Н.М.Матвеев

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н. М. Матвеев

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математическим специальностям

«Специальная Литература»
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1996

Матвеев Н. М.

Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. С.-Петербург: Специальная Литература, 1996.

Рецензенты:
кафедра математического анализа и методики преподавания математики Московского государственного педагогического университета (зав. кафедрой, доктор педагогических наук, профессор *Г. Л. Луканкин*); доктор физико-математических наук, профессор Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского *М. В. Долов*

Книга является единым руководством по изучению вопросов теории дифференциальных уравнений и методов интегрирования. Обеспечивает весь учебный процесс по разделу «Дифференциальные уравнения» программы по математическому анализу педагогических институтов. Может быть использована на нематематических факультетах университетов и во втузах.

Книга издана при содействии фонда поддержки науки и образования "Университетская книга".

ISBN 5-7571-0047-8

От автора

Эта книга написана на основе лекций, читаемых автором в Российском государственном педагогическом университете имени А. А. Герцена. При написании ее широко использована книга автора [73].

Книга является учебным пособием по обыкновенным дифференциальным уравнениям для математических и физико-математических факультетов педагогических институтов и может быть использована на нематематических факультетах университетов и в высших технических учебных заведениях.

В ней дифференциальные уравнения излагаются как глава математического анализа (учения о функциях), в которой изучаются свойства функций, определяемых дифференциальными уравнениями. При этом мы опираемся на сведения по дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких независимых переменных и теории рядов, которые предполагаются читателю известными.

При изложении мы старались следовать принципу сочетания фундаментальности и прикладной направленности и показать роль дифференциальных уравнений для математического моделирования реальных процессов.

Всюду, где предоставляется возможность, мы подчеркиваем органическую связь основных разделов общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений: аналитической теории, качественной теории и теории устойчивости решений. В частности, дается понятие о голоморфных решениях и интегрировании дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов; устанавливается связь между классификацией Пуанкаре особой точки одного типа дифференциальных уравнений первого порядка и характером устойчивости точки покоя соответствующей автономной системы двух дифференциальных уравнений.

Основная цель пособия — дать по возможности целостное представление о предмете и методах общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотреть методы интегрирования наиболее важных в теоретическом отношении и часто встречающихся в приложениях типов дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется линейным уравнениям и системам линейных уравнений. При этом главное внимание обращается на изучение свойств решений и их связь со свойствами самих дифференциальных уравнений, на адекватность аналитических структур уравнений и их решений.

Книга состоит из введения и девяти глав, с содержанием которых читатель может ознакомиться по оглавлению.

К введению и ко всем главам предложены вопросы для повторения, требующие иногда активной работы читателя. Они могут быть использованы для самоконтроля и при подготовке к коллоквиумам, зачетам и экзаменам.

К главам 2, 3, 5 и 6 предложены также задачи, ответы на которые помещены в конце книги.

В приложении даны примерные темы контрольных работ (с методическими указаниями) на основе материала, изложенного в первых шести главах.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи геометрического и физического содержания, приводящие к дифференциальным уравнениям

Прежде чем дать определение дифференциального уравнения и связанных с ним общих понятий, рассмотрим две простые задачи, которые приводятся к нахождению **функции**, являющейся решением дифференциального уравнения.

Задача 1. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(0,1)$ (рис. 1*а*) и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = y(x)$ (рис. 1*б*) есть уравнение кривой, обладающей в каждой своей точке $M(x, y)$ указанным в задаче свойством. Обозначим через α угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси x. Как известно, угловой коэффициент касательной MT есть $\operatorname{tg}\alpha$, и он равен производной от y по x, так что

$$\operatorname{tg}\alpha = y'. \tag{0.1}$$

С другой стороны, по условию задачи имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = 2x. \tag{0.2}$$

Приравнивая значения $\operatorname{tg}\alpha$, определяемые формулами (0.1) и (0.2), получим

$$y' = 2x. \tag{0.3}$$

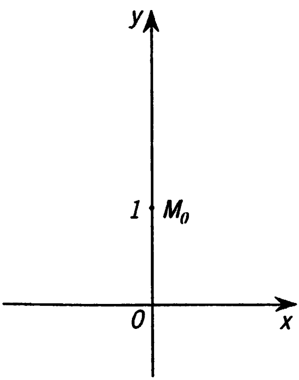

Рис. 1*а*

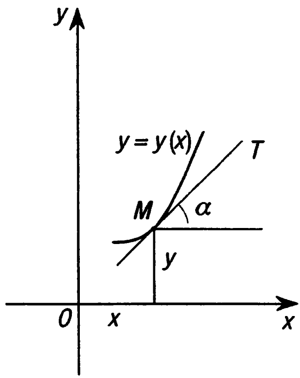

Рис. 1*б*

В уравнении (0.3) неизвестная функция $y = y(x)$ стоит под знаком производной или, что то же, уравнение (0.3) содержит производную от неизвестной функции. Уравнения такого типа, которые содержат производные искомой функции, называются *дифференциальными уравнениями*.

Таким образом, наша задача свелась к нахождению функции, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению (0.3), т. е. обращала бы это уравнение в тождество. Такая функция называется *решением* дифференциального уравнения, а процесс нахождения решений — *интегрированием* этого уравнения.

Решением дифференциального уравнения (0.3) является любая первообразная для функции $2x$. Например, решением будет

$$y = x^2. \tag{0.4}$$

Как известно из интегрального исчисления, все первообразные для функции $2x$ и, следовательно, в с е решения дифференциального уравнения (0.3) даются формулой

$$y = x^2 + C, \tag{0.5}$$

где C — произвольная постоянная.

Получили **бесконечное** множество решений дифференциального уравнения (0.3), так как каждому конкретному числовому значению C соответствует свое решение. В частности, при $C = 0$ получаем решение (0.4).

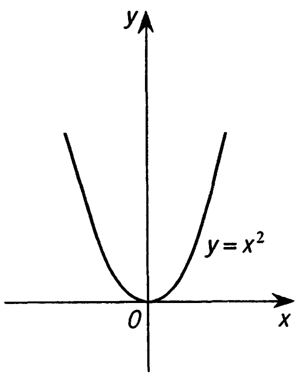

Рис. 2*а*

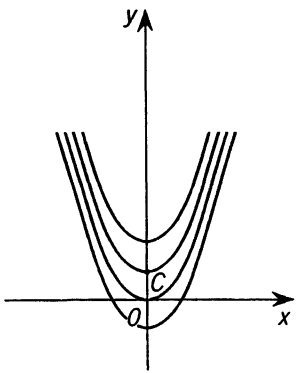

Рис. 2*б*

Искомая кривая $y = y(x)$ является графиком решения дифференциального уравнения (0.3); она называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Таким образом, интегральными кривыми уравнения (0.3) будут парабола (0.4) (рис. 2*а*) и все параболы (0.5) (рис. 2*б*), получающиеся из нее сдвигом, параллельным оси y, на C единиц.

Все эти параболы обладают одним общим свойством, выраженным дифференциальным уравнением (0.3): угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Вспомним, что искомая интегральная кривая удовлетворяет дополнительному условию: она должна проходить через заданную точку $M_0(0, 1)$ (рис. 1*а*).

Чтобы выделить из семейства интегральных кривых (0.5) искомую интегральную кривую, достаточно заменить в этом уравнении координаты x и y координатами точки M_0 и, найдя из полученного уравнения значение произвольной постоянной C, подставить его в уравнение (0.5); в результате получится искомая интегральная кривая. Выполняя указанные выкладки, имеем $1 = 0^2 + C$, $C = 1$, $y = x^2 + 1$.

Таким образом, искомой кривой будет парабола (рис. 3)

$$y = x^2 + 1.$$

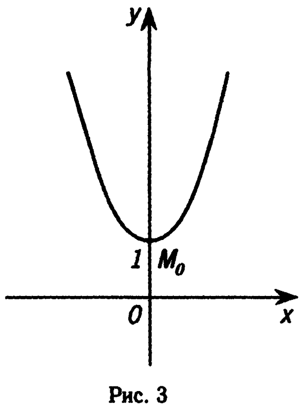

Рис. 3

З а д а ч а 2. Предположим, что материальная точка P движется по прямой, которую принимаем за ось x, так что в момент времени t точка занимает положение x (рис. 4*а*). Пусть известна скорость движения как функция от времени t; обозначим ее через $f(t)$ и будем предполагать, что она непрерывна при всех рассматриваемых значениях времени t. Требуется найти закон движения точки, т. е. зависимость x от t, $x = x(t)$ (рис. 4*б*), если известно, что в некоторый момент времени t_0 точка занимает положение x_0, так что $x(t_0) = x_0$.

Р е ш е н и е. Известно, что скорость движения рассматриваемой точки в момент времени t равна производной от x по t. С другой стороны, эта скорость равна $f(t)$. Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \qquad (0.6)$$

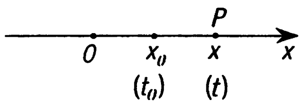

Рис. 4*а*

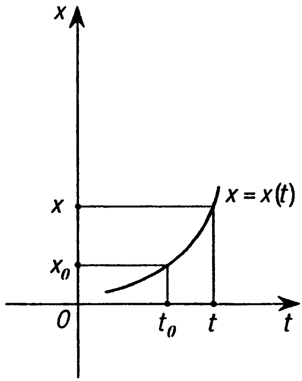

Рис. 4*б*

Равенство (0.6) есть дифференциальное уравнение движения рассматриваемой точки. Оно задает закон движения в **дифференциальной** форме.

Интегрируя уравнение (0.6) и принимая во внимание, что $x(t_0) = x_0$, найдем интересующий нас закон движения в *конечной* форме.

Интегрирование уравнения (0.6) состоит в нахождении *всех* первообразных для функции $f(t)$, которые, как известно из интегрального исчисления, содержатся в формуле

$$x = F(t) + C, \tag{0.7}$$

где $F(t)$ — одна из первообразных, а C — произвольная постоянная.

Нам остается выделить решение (движение), удовлетворяющее поставленному условию

$$x(t_0) = x_0. \tag{0.8}$$

Для этого положим в формуле (0.7) $t = t_0$, $x = x_0$. Получим

$$x_0 = F(t_0) + C, \tag{0.9}$$

откуда $C = x_0 - F(t_0)$. Следовательно, искомым решением (движением) будет

$$x = F(t) + x_0 - F(t_0). \tag{0.10}$$

Формула (0.10) дает искомый закон движения, так как функция $x = x(t)$, определяемая этой формулой, удовлетворяет и дифференциальному уравнению (0.6) и условию (0.8). Других движений, определяемых дифференциальным уравнением (0.6) и условием (0.8) нет (почему?).

Условие (0.8) называется *начальным условием*, а числа t_0 и x_0 — *начальными данными* решения (движения) (0.10).

Понятие о дифференциальном уравнении

Выше были рассмотрены примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Теперь дадим определение дифференциального уравнения и связанных с ним общих понятий.

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит производные от искомой функции и может содержать искомую функцию и независимую переменную. Будем предполагать, что независимая переменная всегда является вещественным числом.

В теории дифференциальных уравнений изучаются и такие уравнения, которые содержат несколько независимых переменных, искомую функцию и частные производные от искомой функции по независимым переменным. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с частными производными*. Например, таким уравнением будет

$$x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx} = 0, \quad z = z(x, y).$$

Здесь $z = z(x, y)$ — искомая функция от двух независимых переменных x и y. В отличие от уравнений с частными производными, уравнения, в которых искомая функция является функцией только от одной независимой переменной, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. В дальнейшем всюду, кроме главы 7, будем рассматривать только **обыкновенные дифференциальные уравнения**.

Порядок уравнения

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения. Оба уравнения, рассмотренные в задачах 1 и 2, являются уравнениями первого порядка. Уравнения

$$y'' + y = \sin x, \quad y''' - y'' = 0, \quad y^{(4)} = 0 \tag{0.11}$$

являются соответственно уравнениями второго, третьего и четвертого порядков. Уравнение n-го порядка всегда можно, перенеся все члены в левую часть, записать в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{0.12}$$

Здесь F — некоторая известная функция от своих аргументов, которую будем предполагать всегда действительной. Производная n-го порядка обязательно входит в уравнение (0.12).

Нормальная форма уравнения n-го порядка

Мы будем рассматривать главным образом уравнения, разрешенные относительно старшей производной, т. е. уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{0.13}$$

Относительно такого уравнения будем говорить, что оно задано в *нормальной форме*. Например, нормальной формой уравнения

$$(1 + x^2)\, y'' - y'^2 + 1 = 0 \tag{0.14}$$

будет

$$y'' = \frac{1}{1 + x^2}\, y'^2 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Если правая часть уравнения (0.13) **линейна** относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то его можно записать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x).$$

Такое уравнение называется *линейным уравнением n-го порядка*. Уравнение вида

$$p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x),$$

где $p_0(x) \not\equiv 1$, также называется *линейным*. Так, все уравнения (0.11) линейные, уравнение (0.14) нелинейное.

Линейные уравнения обладают рядом замечательных свойств и имеют многочисленные приложения, поэтому их теория является важнейшей и наиболее разработанной частью теории дифференциальных уравнений.

Решения и интегральные кривые

Всякая функция $y = y(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a, b) вместе со своими производными до порядка, равного порядку данного дифференциального уравнения, и обращающая это уравнение в тождество, справедливое при всех значениях x из интервала (a, b), называется *решением* этого уравнения в интервале (a, b). Так, функция

$$y = y(x) \quad (a < x < b)$$

будет решением уравнения (0.12) в интервале (a, b), если

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Иногда решение получают в *неявном* виде

$$\Phi(x, y) = 0$$

или в *параметрической форме*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \ (t \text{ — параметр}).$$

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Часто ради краткости интегральную кривую называют *решением*.

Рассмотрим два примера уравнений и их решений (интегральных кривых).

Пример 1. Функция

$$y = \sin x \ (-\infty < x < +\infty) \tag{0.15}$$

является решением уравнения

$$y'' + y = 0 \tag{0.16}$$

в интервале $(-\infty < x < +\infty)$ (и во всяком конечном интервале), ибо

$$(\sin x)'' + \sin x \equiv 0$$
$$(-\infty < x < +\infty).$$

Следовательно, синусоида (0.15) является интегральной кривой уравнения (0.16).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2. \tag{0.17}$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$y = \frac{1}{1-x} \ (x \neq 1) \tag{0.18}$$

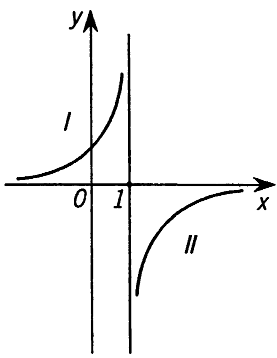

Рис. 5

является решением уравнения (0.17) в каждом из интервалов $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ (рис. 5). В этих интервалах функция (0.18) непрерывна вместе со своей производной и имеет графиком равнобочную гиперболу, каждая из ветвей которой (I и II) будет интегральной кривой.

Основная задача теории интегрирования дифференциального уравнения

Как было сказано выше, процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения. Если при этом удается выразить все решения в элементарных функциях, то говорят, что уравнение проинтегрировано в элементарных функциях. Именно с таким уравнением мы имели дело в задаче 1.

Если уравнение не интегрируется в элементарных функциях, но все его решения выражаются через неопределенные интегралы от элементарных функций, то говорят, что уравнение проинтегрировано в *квадратурах*. *Квадратурой* называется операция взятия неопределенного интеграла. Например, все решения уравнения

$$y' = \frac{\sin x}{x} \tag{0.19}$$

даются формулой

$$y = \int \frac{\sin x}{x}\, dx + C.$$

Здесь (и в дальнейшем) первый член справа есть какая-нибудь **фиксированная** первообразная для функции $\frac{\sin x}{x}$, а C — произвольная постоянная.

Таким образом, уравнение (0.19) **проинтегрировано в квадратурах**.

Если уравнение удается проинтегрировать в элементарных функциях или в квадратурах, то говорят, что оно *интегрируемо в конечном виде*. Будем рассматривать в основном только такие уравнения. Однако следует иметь в виду, что значительно большая часть уравнений не интегрируется в конечном виде, и для аналитического представления решений приходится привлекать более сложный математический аппарат.

Основная задача теории интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств. Эта задача наиболее полно решена для линейных уравнений.

В общей теории дифференциальных уравнений разрабатываются методы, дающие возможность делать заключение о свойствах решений непосредственно по свойствам самого дифференциального уравнения независимо от возможности проинтегрировать его в том или ином виде. Изучение свойств решений, знание интервала существования решения и особенностей поведения его во всей области задания уравнения создают надежный фундамент для применения приближенных способов интегрирования.

О математическом моделировании реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений

Задача изучения реальных объектов или процессов состоит в выявлении их свойств с целью прогнозирования поведения и управления ими для достижения практически важных условий их поведения. Решение этой задачи существенно облегчается, если вместо самих объектов (процессов) изучать их модели.

Модели реальных объектов всегда широко использовались в науке и технике для проверки достоверности гипотез. Модель должна правильно воспроизводить исследуемые свойства объекта. При этом главное состоит в том, что поведение модели и реального объекта должно подчиняться одинаковым закономерностям.

Для изучения реальных процессов с большим успехом используются математические модели. Роль математического моделирования в настоящее время все более возрастает в связи с широким распространением современных быстродействующих ЭВМ.

Под математической моделью реального процесса в общем случае понимается приближенное описание этого процесса на языке математики. Искусство математического моделирования состоит в умении «перевести» техническую задачу на математический язык, перевести адекватно, не теряя основных свойств «оригинала» (см., например, [2, 3, 10, 32, 45, 95, 110, 130]).

Математические модели вследствие их относительной простоты прежде всего помогают понять процесс, дают возможность установить качественные и количественные характеристики состояния процесса и на основе этих характеристик предсказать дальнейшее его развитие, т. е. поведение интересующих, «ведущих» в данном процессе величин без проведения натуральных экспериментальных исследований, в сложных случаях слишком дорогостоящих, а иногда и просто невозможных на данном уровне развития техники [38].

В последних случаях оказывается весьма перспективным проведение вычислительного эксперимента над математической моделью. Он состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие ее параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах исследуемого явления [38, 82, 100].

Вычислительный эксперимент стал мощным средством теоретических исследований в конкретных областях знаний и в первую очередь в физике (см. [38, с. 6]).

Любая математическая модель должна удовлетворять двум основным требованиям [32, 38, 77]:

1. Адекватность процессу. Модель должна отражать наиболее существенные связи между величинами, характеризующими процесс, учитывать свойства среды, в которой происходит процесс, и информацию о начальном состоянии процесса. Только тогда по поведению модели можем судить о поведении самого процесса. Поэтому, строя и уточняя математическую модель, мы должны постоянно заботиться о том, чтобы не упустить поначалу главное, а при необходимости и второстепенное, от чего зависит ход реального процесса.

2. Разрешимость модели. Модель должна быть по возможности не слишком сложной, чтобы из нее можно было получить интересующую нас информацию о качественных и количественных свойствах процесса. При этом желательно иметь аналитически разрешаемые модели или численно,— если первое невозможно или слишком громоздко. При этом неоценимую пользу может принести упомянутый выше вычислительный эксперимент над моделью.

Большие возможности метода математического моделирования были продемонстрированы советскими учеными при реализации таких крупных научно-технических программ, как освоение космического пространства и овладение ядерной энергией.

В частности, в качестве математических моделей реальных процессов могут быть использованы дифференциальные уравнения.

Здесь сначала составляется дифференциальное уравнение (или система дифференциальных уравнений), описывающее процесс, и ставятся дополнительные условия, которым должна удовлетворять искомая функция (искомые функции) (см. [19, с. 8]).

В результате приходят чаще всего к задаче с начальными условиями (см. ниже пример 3 и пример 5 § 11), к краевой задаче (см., например, задачу о брахистохроне [2, с. 24], [34, с. 9]) и к начально-краевой задаче (см., например, задачу о малых колебаниях струны, рассмотренную в § 34).

Эффективность использования дифференциальных уравнений в качестве математических моделей обеспечивается историческими истоками самих дифференциальных уравнений и современными взглядами на многие законы природы с позиций дифференциальных уравнений, приложениями дифференциальных уравнений в современной науке и технике, развитием методов интегрирования и общей теории дифференциальных уравнений, и высоким уровнем вычислительной математики и кибернетики.

Решение большинства задач математического моделирования разбивается на определенные этапы, включающие в себя составление и разрешение моделей (см., например, [38, с. 3], [77, с. 4], [32, с. 7].

Рассмотрим один пример физического процесса, при моделировании которого используется дифференциальное уравнение.

Пример 3. (Задача о распаде радия). Рассмотрим процесс распада радиоактивного вещества. Обозначим массу этого вещества в момент времени t через m. Требуется найти закон распада

$$m = m(t), \tag{0.20}$$

если известно начальное количество радия m_0, т. е. $m(0) = m_0$.

Составим математическую модель рассматриваемого процесса.

Будем исходить из того, что скорость распада $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна наличному количеству радия

$$\frac{dm}{dt} = km. \tag{0.21}$$

Здесь $k < 0$ (почему?) — параметр, характеризующий сорт радиоактивного вещества. Уравнение (0.21) и есть искомое дифференциальное уравнение распада радия.

Чтобы найти закон распада радия, нужно найти решение уравнения (0.21), удовлетворяющее начальному условию

$$m(0) = m_0, \quad 0 < m_0 < \infty. \tag{0.22}$$

Уравнение (0.21) вместе с дополнительным условием (0.22) и образуют математическую модель рассматриваемой задачи. Запишем эту модель в виде

$$\frac{dm}{dt} = km, \quad m(0) = m_0. \tag{0.23}$$

В данном случае математическая модель легко разрешима.

Сначала проинтегрируем дифференциальное уравнение (0.21), воспользовавшись известными сведениями из дифференциального исчисления. Имеем

$$\frac{dm}{dt} = km \Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = k.$$

Но

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = (\ln m)', \quad k = (kt)'.$$

Поэтому

$$(\ln m)' = (kt)',$$

откуда

$$\ln m - kt = C, \tag{0.24}$$

где C — произвольная постоянная. Интегрирование закончено.

Мы получили (так же, как в задачах 1 и 2) бесконечное множество решений уравнения (0.21), правда, на этот раз в неявном виде.

Выделим теперь из множества решений (0.24) интересующее нас решение, которое удовлетворяет начальному условию (0.22).

Для этого (так же, как в задачах 1 и 2) заменим в (0.24) t и m соответственно на 0 и m_0. Получим

$$\ln m_0 - k \cdot 0 = C \Rightarrow C = \ln m_0.$$

Подставим найденное значение C в формулу (0.24):

$$\ln m - kt = \ln m_0,$$

откуда находим экспоненциальный закон распада:

$$m = m_0 e^{kt}. \tag{0.25}$$

Поставленная задача о распаде радия полностью решена.

Из аналитической структуры решения (0.25) видим, что искомая функция (0.20) непрерывно зависит как от времени t, так и от начального значения m_0 и параметра k, и что она обладает свойством

$$m(t) \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

(экспоненциально мала при $t \to +\infty$). (Сделайте рисунок).

Преобразуем формулу (0.25), введя в рассмотрение период полураспада T. Имеем

$$m(T)=\frac{1}{2}m_0 \Rightarrow m_0 e^{kT}=\frac{1}{2}m_0 \Rightarrow e^{kT}=2^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^k=2^{-\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{kt}=2^{-\frac{1}{T}t}.$$

Поэтому формула (0.25) примет вид

$$m=m_0\cdot 2^{-\frac{1}{T}t}.$$

Отметим, что уравнение (0.21) есть частный случай линейного уравнения

$$y'=ky,$$

которое часто используется при моделировании процессов, обладающих тем общим свойством, что скорость изменения функции, выражающей искомый закон процесса, пропорциональна значению самой функции (см., например, [32, с. 8]).

Замечание. Если дифференциальное уравнение, моделирующее реальный процесс, линейное (как в примере 3), то такая модель называется *линейной*, в противном случае — *нелинейной*. В связи с этим теоретическая механика подразделяется на линейную и нелинейную в зависимости от типа дифференциальных уравнений, используемых для описания движений.

Линейная модель очень удобна, ибо она, во-первых, легче разрешается; во-вторых, линейное дифференциальное уравнение обладает указанными в 2.2 преимуществами в отношении выбора начальных данных при постановке начальных условий (условий Коши) и в отношении интервала существования решения.

Во многих случаях, но далеко не всегда, при разрешении нелинейной модели удается с достаточно большой точностью заменить ее линейной моделью, отбросив нелинейные члены дифференциального уравнения или, применяя процесс линеаризации.

Заметим еще, что изучение модели, содержащей дифференциальное уравнение, облегчается, если последнее является стационарным (автономным), т. е. в него не входит явно время. Такие модели называются *стационарными* (*автономными*). Так, модель (0.23) в рассмотренной выше задаче о распаде радия одновременно и линейная и стационарная.

Обращаем внимание читателя на то, что, рассматривая задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, в самом начале введения, мы уже по существу имели дело с математическим моделированием реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

В дальнейшем в связи с изучением конкретных типов дифференциальных уравнений будут рассмотрены задачи, в которых изучаемые дифференциальные уравнения используются для математического моделирования.

Большое число примеров построения и анализа конкретных моделей читатель найдет в обширной литературе по дифференциальным уравнениям (см., например, 3, 26, 31, 32, 33, 38, 40, 54, 55, 72, 77, 81, 91, 95, 101, 135).

Вопросы для повторения

1. Какое уравнение с неизвестной функцией (функциональное уравнение) называется дифференциальным? Какая функция называется решением дифференциального уравнения? Как называется операция нахождения решений данного дифференциального уравнения?

2. Чем отличаются обыкновенные дифференциальные уравнения от дифференциальных уравнений с частными производными?

3. Что такое порядок дифференциального уравнения?

4. Какая форма обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется нормальной?

5. В каком случае обыкновенное дифференциальное уравнение называется линейным?

6 Дайте определение решения $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ (интегральной кривой) обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Какая форма задания решения дифференциального уравнения называется неявной и параметрической?

7. В чем состоит основная задача теории интегрирования дифференциального уравнения?

8. Что значит проинтегрировать дифференциальное уравнение в конечном виде?

9. В чем состоит суть математического моделирования реальных процессов, какова его роль в изучении процесса? Каким требованиям должна удовлетворять математическая модель? Приведите пример использования дифференциального уравнения для математического моделирования реальных процессов.

Глава 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Уравнение первого порядка и его решение

Рассмотрим основные понятия, относящиеся к уравнениям первого порядка общего вида. Согласно определению, данному выше, уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Функция

$$y = y(x),$$

определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале (a, b) и обращающая уравнение (1.1) в тождество

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0,$$

справедливое для всех значений x из интервала (a, b), называется *решением* уравнения (1.1) в интервале (a, b).

График решения $y = y(x)$ является **гладкой** кривой *.

1.2. Нормальная форма уравнения первого порядка

В этой главе мы ограничимся изучением уравнений первого порядка, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно производной от искомой функции:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.2}$$

Такую форму уравнения первого порядка будем называть *нормальной*. Она называется также *нормальной формой Коши*.

---

* Следует иметь в виду, что данное здесь определение является классическим. Далеко не всегда гладкие кривые достаточно точно описывают изучаемый процесс, т. е. графиком решения может оказаться кривая как с изломами, так и с разрывами. Чтобы сохранить при этом дифференциальную форму модели, возникает необходимость в отказе от классического определения производной и введении в рассмотрение классов обобщенных функций.

