$

Дифференцируя равенство $v = v(u, t)$ по v, получим:

$$1 = v_t(u, t)\, t_v.$$

Отсюда

$$\varphi_v \neq 0.$$

Уравнениями $\varphi(u, v) = t = \mathrm{const}$ задаются геодезические γ_t. Так как $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$, то по теореме § 2 гл. VI существует ортогональная параметризация поверхности в окрестности P, при которой одно семейство координатных линий состоит из кривых $\varphi(u, v) = \mathrm{const}$, т. е. геодезических γ_t.

Теорема доказана.

Выясним, какой вид имеет первая квадратичная форма поверхности, если параметризация полугеодезическая.

Так как параметризация ортогональная, то $F = 0$ и, следовательно,

$$I = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Одно семейство координатных линий, например, линии $v = \mathrm{const}$, геодезические. Подставляя $v = \mathrm{const}$ в уравнение геодезических

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0,$$

получаем

$$B = 0,$$

откуда

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = 0,$$

т. е. E не зависит от v.

Независимость E от v позволяет упростить первую квадратичную форму введением вместо u нового параметра $\bar{u}$, связанного с u соотношением

$$d\bar{u} = \sqrt{E(u)}\, du.$$

При этом первая квадратичная форма принимает вид

$$I = d\bar{u}^2 + G dv^2.$$

Чтобы понять геометрический смысл параметра $\bar{u}$, достаточно заметить, что длина отрезка любой геодезической $v = \text{const}$, заключенного между линиями $\bar{u} = c_1$, $\bar{u} = c_2$, не зависит от v и равна $|c_1 - c_2|$.

Введением нового параметра $\bar{v}$, связанного с v соотношением $d\bar{v} = \sqrt{G(v, \bar{u}_0)}\, dv$, можно добиться того, что первая квадратичная форма поверхности будет иметь вид

$$I = d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2,$$

причем $\bar{G} = 1$ вдоль линии $\bar{u} = u_0$.

Если линия $\bar{u} = u_0$ тоже геодезическая, то из уравнения геодезических следует, что вдоль этой линии $\bar{G}_u = 0$.

§ 4. Кратчайшие на поверхности

Кривая γ на поверхности, соединяющая точки P и Q, называется *кратчайшей*, если любая кривая на поверхности, соединяющая точки P и Q, имеет длину не меньшую, чем кривая γ.

Теорема. *Геодезическая на достаточно малом отрезке является кратчайшей. Более точно, если γ — геодезическая и P — точка на ней, R и S — точки геодезической, достаточно близкие к P, то отрезок RS геодезической является кратчайшей.*

Доказательство. Проведем через точку P геодезическую $\bar{\gamma}$, перпендикулярную γ, и построим полугеодезическую координатную сеть, приняв за семейство линий u геодезические, перпендикулярные $\bar{\gamma}$. Выберем параметры u и v так, чтобы точке P соответствовали значения $u = v = 0$ и линейный элемент поверхности имел вид

$$I = du^2 + G dv^2.$$

Допустим, что отрезок RS геодезической γ не является кратчайшей и $\tilde{\gamma}$ — кривая на поверхности, соединяющая точки R и S и имеющая длину меньшую, чем отрезок RS геодезической γ.

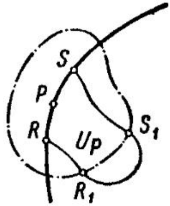

Рис. 43.

Если точки R и S достаточно близки к P, кривая $\tilde{\gamma}$ проходит внутри окрестности U_P точки P, где определена полугеодезическая параметризация u, v. Покажем это.

Пусть расстояние точки P до границы окрестности U_P больше $\varepsilon > 0$. Возьмем точки R и S на расстоянии меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$ от P (расстояние по кривой γ). Пусть R_1 и S_1 — первая и последняя точки пересечения $\tilde{\gamma}$ с границей U_P (рис. 43).

Имеем

$$\widehat{PR} + \widehat{RR_1} > \varepsilon, \quad \widehat{PS} + \widehat{SS_1} > \varepsilon.$$

Отсюда

$$\widehat{PR} + \widehat{PS} + \widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} > 2\varepsilon.$$

Но

$$\widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} < \widehat{PR} + \widehat{PS} < \varepsilon$$

и мы приходим к противоречию. Итак, кривая $\tilde{\gamma}$ проходит внутри окрестности U_P.

Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

уравнения кривой $\tilde{\gamma}$. Ее длина

$$s(\tilde{\gamma}) = \int\limits_{(R)}^{(S)} \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\, dt \geqslant \int\limits_{(R)}^{(S)} |u'|\, dt \geqslant |u_S - u_R|.$$

Но $|u_R - u_S|$ — это длина отрезка RS геодезической γ. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Теперь, когда установлено, что геодезические являются кратчайшими на достаточно малом участке, их уравнение может быть записано как уравнение Эйлера для функционала

$$l=\int\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt,$$

т. е.

$$\Phi_u-\frac{d}{dt}\Phi'_u=0,\quad \Phi_v-\frac{d}{dt}\Phi'_v=0,$$

где

$$\Phi=\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}.$$

§ 5. Теорема Гаусса — Бонне

Пусть G — гомеоморфная кругу область на регулярной поверхности Φ, ограниченная замкнутой кусочно-регулярной кривой γ. Зададим направление на кривой γ так, чтобы при обходе кривой в этом направлении с той стороны поверхности, куда направлена нормаль n, область G оставалась справа.

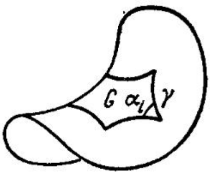

Рис. 44.

Обозначим $\varkappa$ геодезическую кривизну кривой γ в произвольной точке, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — углы, образуемые звеньями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ кривой γ со стороны области G (рис. 44). Имеет место следующая

Теорема Гаусса — Бонне.

$$\sum_k\int_{\gamma_k}\varkappa\,ds+\sum_k(\pi-\alpha_k)=2\pi-\iint_G K\,d\sigma,$$

где K — гауссова кривизна поверхности, а интегрирование в правой части равенства выполняется по площади области G.

В частности, если γ — регулярная кривая, то

$$\int_\gamma\varkappa\,ds=2\pi-\iint_G K\,d\sigma.$$

Доказательство. Для простоты изложения предположим, что кривая γ регулярна и во всей области G может быть введена полугеодезическая параметризация поверхности.

Принимая во внимание формулу для геодезической кривизны кривой в полугеодезических координатах, полученную в § 1, будем иметь

$$\varkappa\, ds = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)}\Big(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u v'^3 - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}u'v'^2 - \\ - \frac{G_u}{G}u'^2 v'\Big)dt = -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}v'}{u'} - v'(\sqrt{G})_u\,dt.$$

Так как функция $\mathrm{Arctg}\,w$ многозначная и ее значения, отвечающие одному и тому же значению аргумента w, отличаются на кратное π, то

$$\int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}\,v'}{u'} = k\pi,$$

где k — некоторое целое число.

Далее, по формуле Грина — Остроградского

$$\int_\gamma -(\sqrt{G})_u\,dv = \iint_G (\sqrt{G})_{uu}\,du\,dv = \\ = \iint_G \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\,du\,dv = \iint_G -K\,d\sigma.$$

Таким образом,

$$\int_\gamma \varkappa\,ds = k\pi + \iint_G -K\,d\sigma.$$

Остается выяснить, чему равно целое число k.

Имеем

$$k\pi = \int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}v'}{u'}.$$

Если бы $G=1$, то величина $k\pi$ была бы углом, на который поворачивается касательная кривой $\bar{\gamma}$ на плоскости uv, соответствующей кривой γ на поверхности, при обходе этой кривой. Величина этого угла, как известно, равна 2π.

Так как величина интеграла

$$\int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\lambda(u, v)\,v'}{u'} \qquad (\lambda(u, v) > 0)$$

непрерывно зависит от $\lambda(u, v)$ и равна 2π при $\lambda(u, v) = 1$, то она равна 2π для любой функции $\lambda(u, v) > 0$, в частности, при $\lambda(u, v) = \sqrt{G}$.

Теорема доказана полностью.

Гомеоморфная кругу область на поверхности, ограниченная тремя геодезическими, называется *геодезическим треугольником*.

Теорема Гаусса — Бонне в применении к геодезическому треугольнику дает

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint\limits_{\Delta} K\,d\sigma.$$

Отсюда следует, что *сумма углов геодезического треугольника на поверхности с положительной кривизной больше π, на поверхности с отрицательной кривизной меньше π, на поверхности с нулевой кривизной равна π.*

§ 6. Поверхности постоянной гауссовой кривизны

Пусть Φ — поверхность постоянной гауссовой кривизны K и P — произвольная точка на этой поверхности. Введем на поверхности Φ полугеодезическую параметризацию в окрестности точки P, исходя из произвольной геодезической, проходящей через точку P. Первая квадратичная форма поверхности будет иметь вид

$$I=du^2+G\,dv^2,$$

причем можно считать, что $G(0,\ v)=1$ и $G_u(0,\ v)=0$.