Если правая часть уравнения (1.2) линейна относительно y, то его можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции от x.

Такое уравнение называется *линейным уравнением первого порядка*. Линейные уравнения и их решения обладают замечательными свойствами, выделяющими их из общего класса уравнений первого порядка. Линейные уравнения первого порядка, как мы покажем в § 7, всегда интегрируются в квадратурах в отличие от нелинейных уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, за редким исключением.

1.3. Геометрическое истолкование уравнения первого порядка и его решений. Поле направлений. Изоклины

Установим связь между уравнением (1.2) и его интегральными кривыми. Предположим, что правая часть уравнения (1.2) определена и непрерывна в области G (рис. 6), и пусть

$$y = y(x) \tag{1.3}$$

есть интегральная кривая этого уравнения, проходящая через точку $M(x, y)$. Проведем касательную к интегральной кривой (1.3) в точке M и обозначим через α угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси x. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x),$$

но

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y(x)).$$

Таким образом, если через точку $M(x, y)$ проходит интегральная кривая (1.3), то наклон касательной к ней в этой точке определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y), \tag{1.4}$$

так что наклон касательной к интегральной кривой определен заранее самим дифференциальным уравнением.

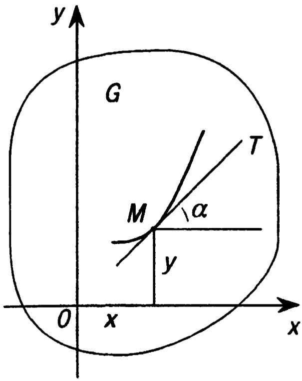

Рис. 6

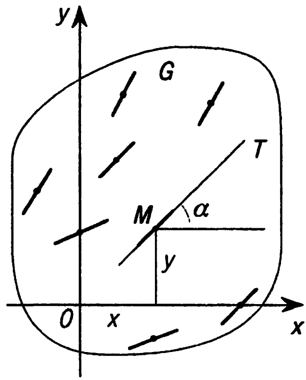

Рис. 7

Наклон касательной (как и всякой прямой) есть тангенс угла α, образованного касательной с положительным направлением оси x.

Наклоны касательных можно указать, не находя интегральных кривых. Для этого построим в каждой точке M области G отрезок (для определенности — единичной длины) с центром в точке M (рис. 7), составляющий с положительным направлением оси x угол α, тангенс которого определяется формулой (1.4). Получим так называемое *поле направлений*, определяемое уравнением (1.2). Всякая интегральная кривая этого уравнения обладает тем свойством, что направление касательной в каждой ее точке совпадает с направлением поля, определяемым уравнением (1.2) в этой точке.

Чтобы ответить на вопрос, под каким углом интегральные кривые могут пересекать ось x, достаточно подставить в правую часть уравнения (1.2) $y = 0$, и получим тангенс угла α:

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, 0).$$

Например, интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{1.5}$$

пересекают ось x под углом α, тангенс которого равен x^2. Аналогично интегральные кривые уравнения (1.2) в точках их пересечения с осью y образуют с осью x угол α:

$$\operatorname{tg} \alpha = f(0, y).$$

Вообще, если надо узнать, какой угол с осью x образуют интегральные кривые уравнения (1.2) в точках их пересечения с заданной кривой $y=\varphi(x)$, то достаточно подставить $y=\varphi(x)$ в правую часть уравнения (1.2). Получим

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, \varphi(x)).$$

Например, для интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

в точках их пересечения с прямой $y=x$ имеем $\operatorname{tg}\alpha = 0$, так что касательные к этим интегральным кривым параллельны оси x.

Кривая $\omega(x, y)=0$, в каждой точке которой направление поля, определяемое дифференциальным уравнением (1.2), одно и то же, называется *изоклиной* этого уравнения.

Уравнение изоклин дифференциального уравнения (1.2) имеют вид

$$f(x, y) = k,$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha = \text{const}$. Например, для уравнения (1.5) изоклинами будут окружности

$$x^2+y^2=k,$$

вырождающиеся в точку (0, 0) при $k=0$. При $k=1$ получаем изоклину

$$x^2+y^2=1.$$

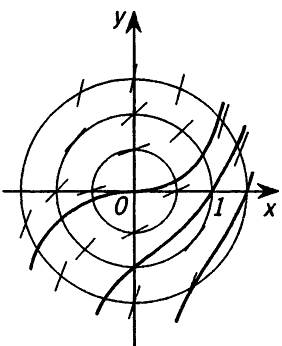

Рис. 8

Интегральные кривые в каждой точке этой окружности наклонены к оси x под углом $\frac{\pi}{4}$. С увеличением k наклон интегральных кривых возрастает, и интегральные кривые имеют вид, указанный схематически на рис. 8. Построив достаточно «густое» семейство изоклин (в нашем случае — окружностей), можно получить методом изоклин сколь угодно точное представление об интегральных кривых данного дифференциального уравнения. Подробнее о методе изоклин см. [55, с. 11].

Изучение поля направлений может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и для контроля найденных решений. Так, решениями дифференциального уравнения (1.2) с неотрицательной правой частью могут быть только интегральные кривые, в точках которых $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$, т. е. $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Например, это имеет место для уравнения (1.5) (рис. 8). Все эти решения возрастают во всей области существования.

Изучение поля направлений особенно полезно в тех случаях, когда данное дифференциальное уравнение, как, например (1.5), не интегрируется даже в квадратурах [70, с. 117].

Если в точке $M(x, y)$ правая часть уравнения (1.2) обращается в бесконечность, то естественно считать, что направление поля в такой точке параллельно оси y. В этом случае надо рассматривать *перевернутое уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.2'}$$

Таким образом, во всякой точке $M(x, y)$, в которой правая часть уравнения (1.2) имеет конечное значение или обращается в бесконечность, это уравнение задает вполне определенное направление поля. Интегральные кривые перевернутого уравнения (1.2′), которое мы всегда будем рассматривать наряду с уравнением (1.2) в окрестности точек, где $f(x, y)$ обращается в бесконечность, будем присоединять к интегральным кривым уравнениям (1.2).

В указанных выше случаях уравнение (1.2) совместно с уравнением (1.2′) только предписывают к а к может интегральная кривая проходить через заданную точку $M(x, y)$, т. е. каков наклон касательной к интегральной кривой в этой точке. Вопрос же о фактическом существовании интегральной кривой, проходящей через точку $M(x, y)$, остается открытым и требует дополнительного исследования (см. 1.4 и § 2).

Рассмотрим теперь два примера, когда правая часть уравнения (1.2) не определена в точке (x_0, y_0), но определена в окрестности этой точки. В этом случае говорят, что поле направлений в точке (x_0, y_0) не задано. Такие точки будем называть (изолированными) *особыми точками* дифференциального уравнения (1.2). Их называют также особыми точками поля направлений, определяемого уравнением (1.2).

Если при этом существует интегральная кривая

$$y = y(x) \quad (x = x(y)),$$

обладающая свойством

$$y(x) \to y_0 \quad \text{при} \quad x \to x_0$$

$$(x(y) \to x_0 \quad \text{при} \quad y \to y_0),$$

то будем говорить, что эта интегральная кривая *примыкает* к точке (x_0, y_0).

Если решение задано в неявном виде

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{1.6}$$

то будем говорить, что соответствующая ему интегральная кривая примыкает к особой точке (x_0, y_0), если точка (x, y), лежащая на кривой (1.6), стремится к точке (x_0, y_0) (см. пример 6 на с. 78).

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{1.7}$$

Здесь правая часть определена на всей плоскости (x, y), кроме начала координат, где она обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так что точка (0, 0) является особой точкой уравнения (1.7). Будем называть ее *особой точкой типа* $\frac{0}{0}$. Таким образом, поле направлений задано всюду, кроме начала координат; причем в точках, не лежащих на оси y $(x \neq 0)$, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

(рис. 9*а*). Отсюда ясно, что соответствующими интегральными кривыми будут полупрямые (лучи),

$$y = kx \quad (x \neq 0),$$

примыкающие к началу координат (рис. 9*б*). В точках полуосей оси y направление поля параллельно оси y. Из рассмотрения перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

ясно, что эти полуоси $x = 0$ $(y \neq 0)$ являются интегральными кривыми (см. рис. 9*б*).

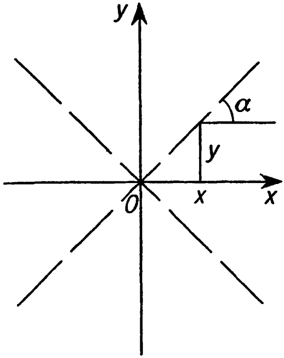

Рис. 9*а*

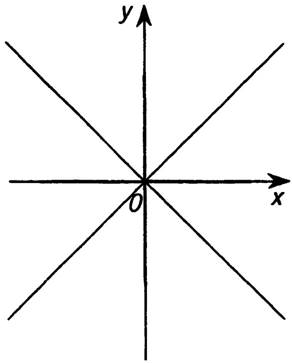

Рис. 9*б*

Итак, интегральными кривыми уравнения (1.7) являются все полупрямые

$$\left.\begin{array}{l} y = kx \ (x \neq 0), \\ x = 0 \ (y \neq 0), \end{array}\right\} \qquad (1.8)$$

примыкающие к началу координат, т. е. к особой точке уравнения (1.7). Заметим, что интегральные кривые (1.8) являются, очевидно, и з о к л и н а м и уравнения (1.7).

П р и м е р 2. Поле направлений, определяемое уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (1.9)$$

так же, как и в предыдущем примере, задано всюду, кроме начала координат, которое является особой точкой уравнения (1.9) типа $\frac{0}{0}$. Это поле направлений ортогонально полю направлений, определяемому уравнением (1.7), так как произведение правых частей уравнений (1.7) и (1.9) равно − 1 (рис. 10).

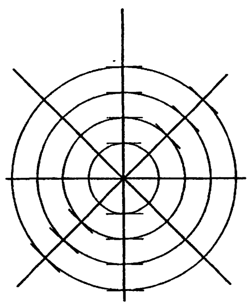

Рис. 10

Поэтому интегральными кривыми будут окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

В отличие от предыдущего примера к особой точке (0, 0) не примыкает ни одна интегральная кривая. Изоклинами уравнения (1.9) являются те же полупрямые (1.8), которые на этот раз не являются интегральными кривыми уравнения (1.9).

В дальнейшем мы неоднократно встретимся с особыми точками типа $\frac{0}{0}$ (см. пп. 2.1, 6.2, 6.3 и § 43).

Для построения схематических графиков интегральных кривых уравнения (1.2) наряду с изоклинами полезно использовать *линии экстремумов* и *линии точек перегиба*, во всех точках которых интегральные кривые имеют соответственно экстремум или перегиб.

В простейшем случае, когда в уравнении (1.2) функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, кривыми, подозрительными на линии экстремумов, и линии точек перегиба будут те кривые, в точках которых соответственно y' и y'' обращаются в нуль в силу дифференциального уравнения (1.2), т. е. кривые, определяемые уравнениями

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f'_x + f'_y \cdot f(x, y) = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что если f сохраняет знак, то линий экстремума нет. Так, уравнение $y' = x^2 + y^2$ не допускает линий экстремумов: все интегральные кривые монотонно возрастают (см. рис. 8). Для уравнения (0.3), $y' = 2x$ линией экстремумов может быть только прямая $x = 0$ (ось y). Она будет линией минимумов, ибо на ней $y'' = 2 > 0$ (см. рис. 2б). Линий точек перегиба уравнение $y' = 2x$ не имеет (почему?).

Уравнение $y' = 3x^2$ не имеет линий экстремумов, ибо подозрительная кривая $x = 0$ не является линией экстремумов (почему?). Это уравнение имеет линию точек перегиба $x = 0$, ибо $y'' = 6x$ обращается в ноль на прямой $x = 0$ и меняет знак. Убедитесь в этом, проинтегрировав уравнение $y' = 3x^2$. Сделайте рисунок. Уравнение $y' = y^2$ не имеет ни линий экстремумов, ни линий точек перегиба (почему?).

1.4. Задача Коши

Во многих задачах, которые приводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка, требуется найти решение, принимающее заданное значение при заданном значении независимой переменной. Например, это имеет место в задачах 1 и 2 и в задаче о распаде радия, рассмотренных во введении. Задача нахождения такого решения называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

В общем виде для уравнения первого порядка в нормальной форме (1.2) *задача Коши* ставится так: требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее *начальному условию* (*условию Коши*)

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

или

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.10}$$

где x_0 и y_0 — заданные числа.

При этом предполагается, что правая часть уравнения (1.2) определена в точке (x_0, y_0). Если $y_0 = 0$, то задача Коши называется *нулевой*.

Желая указать в решении задачи Коши (1.2), (1.10) *начальные данные* x_0, y_0, записывают это решение в виде

$$y = y(x; x_0, y_0), \tag{1.11}$$

где

$$y(x_0; x_0, y_0) = y_0.$$

Геометрически в задаче Коши речь идет о нахождении интегральной кривой уравнения (1.2), проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 11*а*), как это имело место в задаче 1, рассмотренной во введении (см. рис. 3).

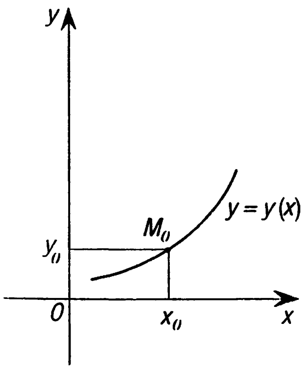

Рис. 11*а*

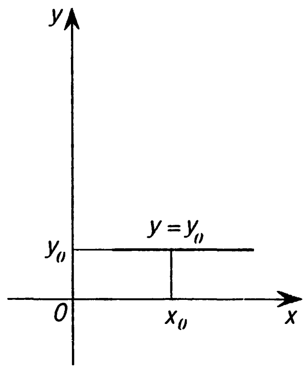

Рис. 11*б*

З а м е ч а н и е. Может оказаться, что правая часть уравнения (1.2) при $y = y_0$ обращается тождественно в нуль в некоторой окрестности $B(x_0)$ точки x_0,

$$f(x, y_0) \equiv 0, \quad x \in B(x_0).$$

Тогда $y = y_0$ есть решение *задачи Коши*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.12}$$

(рис. 11*б*). Поэтому, решая задачу Коши (1.12), всегда нужно сначала проверить, не является ли уже $y = y_0$ решением этой задачи.

П р и м е р 3. Задача Коши

$$y' = y - 1, \quad y(x_0) = 1 \quad (x_0 \in \mathrm{R})$$

имеет решение $y = 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$.

П р и м е р 4. Н у л е в а я задача Коши

$$y' = \sin(xy), \quad y(x_0) = 0 \quad (x_0 \in \mathrm{R})$$

имеет решение $y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty)$.

В связи с постановкой задачи Коши возникает проблема зависимости решения (1.11) от независимой переменной x и начальных данных x_0, y_0. Эта проблема изучается в общей теории дифференциальных уравнений, начальные сведения из которой рассмотрены в главах 8 и 9.

Исключительно большое значение для теории дифференциальных уравнений и ее приложений имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и о единственности этого решения. Будем говорить, что задача Коши (1.12) имеет *единственное решение*, если можно указать такую h-окрестность точки x_0, $B(x_0, h)$ (рис. 11*в*)

$$B(x_0, h) = \{x \in \mathrm{R}: |x - x_0| \le h\}, \tag{1.13}$$

что в ней определено решение (1.11) и не существует решения

$$y = y_1(x; x_0, y_0),$$

определенного в той же окрестности (1.13), значения которого не совпадают со значениями решения (1.11) хоть в одной точке окрестности (1.13), от-

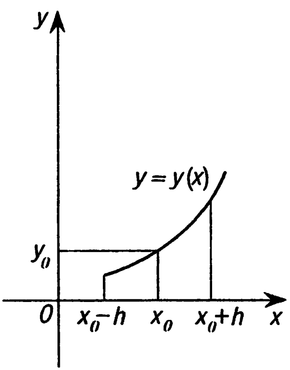

Рис. 11*в*

личной от точки x_0. В противном случае говорят, что единственность решения задачи Коши нарушена.

Существование решения задачи Коши и наличие свойства единственности зависят от дифференциального уравнения (1.2), т. е. от свойств функции $f(x, y)$ и от начальных данных x_0, y_0.

Пример 5. Для уравнения (0.3) ($y' = 2x$) задача Коши с любыми начальными данными x_0, y_0 имеет единственное решение. Действительно, все решения этого уравнения содержатся в формуле (0.5)

$$y = x^2 + C.$$

Подставляя в нее вместо x и y начальные данные x_0, y_0, имеем

$$y_0 = x_0^2 + C \Rightarrow C = y_0 - x_0^2,$$

так что искомым решением будет

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2$$

(рис. 12). Других решений с начальными данными x_0, y_0 нет (почему?).

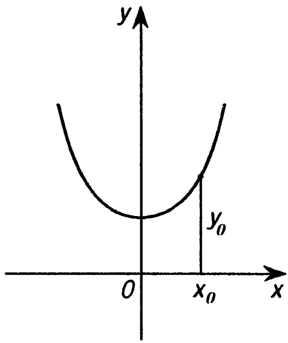

Рис. 12

Если правая часть уравнения (1.2) не определена в точке (x_0, y_0), но определена в окрестности этой точки, то такая точка, как сказано в предыдущем пункте, называется изолированной особой точкой уравнения (1.2). Возникает вопрос о существовании интегральных кривых, примыкающих к особой точке (x_0, y_0).

Мы будем рассматривать задачу нахождения таких интегральных кривых как *особый случай задачи Коши*, а начальные данные x_0, y_0 будем называть *особыми начальными данными*. Так, для уравнения (1.7) задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

имеет бесчисленное множество решений

$$y = Cx \quad (x \neq 0),$$

а для уравнения (1.9) задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

не имеет ни одного решения.

Случаи, когда хоть одно из начальных данных x_0, y_0 не является конечным или правая часть уравнения (1.2) обращается в бесконечность в конечной или в бесконечно удаленной начальной точке (x_0, y_0) также будем называть *особыми случаями задачи Коши*, а начальные данные x_0, y_0 — *особыми начальными данными*. Примером такой задачи Коши является

$$y' = y^2, \quad y(x) \to +\infty \text{ при } x \to 1-0.$$

Нетрудно убедиться, что решением будет

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (-\infty < x < 1)$$

(кривая I на рис. 5).

В дальнейшем понятие о задаче Коши будет распространено на уравнение n-го порядка (гл. 3) и на систему дифференциальных уравнений (гл. 6). Задача Коши является одной из основных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений, наиболее часто используемых в качестве математических моделей реальных процессов (см. введение). Как мы увидим далее, понятие о задаче Коши имеет и большое методологическое значение, так как оно является теоретической основой для определения других важных понятий теории дифференциальных уравнений.

1.5. Механическое истолкование уравнения первого порядка и его решений

Рассмотрим задачу о движении материальной точки P (рис. 13*а*) по прямой, которую мы принимаем за ось x (см. введение, задача 2), считая, что скорость движения — функция $f(t, x)$, зависящая от времени t и от положения x, занимаемого точкой P в момент времени t. Дифференциальным уравнением этого движения будет

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) определяет *поле скоростей*: в каждый момент времени t точка P проходит через положение x с заданной скоростью $\frac{dx}{dt}$ (ср. с полем направлений, определяемым уравнением (1.2)).

Всякое решение

$$x = x(t) \tag{1.15}$$

уравнения (1.14) представляет собой определенный *закон движения* и называется просто *движением*, определяемым этим уравнением.

Задача Коши для уравнения (1.14) состоит в нахождении движения (1.15), определяемого уравнением (1.14) и удовлетворяющего начальному условию (0.8):

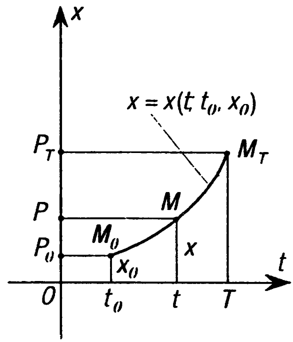

Рис. 13*а*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.16}$$

Решение задачи Коши (1.16) записывается в виде

$$x = x(t; t_0, x_0) \tag{1.17}$$

(ср. формулу (1.11)).

Движению (1.17) соответствует на плоскости (t, x) кривая $M_0 M_T$ (рис. 13*а*). Это — интегральная кривая уравнения (1.14). Она изображает зависимость x от t и называется *графиком движения*. Не следует смешивать **график** движения с **траекторией** движения точки P (отрезок $P_0 P_T$ на рис. 13*а*). График движения дает возможность в любой момент времени t ($t_0 \le t \le T$) определить, где находится точка P на траектории $P_0 P_T$ этого движения.

Отметим два частных случая уравнения (1.14):

1) $f(t, x)$ не зависит от x:

$$\frac{dx}{dt} = f(t).$$

Этот случай рассмотрен во введении (задача 2);

2) $f(t, x)$ не зависит явно от t:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.18}$$

В этом случае скорость движения зависит только от положения точки. Направление движения по траектории определяется знаком функции $f(x)$. Уравнение вида (1.18) называется *стационарным* или *автономным*. Автономные уравнения обладают замечательным свойством, которое состоит в том, что если

$x(t)$ есть решение уравнения (1.18), то $x(t+\tau)$, где $\tau \in \mathrm{R}$, тоже — решение (почему?).

Если правая часть уравнения (1.14) обращается в нуль при $x = x_0$ при всех рассматриваемых значениях t:

$$f(t, x_0) \equiv 0,$$

так что скорость движения в точке x_0 в любой момент времени равна нулю, то уравнение (1.14) имеет решение

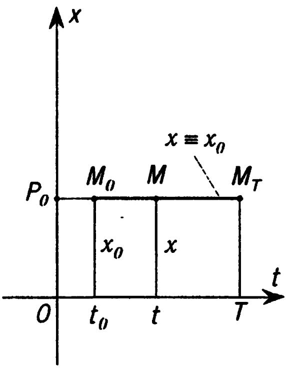

Рис. 13б

$$x \equiv x_0 \tag{1.19}$$

(рис. 13*б*). Такие решения называются *стационарными* решениями. Решению (1.19) соответствует движение, называемое *состоянием покоя*. Траекторией этого движения является точка P_0, называемая *точкой покоя* или *точкой равновесия* (см. рис. 13*б*).

При нахождении движений $x = x(t)$, определяемых уравнением (1.14), нужно прежде всего найти стационарные движения, т. е. движения вида (1.19), или доказать, что их нет.

В теории дифференциальных уравнений и ее приложениях исключительно большое значение имеет поведение движений, отличных от состояния покоя по отношению к состоянию покоя (см., например, § 42).

Замечание. Не умаляя общности, можно считать стационарное решение (1.19) нулевым ($x \equiv 0$). Это следует из того, что всякое решение $x = x(t)$ уравнения (1.14) (рис. 14*а*) можно преобразовать в нулевое решение ($y \equiv 0$) соответствующего дифференциального уравнения. Для этого достаточно сделать в уравнении (1.14) подстановку

$$y = x - x(t), \tag{1.20}$$

где y новая неизвестная функция от t.

В самом деле, выполняя эту подстановку, получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + x(t)) - f(t, x(t)),$$

которое допускает нулевое решение $y \equiv 0$ ($t_0 \leq t \leq T$) (рис. 14*б*)

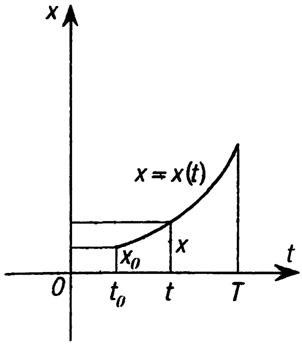

Рис. 14*a*

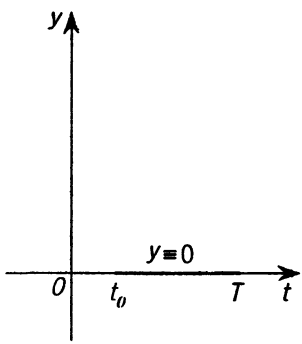

Рис. 14*б*

Если уравнение (1.2) имеет решение вида $y = b$, $b = \text{const}$, то последнее тоже называется *стационарным* решением.

§ 2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

2.1. Теорема существования и единственности решения уравнения первого порядка

Когда дано уравнение (1.2) и поставлено начальное условие (1.10), то, прежде чем находить решение, удовлетворяющее этому начальному условию, желательно ответить на вопрос, существует ли искомое решение, и если да, то будет ли это решение единственным. Это особенно важно в тех случаях, когда решение задачи Коши ищется приближенными методами.

Можно ли по аналитическому виду правой части уравнения и по начальным данным x_0 и y_0 сделать заключение о существовании и единственности искомого решения? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема существования и единственности решения, которую мы приводим здесь без доказательства (доказательство дано в гл. 9) и в упрощенной формулировке, достаточной для целей дальнейшего изложения.

Теорема Пикара. *Если правая часть уравнения* (1.2) *непрерывна в некоторой окрестности начальной точки* (x_0, y_0) *и имеет непрерывную в этой окрестности частную* *производную* $\frac{df}{dy}$, *то уравнение* (1.2) *имеет единственное решение*

$$y = y(x) = y(x;\ x_0,\ y_0),$$

определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальному условию* (1.10) (см., например, [71, с. 22]).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = P(x,\ y), \tag{1.21}$$

где правая часть есть **полином** относительно x и y.

Ясно, что какую бы начальную точку $(x_0,\ y_0)$ ни взяли, оба условия теоремы Пикара будут выполнены и, следовательно, через любую точку плоскости $(x,\ y)$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.21).

Пример 1. Для уравнения (1.5)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

правая часть которого является полиномом относительно x и y, существует единственное решение с любым заданным начальным условием. В частности, существует единственная интегральная кривая, проходящая через начало координат.

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.5) (рис. 8) действительно существуют.

Замечание. Не следует думать, что решение уравнения (1.21) с полиномиальной правой частью при любом заданном начальном условии определено при всех x; гарантируется существование решения лишь в некоторой окрестности начального значения x_0 независимой переменной x.

Пример 2. Для уравнения (0.17)

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

решением, удовлетворяющим начальному условию

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

будет (рис. 5, кривая I)

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Это решение существует не при всех x, а лишь в окрестности начального значения $x = 0$, а именно в интервале

$$-\infty < x < 1.$$

Дадим определения **обыкновенных** и **особых точек** уравнения (1.2) с позиций теоремы Пикара.

Будем называть точку (x_0, y_0) *обыкновенной точкой* уравнения (1.2), если в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Пикара для самого уравнения (1.2) или для перевернутого уравнения (1.2′). В противном случае точку (x_0, y_0) будем называть *особой точкой* уравнения (1.2). В частности, изолированные особые точки уравнения (1.2), о которых шла речь в п. 1.3, являются **особыми точками** уравнения (1.2). Но множество особых точек может быть и некоторой линией, которая в этом случае называется *особой линией* уравнения (1.2).

Ясно, что если правая часть уравнения (1.2) есть **полином**, то все точки плоскости (x, y) — **обыкновенные точки** этого уравнения.

Через обыкновенную точку (x_0, y_0) в достаточно малой окрестности ее проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.2) или перевернутого уравнения (1.2′). Таким образом, достаточно малая окрестность обыкновенной точки целиком заполнена интегральными кривыми, которые не пересекаются и не касаются друг друга.

Поставим вопрос: как ведут себя интегральные кривые (состоящие из обыкновенных точек) в окрестности особой точки? В частности, будут ли все эти интегральные кривые или часть из них примыкать (см. 1.3) к особой точке (x_0, y_0)?

Прежде всего возникают вопросы: существует ли хоть одна интегральная кривая, примыкающая к особой точке? Если да, то сколько таких кривых существует (одна, конечное число или бесконечное множество)? Существует ли определенное направление касательной к интегральной кривой в особой точке, каковы эти направления, произвольны или существуют исключительные направления? Если да, то сколько таких исключительных направлений существует и как их найти? Ответы на эти вопросы дает специальный раздел общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, называемый качественной теорией дифференциальных уравнений, начальные сведения из которой мы излагаем в главе 9.

П р и м е р 3. Рассмотрим уравнение (1.9),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Все точки $(x_0, y_0) \in R^2$ являются обыкновенными точками, кроме точки (0, 0), которая является особой. В самом деле в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ выполнены оба условия теории Пикара либо для самого уравнения (1.9), либо для перевернутого уравнения. Поэтому через любую точку плоскости (x, y), отличную от начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая данного уравнения (1.9) или перевернутого уравнения. Интегральными кривыми будут, как показано в примере 2 п. 1.3, окружности (рис. 10)

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Ни одна из них не примыкает к особой точке (0, 0).

П р и м е р 4. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \tag{1.22}$$

Это уравнение задано на всей плоскости (x, y), кроме начала координат. В окрестности любой точки (x_0, y_0), отличной от начала координат, выполняются оба условия теоремы Пикара либо для правой части уравнения (1.22), либо для правой части перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}. \tag{1.22'}$$

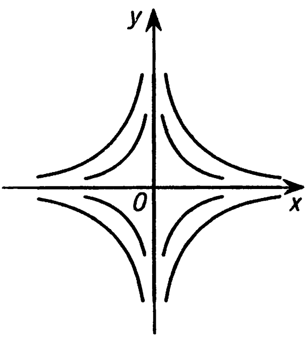

Рис. 15

Поэтому через любую точку плоскости (x, y), отличную от начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая данного уравнения (1.22) или перевернутого уравнения (1.22′). Нетрудно убедиться, что интегральные кривые имеют вид (рис. 15)

$$y = \frac{C}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$x = 0 \quad (y \neq 0).$$

Точка (0, 0) является особой точкой данного уравнения (1.22). К ней примыкают только четыре интегральные кривые — полуоси осей координат

$$y=0 \quad (x \neq 0) \quad (C=0),$$

$$x=0 \quad (y \neq 0).$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}. \tag{1.23}$$

Это уравнение тоже задано на всей плоскости (x, y), кроме начала координат. Через любую точку плоскости (x, y), отличную от начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая рассматриваемого уравнения (1.23) или перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y} \tag{1.23$'$}$$

(почему?). Интегральными кривыми будут (рис. 16)

$$\left.\begin{array}{l} y=Cx^2 \quad (x \neq 0), \\ x=0 \quad (y \neq 0) \end{array}\right\} \tag{1.24}$$

(убедитесь в этом!).

Точка (0, 0) как и в предыдущем примере является особой точкой рассматриваемого уравнения (1.23). Здесь все интегральные кривые, (1.24) включая полуоси осей координат, примыкают к особой точке (началу координат). При этом существуют два исключительных направления касательных к интегральным кривым в особой точке. Этими исключительными направлениями являются, очевидно, оси координат, причем вдоль оси x примыкает бесчисленное множество интегральных кривых (полупараболы), а вдоль оси y только две (полуоси оси y).

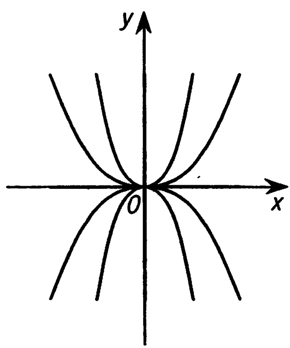

Рис. 16

2.2. Случай линейного уравнения. Выбор начальных данных. Интервал существования решения

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x). \tag{1.25}$$

Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Для применения теоремы Пикара перепишем линейное уравнение (1.25) в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y + q(x) \equiv f(x, y). \tag{1.26}$$

На выбор начального значения искомой функции, т. е. на y_0, никаких ограничений, очевидно, налагать не надо, ибо функция $f(x, y)$, будучи **линейной** относительно y, будет непрерывной функцией в окрестности любой точки (x_0, y_0), если только начальное значение независимой переменной, т. е. x_0, лежит в интервале непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$.

Частная производная от правой части уравнения (1.26) по y

$$\frac{df}{dy} = -p(x)$$

тоже будет непрерывной в окрестности такой начальной точки (x_0, y_0).

Итак, y_0 можно выбрать произвольно, а x_0 можно брать любым из интервала (a, b), в котором функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны. При таких начальных данных решение линейного уравнения существует и единственно. Геометрически это означает, что через каждую точку полосы (рис. 17)

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty$$

проходит одна и только одна интегральная кривая линейного уравнения (1.25). На рисунке 17 интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку (x_0, y_0) определена во всем интервале (a, b), т. е. во всем интервале непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$. Позднее (см. § 7) доказывается, что это всегда имеет место, т. е.

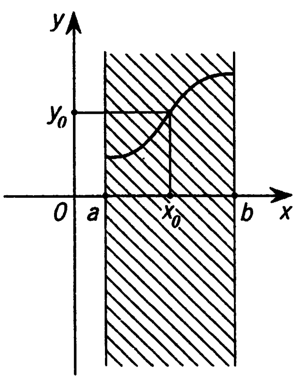

Рис. 17

что решение линейного уравнения (1.25) существует во всем интервале непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$. Для нелинейного уравнения, как видно из примера 2, такое утверждение не имеет места.

Таким образом, линейное уравнение обладает большими преимуществами перед нелинейным уравнением в отношении выбора начальных данных и в отношении интервала существования решения.

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 3x.$$

Здесь $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 3x$. При постановке задачи Коши начальное значение y_0 искомой функции y можно задавать **произвольно**, а начальное значение x_0 независимой переменной x произвольно задавать нельзя, ибо $p(x)$ непрерывна не при всех x. В точке $x = 0$ она даже не задана. Таким образом, $x_0 \neq 0$. Решение с такими начальными условиями существует и единственно; оно заведомо определено в интервале

$$0 < x < +\infty, \quad \text{если} \quad x_0 > 0,$$

или в интервале

$$-\infty < x < 0, \quad \text{если} \quad x_0 < 0.$$

Пример 7. Для уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0$$

начальные значения x_0, y_0 можно задавать произвольно (почему?), причем любое решение будет заведомо определено при всех значениях x. В частности, начальному условию

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

соответствует только очевидное нулевое решение $y \equiv 0$.

Пример 8. Рассмотрим уравнение (1.7),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Здесь коэффициент $p(x) = -\frac{1}{x}$ непрерывен всюду, кроме точки $x = 0$. Поэтому гарантировано существование и единственность решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \quad y(x_0)=y_0,$$

где $x_0 \neq 0$, $y_0 \in R$. Этим решением, как нетрудно убедиться, будет

$$y=\frac{y_0}{x_0}x \quad (x \neq 0).$$

Если же в качестве x_0 взять $x_0=0$, т. е. ставить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \quad y(x) \to y_0 \ \text{ при } \ x \to 0,$$

то y_0 уже нельзя брать любым. Решение может не существовать, либо может быть нарушена единственность.

В самом деле, так как интегральными кривыми уравнения (1.7), как показано в примере 1 п. 1.3, будут все лучи (1.8),

$$y=kx \quad (x \neq 0),$$
$$x=0 \quad (y \neq 0),$$

то допустимым значением y_0 будет только $y_0=0$ (почему?). Но единственность решения будет нарушена, ибо все решения

$$y=kx \quad (x \neq 0)$$

обладают свойством

$$y(x) \to 0 \ \text{ при } \ x \to 0.$$

2.3. Понятие о методе последовательных приближений

Пусть дано уравнение (1.2) и поставлено начальное условие (1.10). Предположим, что $f(x, y)$ и $\frac{df}{dy}$ определены и непрерывны в окрестности начальной точки (x_0, y_0). Тогда согласно теореме Пикара существует единственное решение

$$y=y(x)$$

уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию (1.10). Это решение определено в некоторой окрестности точки x_0.

Так как существование и единственность решения гарантированы, то для нахождения решения можно применять приближенные методы. Эти методы бывают двух видов: аналитические и численные. Применяя аналитический метод, получают **функ-**

цию, приближенно представляющую искомое решение. В численных методах получают **таблицу** приближенных числовых значений искомого решения при заданных числовых значениях независимой переменной.

Рассмотрим один из аналитических приближенных методов решения поставленной задачи Коши — *метод последовательных приближений*, или *метод Пикара*.

Пусть $y = y(x)$ есть искомое решение. Тогда имеет место тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{1.27}$$

Интегрируя это тождество по x в пределах x_0 до x с учетом начального условия (1.10), имеем:

$$y(x) \Big|_{x_0}^{x} \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx,$$

$$y(x) - y(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$$

или

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx, \tag{1.28}$$

т. е. $y = y(x)$ есть решение *интегрального уравнения*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \tag{1.29}$$

(здесь неизвестная функция y входит под знак **интеграла**).

Обратно: дифференцируя (1.28), приходят к тождеству (1.27), так что решение интегрального уравнения (1.29) является решением дифференциального уравнения (1.2). Это решение автоматически удовлетворяет начальному условию (1.10).

Таким образом, *уравнение* (1.2) *с начальным условием* (1.10) *равносильно интегральному уравнению* (1.29).

Будем искать приближенное решение интегрального уравнения (1.29), беря некоторую функцию $y_0(x)$ в качестве исходного — нулевого — приближения и выражая n-е приближение $y_n(x)$ через $(n-1)$-е приближение $y_{n-1}(x)$ по формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Так, если за нулевое приближение взять начальное значение искомой функции

$$y_0(x) \equiv y_0,$$

то

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx.$$

Можно доказать, что для значений x, достаточно близких к начальному значению x_0, последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся к искомому решению, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x).$$

Заметим, что для **линейного** уравнения (1.25) последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся к решению (1.11) **во всем** интервале непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$.

Пример 9. Найти методом последовательных приближений решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y, \tag{1.30}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Прежде всего заметим, что, так как уравнение (1.30) линейное, то искомое решение существует, единственно и может быть получено методом последовательных приближений, которые сходятся к искомому решению при всех значениях независимой переменной x.

Соответствующим интегральным уравнением будет

$$y = 1 + \int_{x_0}^{x} y\,dx.$$

За нулевое приближение возьмем

$$y_0(x) \equiv 1.$$

Тогда

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

. . . .

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = e^x.$$

Предельная функция $y = e^x$ и будет искомым решением. Это решение, как и следовало ожидать, определено при всех значениях x.

Каждое из последовательных приближений $y_n(x)$ дает приближенное значение искомого решения:

$$y = e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \equiv y_n(x),$$

причем, чем больше номер приближения, тем меньшую ошибку мы совершаем, заменяя точное решение его n-м приближением.

Обычно, применяя метод последовательных приближений, не ставят себе целью найти точно искомое решение, а ограничиваются нахождением первых последовательных приближений.

§ 3. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ, ЧАСТНОМ И ОСОБОМ РЕШЕНИЯХ

3.1. Общее решение. Общее решение в форме Коши. Общий интеграл

Интегрируя уравнение (0.3),

$$y' = 2x,$$

мы получили семейство решений (0.5)

$$y = x^2 + C,$$

содержащее произвольную постоянную C.

Семейство решений (0.5) обычно называют *общим решением* уравнения (0.3).

Дадим определение общего решения любого уравнения первого порядка в нормальной форме (1.2) (см. [70, с. 39]).

Пусть D есть некоторая область на плоскости (x, y), через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.2). Например, можем предполагать, что в окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in D \subseteq R^2$ выполняются условия теоремы Пикара.

Определение. Функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.31}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и непрерывно дифференцируемая относительно x, называется *общим решением* уравнения (1.2) *в области* D, если она удовлетворяет двум условиям:

1) равенство (1.31) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной C:

$$C = \psi(x, y), \quad (x, y) \in D. \tag{1.32}$$

2) функция (1.31) является решением уравнения (1.2) при всех значениях произвольной постоянной C, доставляемых формулой (1.32), когда точка (x, y) пробегает область D.

Знание общего решения (1.31) дает возможность решить задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.33}$$

с любыми начальными данными x_0, y_0 из области D за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной C.

Для этого достаточно заменить в формуле (1.31) переменные x и y числами x_0 и y_0, решить полученное уравнение

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

относительно C:

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0$$

и подставить найденное значение $C = C_0$ в общее решение (1.31). Полученная функция

$$y = \varphi(x, C_0) = y(x; x_0, y_0) \qquad (1.34)$$

и даст искомое решение, причем других решений нет, так как D есть область существования и единственности решения задачи Коши (1.33).

Покажем, что (0.5) есть общее решение уравнения (0.3) в области $D = R^2$ в смысле данного выше определения, т. е. что функция (0.5) удовлетворяет обоим условиям, налагаемым на общее решение.

В самом деле уравнение (0.5)

$$y = x^2 + C,$$

очевидно, разрешимо в D относительно C:

$$C = y - x^2, \quad (x, y) \in D. \qquad (1.35)$$

Далее, функция (0.5) является решением уравнения (0.3) при любых значениях C, в том числе и при значениях C, доставляемых формулой (1.35) при $(x, y) \in D$.

Основное свойство общего решения (1.31) состоит в возможности получения из него решения (1.34) задачи Коши (1.33) с начальными данными x_0, y_0 из области D. Возникает вопрос о зависимости решения (1.34) от независимой переменной x и начальных данных x_0, y_0. Как мы увидим в гл. 9, особое значение для теории и приложений имеет зависимость решения (1.34) от начального значения y_0 искомой функции. В этой связи целесообразно наряду с общим решением (1.31) в обычной форме ввести понятие общего решения уравнения (1.2), в котором роль произвольной постоянной C играло бы y_0 (или функция от y_0).

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = 2x, \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in R^2.$$

Ее решение имеет вид (см. пример 5 п. 1.4)

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2. \tag{1.36}$$

Если здесь фиксировать значение x_0 (например, положить $x_0 = 0$), а y_0 считать произвольным, то функцию (1.36) можно рассматривать как общее решение уравнения (0.3)

$$y' = 2x$$

в области $D = R^2$, ибо оба требования, предъявляемые к общему решению, здесь выполнены (почему?). Такое общее решение называют *общим решением в форме Коши*. Геометрически это семейство интегральных кривых уравнения (0.3), пересекающих прямую $x = x_0$ (рис. 18).

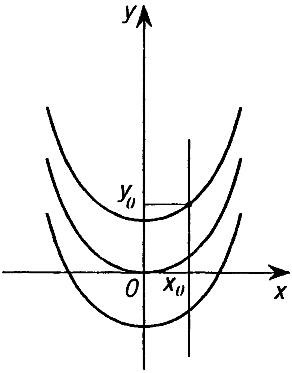

Рис. 18

В общем случае уравнения (1.2) запись общего решения в области D в виде

$$y = y(x;\ x_0, y_0),$$

где x_0 — фиксировано, а y_0 — произвольное число, причем $(x_0, y_0) \in D$, будем называть *общим решением* уравнения (1.2) *в области D в форме Коши*.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -y. \tag{1.37}$$

Общим решением этого уравнения в области $D = R^2$ является

$$y = Ce^{-x}$$

(почему?). Преобразуем его в форму Коши. Поставим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = -y,\quad y(0) = y_0 \in R.$$

Ее решением будет

$$y = y_0 e^{-x} \tag{1.38}$$

(почему?). Это и есть общее решение уравнения (1.37) в $D = R^2$ в форме Коши (почему?).

Из общего решения (1.38) в форме Коши видно, что решением уравнения (1.37) с нулевым начальным условием

$$y(0)=0 \quad (y_0=0)$$

будет только очевидное решение

$$y\equiv 0,$$

а все решения (1.38) с ненулевыми начальными условиями $y(0)=y_0\neq 0$ обладают свойством

$$y=y(x;\,0,y_0)=y_0e^{-x}\to y(x)\equiv 0 \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Общее решение уравнения (1.2), записанное в виде, не разрешенном относительно искомой функции

$$\Phi(x,y,C)=0,$$

будем называть *общим интегралом* этого уравнения. Часто общий интеграл получает в виде, разрешенном относительно произвольной постоянной C:

$$U(x,y)=C.$$

Левая часть этого равенства называется *интегралом* уравнения (1.2).

3.2. Частное решение

Решение $y=y(x)$, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, называется *частным* решением. Решение, содержащееся в формуле общего решения (1.31), т. е. получающееся из него при конкретном (допустимом) числовом значении произвольной постоянной (включая $\pm\infty$), является **частным** решением. Например, $y=e^{-x}$ является частным решением уравнения (1.37) ($C=1$); $y=0$ тоже частное решение ($C=0$).

3.3. Особое решение

Решение $y=y(x)$ в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*. Особое решение не может быть получено из формулы общего решения (1.31) при конкретном числовом значении произвольной постоянной C (но может быть получено при $C = C(x)$). Оно представляет собой особую линию уравнения (1.2). Однако не всякая особая линия является особым решением.

Если правая часть уравнения (1.2) удовлетворяет во всей области задания условиям теоремы Пикара, то это уравнение, очевидно, не имеет особых решений. Если функция $f(x, y)$, стоящая в правой части уравнения (1.2), непрерывна по совокупности переменных x и y во всей области задания уравнения и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые $y = \varphi(x)$, во всех точках которых $\frac{df}{dy}$ обращается в бесконечность:

$$\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=\varphi(x)} = \infty.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y' = 2\sqrt{y} \equiv f(x, y). \tag{1.39}$$

Очевидно, что правая часть уравнения (1.39) непрерывна в верхней полуплоскости ($y > 0$) и ее частная производная по y

$$\frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{1.40}$$

не обращается в этой области в бесконечность. Поэтому через каждую точку верхней полуплоскости ($y > 0$) проходит одна и только одна интегральная кривая. Функция

$$y = (x - C)^2 \quad (x > C) \tag{1.41}$$

является общим решением уравнения (1.39) в верхней полуплоскости (почему?). Но в точках оси x ($y = 0$) частная производная (1.40) обращается в бесконечность. Следовательно, только функция $y = 0$ может быть особым решением уравнения (1.39). Чтобы эта функция действительно была особым решением уравнения (1.39), нужно, во-первых, чтобы она была решением уравнения (1.39) и, во-вторых, чтобы в каждой точке $(x_0, 0)$ этого решения нарушалась единственность решения задачи Коши. Первое очевидно. Чтобы убедиться во втором, поставим задачу Коши

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0.$$

Эта задача имеет очевидное решение $y=0$, подозрительное на особое. Кроме того, полагая в общем решении (1.41) $x=x_0$, $y=0$ находим $C=x_0$. Поэтому полупарабола I (рис. 19)

$$y=(x-x_0)^2 \quad (x>x_0)$$

примыкает к точке $(x_0, 0)$. Таким образом, единственность решения задачи Коши в любой точке $(x_0, 0)$ решения $y=0$ нарушена и, следовательно, это решение является особым.

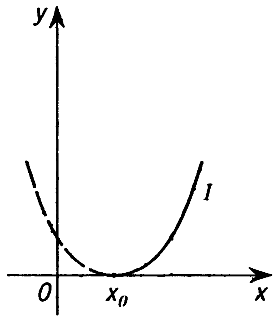

Рис. 19

Пример 3. Для уравнения

$$y'=2\sqrt{y}+1 \qquad (1.42)$$

кривой, подозрительной на особое решение, тоже будет ось x ($y=0$). Но она не является решением, так что уравнение (1.42) вообще не имеет особых решений.

Пример 4. Уравнение

$$y=y^{\frac{2}{3}}$$

имеет особое решение $y=0$ (почему?).

Пример 5. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=P(x, y),$$

где P — полином относительно x и y, не может иметь особых решений (почему?), так что, например, уравнения (0.17) и (1.5) не имеют особых решений.

Пример 6. Линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x),$$

где $p, q \in C(a, b)$, не может иметь особых решений (почему?).

Кривые, подозрительные на особые решения, могут иногда быть найдены по уравнению семейства интегральных кривых.

Предположим, что семейство интегральных кривых уравнения (1.2), записанное в виде $y=\varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C)=0$, имеет *огибающую*, т. е. кривую, обладающую тем свойством по отношению к кривым семейства, что она в каждой своей точке касается хоть одной кривой семейства и вся состоит из точек касания.

Огибающая семейства интегральных кривых уравнения (1.2) *всегда является особым решением этого уравнения*, ибо, во-первых, она является решением (интегральной кривой) уравнения (1.2), так как в каждой ее точке направление касательной совпадает с направлением поля направлений, определяемого дифференциальным уравнением (1.2) в этой точке (почему?), и, во-вторых, в каждой ее точке, очевидно, нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 7. Рассмотрим снова уравнение (1.39)

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Это уравнение имеет семейство решений

$$y = (x + C)^2 \quad (x \geq -C). \tag{1.43}$$

Это — правые ветви парабол, у которых ось симметрии параллельна оси y, а вершины находятся на оси x. (Сделайте рисунок.) Очевидно, что $y \equiv 0$ (ось x) является **огибающей** семейства (1.43). Будучи огибающей, ось x является *особым решением* уравнения (1.39), в чем легко убедиться и непосредственной проверкой.

Кривую, подозрительную на огибающую семейства кривых

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.44}$$

(в том числе интегральных кривых, обладающих обычно достаточной гладкостью), можно найти исключением параметра C из системы (см. [70, с. 49])

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x, C), \\ 0 &= \varphi'_C(x, C), \end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

где второе уравнение получено дифференцированием по C уравнения семейства (1.44).

Так, в рассмотренном выше примере система (1.45) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} y &= (x + C)^2, \\ 0 &= 2(x + C). \end{aligned}\right\}$$

Исключая C, снова получим, что кривой, подозрительной на огибающую, является $y \equiv 0$.

Можно указать и достаточные условия огибающей, на чем мы здесь не останавливаемся (см., например, [70]).

Отметим, наконец, что особые решения всегда можно обнаружить в процессе нахождения общего решения (общего интеграла) дифференциального уравнения. Дело в том, что когда делим обе части данного дифференциального уравнения на некоторую функцию $\omega(x, y)$, то получаем уравнение, вообще говоря, не равносильное данному, ибо можем при этом потерять решения вида $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$, при которых делитель $\omega(x, y)$ обращается в нуль, если эти решения не содержатся в общем решении, т. е. не получаются из него ни при каких числовых значениях произвольной постоянной (включая $\pm\infty$). Решения, о которых идет речь, очевидно, являются **особыми**.

Например, интегрируя уравнение (1.39), можно поступать так. Делим обе части уравнения на функцию $2\sqrt{y}$. Получаем

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}=1 \Rightarrow (\sqrt{y})'=1 \Rightarrow \sqrt{y}=x+C,$$

откуда и следует общее решение (1.43).

Мы потеряли особое решение $y=0$ уравнения (1.39), когда делили обе части этого уравнения на функцию $2\sqrt{y}$, которая обращается в нуль как раз при $y=0$.

Вообще всегда при интегрировании дифференциального уравнения нужно иметь в виду следующее замечание Н. М. Гюнтера: «Внимательно относясь к процессу, переводящему дифференциальное уравнение в его общий интеграл, можно **без всяких интегрирований** найти все особые решения, ни одного не пропустив». В дальнейшем будем систематически пользоваться этим указанием для нахождения особых решений всех уравнений, общий интеграл которых удается построить в элементарных функциях или в квадратурах.

3.4. Построение дифференциального уравнения заданного семейства кривых

Уже в задаче 1 на с. 5 мы видели, что дифференциальное уравнение может иметь бесчисленное множество решений, обладающих общим (дифференциальным) свойством, выражаемым этим уравнением. Покажем обратно, что для всякого семейства кривых

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{1.46}$$

где C — параметр, изменяющийся в некотором промежутке, а Φ — достаточно гладкая функция (т. е. имеющая непрерывные частные производные), можно построить дифференциальное уравнение, выявляющее общие свойства кривых семейства (1.46) и имеющее самостоятельный интерес.

Предположим, что уравнение (1.46) разрешимо относительно y:

$$y = y(x, C), \quad x \in (a, b).$$

Подставим это значение y в уравнение семейства (1.46). Получим тождество

$$\Phi(x, y(x, C), C) = 0, \quad \forall x \in (a, b). \tag{1.47}$$

Продифференцируем это тождество по x:

$$\Phi'_x(x, y(x, C), C) + \Phi'_y(x, y(x, C), C) \cdot y'(x, C) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \tag{1.48}$$

Тождества (1.47) и (1.48) можно заменить системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, y, C) = 0, \\ &\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C) \cdot y' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

(почему?).

Если из этой системы удастся исключить параметр C, то получим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.50}$$

Это дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением семейства кривых* (1.46), которые в свою очередь являются интегральными кривыми уравнения (1.50), а само дифференциальное уравнение (1.50), как сказано выше, выражает общее свойство кривых семейства (1.46).

Семейство кривых (1.46) является обычно общим интегралом уравнения (1.50), а каждая кривая — частным решением. Следует, однако, иметь в виду, что составленное дифференциальное уравнение (1.50) может иметь и «свои» решения, не входящие в семейство (1.46). Это, например, имеет место, если семейство (1.46) имеет огибающую, не входящую в само семейство.

Если заданное семейство кривых уже разрешено относительно y:

$$y = \varphi(x, C),$$

то система уравнений (1.49) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x, C), \\ y' = \varphi'_x(x, C) \end{array}\right\}$$

(почему?).

Таким образом, формально дифференциальное уравнение заданного семейства кривых может быть построено по схеме

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C) \cdot y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

или

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x, C), \\ y' = \varphi'_x(x, C) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x, y, y') = 0. \qquad (1.52)$$

Рассмотрим два примера.

Пример 8. Построить дифференциальное уравнение семейства окружностей

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (1.53)$$

Следуя схеме (1.51), имеем

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2, \\ 2x + 2yy' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Полученное дифференциальное уравнение выражает известное свойство окружностей (1.53): касательная в каждой точке ее перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания (почему?).

Пример 9. Пусть дано семейство полупарабол (1.43)

$$y = (x + C)^2, \quad x \geq -C.$$

Построим дифференциальное уравнение этого семейства.

Следуя схеме (1.52), имеем

$$\left.\begin{array}{l} y = (x - C)^2, \\ y' = 2(x - C) \end{array}\right\} \Rightarrow y' = 2\sqrt{y}.$$

Отметим, что интегральными кривыми полученного дифференциального уравнения являются не только полупараболы (1.43), но и их огибающая $y \equiv 0$ — особое решение, а также решения, склеенные из отрезков особого решения $y \equiv 0$ и полупарабол (1.43).