Так как гауссова кривизна поверхности постоянна и равна K, то коэффициент G должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0. \qquad (*)$$

(В случае полугеодезической параметризации поверхности гауссова кривизна $K=-(\sqrt{G})_{uu}(\sqrt{G})^{-1}$.)

Будем различать три случая:

1. $K>0$.
2. $K<0$.
3. $K=0$.

В первом случае общий вид $\sqrt{G}$, удовлетворяющего уравнению (*), будет

$$\sqrt{G}=A(v)\cos\sqrt{K}\,u+B(v)\sin\sqrt{K}\,u.$$

Так как $G(0, v) = 1$ и $G_u(0, v) = 0$, то $A(v) = 1$ и $B(v) = 0$. Таким образом, в случае $K > 0$ существует параметризация поверхности, при которой первая квадратичная форма имеет вид

$$I = du^2 + \cos^2 \sqrt{K} u\, dv^2.$$

Аналогично, во втором случае первая квадратичная форма поверхности будет:

$$I = du^2 + \operatorname{ch}^2 \sqrt{-K} u\, dv^2.$$

Наконец, в третьем случае

$$I = du^2 + dv^2.$$

Теорема. *Все поверхности постоянной, равной K, гауссовой кривизны, локально изометричны. Более того, если Φ_1 и Φ_2 — поверхности постоянной гауссовой кривизны K, P_1 и P_2 — произвольные точки на этих поверхностях, l_1 и l_2 — произвольные направления в этих точках, то существует изометрическое отображение окрестности точки P_1 поверхности Φ_1 на окрестность точки P_2 поверхности Φ_2, при котором направлению l_1 на поверхности Φ_1 в точке P_1 соответствует направление l_2 на поверхности Φ_2 в точке P_2.*

Для доказательства этой теоремы достаточно в окрестностях точек P_1 и P_2 на поверхностях Φ_1 и Φ_2 ввести полугеодезические параметризации исходя из геодезических направлений l_1 и l_2. При этом первые квадратичные формы поверхностей будут одинаковы, и требуемое изометрическое отображение получается при сопоставлении точек с одинаковыми координатами.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ К ГЛАВЕ IX

1. Показать, что если геодезическая линия является одновременно асимптотической, то она прямая.

Показать, что если геодезическая является одновременно линией кривизны, то она плоская.

2. Пусть γ — геодезическая и P — точка на ней. Доказать, что если точка Q геодезической достаточно близка к P, то отрезок PQ геодезической будет кратчайшей по сравнению со всеми спрямляемыми (а не только кусочно-гладкими) кривыми, соединяющими точки P и Q на поверхности.

Доказать, что отрезок PQ геодезической γ является единственной кратчайшей, соединяющей точки P и Q на поверхности, если точка Q достаточно близка к P.

3. Доказать, что у точки P на регулярной поверхности есть окрестность, в которой может быть введена полугеодезическая параметризация исходя из любой геодезической, проходящей через точку P.

4. Используя две предыдущие теоремы, доказать, что любая кратчайшая на регулярной поверхности является геодезической.

5. Доказать, что какова бы ни была окрестность Ω точки P на регулярной поверхности, всегда можно в ней указать окрестность ω такую, что любые две точки окрестности ω можно соединить кратчайшей внутри Ω.

6. Доказать, что на полной поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей.

7. Показать, что уравнение геодезических в случае полугеодезической параметризации ($ds^2 = du^2 + G dv^2$) может быть записано в форме

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

где α — угол, под которым геодезическая пересекает линии $v = \text{const}$.

8. Показать, что если кривая γ на поверхности, заданная уравнениями $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$, испытывает деформацию, переходя к моменту t в кривую $u = u(\alpha) + \lambda(\alpha) t$, $v = v(\alpha) + \mu(\alpha) t$, то обусловленное этим изменение дуги кривой γ

$$\Delta s = t \int_\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \mu + \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \lambda' + \frac{\partial \Phi}{\partial v'} \mu' \right) d\alpha + O(t^2),$$

где $\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$, а $O(t^2)$ обозначена часть Δs, имеющая порядок не ниже t^2.

Выполняя интегрирование по частям и предполагая, что концы кривой γ при деформации остаются неподвижными, показать, что

$$\Delta s = t \int_\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) \right) \lambda \, d\alpha + t \int_\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'} \right) \right) \mu \, d\alpha + O(t^2).$$

9. Исходя из свойства геодезических быть кратчайшими на достаточно малом участке, показать, что уравнения геодезических могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'} \right) = 0,$$

где $\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$. В частности, если

$$\Phi = \sqrt{1 + Gv'^2},$$

уравнение геодезических будет

$$\frac{\frac{1}{2}G_v v'^2}{\sqrt{1+Gv'^2}}-\frac{d}{du}\left(\frac{Gv'}{\sqrt{1+Gv'^2}}\right)=0.$$

10. Показать, что геодезические линии на поверхностях вращения находятся в квадратурах.