В случае семейства кривых

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.54}$$

зависящего от n параметров $C_1, \ldots, C_n$, его дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

формально получается исключением параметров $C_1, \ldots, C_n$ из уравнения (1.54) и n уравнений, полученных из него последовательным дифференцированием (полным образом) по x. Например, дифференциальным уравнением семейства

$$y = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots, + C_{n-1}x + C_n$$

будет

$$y^{(n)} = 0$$

(почему?).

Вопросы для повторения

1. Каков общий вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка? Какая функция называется решением этого уравнения на заданном промежутке (a, b)? Какая форма обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется нормальной? Докажите, что функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ является решением дифференциального уравнения $yy' + x = 0$ на промежутке $(-1, 1)$. Приведите это уравнение к нормальной форме. Приведите уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ к нормальной форме.

2. Какое уравнение называется линейным уравнением первого порядка? Докажите, что если $p(x) \in C(a, b)$ ($p(x)$ — непрерывна на (a, b)), то $y = e^{\int p(x)\,dx}$ — решение линейного уравнения $y' + p(x)\,y = 0$.

3. Как находится дифференциальное уравнение заданного однопараметрического семейства кривых? Найдите дифференциальное уравнение каждого из семейств кривых: $y = x^2 + C$, $y = Cx$, $y = ax^2$, $y = \frac{C}{x}$, $y = Ce^x$, $y = (x + C)^2$ $(x \geq -C)$, $x^2 + y^2 = a^2$. (Сделайте рисунки семейств.)

4. Какой геометрический смысл имеют дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и его решения? Как определить наклон интегральной кривой уравнения в заданной точке (x_0, y_0) по правой части уравнения? Что такое поле направлений, определяемое уравнением $y' = f(x, y)$? Что такое изоклины? Найдите изоклины уравнений: $y' = x^2 + y^2$, $y' = 2x$, $y' = y$, $y' = -\frac{\ldots}{\ldots - x^2}$, $y' = \sqrt{y}$, $y' = \frac{1}{2y}$, $y' = \frac{y}{x^2}$, $y' = \frac{y}{x}$. Может ли изоклина быть интегральной кривой?

5. Могут ли интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью пересекаться или иметь излом, могут ли они касаться друг друга?

6. Как находятся линии экстремумов и линии точек перегиба интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$?

7. Какой механический смысл имеют дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ и его решения? Как связаны между собой график движения (решения), определяемого дифференциальным уравнением, и траектория этого движения? (Сделайте рисунок.) Какое движение называется состоянием покоя, каковы график и траектория этого движения? (Сделайте рисунок.)

8. В чем состоит основная задача теории интегрирования дифференциальных уравнений $y' = f(x, y)$ и $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$?

9. Как ставится задача Коши (начальная задача) для дифференциального уравнения первого порядка? Каков ее геометрический и механический смысл? (Сделайте рисунки.)

10. Дайте упрощенную формулировку теоремы Пикара о достаточном условии существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Какие преимущества имеет линейное уравнение $y' + p(x)\, y = q(x)$ в отношении допустимого произвола выбора начальных данных и гарантированного интервала существования решения? Сохраняются ли эти преимущества для уравнения с правой частью, полиномиальной относительно y? Укажите область существования решения задачи Коши: $y' = y^2$, $y(0) = 1$.

11. Докажите, что задача Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ — эквивалентна интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

12. В чем состоит метод последовательных приближений (метод Пикара) для решения задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$? Найдите второе приближение по методу Пикара для решения задачи Коши: $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, доказав предварительно, что решение поставленной задачи Коши существует и единственно. Установите область существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = y$.

13. В каком интервале сходятся последовательные приближения Пикара к решению задачи Коши в случае линейного уравнения? Найдите методом Пикара решение задачи Коши: $y' = -y$, $y(0) = 1$, доказав предварительно, что искомое решение существует, единственно и определено при $x \in \mathbf{R}$, т. е. при всех действительных значениях x.

14. Что называется общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши? Как решается задача Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ — с начальной точкой $(x_0, y_0) \in D$ при помощи формулы общего решения? Убедитесь, что $y = Ce^x$ есть общее решение уравнения $y' = y$ в области $D = \mathbf{R}^2$. Решите, пользуясь этим общим решением, задачу Коши: $y' = y$, $y(0) = 1$. Какое общее решение называется общим решением в форме Коши? Как оно используется для нахождения решения задачи Коши и изучения его свойств? Убедитесь, что $y = y_0 e^{x - x_0}$ есть общее решение в форме Коши уравнения $y' = y$ в области $D = \mathbf{R}^2$. Решите, пользуясь этим общим решением, задачу Коши: $y' = y$, $y(0) = 1$.

15. Что такое общий интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$? Как он связан с общим решением? Убедитесь, что $x^2 + y^2 = C^2$ есть общий интеграл дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ или $x\,dx + y\,dy = 0$ в каждой из полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$.

16. Что такое частное решение уравнения $y' = f(x, y)$? Как оно связано с общим решением? Докажите, что $y = e^x$ есть частное решение уравнения $y' = y$.

17. Какое решение называется особым? Как оно может быть связано с общим решением? Как найти кривые, подозрительные на особое решение уравнения $y' = f(x, y)$, по аналитическим свойствам правой части? Как исследовать подозрительную кривую на нарушение единственности? Докажите, что единственной кривой, подозрительной на особое решение уравнения

$y' = 2\sqrt{y}$, является $y = 0$ (ось x). Проверьте, что $y = 0$ является решением, и исследуйте это решение на нарушение единственности в любой точке $(x_0, 0)$ на нем, пользуясь тем, что данное уравнение имеет общее решение: $y = (x + C)^2$ $(x > -C)$ (семейство правых полупарабол) — в верхней полуплоскости $(y > 0)$. (Убедитесь в этом. Сделайте рисунок.)

18. Докажите, что уравнение $y' = f(x, y)$ с полиномиальной правой частью заведомо не имеет особых решений. Докажите, что линейное уравнение $y' = p(x)\,y + q(x)$, $p, q \in C(a, b)$ не имеет особых решений.

19. Докажите, что уравнение $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — полиномы, не может иметь особых решений. Почему уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, где M и N — полиномы, заведомо не имеет особых решений?

20. Как можно обнаружить кривые, подозрительные на особое решение дифференциального уравнения первого порядка, в процессе интегрирования его? В чем состоит замечание Н. М. Гюнтера?

21. Почему огибающая семейства интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка всегда является решением, и притом особым? Убедитесь в этом на примере уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

22. Может ли дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми?

Глава 2
ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе будут рассмотрены методы интегрирования в конечном виде основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, представляющих интерес как для теории дифференциальных уравнений, так и для многочисленных приложений, в которых рассматриваемые уравнения используются вместе с дополнительными условиями как математические модели реальных процессов.

§ 4. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе рассматриваются так называемые неполные дифференциальные уравнения первого порядка в нормальной форме $y' = f(x, y)$, правые части которых зависят только от одной из независимых переменных x или y, т. е. уравнения вида $y' = f(x)$ или $y' = f(y)$. Доказывается, что эти уравнения всегда можно проинтегрировать хотя бы в квадратурах.

4.1. Уравнение, не содержащее искомой функции

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(x). \tag{2.1}$$

Это уравнение называется *простейшим дифференциальным уравнением 1-го порядка.*

Предположим, что $f(x)$, т. е. правая часть уравнения (2.1) непрерывна в (a, b) $(a \geq -\infty,\ b \leq +\infty)$. Тогда, как известно из интегрального исчисления, все первообразные для $f(x)$ и, следовательно, все решения уравнения (2.1) содержатся в формуле

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{2.2}$$

где первое слагаемое есть какая-нибудь фиксированная первообразная для $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Функция (2.2) является общим решением уравнения (2.1) в области D:

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty$$

(почему?).

Если интеграл, входящий в (2.2) «берется», т. е. представляет собой элементарную функцию, то уравнение (2.1) удастся проинтегрировать в элементарных функциях (как это имело место для уравнения (0.3) во введении). В противном случае уравнение (2.1) интегрируется только в квадратурах (например, уравнение (0.19), рассмотренное во введении).

Во всех случаях при сделанном предположении относительно непрерывности функции $f(x)$ в качестве первообразной в формуле общего решения (2.2) можно взять функцию

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx, \tag{2.3}$$

где $x_0 \in (a, b)$, ибо согласно известной [120] *формуле Барроу*

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)\, dt \right)'_x = f(x),$$

имеем

$$F'(x) = f(x).$$

Будем называть первообразную (2.3) *первообразной Барроу*. Она отличается от всех других первообразных для $f(x)$ тем, что обращается в нуль при $x = x_0$.

Взяв в (2.2) в качестве первого слагаемого первообразную Барроу (2.3), получим общее решение уравнения (2.1) в виде

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C. \tag{2.2, a}$$

Здесь $C = y(x_0) = y_0$. Поэтому предыдущую формулу можно записать так:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + y_0. \tag{2.4}$$

Функция (2.4), где y_0 — п р о и з в о л ь н о е число, является *общим решением уравнения* (1) *в форме Коши* в той же области D. Оно отличается от (2.2) главным образом тем, что роль произвольной постоянной играет начальное значение y_0 решения $y = y(x)$ при фиксированном значении независимой переменной x ($x = x_0$).

Функция (2.4) при заданном значении y_0 является решением задачи Коши

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.5}$$

где $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in R$. Это решение согласно принятому в (1.4) обозначению можно записать так:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0 \equiv y(x; x_0, y_0). \tag{2.6}$$

В частности, решением *нулевой задачи Коши*

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = 0$$

(с нулевым начальным значением искомой функции) будет функция

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

т. е. первообразная Барроу.

Из аналитической структуры решения задачи Коши (2.5), доставляемого формулой (2.6), видно, что

$$y = y(x; x_0, y_0) \in C^{(1)}(a, b),$$

т. е. является непрерывно дифференцируемой функцией от независимой переменной x в интервале (a, b). Кроме того, из (2.6) следует, что решение $y(x; x_0, y_0)$ является и непрерывно дифференцируемой функцией от начального значения y_0 искомой функции y и от начального значения x_0 независимой переменной x, так как

$$\frac{dy}{dy_0} = 1, \quad \frac{dy}{dx_0} = -f(x_0)$$

(почему?).

Каждая из указанных формул общего решения (2.2) и (2.2, *a*) дает возможность найти решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

где y_0 можно задавать произвольно, а x_0 должно принадлежать интервалу (a, b).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \tag{2.7}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y = 1 \text{ при } x = 0,$$

т. е. выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 1)$. Правая часть уравнения (2.7) непрерывна при всех x. Общее решение имеет вид

$$y = x^4 + C. \tag{2.8}$$

Все интегральные кривые получаются из любой из них, например из $y = x^4$ (парабола на рис. 20*а*), сдвигом, параллельным оси y. Подставляя в (2.8) вместо x и y числа 0 и 1, имеем $1 = 0 + C$, откуда $C = 1$. Следовательно, искомым решением будет (рис. 20*б*)

$$y = x^4 + 1. \tag{2.9}$$

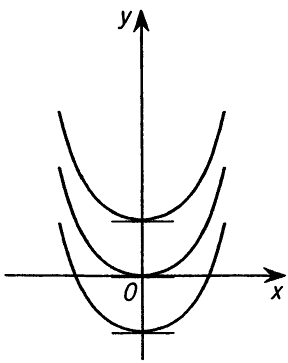

Рис. 20*а*

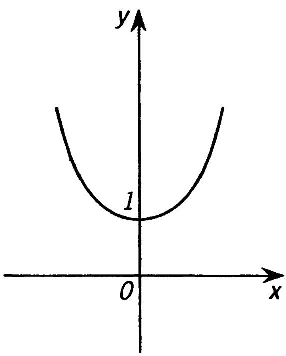

Рис 20*б*

Других решений, удовлетворяющих поставленному начальному условию, нет. Через точку $(0, 1)$ проходит только одна интегральная кривая (2.9).

Решение (2.9) имеет минимум при $x=0$. Это свойство легко усмотреть из самого дифференциального уравнения (2.7), ибо в нем производная $\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль при $x=0$ и меняет знак с $-$ на $+$ при переходе x через $x=0$. Таким образом, ось y является **линией экстремумов** (а именно линией минимумов) интегральных кривых. То обстоятельство, что правая часть уравнения (2.7) обращается в нуль при $x=0$, говорит о том, что в точках пересечения любой интегральной кривой с осью y касательная к интегральной кривой должна быть параллельна оси x, что фактически и имеет место (рис. 20*а*).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=e^{-x^2}. \tag{2.10}$$

Общее решение можно записать в виде

$$y=\int e^{-x^2}dx+C. \tag{2.11}$$

Однако эта форма записи общего решения неудобна для нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию, и для изучения свойств решений, так как неопределенный интеграл, входящий в формулу (2.11), как известно, не берется. В подобных случаях следует использовать вторую запись общего решения, т. е. формулу (2.2, *а*). При этом за x_0 можно брать любое число (почему?). Взяв $x_0=0$, получим

$$y=\int_0^x e^{-x^2}dx+C. \tag{2.12}$$

Найдем, пользуясь формулой (2.12), решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y=0 \text{ при } x=0,$$

т. е. найдем интегральную кривую, проходящую через начало координат. Полагая в (2.12) $x=0$, $y=0$, имеем $C=0$, так что искомым решением будет

$$y=\int_0^x e^{-x^2}dx. \tag{2.13}$$

Это решение есть **возрастающая** функция от x, чего и следовало ожидать, ибо в уравнении (2.10) $\frac{dy}{dx}>0$ при всех x.

Интегральная кривая (2.13) пересекает ось y под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси x, что тоже можно было предсказать по правой части уравнения (2.10), ибо $\frac{dy}{dx}=1$ при $x=0$. (Касательная к интегральной кривой (2.13) в точке пересечения ее осью y образует угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси x.)

Легко убедиться, что решение (2.13) есть **нечетная** функция. Действительно

$$y(-x)=\int_0^{-x} e^{-t^2}dt=-\int_0^{x} e^{-z^2}dz=-y(x)$$

$$(t=-z).$$

Решение (2.13) представляет собой **ограниченную** функцию, ибо

$$\left|\int_0^x e^{-x^2}dx\right|<\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

это следует из того, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{2.14}$$

а $\int_0^x e^{-x^2}dx$ есть возрастающая функция от x.

Из (2.14) следует также, что прямые

$$y=\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

являются **горизонтальными асимптотами** кривой (2.13). Далее, из самого уравнения (2.10) видно, что интегральная кривая (2.13), как и все интегральные кривые этого уравнения, имеет **перегиб** в точках пересечения с осью y. Действительно, имеем

$$y''=e^{-x^2}(-2x).$$

Отсюда видно, что y'' обращается в нуль при $x=0$ и меняет знак с + на −, переходя через $x=0$. Следовательно, интегральные кривые слева от оси y вогнуты вверх, справа — вниз. Ось y есть **линия точек перегиба** интегральных кривых. График решения (2.13) изображен на рисунке 21.

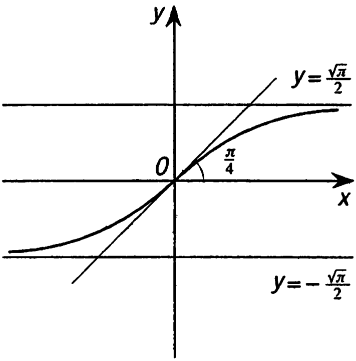

Рис. 21

Предположим теперь, что правая часть уравнения (2.1) имеет **точку разрыва** $x=c$ внутри или на границе интервала (a, b), будучи непрерывной во всех остальных точках этого интервала. Пусть $f(x)$ обращается в бесконечность при $x=c$. Тогда к уравнению (2.1) следует присоединить перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}. \qquad (2.1')$$

Его правая часть уже непрерывна в точке $x=c$. Уравнение (2.1′) имеет, очевидно, решение $x=c$, ибо обе его части обращаются в нуль при $x=c$.

Решение $x=c$ присоединяют к решениям уравнения (2.1).

П р и м е р 3. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Здесь правая часть непрерывна при всех x, кроме $x=0$, обращаясь при $x=0$ в бесконечность. При $x\neq 0$ (рис. 22) решениями будут

$$y=\ln|x|+C. \qquad (2.15)$$

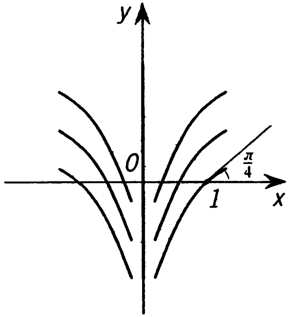

Рис. 22

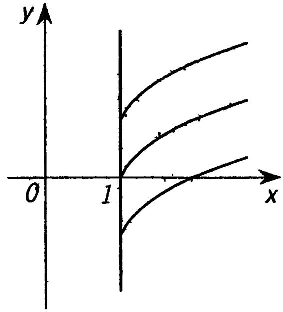

Рис. 23

Рассматривая перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = x$$

в точках оси y, видим, что эта ось будет интегральной кривой, так как обе части последнего уравнения обращаются в нуль при $x \equiv 0$. Поэтому ось y следует присоединить к интегральным кривым (2.15). Это решение **частное**. Оно является **асимптотой** решений (2.15) (см. рис. 22).

Пример 4. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

интегральными кривыми будут полупараболы (рис. 23) $y = \sqrt{x-1} + C$ и прямая $x \equiv 1$. Решение $x \equiv 1$ **особое**. Оно является **огибающей** семейства интегральных кривых (см. рис. 23).

4.2. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Обратимся теперь к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{2.16}$$

Предположим сначала, что $f(y)$ **непрерывна** в некотором интервале (c, d) и **отлична от нуля**. Тогда, не нарушая равносильности, можем переписать уравнение (2.16) в виде

$$\frac{dy}{f(y)} = dx,$$

откуда

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C \tag{2.17}$$

или

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + C, \tag{2.18}$$

где $y_0 \in (c, d)$.

Каждое из соотношений (2.17), (2.18) является **общим интегралом** уравнения (2.16).

Если правая часть уравнения (2.16) обращается в нуль при $y = m$, причем $c < m < d$, то оно имеет, очевидно, решение

$$y \equiv m, \tag{2.19}$$

так как обе части этого уравнения обращаются в нуль при $y \equiv m$. Решение (2.19) при переходе от (2.16) к (2.17) можно потерять. Поэтому следует интегрировать уравнение (2.16) так: делим обе его части на $f(y)$ и умножаем на dx:

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad (f(y) = 0?). \tag{2.20}$$

В скобках мы отметили для памяти уравнение, которое следует рассмотреть после интегрирования (2.20). Интегральными кривыми уравнения (2.16) будут кривые, входящие в общий интеграл (2.17) или (2.18), и прямые $y = m$, где m — корень уравнения $f(y) = 0$.

Пример 5. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2. \tag{2.21}$$

Здесь правая часть непрерывна при всех значениях y и не обращается в нуль, поэтому потери решений быть не может. Интегрируя, имеем

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx,$$

откуда

$$x = \operatorname{arctg} y + C. \tag{2.22}$$

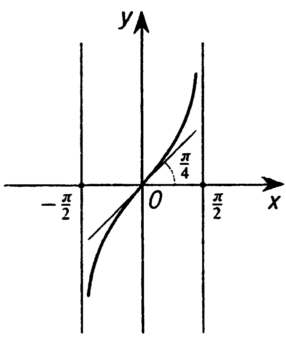

Рис. 24

Это есть общий интеграл уравнения (2.21). Следует иметь в виду, что переменные x и C связаны условием

$$-\frac{\pi}{2} < x - C < \frac{\pi}{2},$$

ибо, как известно,

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}.$$

Общий интеграл (2.22) можно записать и в виде, разрешенном относительно y, не забывая при этом указанного ограничения x и C. Получим

$$y = \operatorname{tg}(x - C) \quad \left(C - \frac{\pi}{2} < x < C + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.23)$$

Формула (2.23) является **общим решением** уравнения (2.21).

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$. Подставляя в (2.22) или в (2.23) $x = 0$, $y = 0$, имеем $C = 0$, так что искомым решением будет (рис. 24)

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Уравнение с разделенными переменными

Рассмотрим уравнение вида

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0, \qquad (2.24)$$

в котором коэффициент при dx является функцией только от x, а коэффициент при dy — функцией от y. В подобных случаях говорят, что в дифференциальном уравнении **переменные разделены**.

Будем предполагать, что функции $X(x)$ и $Y(y)$ **непрерывны** при рассматриваемых значениях x и y. Тогда уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$d\left(\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy\right) = 0$$

(почему?). Следовательно,

$$\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy = C. \qquad (2.25)$$

Это соотношение, где x_0 и y_0 — некоторые фиксированные числа, взятые из областей задания и непрерывности функций $X(x)$ и $Y(y)$, а C — произвольная постоянная, является **общим интегралом** уравнения (2.24).

Общий интеграл (2.25) можно записать и в виде

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = C, \tag{2.26}$$

так как определенные интегралы с переменным верхним пределом можно заменить неопределенными интегралами, ибо и те и другие являются первообразными для одних и тех же подынтегральных функций и, следовательно, могут отличаться лишь постоянными слагаемыми, которые можно включить в C.

Каждая из формул общего интеграла (2.25) и (2.26) дает возможность найти решение $y = y(x)$ или $x = x(y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ или $x(y_0) = x_0$. Для этого достаточно положить в формуле (2.25) $C = 0$, получим

$$\int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)\,dy = 0. \tag{2.27}$$

Если при этом $X(x_0)$ и $Y(y_0)$ не равны одновременно нулю, то формула (2.27) и даст искомое решение, причем это решение будет единственным (почему?).

Можно воспользоваться и формулой (2.26), решая задачу Коши обычным способом, т. е. подставляя x_0 и y_0 вместо x и y, находя C и подставляя найденное значение $C = C_0$ в формулу (2.26).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(2x+1)\,dx + (3y^2+2y)\,dy = 0.$$

Его общий интеграл можно записать в виде

$$\int_{1}^{x} (2x+1)\,dx + \int_{0}^{y} (3y^2+2y)\,dy = C$$

($x_0 = 1$, $y_0 = 0$). Выполняя вычисления, получим

$$x^2 + x + y^3 + y^2 = C + 2.$$

Воспользовавшись формулой (2.26), получим

$$\int (2x+1)\,dx + \int (3y^2+2y)\,dy = C$$

или

$$x^2 + x + y^3 + y^2 = C.$$

Найденные общие интегралы отличаются лишь значением произвольной постоянной.

Пример 2. Найти интегральную кривую уравнения

$$(2x-2)\,dx + 2ydy = 0,$$

проходящую через начало координат.

Решим эту задачу Коши двумя способами. Воспользуемся формулой (2.27). Заменив числа x_0 и y_0 начальными данными искомого решения, т. е. положив $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x (2x-2)\,dx + \int_0^y 2ydy = 0,$$

откуда

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 - 2x = 0. \tag{2.28}$$

Эта окружность и есть искомая интегральная кривая.

Воспользуемся формулой (2.26). Получим

$$\int (2x-2)\,dx + \int 2ydy = C$$

или

$$x^2 - 2x + y^2 = C. \tag{2.29}$$

Полагая $x = y = 0$, находим $C = 0$. Подставляя это значение C в (2.29), снова получим окружность (2.28).

5.2. Уравнение с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$m(x)\cdot n(y)\,dx + m_1(x)\,n_1(y)\,dy = 0, \tag{2.30}$$

так что коэффициенты при dx и dy являются **произведениями** двух функций, из которых одна зависит **только от** x, а другая — **только от** y, то в нем можно разделить переменные. Поэтому уравнение (2.30) называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Будем предполагать, что все функции, входящие в уравнение (2.30), **непрерывны** при рассматриваемых значениях x и y.

Чтобы разделить переменные в уравнении (2.30), надо разделить обе его части на «лишние» множители, т. е. на произведение

$$n(y) \cdot m_1(x).$$

Получим

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy = 0 \quad (n(y) = 0?\ m_1(x) = 0?).$$

Интегрируя, найдем **общий интеграл**:

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}\,dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}\,dy = C.$$

Рассмотрим уравнения

$$n(y) = 0 \quad \text{и} \quad m_1(x) = 0.$$

Если эти уравнения имеют решения вида $y = b$, $x = a$, то последние, очевидно, обращают дифференциальное уравнение (2.30) в тождества и, следовательно, являются решениями этого уравнения.

Эти решения могут оказаться **особыми**.

Из этих решений следует, однако, исключить точки пересечения прямых $y = b$, $x = a$, ибо в этих точках уравнение (2.30) не задано (почему?).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x(1 + y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0. \qquad (2.31)$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{x}{1 + x^2}\,dx + \frac{y}{1 + y^2}\,dy = 0 \quad (1 + y^2 = 0?\ 1 + x^2 = 0?).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln|C|$$

или

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C^2. \qquad (2.32)$$

Это и есть общий интеграл уравнения (2.31).

Уравнения $1+y^2=0$, $1+x^2=0$ не имеют действительных решений. Поэтому при разделении переменных потери решений заведомо не происходит. Все решения содержатся в общем интеграле (2.32).

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$(x+1)\sqrt{y}\,dx - x\,dy = 0. \tag{2.33}$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{(x+1)\,dx}{x} - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0 \quad (\sqrt{y}=0?\ x=0?),$$

откуда

$$x + \ln|x| - 2\sqrt{y} = C.$$

Рассмотрим уравнения $\sqrt{y}=0$, $x=0$. Первое из них имеет решение $y=0$, которое приводит к решениям дифференциального уравнения (2.33) $y=0$ $(x \neq 0)$. Эти решения особые (почему?). Уравнение $x=0$ также приводит к решениям уравнения (2.33) $x=0$ $(y \neq 0)$. Эти решения частные, ибо во всех точках этих решений имеет место единственность решения задачи Коши (почему?).

§ 6. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

6.1. Понятие об однородной функции двух независимых переменных

Однородная функция двух независимых переменных определяется следующим образом: функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени* m, если в результате умножения обоих ее аргументов x и y на **одну и ту же** величину t она приобретает множитель t^m:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{2.34}$$

Если при умножении x и y на t функция $f(x, y)$ сохраняет свое значение:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \tag{2.35}$$

так что в формуле (2.34) $m=0$, то она называется *однородной функцией нулевой степени.*

Всякая однородная функция нулевой степени является функцией от отношения ее аргументов:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.36}$$

Действительно, полагая в соотношении (2.35) $t = \frac{1}{x}$, получим

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y).$$

Но $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ есть функция от $\frac{y}{x}$; обозначим ее через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, получим (2.36).

Пример 1. Функция

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - e^{\frac{x}{y}} + \ln x - \ln y \quad (x > 0,\ y > 0)$$

обладает свойством (2.35). Следовательно, она является однородной функцией нулевой степени.

Пример 2. Пусть дано отношение двух однородных функций одной и той же степени m:

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{2.37}$$

Эта функция является однородной функцией нулевой степени, так как она обладает свойством (2.35) (почему?). Поэтому функция (2.37) представима в виде (2.36).

6.2. Однородное уравнение

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{2.38}$$

где M и N — **однородные функции одной и той же степени** $\boldsymbol{m}$, называется *однородным уравнением*. Будем предполагать, что M и N **нерерывны** в рассматриваемой области и **не обращаются одновременно в нуль**. Точку (x_0, y_0), в которой коэффициенты M и N обращаются одновременно в нуль, будем называть *особой точкой* уравнения (2.38). Если переписать уравнение (2.38) в нормальной форме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{2.39}$$

то в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2.39) обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В этой точке поле направлений, определяемое однородным уравнением, не задано.

Однородное уравнение (2.38) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \equiv -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{2.40}$$

В таком виде и будем его изучать.

Предположим, что функция $\varphi(z)$ определена и **непрерывна** в некотором интервале (a, b). Тогда $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ будет определена и непрерывна в области

$$a < \frac{y}{x} < b,$$

т. е. в бесконечных секторах (рис. 25)

$$\left.\begin{array}{ll} ax < y < bx, & x > 0, \\ bx < y < ax, & x < 0. \end{array}\right\}$$

Каждая полупрямая (рис. 26)

$$y = kx \ (x \neq 0), \ a < k < b \tag{2.41}$$

является **изоклиной** однородного уравнения (2.40), так как в каждой ее точке направление поля, определяемое этим уравнением, одно и то же:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)_{y=kx} = \varphi(k) = \text{const}.$$

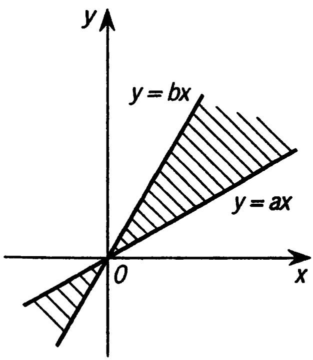

Рис. 25

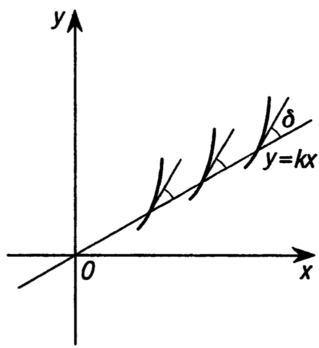

Рис. 26

Поэтому интегральные кривые однородного уравнения пересекают полупрямую (2.41) под одним углом δ (рис. 26).

Докажем теперь, что однородное уравнение всегда интегрируется в квадратурах. С этой целью введем вместо y новую искомую функцию z от независимой переменной x, положив

$$y = z \cdot x \quad (z = z(x)). \tag{2.42}$$

Найдем дифференциальное уравнение для функции z. Дифференцируя (2.42) по x, имеем

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$

Подставляя в уравнение (2.40), получим

$$x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z)$$

или

$$xdz + (z - \varphi(z))\,dx = 0. \tag{2.43}$$

Это есть **уравнение с разделяющимися переменными**. Предполагая, что

$$\varphi(z) \not\equiv z, \tag{2.44}$$

и разделяя переменные в уравнении (2.43), приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z - \varphi(z)} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (x = 0?\ z - \varphi(z) = 0?).$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{dz}{z - \varphi(z)} + \ln|x| = C$$

или

$$\psi(z) + \ln|x| = C \left(\psi(z) \equiv \int \frac{dz}{z - \varphi(z)}\right).$$

Вернемся к искомой функции y, заменив z на $\frac{y}{x}$:

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = C.$$

Это есть **общий интеграл** однородного уравнения (2.40).

Рассмотрим уравнения

$$x = 0, \quad z - \varphi(z) = 0. \tag{2.45}$$

Первое определяет решение уравнения (2.43), которое может оказаться решением уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

и тогда, после выключения начала координат, должно быть присоединено к решениям уравнения (2.40).

Если второе уравнение (2.45) имеет действительные решения вида $z=\alpha=\text{const}$, то им соответствуют в силу подстановки (2.42) решения однородного уравнения (2.40) вида

$$y=\alpha x \quad (x\neq 0).$$

Эти полупрямые, как и полуоси оси y, о которых шла речь выше, могут оказаться **особыми** решениями однородного уравнения (2.40).

Заметим, что если однородное уравнение задано в виде (2.38), то для интегрирования нет необходимости приводить его к виду (2.40). Можно применить подстановку (2.42) и получить уравнение с разделяющимися переменными. Иногда удобнее сделать подстановку вида

$$x=z\cdot y \quad (z=z(y)),$$

поменяв местами x и y в подстановке (2.42), на что имеем право, ибо переменные x и y входят в уравнение (2.38) равноправно.

Выше предполагалось, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (2.44). Рассмотрим теперь случай, когда это условие не выполнено, т. е. $\varphi(z)\equiv z$. В этом случае однородное уравнение (2.40) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{2.46}$$

и становится **уравнением с разделяющимися переменными**. Решениями этого уравнения являются функции

$$\left.\begin{aligned} &y=Cx \quad (x\neq 0),\\ &x=0 \quad\ \ (y\neq 0),\end{aligned}\right\}$$

т. е. **все** полупрямые, **примыкающие** к началу координат, которое является **особой точкой** уравнения. Особых решений уравнение (2.46) не имеет (почему?).

П р и м е р 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \tag{2.47}$$

Это уравнение задано в секторах

$$y \geq x, \quad x > 0 \quad \text{и} \quad y \leq x, \quad x < 0.$$

Полагая $y = zx$, имеем $y' = z'x + z$, так что уравнение (2.47) примет вид

$$z'x + z = \sqrt{z - 1} + z$$

или

$$xdz - \sqrt{z - 1}\, dx = 0.$$

Разделим переменные

$$\frac{dz}{\sqrt{z-1}} - \frac{dx}{x} = 0 \quad (\sqrt{z - 1} = 0?).$$

Интегрируя, имеем

$$2\sqrt{z - 1} - \ln |x| = C.$$

Заменив z на $\frac{y}{x}$, получим

$$2\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - \ln |x| = C.$$

Это есть общий интеграл уравнения (2.47).

Из уравнения $\sqrt{z - 1} = 0$ находим $z = 1$. Подставив в (2.42), получим решения уравнения (2.47)

$$y = x \quad (x \neq 0).$$

Эти решения **особые**, ибо во всякой точке каждого из этих решений нарушается единственность решения задачи Коши.

П р и м е р 4. Пусть дано уравнение

$$2xydx + (y^2 - x^2)\, dy = 0. \tag{2.48}$$

Это однородное уравнение задано на всей плоскости (x, y), кроме начала координат, которое является **особой точкой** уравнения. Особых решений заведомо нет, так как коэффициенты при dx и dy суть **полиномы** относительно x и y.

Найдем общий интеграл уравнения (2.48). Полагая $y = z \cdot x$, имеем $dy = xdz + zdx$, так что уравнение (2.48) примет вид

$$2x^2zdx + (z^2x^2 - x^2)\,(xdz + zdx) = 0.$$

Сокращая на x^2 и собирая члены, содержащие dx и dz, получим

$$(z^3 + z)\, dx + (z^2 - 1)\, xdz = 0 \quad (x^2 = 0?).$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} + \frac{z^2 - 1}{z^3 + z}\, dz = 0 \quad (z^3 + z = 0?).$$

Интегрируя, находим

$$\frac{x}{z}(z^2 + 1) = C.$$

Возвращаясь к искомой функции $y\left(z = \frac{y}{x}\right)$, получим

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

(рис. 27). Это есть общий интеграл уравнения (2.48).

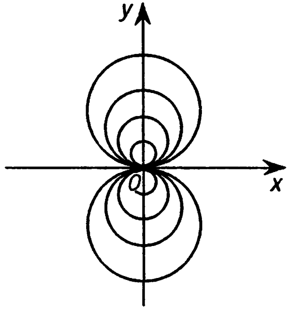

Рис. 27

Рассмотрим уравнения $x^2 = 0$, $z^3 + z = 0$. Первое уравнение дает $x = 0$, но полуоси оси y ($x = 0$ ($y \neq 0$)) не являются решениями дифференциального уравнения (2.48). Из второго уравнения находим $z = 0$ и, подставляя в $y = z \cdot x$, получим

$$y = 0 \quad (x \neq 0).$$

Эти полуоси оси x являются решениями уравнения (2.48). Эти решения частные, так как во всех их точках имеет место единственность решения задачи Коши.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}. \tag{2.49}$$

Это однородное уравнение. Найдем его интегральные кривые. Полагая $y = z \cdot x$, имеем $y' = z'x + z$, так что уравнение (2.49) примет вид

$$z'x + z = 1 + z, \quad z'x = 1,$$

откуда $z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln|x| + C$. Подставляя это значение z в формулу $y = zx$, получим общее решение уравнения (2.49) в виде

$$y = (\ln|x| + C)\, x \quad (x \neq 0).$$

Кроме того, интегральными кривыми будут полуоси оси y:

$$x = 0 \quad (y \neq 0).$$

Это интегральные кривые перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+y},$$

которые мы, как всегда, присоединяем к интегральным кривым уравнения (2.49).

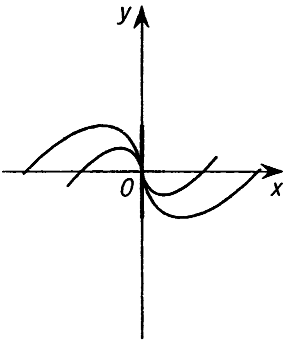

Рис. 28

Все интегральные кривые (рис. 28) примыкают к началу координат, которое является особой точкой уравнения (2.49). При этом все они касаются в особой точке оси $0y$.

Пример 6. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}. \tag{2.50}$$

Это однородное уравнение, его можно проинтегрировать, положив $y = zx$; однако оно интегрируется проще, если перейти к полярным координатам. Положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и принимая во внимание, что

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi d\varphi,$$
$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

приведем уравнение (2.46) к виду

$$\frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

или

$$\frac{dr}{d\varphi} = r,$$

откуда

$$r = Ce^{\varphi}.$$

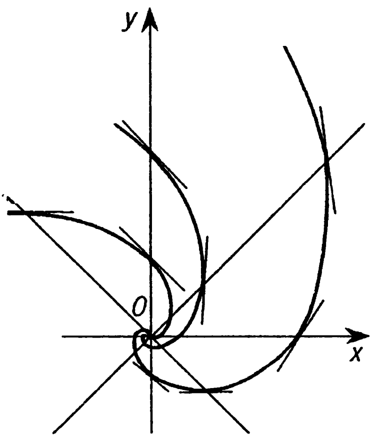

Рис. 29

Это семейство логарифмических спиралей (рис. 29) и есть искомое семейство интегральных кривых уравнения (2.50), заданное в полярных координатах. Возвращаясь к декартовым координатам x и y, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

Все интегральные кривые уравнения (2.50) примыкают к началу координат, которое является особой точкой этого уравнения. При этом определенного направления примыкания нет: все они обходят особую точку бесконечное число раз в одном и том же направлении.

§ 7. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

7.1. Линейное уравнение первого порядка. Однородное и неоднородное линейные уравнения

Уравнение вида (см. 1.2)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x), \tag{2.51}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции от x, которое содержит искомую функцию y и ее производную только **в первых степенях** и не содержит **произведения** их, является **линейным уравнением**.

Если $q(x) \not\equiv 0$ при рассматриваемых значениях x, то уравнение называется *неоднородным*. (Функцию $q(x)$ называют иногда *неоднородностью* уравнения (2.51)). В противном случае линейное уравнение называется *однородным*. Однородное линейное уравнение имеет, следовательно, вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = 0. \tag{2.52}$$

Будем считать, что $p(x)$ и $q(x)$ определены и **непрерывны** в интервале (a, b)*, тогда согласно теореме существования и единственности для линейного уравнения (см. § 2) уравнение (2.51) имеет единственное решение

$$y = y(x) = y(x;\, x_0, y_0),$$

* Доказываемые ниже утверждения легко распространяются на интервал, замкнутый с одного или с обоих концов, а также на бесконечный интервал (в одну или обе стороны).

удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$; причем y_0 можно задавать произвольно, а x_0 брать любым из (a, b), т. е. из интервала непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$.

В частности, для однородного линейного уравнения (2.52) существует единственное решение, удовлетворяющее нулевому начальному условию $y(x_0) = 0$, где x_0 принадлежит интервалу непрерывности коэффициента $p(x)$.

Но уравнение (2.52) имеет нулевое решение $y \equiv 0$, которое, очевидно, удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = 0$. Так как существует только одно решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, то решение $y \equiv 0$ есть единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = 0$. **Геометрически** это означает, что если интегральная кривая однородного линейного уравнения имеет хоть одну общую точку с осью x в интервале непрерывности коэффициента $p(x)$, то она совпадает с осью x на всем этом интервале.

Напомним, что линейное уравнение (2.51), в котором $p(x)$ и $q(x)$ суть непрерывные функции от x, не может иметь особых решений. **Все** решения этого уравнения являются **частными** решениями; чтобы найти их, рассмотрим сначала однородное уравнение.

7.2. Интегрирование однородного линейного уравнения

Однородное линейное уравнение (2.52) всегда имеет решение $y \equiv 0$. Это нулевое решение называется *очевидным* или *тривиальным решением*.

Однородное линейное уравнение имеет бесконечное множество ненулевых решений, которые легко найти, если заметить, что это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, ибо его можно переписать в виде

$$dy + p(x) \cdot y dx = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} + p(x)\, dx = 0 \quad (y = 0?).$$

Интегрируя, получим

$$\ln |y| + \int p(x)\, dx = C_1$$

или

$$\ln |y| = C_1 - \int p(x)\,dx.$$

Потенцируя, найдем

$$|y| = e^{C_1} e^{-\int p(x)\,dx},$$

откуда

$$y = \pm e^{C_1} e^{-\int p(x)\,dx}$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} \quad (C = \pm e^{C_1}). \tag{2.53}$$

Формула (2.53) содержит все решения однородного уравнения (в частности, нулевое решение $y \equiv 0$ содержится в этой формуле при $C = 0$). Она является **общим решением** уравнения (2.52) в области D:

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty. \tag{2.54}$$

Из формулы (2.53) видно, что всякое решение однородного линейного уравнения определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале (a, b), т. е. **во всем интервале непрерывности** коэффициента $p(x)$.

Если однородное линейное уравнение записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y,$$

где $p(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то **общим решением** этого уравнения в области (2.54) будет

$$y = Ce^{\int p(x)\,dx}.$$

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$y' = y \cos x.$$

Так как коэффициент при y определен и непрерывен при всех x, то общее решение

$$y = Ce^{\sin x}$$

определено в области

$$|x| < +\infty, \quad |y| < +\infty.$$

Через каждую точку плоскости (x, y) проходит одна и только одна интегральная кривая. Например, через точку $(0, 1)$ проходит интегральная кривая

$$y = e^{\sin x} \quad (C = 1).$$

Это решение, как и следовало ожидать, определено при всех x. Оно, очевидно, **ограничено** и **имеет период** 2π, или 2π-**периодично**.

В общем решении (2.53) можно вместо неопределенного интеграла взять определенный интеграл с переменным верхним пределом. Получим

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \quad x_0 \in (a, b). \tag{2.55}$$

Полагая здесь $x = x_0$ и обозначая значение y при $x = x_0$ через y_0, имеем

$$y_0 = C,$$

т. е. произвольная постоянная C представляет собой в этом случае начальное значение искомой функции y. Формула (2.55) примет вид

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \quad x_0 \in (a, b).$$

Это есть **общее решение** однородного линейного уравнения (2.52) в области (2.54) **в форме Коши**.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где правая часть есть функция от x и от параметра λ, который может принимать любые действительные значения. Здесь общим решением в форме Коши будет

$$x = x_0 e^{\lambda (t - t_0)}$$

(почему?).

Роль произвольной постоянной играет начальное значение x_0 искомой функции x при $t = t_0$. Если $\lambda < 0$, то **все** решения, кроме $x \equiv 0$, обладают свойством:

$$x \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

т. е. асимптотически приближаются к нулевому решению при $t \to +\infty$.

7.3. Интегрирование неоднородного линейного уравнения

Рассмотрим теперь неоднородное линейное уравнение (1.25) при сделанных выше предположениях относительно $p(x)$ и $q(x)$. Прежде всего покажем, что если известно одно частное решение

$$y = y_1(x) \quad (a < x < b)$$

неоднородного линейного уравнения (2.51), так что

$$y_1'(x) + p(x)\,y_1(x) \equiv q(x) \quad (a < x < b), \tag{2.56}$$

то интегрирование этого уравнения приводится к интегрированию *соответствующего однородного уравнения*

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = 0, \tag{2.57}$$

левая часть которого та же, что и у уравнения (2.51). В самом деле, полагая

$$y = y_1 + z, \tag{2.58}$$

где z — новая неизвестная функция от x, $z = z(x)$, и подставляя (2.58) в (2.51), получим

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) = q(x)$$

или

$$y_1' + z' + p(x)\,y_1 + p(x)\,z = q(x).$$

Здесь выражения $y_1' + p(x)\,y_1$ и $q(x)$ в силу тождества (2.56) взаимно уничтожаются, и мы приходим к уравнению (2.57). Так как уравнение (2.57) имеет общее решение (2.53)

$$z = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

в области (2.54), то

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

будет общим решением неоднородного линейного уравнения (2.51) в области (2.54).

Таким образом, *общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме какого-нибудь одного частного ре-*

шения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y' + 2xy = 1 + 2x^2. \tag{2.59}$$

Это уравнение имеет частное решение $y_1 = x$. Соответствующее однородное уравнение

$$z' + 2xz = 0$$

имеет общее решение $z = Ce^{-x^2}$. Следовательно, общим решением уравнения (2.59) будет

$$y = x + Ce^{-x^2}.$$

Все решения определены при всех x. Они, очевидно, неограничены при $|x| \to +\infty$.

Пример 4. Пусть дано уравнение

$$y' + ay = P_m(x),$$

где $a \neq 0$ — вещественное число, а $P_m(x)$ — заданный полином степени m. Тогда существует единственное частное решение в виде полинома той же степени

$$y_1 = Q_m(x).$$

Убедимся в этом для случая полинома второго порядка. Пусть

$$y' + ay = a_0x^2 + a_1x + a_2. \tag{2.60}$$

Положим

$$y_1 = A_0x^2 + A_1x + A_2, \tag{2.61}$$

где A_0, A_1, A_2 — неопределенные коэффициенты. Подставляя (2.61) в (2.60), будем иметь

$$2A_0x + A_1 + a(A_0x^2 + A_1x + A_2) = a_0x^2 + a_1x + a_2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x (два полинома равны тогда и только тогда, когда у них коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают):

$$\left.\begin{aligned} x^2&:\ aA_0 = a_0,\\ x^1&:\ 2A_0 + aA_1 = a_1,\\ x^0&:\ A_1 + aA_2 = a_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

Так как $a \neq 0$, то из (2.62) найдутся последовательно A_0, A_1, A_2, и притом **единственным** образом. Например, для уравнения

$$y' + 2y = 2x^2 \quad (a = 2 \neq 0,\ m = 2) \tag{2.63}$$

частное решение имеет вид (2.61). Система (2.62) примет вид

$$\left.\begin{array}{l} 2A_0 = 2, \\ 2A_0 + 2A_1 = 0, \\ A_1 + 2A_2 = 0, \end{array}\right\}$$

откуда $A_0 = 1$, $A_1 = -1$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, так что $y_1 = x^2 - x - \frac{1}{2}$. Общим решением уравнения (2.63) будет

$$y = x^2 - x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.$$

Рассмотренный в примере 4 метод нахождения частного решения называется *методом неопределенных коэффициентов*. Здесь задается вид частного решения с неопределенными коэффициентами, последние определяются подстановкой этого решения в данное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x.

Метод неопределенных коэффициентов можно применять не только когда правая часть уравнения является полиномом. Для линейного уравнения **первого** порядка он применяется редко, так как здесь целесообразнее применять более общий *метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)*, позволяющий сразу найти общее решение неоднородного уравнения (2.51) при любой правой его части.

Будем искать решение уравнения (2.51) в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}, \tag{2.64}$$

где $C(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция от x, подлежащая определению. Таким образом, мы ищем решение неоднородного уравнения (2.51) в том же виде, что и общее решение (2.53) соответствующего однородного уравнения (2.57), но только вместо произвольной постоянной C берем функцию от x (**варьируем** произвольную постоянную), которую нужно выбрать так, чтобы функция (2.64) была решением неоднородного уравнения (2.51). Покажем, что такой выбор функции $C(x)$ всегда возможен.

Подставляя (2.64) в (2.51), имеем

$$C'e^{-\int p\,dx} - Cpe^{-\int p\,dx} + pCe^{-\int p\,dx} = q,$$

откуда

$$C' = qe^{\int p\,dx},$$

и следовательно,

$$C(x) = \int qe^{\int p\,dx}dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя найденное значение $C(x)$ в (2.64), получим

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right). \qquad (2.65)$$

Эта формула и дает **общее решение** неоднородного линейного уравнения (2.51) в области (2.54), ибо (2.65) можно записать в виде (2.58), где

$$y_1 = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx.$$

Из формулы (2.65) видно, что *всякое решение* $y = y(x)$ *линейного уравнения определено при всех* x *из интервала непрерывности функций* $p(x)$ *и* $q(x)$ (тем самым доказано утверждение относительно интервала существования решения линейного уравнения, сделанное в § 2).

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$(1 + x^2)\,y' - 2xy = (1 + x^2)^2. \qquad (2.66)$$

Приведем это уравнение к виду (2.51), разделив обе части на коэффициент при y'. Получим

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}\,y = 1 + x^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.51), видим, что здесь

$$p(x) = -\frac{2x}{1 + x^2}, \quad q(x) = 1 + x^2.$$

Поэтому, применяя формулу (2.65), найдем общее решение уравнения (2.66) в виде

$$y = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(C + \int (1 + x^2)\, e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx}\, dx \right).$$

Вычисляя интегралы, получим

$$y = e^{\ln(1+x^2)} \left(C + \int (1 + x^2)\, e^{-\ln(1+x^2)}\, dx \right)$$

или

$$y = (1 + x^2)\,(C + x).$$

Это и есть общее решение уравнения (2.66).

Пример 6. В качестве примера на применение линейного уравнения рассмотрим задачу о токе в цепи с самоиндукцией. Пусть I, U и R суть соответственно ток, напряжение и сопротивление в момент времени t, а L — индуктивность. Тогда, как доказывается в курсе физики,

$$U = IR + L\frac{dI}{dt}.$$

Приводя это (линейное) уравнение к виду (2.51), получим

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\, I = \frac{U}{L}. \tag{2.67}$$

Это есть дифференциальное уравнение для тока. Обозначим через I_0 ток в начальный момент $t = 0$. Таким образом, надо найти решение уравнения (2.67), удовлетворяющее начальному условию

$$I = I_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{2.68}$$

Найдем сначала общее решение уравнения (2.67), пользуясь формулой (2.65). Имеем

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(C + \frac{U}{L} \int e^{\frac{R}{L}t}\, dt \right)$$

или

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}. \tag{2.69}$$

Выделим из общего решения (2.69) искомое решение, удовлетворяющее начальному условию (2.68). Полагая в (2.69) $t = 0$, $I = I_0$, получим

$$I_0 = C + \frac{U}{R},$$

откуда

$$C = I_0 - \frac{U}{R}.$$

Следовательно, искомым решением будет

$$I = \left(I_0 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

Это решение обладает свойством:

$$I \to \frac{U}{R} \text{ при } t \to +\infty,$$

так что при достаточно больших t можно считать, что

$$I = \frac{U}{R} \text{ (закон Ома).}$$

(Это есть частное решение **неоднородного** уравнения (2.67)).

Пример 7. Найти периодическое решение уравнения

$$y' + y = \sin x.$$

На основании формулы (2.65) имеем

$$y = e^{-x} (C + \int e^x \sin x dx).$$

Так как

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x),$$

то

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2} (\sin x - \cos x).$$

Искомым решением будет

$$y_1 = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x).$$

Заметим, что **все** другие решения стремятся к этому **единственному периодическому** решению при $x \to +\infty$ (*конвергенция*).

Рассмотрим одно нелинейное уравнение, которое всегда приводится к линейному. Это *уравнение Бернулли*:

$$y' + p(x) y = q(x) y^m \quad (m \neq 0,\ m \neq 1).$$

Для приведения уравнения Бернулли к линейному уравнению избавимся сначала в правой части от множителя y^m, разделив на него обе части уравнения. Получим

$$y^{-m} y' + p(x) y^{1-m} = q(x) \quad (y^m = 0?).$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{1-m}(y^{1-m})' + p(x)\, y^{1-m} = q(x).$$

Введя новую неизвестную функцию z:

$$z = y^{1-m},$$

придем к уравнению

$$\frac{1}{1-m} z' + p(x)\, z = q(x)$$

или

$$z' + (1-m)\, p(x)\, z = (1-m)\, q(x).$$

Это есть **линейное** уравнение. Найдя его общее решение, получим **общее решение** уравнения Бернулли по формуле

$$y = z^{\frac{1}{1-m}}.$$

Заметим, что если $m > 0$, то уравнение Бернулли имеет решение $y \equiv 0$. Это решение будет особым, если $0 < m < 1$ (почему?).

Пример 8. Пусть дано уравнение

$$y' + y = (1+x)\, y^2.$$

Это уравнение Бернулли; причем $m = 2 > 1$, так что особых решений нет ($y \equiv 0$ — частное решение). Положив

$$z = \frac{1}{y},$$

придем к линейному уравнению

$$z' - z = -1 - x.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$z = Ce^x + x + 2.$$

Поэтому общим решением данного уравнения Бернулли будет $\left(y = \frac{1}{z}\right)$

$$y = \frac{1}{Ce^x + x + 2}.$$

§ 8. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

8.1. Понятие об уравнении в полных дифференциалах

Если левая часть дифференциального уравнения

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{2.70}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$Mdx + Ndy = du, \tag{2.71}$$

то уравнение (2.70) называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Так как уравнение в полных дифференциалах (2.70) можно записать в виде

$$du = 0,$$

то его **общим интегралом** будет

$$u(x, y) = C.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$ydx + xdy = 0. \tag{2.72}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение в полных дифференциалах, так как

$$ydx + xdy = d(xy).$$

Общим интегралом уравнения (2.72) будет

$$xy = C.$$

Задача Коши решается обычным способом; причем решение единственно во всякой точке, отличной от начала координат, которое является **особой точкой** уравнения (2.72). Например, решением, удовлетворяющим начальному условию

$$y = 3 \quad \text{при} \quad x = 2,$$

будет ветвь гиперболы $xy = 6$, лежащая в **первом** квадранте (почему?).

8.2. Признак уравнения в полных дифференциалах. Построение общего интеграла

В общем случае трудно непосредственно усмотреть, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Укажем признак, позволяющий ответить на этот вопрос, а также один из способов нахождения функции $u(x, y)$.

Предположим, что в уравнении (2.70) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в некоторой **односвязной** области G, например в прямоугольнике с центром в заданной точке (x_0, y_0). Кроме того, предположим, что в области G существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$.

Теорема. *Для того чтобы при сделанных предположениях относительно функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ уравнение* (2.70) *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось тождество Эйлера*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2.73}$$

Докажем необходимость условия (2.73). Пусть уравнение (2.70) есть уравнение в полных дифференциалах. Тогда

$$M dx + N dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

так что

$$M \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N \equiv \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.74}$$

Дифференцируя тождества (2.74) соответственно по y и по x, имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \tag{2.75}$$

Но (в силу предположенной непрерывности частных производных $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$) правые части тождеств (2.75) равны, а тогда равны и левые, т. е. имеет место тождество (2.73).