12. Показать, что уравнение геодезических для поверхностей с линейным элементом $ds^2=(U(u)+V(v))(du^2+dv^2)$ (эти поверхности называются *поверхностями Лиувилля*) приводится к виду

$$d\left(\frac{U\,dv^2-V\,du^2}{du^2+dv^2}\right)=0.$$

Отсюда следует, что геодезические линии на таких поверхностях находятся в квадратурах. Именно:

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-c}}=\pm\int\frac{dv}{\sqrt{V+c}}+c_1.$$

13. Доказать, что поверхности второго порядка являются поверхностями Лиувилля. Координатная сеть, относительно которой линейный элемент имеет вид $ds^2=(U+V)(du^2+dv^2)$, состоит из линий кривизны (см. задачу 11 гл. VII).

14. Показать, что в окрестности произвольной точки P регулярной поверхности может быть введена полугеодезическая параметризация u, v, отличающаяся следующим: линии u — геодезические, проходящие через точку P, линии v — геодезические окружности с центром P. Если в качестве параметров взять: u — геодезическое расстояние от P, а v — угол, образуемый геодезической с некоторым фиксированным направлением в точке P, то линейный элемент поверхности примет вид

$$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

Когда $u\to 0$, то $G\to 0$, $(\sqrt{G})_u\to 1$, $-\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}\to K(P)$, где $K(P)$ — гауссова кривизна в P.

15. Пусть $l(r)$ — длина геодезической окружности с центром в точке P поверхности и радиусом r. Доказать, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-l(r)}{r^2}=\frac{\pi}{3}K(P),$$

где $K(P)$ — гауссова кривизна в точке P.

16. Показать, что геодезические линии поверхности с линейным элементом

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2+(u\,dv-v\,du)^2}{(c+u^2+v^2)^2}$$

суть: $\alpha u+\beta v+\gamma=0$ (α, β, γ — постоянные).

17. Показать, что уравнению

$$-v'' + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_u} v'^3 + \frac{2\varphi_{uv}}{\varphi_u} v'^2 + \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u} v' = 0$$

удовлетворяет $v = c_1\varphi + c_2$ (c_1, c_2 — постоянные).

18. Показать, что если уравнение геодезических в полугеодезических координатах

$$v'' + \frac{1}{2} G_u v'^3 - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} v'^2 + \frac{G_u}{G} v' = 0$$

имеет интеграл вида $v = c_1\varphi(u, v) + c_2$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, то $G = U(u) V(v)$, и, следовательно, гауссова кривизна поверхности вдоль линий v постоянна.

19. Отображение одной поверхности на другую называется геодезическим, если при этом отображении геодезические одной поверхности соответствуют геодезическим другой. Из задачи 16 следует, что поверхности постоянной гауссовой кривизны допускают геодезическое отображение на плоскость.

Доказать, что только поверхности постоянной гауссовой кривизны обладают этим свойством (*теорема Бельтрами*).

20. Пусть на геодезической γ, проходящей вблизи точки O поверхности, взяты две близкие точки A и B. Пусть ϑ — угол геодезического треугольника AOB при вершине O, а α — соответствующий угол плоского треугольника с теми же сторонами. Показать, что $\frac{\vartheta - \alpha}{\sigma} = \frac{1}{3} K^*$, где σ — площадь геодезического треугольника, а K^* близко к гауссовой кривизне поверхности в точке O, если треугольник достаточно мал.

21. Пусть Δ — геодезический треугольник, содержащий точку P поверхности. Пусть ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 — углы этого треугольника, а α_1, α_2, α_3 — углы соответствующего плоского треугольника (см. предыдущую задачу). Доказать, что три отношения

$$\frac{\vartheta_1 - \alpha_1}{\sigma}, \quad \frac{\vartheta_2 - \alpha_2}{\sigma}, \quad \frac{\vartheta_3 - \alpha_3}{\sigma}$$

стремятся к общему пределу $\frac{1}{3} K(P)$, когда треугольник Δ стягивается к точке P (*теорема Гаусса*).

22. Поверхности F_1 и F_2 называются *поверхностями центров поверхности* F, если они образуются концами отрезков длины $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$ (k_1 и k_2 — главные кривизны F), откладываемых на нормалях поверхности F. Между поверхностями F_1, F_2 и F естественным образом устанавливается соответствие точек. Именно, соответствующими являются точки поверхностей, лежащие на одной и той же нормали к F. Доказать, что линиям кривизны поверхности F соответствуют геодезические линии поверхностей центров.