Докажем теперь достаточность условия (2.73). Пусть это условие выполнено. Покажем, что тогда можно найти такую функцию $u(x, y)$, чтобы выполнялось соотношение (2.71) или равносильные ему тождества (2.74).

Выберем сначала функцию $u(x, y)$ так, чтобы она удовлетворяла первому из условий (2.74). В качестве $u(x, y)$ можно, как нетрудно убедиться, взять

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\varphi(y), \qquad (2.76)$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от y, которую будем предполагать непрерывно дифференцируемой.

Определим $\varphi(y)$ так, чтобы функция (2.76) удовлетворяла и второму из условий (2.74), т. е. чтобы частная производная по y от функции, стоящей в правой части формулы (2.76), была тождественно равна функции $N(x, y)$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $\varphi(y)$ удовлетворяла условию

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\varphi(y)\right)=N(x, y). \qquad (2.77)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\,dx=N(x, y)\Big|_{x=x_0}^{x=x}=$$

$$=N(x, y)-N(x_0, y).$$

Поэтому условие (2.77) принимает вид

$$N(x, y)-N(x_0, y)+\varphi'(y)=N(x, y)$$

или

$$\varphi'(y)=N(x_0, y),$$

откуда

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy+C',$$

где C' — произвольная постоянная.

Подставляя найденное значение $\varphi(y)$ в формулу (2.76), получим искомую функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy+C'.$$

Теорема доказана. Подставляя найденную функцию $u(x, y)$ в формулу $u = C$ и полагая $C' = 0$, получим **общий интеграл** уравнения (2.70) в виде

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{2.78}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0. \tag{2.79}$$

Проверяя выполнение условия (2.73), имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy,$$

так что

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

и следовательно, уравнение (2.79) есть уравнение в полных дифференциалах. Применяя формулу (2.78) при $x_0 = y_0 = 0$, получим общий интеграл уравнения (2.79) в виде

$$\int_0^x (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \int_0^y 4y^3\,dy = C$$

или

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Если уравнение (2.70) не является уравнением в полных дифференциалах, но удается найти такую функцию $\mu = \mu(x, y)$, что после умножения на нее получается уравнение в полных дифференциалах, то функцию μ называют *интегрирующим множителем* уравнения (2.70).

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$(1 - x^2y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0. \tag{2.80}$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах (почему?). Но умножая его на $\mu = \frac{1}{x^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0.$$

Его общим интегралом будет

$$\frac{1}{x} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

Случаи легкого нахождения интегрирующего множителя указаны, например, в [49, 72, 132]. Общая теория интегрирующего множителя изложена в [19, 70, 107].

§ 9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.1. Понятие о приближенных методах решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Предположим, что решение задачи (1.2), (1.10) существует и единственно. Как его найти?

Если уравнение (1.2) удается проинтегрировать в конечном виде, то обычно решение задачи Коши (1.2), (1.10) ищут при помощи формулы общего решения или общего интеграла, выбирая соответствующее значение произвольной постоянной. В случаях, когда уравнение (1.2) не интегрируется в конечном виде или полученное общее решение (общий интеграл) слишком сложно, применяют приближенные методы.

Приближенное решение ищется на замкнутом интервале $[x_0, X]$, который обязательно должен содержаться в интервале существования точного решения $y = y(x)$.

Как сказано в § 2, приближенные методы решения задачи Коши делятся по своей природе на два типа: *аналитические* и *численные*.

Аналитическим приближенным решением задачи Коши (1.2), (1.10) называется функция $y = Y(x)$, определенная на интервале $[x_0, X]$ и удовлетворяющая условию $Y(x_0) = Y_0$ (обычно $Y_0 = y_0$), которую мы решаем рассматривать как приближенное решение этой задачи Коши. В § 2 рассмотрен один аналитический приближенный метод решения задачи Коши — метод последовательных приближений.

Численным приближенным решением задачи Коши (1.2), (1.10) называется функция, заданная таблицей чисел (табл. 1) при условии, что мы рассматриваем y_k как приближенное значение точного решения $y = y(x)$ при $x = x_k$.

Таблица 1

x_0	x_1	x_2	...	x_k	...	$x_n=X$
y_0	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

Таблица 1 строится обычно так, что числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ отстоят друг от друга одинаково. При этом число h, определяемое формулой

$$h=\frac{X-x_0}{n}=x_k-x_{k-1},$$

называется *шагом* интегрирования. Численные методы различаются способом вычисления последовательности значений y_1, $y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$. Отметим, что численные методы в последнее время получили широкое применение в связи с внедрением в практику быстродействующих вычислительных машин. Ниже рассмотрены два приближенных численных метода: метод Эйлера и метод Адамса.

9.2. Метод Эйлера

Пусть требуется найти решение задачи Коши (1.2), (1.10) на замкнутом интервале $[x_0, X]$. Разделим этот интервал на n равных частей точками

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n,$$

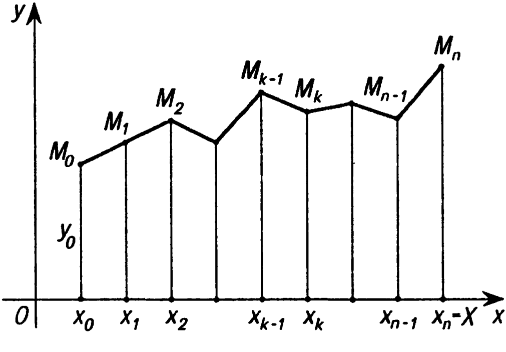

Рис. 30

причем

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = X.$$

Проведем через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую (рис. 30) с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$, равным наклону поля, определяемого дифференциальным уравнением (1.2) в этой точке. На этой прямой возьмем точку $M_1(x_1, y_1)$ и через нее проведем прямую с угловым коэффициентом, равным $f(x_1, y_1)$. На последней прямой возьмем точку $M_2(x_2, y_2)$ и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_2, y_2)$ и т. д. В результате получим ломаную $M_0M_1M_2 \ldots M_{k-1}M_k \ldots M_n$, причем

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

или

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \cdot h \quad (k = 1, \ldots, n). \qquad (2.81)$$

Функцию, заданную таблицей 1, в которой y_k определяется формулой (2.81), будем называть *приближенным решением задачи Коши* (1.2), (1.10) *по методу Эйлера.*

Пример 1. Найдем приближенное решение уравнения (1.30)

$$y' = y,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$ (ср. пример 9 § 2). Будем искать приближенно решение на замкнутом интервале [0; 0,1]. Возьмем $n = 10$, так что имеем

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 0{,}01.$$

Для вычисления y_k воспользуемся формулой (2.81), где

$$f(x_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1},$$

так что

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-1} \cdot h$$

или

$$y_k = 1{,}01 y_{k-1}.$$

Получим искомое приближенное решение (табл. 2):

Таблица 2

x_k	y_k
$x_0 = 0{,}00$	$y_0 = 1{,}0000$
$x_1 = 0{,}01$	$y_1 = 1{,}0100$
$x_2 = 0{,}02$	$y_2 = 1{,}0201$
$x_3 = 0{,}03$	$y_3 = 1{,}0303$
$x_4 = 0{,}04$	$y_4 = 1{,}0406$
$x_5 = 0{,}05$	$y_5 = 1{,}0510$
$x_6 = 0{,}06$	$y_6 = 1{,}0615$
$x_7 = 0{,}07$	$y_7 = 1{,}0721$
$x_8 = 0{,}08$	$y_8 = 1{,}0828$
$x_9 = 0{,}09$	$y_9 = 1{,}0936$
$x_{10} = 0{,}10$	$y_{10} = 1{,}1045$

9.3. Метод Адамса

Рассмотрим так называемый *экстраполяционный метод Адамса*. В этом методе предполагается, что искомое точное решение задачи Коши (1.2), (1.10) **непрерывно дифференцируемо $r+2$ раза** (r — целое ≥ 0). Пусть далее каким-либо способом определены значения искомого решения (разумеется, приближенно) в точках x_1, x_2, ..., x_r. Обозначим эти значения через y_1, y_2, ..., y_r. Дальнейшие значения y_{r+1}, ..., y_n вычисляются по формуле

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{\mu=0}^{r} \alpha_\mu f(x_{k-\mu}, y_{k-\mu}) \quad (k = r, \ldots, n-1). \qquad (2.82)$$

Число r называется порядком метода, α_μ — константы, зависящие только от порядка метода r. Выпишем их значения для $r = 0, 1, 2, 3$:

$$r=0,\ \ \alpha_0 = 1;$$
$$r=1,\ \ \alpha_0 = \frac{3}{2},\quad \alpha_1 = -\frac{1}{2};$$
$$r=2,\ \ \alpha_0 = \frac{23}{12},\quad \alpha_1 = -\frac{4}{3},\quad \alpha_2 = \frac{5}{12};$$
$$r=3,\ \ \alpha_0 = \frac{55}{24},\quad \alpha_1 = -\frac{59}{24},\quad \alpha_2 = \frac{37}{24},\quad \alpha_3 = -\frac{9}{24}.$$

Пример 2. Для иллюстрации эффективности метода Адамса рассмотрим результат численного интегрирования уравнения (1.30) с начальным условием $y(0)=1$. Точным решением является $y=e^x$.

Возьмем $r=2$, $h=0{,}05$. Значения y_1, y_2 берем из точного решения. Вычисления велись на ЭВМ с двумя запасными значащими цифрами. Таблицы точного решения позволяют выяснить истинную погрешность счета; приводим данные счета через 5 шагов (табл. 3).

Таблица 3

x	Точное решение	Приближенное решение
0,25	1,284025	1,284017
0,50	1,648731	1,648692
0,75	2,117000	2,116939
1,00	2,718282	2,718173
1,25	3,490343	3,490165
1,50	4,481689	4,481410
1,75	5,754603	5,754181
2,00	7,389056	7,388432
2,25	9,487736	9,486830
2,50	12,18249	12,18120
2,75	15,64263	15,64079
3,00	20,08554	20,08292
3,25	25,79034	25,78673
3,50	33,11545	33,11045
3,75	42,52108	42,51419
4,00	54,59815	54,58869
4,25	70,10541	70,09249
4,50	90,01713	89,99954
4,75	115,5843	115,5604
5,00	148,4132	148,3809

По этим результатам можно наглядно судить о погрешности счета в данном случае.

9.4. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка с помощью программируемого микрокалькулятора

К приближенным численным методам относятся также методы Рунге—Кутта. Для практической реализации этих методов удобно применять программируемые микрокалькуляторы (ПМК), которые по введенной в них программе способны выполнять довольно сложную вычислительную работу. Ниже будут приведены программы, составленные для ПМК «Электроника БЗ-34», но с точностью до обозначений могут быть применены для ПМК «Электроника МК-56» и «МК-54», «МК-61».

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. При численном решении задача ставится так: в точках $x_1, \ldots, x_n$ (с шагом $h = x_k - x_{k-1}$) найти приближенные значения y_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) для точного решения $y(x_k)$. Здесь считается, что $h > 0$, т. е. решение ищется справа от точки x_0.

При одношаговых (одноступенчатых) методах используется только информация о самой кривой в одной точке, т. е. чтобы найти значение y_{k+1}, требуется информация только о предыдущей точке (x_k, y_k). Наиболее удобными методами этого класса являются методы Рунге—Кутта, так как они не требуют вычисления производных от функции $f(x, y)$, а требуют вычисления самой функции.

Рассмотрим сначала усовершенствованный метод Эйлера—Коши, который является одним из методов Рунге—Кутта второго порядка. На первом шаге по известной точке (x_0, y_0) определяется вспомогательная величина

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

а значение y_1 определяется по формуле

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h\,(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_1^*)).$$

Следовательно, соотношение

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h\,(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)), \tag{2.83}$$

где

$$y_{k+1}^* = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{2.84}$$

описывает усовершенствованный метод Эйлера—Коши.

Приведем словесно-формальное описание алгоритма вычислений по формулам (2.83) и (2.84) с указанием последовательности выполнения операций:

1. Ввести исходные данные h, x_0, y_0, разместив их в соответствующих ячейках памяти: h в П0; x_0 в П1; y_0 в П2 и П3.

2. Вычислить $f(x_0, y_0)$, используя подпрограмму вычисления $f(x, y)$ и вызывая x_0 из регистра памяти П1, а y_0 — из регистра П3. Найденное значение отправить в регистр памяти ПА.

3. Вычислить y_1^* по формуле (2.84) и отправить в ячейку памяти П3.

4. Изменить содержимое ячейки П1, записав туда $x_1 = x_0 + h$.

5. Вычислить y_1 по формуле (2.83), используя подпрограмму для вычисления $f(x_1, y_1^*)$ и содержимое регистров ПА, П1 и П3. Найденное значение отправить в регистры памяти П2 и П3.

Таким образом, найдена первая точка (x_1, y_1) и приготовлены все данные для отыскания следующей точки (x_2, y_2).

Распределение используемых регистров памяти приведено в таблице 4, где ПК — k-й регистр памяти ($k = 0, 1, ..., 9, A, B, C, D$).

По приведенному алгоритму составлена программа 1, которая с подробными объяснениями приведена в таблице 5.

Отладка программы, т. е. проверка правильности ее составления и ввода, производится с помощью контрольного примера: найти решение дифференциального уравнения $y' = xy$ при $x_0 = 1$, $y_0 = \sqrt{e}$ и $h = 0{,}1$. При составлении подпрограммы для вычисления $f(x, y) = xy$ следует учитывать, что значение аргумента x_k хранится в регистре П1, а y_k хранится в двух регистрах — П2 и П3, но вызывать его нужно из регистра П3, так как в формулу (2.83) входят и y_k, и y_{k+1}^*.

Подпрограмма вычисления $f(x, y) = xy$ приведена в таблице 6.

Приведем последовательность действий при вычислении по программе 1 (инструкция к программе 1):

Таблица 4

Распределение регистров памяти к программе 1

Регистры памяти	П0	П1	П2	П3	ПА
Содержимое регистров памяти до начала счета	h	x_0	y_0	y_0	
Содержимое регистров памяти на i-м шаге вычислений по программе 1 после первого пуска	h	x_1	y_0	y_1^*	$f(x_0, y_0)$
Содержимое регистров памяти после первого останова	h	x_1	y_1	y_1	$f(x_0, y_0)$
Содержимое регистров памяти после k-го останова	h	x_k	y_k	y_k	$f(x_{k-1}, y_{k-1})$

Программа 1. Решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера—Коши.

Адрес команды	Нажимаемая клавиша	Код команды	Комментарий
00	ПП	53	Обращение к подпрограмме для вычисления $f(x_k, y_k)$
01	27	27	Адрес начала подпрограммы
02	П А	4–	Заслать $f(x_k, y_k)$ в регистр памяти ПА (при этом значение $f(x_k, y_k)$ сохраняется и на индикаторе)
03	ИП 0	60	Вызвать из регистра ПО число h
04	×	12	Вычислить $hf(x_k, y_k)$
05	ИП 3	63	Вызвать из регистра П3 число y_k (на k-м шаге и y_0 на первом шаге)
06	+	10	Вычислить y^*_{k+1}
07	П 3	43	Заслать y^*_{k+1} в регистр П3
08	ИП 0	60	Вызвать h из регистра ПО
09	ИП 1	61	Вызвать x_k из регистра П1 (на k-м шаге и x_0 на первом шаге)
10	+	10	Вычислить $x_{k+1} = x_k + h$
11	П 1	41	Заслать x_{k+1} в регистр П1
12	ПП	53	Обращение к подпрограмме для вычисления $f(x_{k+1}, y^*_{k+1})$
13	27	27	Адрес начала подпрограммы
14	ИП А	6–	Вызвать из регистра ПА значение $f(x_k, y_k)$
15	+	10	Вычислить сумму $f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1}) = A$
16	ИП 0	60	Вызвать h из регистра ПО
17	×	12	Вычислить hA
18	2	02	Вызвать число 2
19	÷	13	Вычислить $hA/2$
20	ИП 2	62	Вызвать из регистра П2 y_k (на k-м шаге и y_0 на первом шаге)
21	+	10	Вычислить $y_{k+1} = y_k + hA/2$

Адрес команды	Нажимаемая клавиша	Код команды	Комментарий
22	П 2	42	Заслать y_{k+1} в регистры П2 и П3
23	П 3	43	
24	С/П	50	Останов программы и индицирование результата
25	БП	51	Безусловный переход по адресу 00
26	00	00	
27	Начало подпрограммы для вычисления $f(x_k, y_k)$		
. . . .			

Таблица 6

1	2	3	4
27	ИП 3	63	Вызвать y_k из регистра П3
28	ИП 1	61	Вызвать x_k из регистра П1
29	×	12	Вычислить $x_k y_k$
30	В/О	52	Возврат из подпрограммы

1. Включить микрокалькулятор.

2. Нажать клавишу В/О (если до этого микрокалькулятор работал) для перевода счетчика адресов команд в начальное положение.

3. Нажать клавиши F и ПРГ для перехода в режим программирования.

4. Ввести программу 1 последовательным нажатием клавиш, указанных в графе 2 таблиц 5 и 6.

5. Нажать клавиши F и АВТ для перехода в режим ручных вычислений.

6. Нажать клавишу В/О для перевода счетчика адресов команд в нулевое положение.

7. Ввести исходные данные:

а) ввести h в регистр памяти П0, т. е. набрать на клавиатуре число h, а затем последовательно нажать клавиши П и О;

б) ввести число x_0 в регистр памяти П1;

в) ввести число y_0 в регистры памяти П2 и П3.

8. Нажать клавишу С/П. Приблизительно через 15 с после нажатия клавиши счет закончен и на табло индицируется величина $y_1 = 1{,}8309049$. Ее следует выписать в таблицу.

9. Нажать второй раз клавишу С/П и после останова через 15 с выписать в таблицу значение $y_2 = 2{,}0535429$.

Закончить этот процесс следует тогда, когда будет получено значение y_n $(n = 4)$.

Результаты вычислений отладочного примера с указанием точного ответа и погрешности $\Delta = (y - y_{\text{пр}})/y$ на каждом шаге приведены в таблице 7, где $y_{\text{пр,1}}$ — приближенное значение точного решения y, полученное по программе 1.

Таблица 7

№ п/п	x_k	$y_{\text{пр, 1}}$	y	Δ (%)
1	1,1	1,8309049	1,8312522	0,019
2	1,2	2,0535429	2,0544332	0,043
3	1,3	2,3262534	2,3279778	0,074
4	1,4	2,6614665	2,6644564	0,112

По скорости вычислений отдельные экземпляры ПМК различаются на 20—25%. Поэтому указанные в инструкции секунды могут и не совпадать для всех машин.

После отладки введенной программы для решения других задач по программе 1 следует составить свои подпрограммы вычисления $f(x, y)$.

Приведем последовательность действий при вводе новой подпрограммы в память ПМК:

1. В режиме вычислений, в котором находится ПМК, нажать клавишу БП и цифровые клавиши, соответствующие адресу начала подпрограммы (27). При этом на индикаторе информация не меняется.

2. Нажать клавиши F и ПРГ для перехода в режим программирования (на табло индицируется набор цифр, из которых две крайние справа и означают адрес начала подпрограммы).

3. Ввести подпрограмму последовательным нажатием соответствующих клавиш.

4. Нажать клавиши F и АВТ для перехода в режим вычислений.

5. Нажать клавишу В/0 для перевода счетчика адресов в нулевое положение.

6. Ввести исходные данные (согласно п. 7 инструкции к программе 1).

7. Нажать клавишу С/П и после останова выписать значение аргумента x_1 и соответствующее ему значение функции y_1 и т. д.

Те же задачи можно решать методом Рунге—Кутта четвертого порядка, который обеспечивает бóльшую точность и является одним из самых распространенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Он описывается системой следующих соотношений:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2.85}$$

где

$$\begin{aligned} &\text{а) } k_1 = hf(x_k, y_k); &&\text{б) } k_2 = hf(x_k + h, y_k + k_1); \\ &\text{в) } k_3 = hf(x_k + h, y_k + k_2); &&\text{г) } k_4 = hf(x_k + 2h, y_k + 2k_3). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Из формул (2.85) и (2.86) видно, что значение функции следует вычислять четыре раза при различных значениях аргументов. Поэтому и подпрограммы будут начинаться с различных адресов.

Как и ранее, приведем словесно-формальное описание алгоритма отыскания первого значения искомого решения по этим формулам и с указанием последовательности выполнения операций:

1. Ввести исходные данные $h/2$, x_0, y_0, разместив их в соответствующих ячейках памяти: $h/2$ в ПО; x_0 в П1 и y_0 в П2 и П3.

2. Вычислить k_1 по формуле (2.86, *а*), используя подпрограмму и вызывая аргументы x_0 из регистра П1, а y_0 — из регистра П3. Значение k_1 отправить в регистры ПА и ПВ.

3. Вычислить k_2 по формуле (2.86, *б*), используя подпрограмму и находя x_1 и $y_0 + k_1$.

Так как для дальнейших вычислений k_1 больше не потребуется, то регистр ПА можно занять для запоминания величины k_2. Одновременно в регистре ПВ следует начинать организацию вычисления второго слагаемого величины y_1 по формуле (2.85).

4. Вычислить k_3 и k_4, используя подпрограмму, по формулам (2.86, *в*) и (2.86, *г*). Найденные значения следует отыскивать поочередно и засылать их в регистр ПА.

После вычисления k_4 в регистре ПВ уже будет находиться выражение в скобках из формулы (2.85).

5. Вычислить y_1 по формуле (2.85), используя содержимое регистров П2 и ПВ. Результат вычислений отправить в регистры памяти П2 и П3.

После выполнения всех пунктов будет найдена точка (x_1, y_1) и подготовлены исходные данные для отыскания следующей точки (x_2, y_2).

На основании приведенного алгоритма и формул (2.85) — (2.86) может быть составлена программа 2, которая без дополнительных объяснений выписана в таблицу 8.

Таблица 8

Программа 2. Решение дифференциального уравнения методом Рунге—Кутта

Адрес команды	Нажимаемая клавиша	Код команды	Адрес команды	Нажимаемая клавиша	Код команды
00	ПП	53	22	ИП 2	62
01	37	37	23	+	10
02	П В	4L	24	П 2	42
03	ПП	53	25	П 3	43
04	29	29	26	С/П	50
05	+	10	27	БП	51
06	ИП В	6L	28	00	00
07	+	10	29	ИП 1	61
08	П В	4L	30	ИП 0	60
09	ПП	53	31	+	10
10	33	33	32	П 1	41
11	+	10	33	ИП 2	62
12	П А	4–	34	ИП А	6–
13	ИП В	6L	35	+	10
14	+	10	36	П 3	43
15	П В	4L	37	...	...
16	ПП	53	38	ИП 0	60
17	29	29	39	×	12
18	ИП В	6L	40	П А	4–
19	+	10	41	↑	OE
20	3	03	42	В/О	52
21	÷	13			

Здесь с адреса 37 (где поставлено многоточие) должна начинаться подпрограмма для вычисления $f(x_k, y_k)$. Для контрольного примера она состоит из трех команд:

ИП 3; ИП 1; ×.

Следует отметить, что в подпрограмму включено не только вычисление самой функции $f(x, y)$, но и подготовительные команды. Кроме того, подпрограмма заканчивается (операция В/О) после вычисления не только значения функции $f(x, y)$, но и вычисления k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Время вычислений по программе 2 в три раза больше, чем по программе 1, но и точность вычислений больше, о чем свидетельствует таблица 9, где $y_{\text{пр 2}}$ — приближенное значение точного решения y, полученное по программе 2.

Таблица 9

№ п/п	x_k	$y_{\text{пр.2}}$	y	Δ (%)
1	1,1	1,8312519	1,8312522	0,000016
2	1,2	2,0544325	2,0544332	0,000034
3	1,3	2,3279765	2,3279778	0,000056
4	1,4	2,6644538	2,6644564	0,000098

§ 10. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим уравнение первого порядка общего вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.87}$$

Под его **решением** в интервале (a, b) понимаем, как сказано в главе 1, любую непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, которая обращает уравнение (2.87) в тождество.

Иногда решение получают в **неявном виде** $\Phi(x, y) = 0$ или в **параметрической форме** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (t — параметр).

Уравнение (2.87), так же как и уравнение, разрешенное относительно производной, определяет некоторое **поле направлений**. Но здесь, как правило, в заданной точке (x_0, y_0) имеется не одно, а несколько направлений поля, ибо, разрешая уравнение

$$F(x_0, y_0, y') = 0 \tag{2.88}$$

относительно y', можем получить несколько вещественных решений.

Задача Коши для уравнения (2.87) ставится так же, как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной, а именно: ищется решение $y = y(x)$ уравнения (2.87), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.89}$$

При этом, если число решений, удовлетворяющих поставленному начальному условию (2.89), не больше, чем число направлений поля, определяемого уравнением (2.87) в этой точке, т. е. числа решений y_0' уравнения (2.88), то говорим, что задача Коши (2.87), (2.89) имеет *единственное решение*. В противном случае говорят, что единственность нарушена.

Приняв это соглашение, будем определять *частное* и *особое решения* уравнения (2.87) как решения, в каждой точке которого **единственность** решения задачи Коши соответственно имеет место или нарушается.

Можно указать условия, при которых задача Коши (2.87), (2.89) будет иметь, и притом единственное, решение, т. е. будет существовать одно и только одно решение

$$y = y(x) = y(x, x_0, y_0, y_0'), \tag{2.90}$$

такое, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

где y_0' — одно из вещественных решений уравнения (2.88). А именно: достаточно потребовать [70], чтобы функция $F(x, y, y')$ была непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, y_0') и чтобы $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ была отлична от нуля в этой точке.

Поэтому *особые решения уравнения* (2.87) (*в предположении, что F непрерывно дифференцируема) следует искать среди кривых, получающихся исключением y' из системы*

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, y') = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

Эти кривые называются *дискриминантными кривыми* уравнения (2.87). Найдя дискриминантную кривую, нужно испытать ее на особое решение, т. е. проверить, будет ли она интегральной кривой и нарушается ли в каждой ее точке единственность решения задачи Коши (в указанном выше смысле).

Иногда уравнение (2.87) удается разрешить относительно производной, так что получаем несколько уравнений первого порядка в нормальной форме:

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.92}$$

Предположим, что каждое из уравнений (2.92) имеет **общий интеграл**:

$$y = \varphi_k(x, C) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.93}$$

Совокупность этих общих интегралов будем называть *общим интегралом* уравнения (2.87). Общие интегралы (2.93) можно объединить и одной формулой

$$(y - \varphi_1(x, C)) \ldots (y - \varphi_m(x, C)) = 0,$$

которую, так же как возможное семейство решений более общего вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

будем называть *общим интегралом* уравнения (2.87).

Указанная ситуация «распадения» уравнения (2.87) на уравнения вида (2.92), в частности, имеет место для уравнения второй степени относительно y':

$$y'^2 + 2P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0, \tag{2.94}$$

если $P^2(x, y) - Q(x, y) > 0$ (почему?).

Разрешая (2.94) относительно y' и интегрируя полученные уравнения

$$y' = -P(x, y) \pm \sqrt{P^2(x, y) - Q(x, y)},$$

найдем **общий интеграл** уравнения (2.94).

Особым решением уравнения (2.94) может быть только дискриминантная кривая

$$P^2(x, y) - Q(x, y) = 0,$$

которая согласно (2.91) находится исключением y' из системы

$$\left.\begin{aligned} &y'^2 + 2P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0, \\ &2y' + 2P(x, y) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Так же, как и в случае дифференциального уравнения в нормальной форме, *огибающая семейства интегральных кривых уравнения* (2.87) *(если она существует) всегда является особым решением этого уравнения* (почему?).

Ниже мы рассматриваем некоторые типы уравнений, не разрешенных относительно производной, которые удается проинтегрировать в **конечном** виде.

Сюда относится прежде всего **неполное уравнение** вида

$$F(y') = 0, \tag{2.95}$$

которое допускает **общий интеграл** вида

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0, \tag{2.96}$$

если только уравнение (2.95) определяет вещественные значения y'.

В самом деле, если $y' = b$ есть решение уравнения (2.95), то $F(b) = 0$. С другой стороны, интегрируя уравнение $y' = b$, находим $y = bx + C \Rightarrow b = \frac{y-C}{x}$, откуда в силу $F(b) = 0$ и следует (2.96).

Пример 1. Общим интегралом уравнения

$$y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

будет

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 - \frac{y-C}{x} + 1 = 0.$$

Если уравнение (2.87), будучи неполным, разрешимо относительно аргумента или искомой функции, то его тоже удается проинтегрировать в квадратурах в так называемой *параметрической форме*, т. е. выразить x и y в виде функций от некоторого параметра t.

Рассмотрим сначала уравнение вида

$$x = \varphi(y'). \tag{2.97}$$

Положив $y' = t$, получим *параметрическое представление уравнения* (2.97) в виде системы двух уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y' = t. \end{array}\right\} \tag{2.98}$$

Мы видим, что x выражается в виде функции от параметра t. Остается выразить y.

Для этого воспользуемся *основным соотношением*

$$dy = y'\,dx, \tag{2.99}$$

заменяя в нем y' на t, а dx на $\varphi'(t)\,dt$. Получим

$$dy = t\,\varphi'(t)\,dt,$$

откуда

$$y = \int t\varphi'(t)\,dt + C.$$

Эта формула и выражает y через t.

Таким образом, получаем семейство интегральных кривых уравнения (2.97) в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \int t\varphi'(t)\,dt + C. \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения будем называть *общим решением* дифференциального уравнения (2.97) *в параметрической форме*.

Аналогично интегрируется уравнение вида

$$y = \varphi(y'). \tag{2.100}$$

Параметрическим представлением будет

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(t), \\ y' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{2.101}$$

Выразим x через t. Пользуясь (2.100) и (2.101), получим

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)}{t}\,dt,$$

откуда

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + C.$$

Поэтому уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + C, \\ y &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

дают *общее решение* уравнения (2.100) *в параметрической форме*.

Уравнение (2.100) может иметь решения вида $y = b$, где $b = \varphi(0)$.

Рассмотрим теперь случай полного уравнения (2.87), в котором функция F **линейно** зависит от y и x. Такое уравнение можно, разрешив относительно y, записать в виде

$$y = \varphi(y')\,x + \psi(y'). \qquad (2.102)$$

Если $\varphi(y') \not\equiv y'$, то уравнение (2.102) называется *уравнением Лагранжа*. Найдем его общее решение в параметрической форме.

Воспользуемся снова основным соотношением (2.99), приняв y' за параметр, который на этот раз (по традиции) обозначим буквой p ($y' = p$). Тогда уравнение Лагранжа (2.102) будет равносильно системе двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(p)\,x + \psi(p), \\ y' &= p. \end{aligned}\right\} \qquad (2.102,\ a)$$

Пользуясь основным соотношением (2.99) с учетом (2.102, a), получим (вычисляя dy как дифференциал функции от двух аргументов p и x)

$$(\varphi'(p)\,x + \psi'(p))\,dp + \varphi(p)\,dx = p\,dx.$$

Это есть дифференциальное уравнение с неизвестной функцией x от независимой переменной p. Замечая, что искомая функция x входит в коэффициент при dp **линейно**, перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \qquad (\varphi(p) - p = 0?).$$

Это есть **линейное уравнение** с искомой функцией x. Интегрируя его, получим

$$x = A(p)\,C + B(p).$$

Подставляя эту функцию в первое из уравнений (2.102, a) выразим y через p. *Общим решением* уравнения Лагранжа (2.102) *в параметрической форме* будет

$$\left.\begin{aligned} x &= A(p)\,C + B(p), \\ y &= A_1(p)\,C + B_1(p) \end{aligned}\right\}$$

(почему?).

Если уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет вещественные решения $p = p_i$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), то, подставляя их в первое из уравнений (2.102, *a*) и принимая во внимание, что $\varphi(p_i) = p_i$, получим

$$y = p_i x + \psi(p_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти **прямые линии** могут оказаться **особыми решениями** уравнения Лагранжа (2.102).

Рассмотрим теперь один замечательный частный случай уравнения Лагранжа, когда коэффициент при x равен производной от искомой функции y:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{2.103}$$

Это уравнение называется *уравнением Клеро*.

Применяя тот же алгоритм, что и при интегрировании уравнения Лагранжа, имеем

$$y = xp + \psi(p), \quad y' = p. \tag{2.104}$$

Далее,

$$pdx + (x + \psi'(p))\,dp = pdx \quad (dy = y'\,dx),$$

откуда

$$(x + \psi'(p))\,dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dp = 0 \quad \text{и} \quad x + \psi'(p) = 0. \tag{2.105}$$

Первое из них дает $p = C = \text{const}$. Подставляя это значение в первое из уравнений (2.104), получим

$$y = xC + \psi(C). \tag{2.106}$$

Это семейство прямых линий и есть **общее решение** уравнения Клеро (2.103). Заметим, что оно получается из (2.103) формальной заменой y' на C.

Второе из уравнений (2.105) вместе с первым из уравнений (2.104) дает решение уравнения Клеро (2.103) в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -\psi'(p)\cdot p + \psi(p), \end{aligned}\right\} \tag{2.107}$$

которое обычно является **особым** и представляет наибольший (если не исключительный) интерес для приложений. **Геометрически** это решение чаще всего является **огибающей** семейства (2.106) и в этом случае представляет собой заведомо **особое решение**.

Действительно, разыскивая кривую, подозрительную на огибающую семейства (2.106) по правилу, указанному в п. 3.3, имеем систему

$$\left.\begin{aligned} y &= xC + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C), \end{aligned}\right\}$$

где второе уравнение получено из первого дифференцированием по C. Из этой системы находим

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(C), \\ y &= -\psi'(C)\,C + \psi(C). \end{aligned}\right\}$$

Но эти уравнения отличаются от (2.107) только обозначением параметра.

Таким образом, приходим к очень простому алгоритму интегрирования уравнения Клеро:

1. Общее решение получается заменой y' на C.

2. Особое решение ищется как огибающая семейства прямых, образующих общее решение.

Пример 2. Пусть дано уравнение Клеро

$$y = xy' - y'^2.$$

Его общим решением будет

$$y = xC - C^2.$$

Ищем огибающую. Имеем

$$\left.\begin{aligned} y &= xC - C^2, \\ 0 &= x - 2C, \end{aligned}\right\}$$

откуда $y = x^2/4$. Это есть огибающая (почему?) и, следовательно, особое решение данного уравнения Клеро.

Как видим, в случае уравнения Клеро наибольший интерес представляет не общее, а особое решение.

В заключение настоящей главы рассмотрим одну геометрическую задачу, имеющую большое теоретическое и прикладное значение,— **задачу об ортогональных траекториях заданного семейства кривых на плоскости.**

Известно, что окружность обладает замечательным свойством: касательная к окружности перпендикулярна к радиусу этой окружности, проведенному в точку касания, образуя с ним прямой угол. Вообще, *углом между двумя кривыми* в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

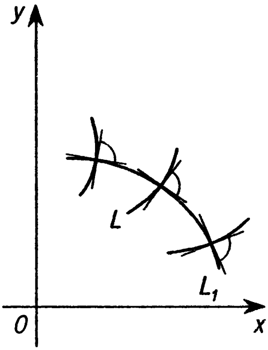

Рис. 31

Если кривая L_1 (рис. 31) пересекает все кривые L данного семейства под прямым углом, то она называется *ортогональной траекторией* этого семейства. В частности, любая из полупрямых, выходящих из начала координат

$$\left.\begin{aligned} y &= kx \quad (x \neq 0), \\ y &= 0 \quad (y \neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{2.108}$$

является, очевидно, ортогональной траекторией семейства концентрических окружностей с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.109}$$

и любая из окружностей (2.109) есть ортогональная траектория семейства полупрямых (2.108). В данном случае имеем дело с семейством ортогональных траекторий заданного семейства кривых.

Поставим задачу: найти семейство ортогональных траекторий заданного семейства кривых

$$\Phi(x, y, a) = 0 \tag{2.110}$$

(a — параметр).

Для решения этой задачи составим сначала дифференциальное уравнение семейства (2.110), исключив параметр a из системы (см. (1.51))

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = 0, \\ &\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0. \end{aligned}\right\}$$

Получим

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.111}$$

Это и есть **дифференциальное уравнение** семейства (2.110).

Пусть $M(x, y)$ — любая точка ортогональной траектории L_1. Согласно известному условию взаимной перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент касательной к ортогональной траектории L_1 в точке M равен $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, где y' — угловой коэффициент касательной в точке М к кривой L семейства (2.110).

проходящей через эту точку. Поэтому, заменив в дифференциальном уравнении (2.111) заданного семейства (2.110) y' на $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, получим **дифференциальное уравнение** семейства ортогональных траекторий:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем искомое семейство ортогональных траекторий.

Возвратимся к семейству (2.109). Найдем его ортогональные траектории. Дифференциальным уравнением семейства (2.109) будет

$$x + yy' = 0$$

(почему?). Заменив y' на $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, получим

$$x + y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

или

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Это есть дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий. Интегрируя его, получим семейство полупрямых (2.108).

С задачей на отыскание ортогональных траекторий мы встречаемся в механике, когда требуется найти силовые линии поля, создаваемого силами F, имеющими *потенциал* $u = u(x, y)$, так что составляющие силы F по осям координат F_x и F_y равны соответствующим частным производным от функции u: $F_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Покажем, что *силовые линии являются ортогональными траекториями семейства линий уровня*

$$u(x, y) = C.$$

В самом деле, так как касательная к *силовой линии* (по определению) совпадает с направлением силы F в точке касания, то угловой коэффициент ее равен $\frac{F_y}{F_x}$. С другой стороны, угловой коэффициент касательной к линии уровня находится из уравнения

$$u'_x + u'_y \cdot y' = 0$$

и равен

$$-\frac{u'_x}{u'_y} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Таким образом, силовая линия и линия уровня ортогональны (почему?).

Теперь рассмотренной выше задаче об ортогональных траекториях семейства окружностей (2.109) можно дать механическое истолкование, если рассматривать эти окружности как **линии уровня** ($u = x^2 + y^2$). Тогда полупрямые (2.108) будут **силовыми линиями.**

Задачи к главе 2

В задачах 1—5 проинтегрировать уравнение:

1. $y' = \cos^2 x$. **2.** $y' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3.** $y' = x^2 e^x$.

4. $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **5.** $y' = \frac{e^x}{x}$.

В задачах 6—7 проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности ее, о направлении касательной и направлении вогнутости интегральной кривой в точке M; в задаче 6 сделать два рисунка (схематический предварительный рисунок и график найденного решения):

6. $y' = 2xe^{-x^2}$; $M(0, -1)$.

7. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $M(0, -1)$, $M(0, 1)$, $M(1, 0)$.

8. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y = \ln x + C$. Какое общее свойство кривых заданного семейства выражает полученное дифференциальное уравнение? Совпадает ли семейство интегральных кривых с заданным семейством кривых?

9. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси x обратно пропорционален абсциссе точки касания.

В задачах 10—12 проинтегрировать уравнение:

10. $y' = e^y$. **11.** $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.

12. $y' = 2\sqrt{|y|}$.

13. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y^2 = 2p(x + C)$. Какое общее свойство кривых заданного семейства оно выражает?

14. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси x прямо пропорционален ординате точки касания.

15. (Задача об охлаждении тела в воздухе.) В силу закона Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти закон охлаждения тела, если температура воздуха 20° С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60° С. Через сколько минут его температура понизится до 30° С?

16. Допустив, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев, найти зависимость давления p от высоты h, если известно, что на уровне моря ($h = 0$) это давление равно 1 кг/см^2, а на высоте 500 м оно равно 0,92 кг/см^2.

Указание. Подсчитать изменение давления воздуха при переходе от слоя на высоте h к слою на высоте $h + dh$ и воспользоваться законом Бойля—Мариотта, т. е. считать, что плотность воздуха ρ пропорциональна давлению p.

17. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

18. Проинтегрировать уравнение

$$(1 - x)\,dy - y\,dx = 0$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(0,\ 1)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности этой интегральной кривой.

19. Доказать по виду уравнения

$$(y + y^2 - x^2y - x^2y^2)\,dx + (x^3y - 8y - x^3 + 8)\,dy = 0,$$

что оно не имеет особых решений.

20. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие диаметром 0,2 м, вырезанное в дне чаши, если скорость вытекания воды $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$ см/с, где h — высота столба воды над отверстием?

21. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

22. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

23. Найти кривую, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью x, касательной и нормалью.

В задачах 24—26 проинтегрировать уравнение, пользуясь формулой общего решения линейного уравнения:

24. $y' + ay = e^{mx}$. (Доказать, что это уравнение имеет частное решение вида $y_1 = be^{mx}$, если $m \neq -a$, и вида $y_1 = bxe^{mx}$, если $m = -a$.)

25. $(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

26. $ydx + 2\,(x + y)\, dy = 0$.

В задачах 27—29 найти общее решение, угадав предварительно одно частное решение:

27. $y' + y = x + 1$. (Доказать, что уравнение $y' + ay = P\,(x)$, где $a = \text{const} \neq 0$, а $P\,(x)$ — полином степени m, имеет частное решение вида

$$y_1 = Q\,(x),$$

где $Q\,(x)$ — полином той же степени m.)

28. $y' + xy = x^2 + 1$. **29.** $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

30. Найти решение с начальными данными x_0, y_0:

$$xy' = x - y;\;\; x_0 = 0,\; y_0 = 0.$$

31. Найти закон изменения тока в цепи с самоиндукцией, если $i = i_0$ при $t = 0$ и $U = A \sin \omega t$.

32. Проинтегрировать уравнение

$$y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)\, y^{\frac{2}{3}}$$

и найти решение с начальными данными $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

33. Найти интеграл и общий интеграл уравнения

$$\frac{1}{x}\, dy - \frac{y}{x^2}\, dx = 0,$$

не пользуясь формулами общего интеграла, приведя к виду $du(x, y) = 0$.

34. Найти решение уравнения

$$(x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$$

с начальными данными $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

В задачах 35—36 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленному начальному условию; построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара):

35. $y' = x^2 + y^2$; $y = 0$ при $x = 0$.

36. $y' + \frac{1}{x - 1}y = 0$; $y = 1$ при $x = 0$.

В задачах 37—40 проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$:

37. $y'^2 - 4y = 0$; $M(1, 1)$, $M(1, 0)$.

38. $y'^2 = 4\,|y|$.

39. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

40. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

В задачах 41—42 найти по виду уравнения кривые, подозрительные на особые решения, и проверить, будут ли они особыми решениями:

41. $y'^2 - 2yy' + x^2 = 0$.

42. $y'^2 - 2xy' + 2x^2 - y = 0$.

43. Найти кривые, для которых отрезок, отсекаемый касательной на оси x, равен радиус-вектору точки касания.

В задачах 44—50 проинтегрировать уравнение:

44. $y'^3 + 1 = 0$.

45. $x = y'^3 + 1$.

46. $y = y'^2 + 2y'^3$.

47. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

48. $y = x(1 + y') + y'^2$.

49. $y = xy' - y'^2$.

50. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

51. Найти ортогональные траектории заданного семейства: а) $y = ax^2$. (Сделайте рисунок.) б) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$.

52. Составить таблицу приближенных значений решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a\ b]$, шаг $h = 0{,}1$:

1. $y' = x + \sin(y/2{,}25)$; $y(1{,}4) = 2{,}2$, $x \in [1{,}4;\ 2{,}4]$.
2. $y' = 1 + 0{,}2y\sin x - 1{,}5y^2$; $y(0) = 0$, $x \in [0;\ 1]$.
3. $y' = 1{,}6x + 0{,}5y^2$; $y(0) = 0{,}3$, $x \in [0;\ 1]$.

Вопросы для повторения

1. Какие линии являются изоклинами дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$, $x \in (a, b)$? Сделайте схематический рисунок семейства интегральных кривых уравнения $y' = 2x$, построив изоклины: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -1$.

2. Как можно выбирать начальные данные x_0, y_0 при постановке задачи Коши для уравнения $y' = f(x)$, $f \in C(a, b)$ (т. е. функция f непрерывна в интервале (a, b))? Каков интервал существования решения задачи Коши? Как можно выбирать начальные данные при постановке задачи Коши для уравнения $y' = \frac{1}{x}$? В каких интервалах определены решения с (начальными) условиями Коши: $y(1) = 0$ и $y(-1) = 0$?

3. Как находится общее решение уравнения $y' = f(x)$, $f \in C(a, b)$? В какой области оно определено? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Найдите общее решение уравнения $y' = 2x$ и решение задачи Коши: $y' = 2x$, $y(0) = 1$. Найдите решения задач Коши: $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$ и $y' = \frac{1}{x}$, $y(-1) = 0$ — при помощи соответствующих формул общего решения.

4. Какой вид имеет общее решение уравнения $y' = f(x)$, $f \in C(a, b)$ в форме Коши? Как решается задача Коши для этого уравнения при помощи общего решения в форме Коши? Почему найденное решение является гладкой функцией от x и начальных данных x_0, y_0? Убедитесь в этом на примере задачи Коши: $y' = 2x$, $y(x_0) = y_0$. Найдите решение задачи Коши: $y' = 2x$, $y(0) = 1$. Найдите решение задачи Коши: $y' = e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

5. Может ли уравнение $y' = f(x)$, $f \in C(a, b)$ иметь особые решения?

6. Какие линии являются изоклинами дифференциального уравнения вида $y' = f(y)$, $y \in (c, d)$? Сделайте схематический рисунок семейства интегральных кривых уравнения $y' = y$, построив изоклины: $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

7. Докажите, что если уравнение $y' = f(y)$ допускает стационарное решение $y = b$, то последнее является его изоклиной. Найдите такие изоклины уравнений: $y' = y$ и $y' = 2\sqrt{y}$.

8. Как интегрируется уравнение $y' = f(y)$? Как находится общий интеграл? Какие функции могут оказаться особыми

решениями? Проинтегрируйте уравнения $y' = y$ и $y' = 2\sqrt{y}$. (Сделайте рисунки.)

9. Как находится общий интеграл и решение задачи Коши для уравнения с разделенными переменными?

10. Как интегрируется уравнение с разделяющимися переменными? Какие функции могут оказаться особыми решениями?

11. Какое уравнение называется однородным? Какие линии являются изоклинами этого уравнения?

12. Какой подстановкой (заменой искомой функции) однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными? Какие функции могут быть особыми решениями однородного уравнения?

13. Почему начало координат является особой точкой уравнения $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$? Изучите поле направлений, определяемое уравнениями:

$$y' = \frac{2y}{x}, \quad y' = \frac{x+y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

14. Изучите поле направлений, определяемое уравнением $y' = \frac{x+y}{x-y}$? Найдите наклон интегральных кривых в точках пересечения с осями координат и с биссектрисами координатных углов. Сделайте схематический рисунок интегральных кривых в окрестности особой точки $x = 0$, $y = 0$.

15. Какой вид имеет линейное уравнение первого порядка? Чем отличается неоднородное линейное уравнение от однородного?

16. Как интегрируется однородное линейное уравнение первого порядка $y' + p(x)y = 0$, $p \in C(a, b)$? Какой вид имеет общее решение в форме Коши? Почему решение задачи Коши является гладкой функцией от x и начальных данных x_0, y_0?

17. Какой подстановкой (заменой искомой функции) неоднородное линейное уравнение первого порядка приводится к однородному в случае, когда известно одно частное решение неоднородного уравнения?

18. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) интегрирования неоднородного линейного уравнения?

19. Докажите, что решение задачи Коши

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

можно представить в виде формулы Коши

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\, dt} + \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi)\, e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(t)\, dt}\, d\xi.$$

Указание. Найдите решение задачи Коши в виде $y = C(x)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\, dt}$, $C(x_0) = y_0$. Убедитесь, что $e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(t)\, dt}$ есть решение задачи Коши: $y' + p(x)\, y = 0$, $y(\xi) = 1$.

20. Как интегрируется уравнение Бернулли

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^m, \ p, q \in C(a, b)?$$

В каком случае $y = 0$ будет особым решением?

21. При каком условии дифференциальное уравнение $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах? Как интегрируется уравнение в полных дифференциалах? Как решается задача Коши?

22. В чем состоит приближенный метод Эйлера решения задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$?

23. В чем состоит экстраполяционный метод Адамса решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$?

24. Как с помощью микрокалькулятора можно решить задачу Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ (усовершенствованным методом Эйлера—Коши или методом Рунге—Кутта четвертого порядка)?

25. Какой вид имеет уравнение Клеро? Как находятся общее и особое решения этого уравнения?

26. Что такое ортогональная траектория заданного семейства кривых на плоскости? Как составляется дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий?

Глава 3
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

§ 11. УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

11.1. Геометрическое и механическое истолкование уравнения второго порядка и его решения

Во введении дано понятие об уравнении n-го порядка, его решении и интегральной кривой как графике решения. Рассмотрим более подробно вопрос о **геометрическом** истолковании уравнения второго порядка и его решения.

Уравнение второго порядка имеет общий вид

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{3.1}$$

Его всегда можно переписать так:

$$F\left(x, y, y', \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Так как $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ — кривизна кривой $y = y(x)$ в точке (x, y), то из формулы (3.2) видно, что всякое дифференциальное уравнение второго порядка выражает некоторое общее свойство его интегральных кривых $y = y(x)$, устанавливая в каждой точке интегральной кривой зависимость между координатами точки, наклоном касательной к интегральной кривой и кривизной интегральной кривой в этой точке.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = a \quad (a > 0). \tag{3.3}$$

Интегральные кривые этого уравнения обладают одним общим свойством: в каждой точке интегральной кривой кривизна **одна и та же**.

Известно, что окружности

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{a^2},$$

обладают указанным свойством. Следовательно, они являются интегральными кривыми уравнения (3.3), в чем можно убедиться и непосредственно.

П р и м е р 2. Пусть дано уравнение

$$y'' = 0.$$

В каждой точке интегральной кривой $y = y(x)$ кривизна равна нулю. Интегральными кривыми являются прямые

$$y = C_1 x + C_2.$$

Рассмотрим теперь вопрос о **механическом** истолковании уравнения второго порядка и его решений. Пусть материальная точка массой m движется по прямой, которую примем за ось x, под действием силы $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$, зависящей от времени t, положения x и скорости $\frac{dx}{dt}$ в момент времени t. Тогда согласно второму закону Ньютона имеем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.4}$$

где $\frac{d^2x}{dt^2}$ есть ускорение точки в момент времени t. Перепишем уравнение (3.4) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.5}$$

где $f = \frac{F}{m}$ — сила, отнесенная к единице массы.

Всякому решению

$$x = x(t) \tag{3.6}$$

соответствует, как и в случае уравнения первого порядка, определенный **закон движения**. Поэтому часто решение (3.6) называют *движением*, определяемым уравнением (3.6). Задача теории интегрирования уравнения (3.5) состоит в нахождении всех движений, определяемых этим уравнением, и изучении их свойств. Так как уравнение (3.5) удается проинтегрировать в конечном виде лишь в редких случаях, то весьма важно уметь устанавливать свойства движений, определяемых этим дифференциальным уравнением непосредственно по свойствам самого дифференциального уравнения.

П р и м е р 3. Пусть точка движется по оси x под действием силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия $x=0$ и равной $-ax$ ($a>0$). Тогда

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-ax$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x \quad \left(k^2=\frac{a}{m}\right). \tag{3.7}$$

Это есть *дифференциальное уравнение движения* рассматриваемой точки. Всякое решение $x=x(t)$ дает закон движения. В частности, уравнение (3.7) имеет очевидное **нулевое решение** $x\equiv 0$. Движение, соответствующее этому решению, называется *состоянием покоя.*

Решению $x=\sin kt$ соответствует **периодическое** движение точки вдоль оси x с периодом $\frac{2\pi}{k}$. Это решение (движение), очевидно, **ограничено** при $-\infty<t<\infty$.

К полному интегрированию уравнения (3.7) и изучению свойств всех движений, определяемых этим уравнением, мы вернемся в § 23.

11.2. Постановка задачи Коши для уравнения n-го порядка

Для уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{3.8}$$

($n>1$) *задача Коши* ставится так: найти решение

$$y=y(x), \tag{3.9}$$

удовлетворяющее *начальным условиям* (*условиям Коши*)

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \ \text{ при } \ x=x_0, \tag{3.10}$$

где $x_0, y_0, y_0' \ldots, y_0^{(n-1)}$ — **заданные числа** (*начальные данные* решения (3.9)). В отличие от уравнения первого порядка здесь при заданном значении независимой переменной задается значение не только искомой функции, но и ее производных до порядка на единицу ниже, чем порядок дифференциального уравнения.

В частности, для уравнения второго порядка (3.1) начальные условия (3.10) принимают вид

$$y = y_0, \ y' = y'_0 \ \text{ при } \ x = x_0. \tag{3.10, a}$$

Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 32*а*) и имеющей в этой точке касательную M_0T, которая образует с положительным направлением оси x заданный угол α_0:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0.$$

Пример 4. Найти решение уравнения

$$y'' = 6x, \tag{3.11}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 1, \ y' = 0 \ \text{ при } \ x = 0. \tag{3.12}$$

Искомая интегральная кривая пересекает ось y в точке $M_0(0, 1)$, причем касательная к ней в этой точке параллельна оси x (рис. 32*б*).

Так как $y'' = (y')'$, то из уравнения (3.11) находим

$$y' = 3x^2 + C_1. \tag{3.13}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, имеем

$$y = x^3 + C_1x + C_2. \tag{3.14}$$

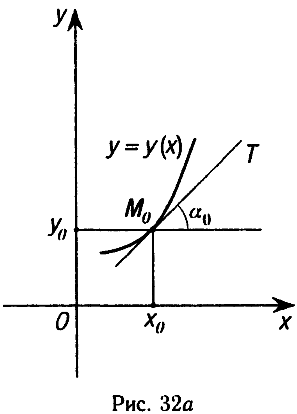

Рис. 32*а*

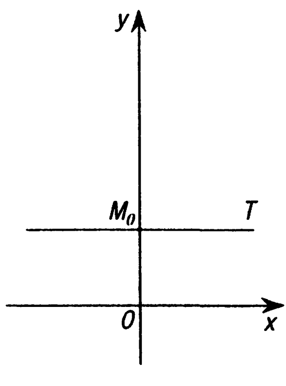

Рис. 32*б*

Это семейство кубических парабол содержит в себе **все** решения уравнения (3.11). Поэтому, если решение поставленной задачи Коши существует, оно должно получаться из семейства решений (3.14) при выборе соответствующих числовых значений произвольных постоянных C_1 и C_2.

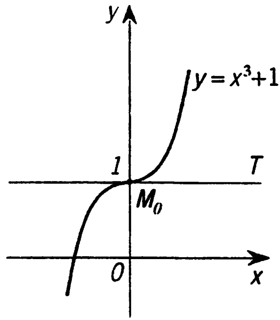

Рис. 32*в*

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.12), заменим в (3.14) и (3.13) переменные x, y и y' их начальными значениями 0, 1 и 0. Получим

$$0 = C_1, \quad 1 = C_2.$$

Подставляя эти значения C_1 и C_2 в семейство решений (3.14), найдем (рис. 32*в*)

$$y = x^3 + 1. \tag{3.15}$$

Это и есть искомое решение. Других решений, удовлетворяющих поставленным начальным условиям, нет. Заметим, что существует бесчисленное множество интегральных кривых $y = x^3 + C_1 x + 1$, проходящих через точку (0,1), но только одна из них имеет в этой точке касательную, параллельную оси x,— это кривая (3.15).

Дадим **механическое** истолкование задачи Коши. С этой целью обратимся к уравнению (3.5). Задача Коши для этого уравнения ставится так: найти движение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = x_0, \ \frac{dx}{dt} = x_0' = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{3.16}$$

т. е. в начальный момент времени точка должна занимать заданное положение x_0 и иметь заданную скорость x_0'.

Решение задачи Коши (3.5), (3.16) записывается так (ср. (1.17))

$$x = x(t;\, t_0,\, x_0,\, x_0').$$

Пример 5. Пусть материальная точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести. Найти закон движения, если известно, что в начальный момент времени точка занимала заданное положение и имела заданную скорость.

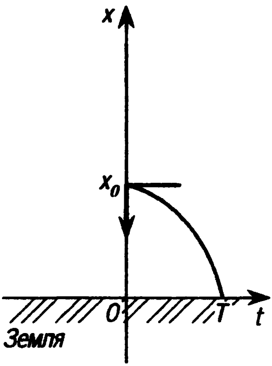

Рис. 33

Примем нашу прямую за ось x (рис. 33), поместив начало координат у поверхности Земли и направив ось x вверх. Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \tag{3.17}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Обозначим начальный момент времени, начальное положение и начальную скорость точки соответственно через t_0, x_0 и v_0. Будем считать, что $t_0 = 0$. Тогда искомое движение $x = x(t)$ рассматриваемой точки должно удовлетворять начальным условиям

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{3.18}$$

Из уравнения (3.17), как и в предыдущем примере, находим

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1, \quad x = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Удовлетворяя начальным условиям (3.18), имеем

$$v_0 = C_1, \quad x_0 = C_2.$$

Искомым законом движения точки будет

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Найдем промежуток времени T (рис. 33), по истечении которого точка достигнет Земли, если начальная скорость ее движения равна нулю. Закон движения примет вид

$$x = -\frac{gt^2}{2} + x_0 \quad (t \geq 0).$$

Полагая здесь $x = 0$ и решая полученное уравнение относительно t, найдем

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g}} = T.$$

§ 12. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

12.1. Теорема существования и единственности решения уравнения n-го порядка

Рассмотрим уравнение n-го порядка в нормальной форме

$$y^{(n)} = f\,(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,. \tag{3.19}$$

Для этого уравнения, как и в случае уравнения первого порядка, имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши (см., например [70, с. 292], которую мы приводим здесь в упрощенной формулировке.

Теорема Пикара. *Если правая часть уравнения* (3.19) *непрерывна в некоторой окрестности начальной точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *то оно имеет единственное решение* (3.9), *удовлетворяющее начальным условиям* (3.10).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = P\,(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.20}$$

где правая часть есть **полином** от **всех** ее аргументов.

В этом случае какие бы начальные данные $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ мы ни взяли, условия теоремы Пикара будут, очевидно, выполнены; и следовательно, существует единственное решение с этими начальными данными.

Если правая часть уравнения (3.20) является **полиномом** только **относительно** $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, причем коэффициенты этого полинома непрерывны в некотором интервале (a, b), то начальные значения искомой функции и ее производных до порядка $n-1$ включительно можно задавать **произвольно**, а за начальное значение независимой переменной можно брать любое число x_0 **из интервала** (a, b). Решение с такими начальными данными существует и единственно.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$(1 + x^2)\, y'' + y'^2 + 1 = 0\,. \tag{3.21}$$

Какие начальные данные можно ставить, чтобы задача Коши с этими начальными данными заведомо имела единственное решение?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, перепишем данное уравнение в нормальной форме:

$$y'' = -\frac{y'^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}. \qquad (3.22)$$

Правая часть этого уравнения есть **полином относительно** y' с коэффициентами, непрерывными при **всех** x. Следовательно, **все** начальные данные x_0, y_0, y'_0 можно задавать **произвольно**.

12.2. Случай линейного уравнения. Выбор начальных данных. Интервал существования решения

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + \ldots$$
$$\ldots + p_n(x)\, y = f(x). \qquad (3.23)$$

Предположим, что все коэффициенты $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ заданы и непрерывны в интервале (a, b). Тогда условия сформулированной выше теоремы Пикара заведомо выполняются в окрестности начальной точки (x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$), где $x_0 \in (a, b)$, а y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ — любые заданные числа. Поэтому для линейного уравнения (3.23) имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема. *Если функции* $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны в интервале* (a, b), *то уравнение* (3.23) *имеет единственное решение* (3.9), *удовлетворяющее начальным условиям* (3.10), *причем* y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ *можно задавать произвольно, а* x_0 *можно брать любым из интервала* (a, b).

Можно доказать, что *решение* (3.9) *определено во всем интервале* (a, b).

В частности, если функции $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ и $f(x)$ — **полиномы** (или другие функции, непрерывные при всех x), то **все начальные данные** x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ можно задавать **произвольно**. Решение существует, единственно и определено при **всех** x.

Если функции $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ суть *рациональные функции*, т. е. являются отношениями полиномов

$$p_1(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\ \ldots,\ p_n(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},\quad f(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)},\qquad (3.24)$$

то при постановке задачи Коши начальные значения y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ можно задавать **любыми**, а x_0 можно брать **любым, кроме вещественных нулей знаменателей** $Q_1(x)$, ..., $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$. Решение с такими начальными данными будет заведомо определено в окрестности точки x_0, не содержащей нулей знаменателей $Q_1(x)$, ..., $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$.

§ 13. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ И ЧАСТНОМ РЕШЕНИЯХ

13.1. Общее решение. Общее решение в форме Коши. Общий интеграл

Распространим определение общего решения уравнения первого порядка, данное в § 3, на уравнение n-го порядка в нормальной форме (3.19).

Рассмотрим некоторую область D изменения переменных x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши. Например, будем предполагать, что в окрестности каждой точки $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ области D выполняются условия теоремы Пикара. Функция

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\qquad (3.25)$$

определенная в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, ..., C_n и имеющая непрерывные частные производные по x до порядка n включительно, называется *общим решением* уравнения (3.19) *в области* D, если:

1) система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y&=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y'&=\varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{(n-1)}&=\varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\end{aligned}\right\}\qquad (3.26)$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так что мы имеем

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \psi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}); \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

2) функция (3.25) является решением уравнения (3.19) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, доставляемых формулами (3.27), когда точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ пробегает область D.

Общее решение (3.25) содержит в себе **все** решения уравнения (3.19) с начальными данными **из области** D. Каждое из них получается из формулы (3.25) при соответствующих значениях произвольных постоянных. Чтобы найти решение с начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ (из области D), надо подставить в систему (3.26) вместо $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ начальные данные $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и разрешить полученную систему

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{array}\right\}$$

относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$C_1 = C_1^{(0)}, \quad C_2 = C_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad C_n = C_n^{(0)}.$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных в общее решение (3.25), получим

$$y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}).$$

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ нет.

Если общее решение задано в виде

$$y = y(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

где x_0 фиксировано, а начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, то оно называется *общим решением в форме Коши.*

Общее решение уравнения (3.19), записанное в виде, не разрешенном относительно искомой функции y,

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

13.2. Частное решение

Решение $y = y(x)$ уравнения называется *частным*, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши, т. е. какую бы точку $(x_0, y(x_0))$ на решении $y = y(x)$ ни взяли, не существует другого решения $y = y_1(x)$, которое удовлетворяло бы начальным условиям

$$y_1(x_0) = y(x_0), \quad y_1'(x) = y'(x_0), \quad \ldots, \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0). \qquad (3.28)$$

Геометрически в случае уравнения второго порядка это означает, что не существует интегральной кривой, отличной от интегральной кривой $y = y(x)$, которая проходила бы через точку, лежащую на интегральной кривой $y = y(x)$, и имела бы общую с ней касательную в этой точке.

Всякое решение, получающееся из общего решения (3.25) при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных (включая $\pm\infty$), является **частным** решением. Например, функция (3.15) есть **частное** решение уравнения (3.11).

13.3. Уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной

Рассмотрим уравнение n-го порядка общего вида (3.8). Предположим, что оно разрешимо (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$, так что мы получаем одно или несколько уравнений вида

$$y^{(n)} = f_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (3.29)$$

Если уравнения (3.29) удается проинтегрировать, то найденную совокупность общих решений или общих интегралов этих уравнений будем называть *общим интегралом* уравнения (3.8).

В некоторых случаях удается проинтегрировать уравнение (3.8) и не производя фактического разрешения его относительно $y^{(n)}$. Если при этом получается n-параметрическое семейство решений вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

или

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

то будем называть его соответственно *общим решением* или *общим интегралом* уравнения (3.8).

Фактическое нахождение общего интеграла уравнения n-го порядка (разрешенного или не разрешенного относительно старшей производной), который выражался бы через элементарные функции или через квадратуры, выполняется (если оно вообще возможно) либо при помощи специальных способов, применяемых непосредственно к данному уравнению, либо предварительным понижением порядка уравнения, если получаемое при этом уравнение интегрируется в элементарных функциях или в квадратурах.

§ 14. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ

14.1. Уравнение n-го порядка, не содержащее искомой функции и ее производных до порядка $n-1$ включительно

Начнем с уравнения вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Ограничимся рассмотрением *простейшего дифференциального уравнения n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x), \qquad (3.30)$$

где $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Для уравнения (3.30) можно найти общее решение в квадратурах, последовательно понижая порядок уравнения на единицу. В самом деле, так как

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})',$$

то уравнение (3.30) можно переписать в виде

$$(y^{(n-1)})' = f(x),$$

откуда

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1. \tag{3.31}$$

Поступая с уравнением (3.31) так же, как с уравнением (3.30), будем иметь

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)\,dxdx + C_1 x + C_2.$$

Затем найдем

$$y^{(n-3)} = \iiint f(x)\,dxdxdx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

откуда

$$y^{(n-4)} = \iiiint f(x)\,dxdxdxdx + C_1 \frac{x^3}{3!} + C_1 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4$$

и т. д. Наконец, получим

$$y = \underbrace{\iint \ldots \int}_{n \text{ раз}} f(x) \underbrace{dxdx \ldots dx}_{n \text{ раз}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Это общее решение уравнения (3.30) в области D:

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}| < +\infty.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y''' = 8 \sin 2x. \tag{3.32}$$

Здесь правая часть непрерывна при всех x. Интегрируя уравнение (3.32) последовательно, получим

$$y'' = -4 \cos 2x + C_1,$$

$$y' = -2 \sin 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \cos 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

Общим решением уравнения (3.32) будет

$$y = \cos 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

(заменили $\frac{C_1}{2}$ на C_1).

Интегрируя последовательно уравнение (3.30), можно вместо неопределенных интегралов использовать определенные интегралы с переменным верхним пределом, беря в качестве нижнего предела любое число x_0 из интервала непрерывности правой части уравнения (3.30). Будем иметь

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dxdx + C_1x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dxdxdx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad \text{и т. д.}$$

Общим решением уравнения (3.30) в области D будет

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \ldots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,\underbrace{dxdx\,\ldots\,dx}_{n \text{ раз}} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}\,x + C_n. \tag{3.33}$$

Первое слагаемое содержит n квадратур; их можно заменить одной квадратурой (см. [70, с. 192], [19, с. 11])

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} \ldots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,\underbrace{dxdx\,\ldots\,dx}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Поэтому общее решение (3.33) можно переписать в виде

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}\,x + C_n. \tag{3.34}$$

Первое слагаемое дает частное решение уравнения (3.30), удовлетворяющее *нулевым* начальным условиям (*нулевая задача Коши*)

$$y = 0,\ y' = 0,\ \dots,\ y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0$$

(почему?).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' = e^{-x^2}. \tag{3.35}$$

Здесь правая часть непрерывна при всех x. Поэтому, пользуясь формулой (3.34) и взяв $x_0 = 0$, получим

$$y = \int_0^x e^{-t^2} (x - t)\, dt + C_1 x + C_2.$$

Функция

$$y_1 = \int_0^x e^{-t^2} (x - t)\, dt$$

является частным решением уравнения (3.35), удовлетворяющим нулевым начальным условиям

$$y = 0,\ y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Общий случай уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ см. в [70].

14.2. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k \le n - 1). \tag{3.36}$$

Введем новую искомую функцию z от независимой переменной x, $z = z(x)$, положив

$$y^{(k)} = z. \tag{3.37}$$

Тогда

$$y^{(k+1)} = z',\ \dots,\ y^{(n)} = z^{(n-k)},$$

и уравнение (3.36) примет вид

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{3.38}$$

Таким образом, порядок уравнения понизился на k единиц.

Предположим, что уравнение (3.38) таково, что мы можем найти его общее решение

$$z = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Тогда, заменяя функцию z ее значением, из подстановки (3.37) получим

$$y^{(k)} = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Это уравнение типа (3.30). Интегрируя его, получим общее решение уравнения (3.36) в виде

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

П р и м е р 3. Рассмотрим уравнение (3.21)

$$(1 + x^2)\, y'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Это уравнение не содержит y. Полагая $y' = z$, получим уравнение **первого** порядка

$$(1 + x^2)\, z' + z^2 + 1 = 0,$$

т. е. порядок уравнения понизился на единицу.

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\frac{dz}{1+z^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0, \quad \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} C_1, \quad z = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

Но $z = y'$, поэтому

$$y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$y = -\frac{1}{C_1}x + \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \ln |1 + C_1 x| + C_2.$$

П р и м е р 4. Пусть дано уравнение

$$xy''' - y'' = 0. \tag{3.39}$$

Это уравнение не содержит y и y'. Положив $y'' = z$, придем к уравнению первого порядка

$$xz' - z = 0, \tag{3.40}$$

так что порядок уравнения (3.39) понизился на **две** единицы. Интегрируя уравнение (3.40), найдем

$$z = C_1 x.$$

Поэтому

$$y'' = C_1 x,$$

откуда

$$y' = C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2, \quad y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3.$$

Общим решением уравнения (3.39) будет

$$y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$$

(заменили $\frac{C_1}{3!}$ на C_1).

14.3. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Рассмотрим уравнение вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (3.41)$$

Покажем, что порядок этого уравнения всегда можно понизить на единицу. Для этого сделаем замену искомой функции, положив

$$y' = z,$$

и примем y за новую независимую переменную, т. е. будем считать, что z есть функция от y: $z = z(y)$.

Выразим производные от y по x через производные от z по y. Имеем

$$y''_{x^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z.$$

Вторая производная от y по x выразилась через производную **первого** порядка от z по y. Это создает перспективу понижения порядка данного уравнения на единицу.

Вычислим y'''_{x^3}:

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} z\right) z = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) z$$

и т. д. Наконец, получим

$$y^{(n)}_{x^n} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right).$$

Подставляя найденные выражения производных от y по x через производные от z по y в уравнение (3.41), придем к уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \dots, \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0. \qquad (3.42)$$

Если

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

есть общее решение уравнения (3.42), то из уравнения

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

найдем общий интеграл данного уравнения (3.41) в виде

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$yy'' + y'^2 = 1 \quad (y > 0).$$

Полагая $y' = z$, $z = z(y)$, имеем $y'' = \frac{dz}{dy}z$. Поэтому уравнение примет вид

$$y\frac{dz}{dy}z + z^2 = 1 \quad \text{или} \quad yzdz + (z^2 - 1)\,dy = 0,$$

откуда, разделяя переменные и выполняя интегрирование, найдем

$$z = \pm\frac{\sqrt{C_1 + y^2}}{y}.$$

Заменяя z на y', имеем

$$y' = \pm\frac{\sqrt{C_1 + y^2}}{y} \quad \text{или} \quad \pm\frac{ydy}{\sqrt{C_1 + y^2}} = dx.$$

Интегрируя, получим

$$\pm\sqrt{C_1 + y^2} = x + C_2 \quad \text{или} \quad (x + C_2)^2 - y^2 = C_1.$$

Задачи к главе 3

В задачах 53—56 проинтегрировать уравнение:

53. $y''' = -\cos x$. **54.** $y''' = \frac{2}{x^3}$.

55. $y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$. **56.** $y''' = \frac{\sin x}{x}$.

В задачах 57—60 найти решение, удовлетворяющее начальным условиям (к задачам 57—59 сделайте рисунки):

57. $y'' = 1$; $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$;
$y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$;
$y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$;
$y = 0$, $y' = -1$ при $x = 0$;
$y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$.

58. $y'' = 2$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 1$.

59. $y'' = -6x$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

60. $y''' = e^{-x}$; $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ при $x = 0$.

В задачах 61—62 проинтегрировать уравнение:

61. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. **62.** $xy'' - y' = 0$.

В задачах 63—64 найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомого решения:

63. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

64. $4y' + y''^2 = 4xy''$; $y = 0$, $y' = -1$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

В задачах 65—66 проинтегрировать уравнение:

65. $yy'' = y'^3$. **66.** $1 + y'^2 = 2yy''$.

67. Найти решение уравнения $3y'y'' = e^y$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 1$ при $x = -3$, доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

68. Найти интегральную кривую уравнения $yy'' + y'^2 = 1$, проходящую через точку $(0, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$. (Почему получается одна интегральная кривая?)

Вопросы для повторения

1. Дайте геометрическое и механическое истолкование дифференциального уравнения второго порядка и его решений.

2. В чем состоит основное отличие семейства решений уравнения с частными производными от семейства решений обыкновенного дифференциального уравнения? Приведите пример.

3. Какие уравнения называются уравнениями математической физики? В чем их отличие от уравнений с частными производными второго порядка общего вида? Чем отличается однородное уравнение от неоднородного?

4. Какой общий вид имеет однородное уравнение математической физики с постоянными коэффициентами в случае функции, зависящей от двух независимых переменных? При каких соотношениях между коэффициентами при старших производных это уравнение называется соответственно уравнением гиперболического, эллиптического и параболического типа? Приведите примеры уравнений этих типов.

5. Какой вид имеет уравнение колебаний струны в предположении, что эти колебания поперечные, что струна находится все время в одной и той же плоскости и что колебания малые?

6. Как ставятся граничные и начальные условия для уравнения колебаний струны? Каков их геометрический и физический смысл?

7. Как интегрируется уравнение малых колебаний струны методом Фурье? В каком виде ищется решение? Почему интегрирование волнового уравнения методом Фурье сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений? Каким образом удается удовлетворить граничным и начальным условиям?

8. Какой аналитический вид имеет решение уравнения колебания струны, найденное методом Фурье? Какой физический смысл имеет это решение?

9. Какой вид имеет уравнение теплопроводности для стержня?

Как ставятся граничные и начальные условия?

10. Как интегрируется уравнение распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье?

11. Какой аналитический вид имеет решение уравнения теплопроводности, найденное методом Фурье? Какой физический смысл имеет это решение? Чем отличаются аналитические структуры решений волнового уравнения и уравнения теплопроводности?

Глава 4
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 15. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

15.1. Однородные и неоднородные линейные уравнения *n*-го порядка

Линейное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x). \quad (4.1)$$

Если в рассматриваемом интервале изменения x функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (4.1) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0 \quad (4.2)$$

и называется *однородным*. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (4.1) называется *неоднородным*. Ниже показано, что, как и в случае линейного уравнения первого порядка, интегрирование неоднородного линейного уравнения (4.1) приводится к интегрированию однородного уравнения.

15.2. Основное предположение

Так же, как и в § 12, будем предполагать, что **функции** $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ **непрерывны в интервале** (a, b). Это предположение обеспечит существование и единственность решения задачи Коши с любыми y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ при любом $x_0 \in (a, b)$. В частности, единственным решением однородного уравнения (4.2) с нулевыми начальными условиями $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = 0$ будет только очевидное нулевое решение $y = 0$.

15.3. Понятие о линейном дифференциальном операторе *n*-го порядка

Для упрощения дальнейшего изложения обозначим левую часть линейного уравнения (4.1) через $L(y)$:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y. \quad (4.3)$$

Таким образом, $L(y)$ есть результат выполнения над функцией y операций, указанных в правой части формулы (4.3), а именно: вычисление производных от функции y вплоть до порядка n включительно, умножение $y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ на заданные функции $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x)$, 1 и сложение полученных произведений. Совокупность этих операций обозначим символом L:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x),$$

и будем называть его *линейным дифференциальным оператором n-го порядка*. В частности, линейный дифференциальный оператор второго порядка имеет вид

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x).$$

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6.$$

Вычислим $L(e^{2x})$, $L(e^{3x})$ и $L(e^x)$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} L(e^{2x}) &= 2^2 \cdot e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6e^{2x} \equiv 0, \\ L(e^{3x}) &= 3^2 \cdot e^{3x} - 5 \cdot 3e^{3x} + 6e^{3x} \equiv 0, \\ L(e^x) &= e^x - 5e^x + 6e^x = 2e^x. \end{aligned}\right\}$$

Линейный дифференциальный оператор L обладает следующими основными свойствами (*линейность* оператора L):

1) *постоянный множитель можно выносить за знак оператора*

$$L(ky) = kL(y);$$

2) *оператор от суммы двух функций равен сумме операторов от этих функций*

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

В справедливости этих свойств легко убедиться непосредственной проверкой. В самом деле, имеем

$$L(ky) = (ky)^n + p_1(x)(ky)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(ky)' + p_n(x)\,ky =$$

$$= k\left(y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y\right) = kL(y)$$

и

$$L(y_1+y_2)=(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\dots+$$

$$+p_{n-1}(x)(y_1+y_2)'+p_n(x)(y_1+y_2)=$$

$$=(y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1)+$$

$$+(y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2)=$$

$$=L(y_1)+L(y_2).$$

Из этих основных свойств оператора L следует, что

$$L\left(\sum_{k=1}^{m}C_k y_k\right)=\sum_{k=1}^{m}C_k L(y_k),$$

т. е. оператор от линейной комбинации m функций равен линейной комбинации операторов от этих функций.

Используя оператор L, можно записать неоднородное и однородное линейные уравнения (4.1) и (4.2) соответственно в виде

$$L(y)=f(x) \tag{4.4}$$

и

$$L(y)=0. \tag{4.5}$$

Если функция $y=y(x)$ является решением уравнения (4.4) или (4.5) в некотором интервале (a, b), то значение оператора L от этой функции равно $f(x)$ или нулю при всех x из (a, b):

$$L(y(x))\equiv f(x)\quad(a<x<b)$$

или

$$L(y(x))\equiv 0\quad(a<x<b).$$

П р и м е р 2. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$L(y)\equiv y''+4y=3\sin x \tag{4.6}$$

или

$$L(y)=3\sin x.$$

Проверим, будет ли функция $y=\sin x$ решением уравнения (4.6).

Вычисляя оператор L от функции $y=\sin x$, имеем

$$L(\sin x)=(\sin x)''+4\sin x=3\sin x.$$

Следовательно,

$$L(\sin x) \equiv 3 \sin x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Поэтому функция $y = \sin x$ является решением уравнения (4.6) в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Пусть дано однородное линейное уравнение

$$L(y) \equiv y'' - 2y' + y = 0 \text{ или } L(y) = 0. \tag{4.7}$$

Покажем, что функция $y = xe^x$ является решением этого уравнения в интервале $(-\infty, +\infty)$. Имеем

$$L(xe^x) = (xe^x)'' - 2(xe^x)' + xe^x = e^x + (xe^x)' - 2(xe^x)' + xe^x =$$

$$= e^x - e^x - xe^x + xe^x \equiv 0, \text{ т. е.}$$

$$L(xe^x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

а это и означает, что функция $y = xe^x$ является решением уравнения (4.7) в интервале $(-\infty, +\infty)$.

§ 16. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

16.1. Понятие о комплексном решении однородного линейного уравнения

Говоря о решении дифференциального уравнения, предполагаем, что это решение — вещественная функция. Однако для однородного линейного уравнения наряду с вещественными решениями следует ввести понятие **комплексного решения**. Дадим сначала понятие о комплексной функции от вещественной переменной. Пусть даны две вещественные функции $u(x)$ и $v(x)$, определенные в интервале (a, b).

Функцию

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{4.8}$$

будем называть *комплексной функцией от вещественной переменной* x, определенной в интервале (a, b). При этом функции $u(x)$ и $v(x)$ называются *вещественной* и *мнимой частями* комплексной функции $y(x)$.

Примером комплексной функции от вещественной переменной является показательная функция с чисто мнимым показателем e^{ix}, которая определяется равенством (формула *Эйлера*)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Функции $\cos x$ и $\sin x$ являются вещественной и мнимой частями комплексной функции e^{ix}. Так как они определены при всех значениях x, то и функция e^{ix} определена при всех значениях x. Например, ее значениями при $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ соответственно будут

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1.$$

Аналогично определяется показательная функция более общего вида $e^{\alpha x}$, где $\alpha = a + ib$; причем a и b — вещественные числа:

$$e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = a^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) =$$
$$= e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx.$$

Здесь вещественная и мнимая части $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, а вместе с ними и функция $e^{\alpha x}$ определены при **всех** значениях x.

Введем понятие о **производной** комплексной функции вещественной переменной. Предположим, что вещественная и мнимая части комплексной функции (4.8) имеют производную k-го порядка. Тогда *производная k-го порядка* этой функции определяется так:

$$y^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x). \qquad (4.9)$$

Вычислим, например, производную функции $e^{\alpha x}$. Имеем

$$(e^{\alpha x})' = (e^{ax}\cos bx)' + i\,(e^{ax}\sin bx)' =$$
$$= ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx + i\,(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) =$$
$$= ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + ibe^{ax}(\cos bx + i \sin bx) =$$
$$= ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ax}e^{ibx} = (a + ib)\,e^{(a+ib)x} = \alpha e^{\alpha x}.$$

Следовательно,

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}.$$

Используя формулу (4.9), можем вычислить значение оператора L от комплексной функции вещественной независимой переменной. При этом, как нетрудно убедиться, получим

$$L(u(x) + iv(x)) = L(u(x)) + iL(v(x)), \tag{4.10}$$

т. е. значение оператора L от комплексной функции (4.8) является комплексной функцией вещественной переменной x; причем вещественной и мнимой частями этой функции являются значения оператора L от вещественной и мнимой частей функции (4.8).

Дадим теперь понятие о **комплексном решении** однородного линейного уравнения $L(y) = 0$. Функция (4.8) называется *комплексным решением* уравнения $L(y) = 0$ в интервале (a, b), если она обращает это уравнение в тождество

$$L(u(x) + iv\, x)) \equiv 0, \tag{4.11}$$

справедливое при всех значениях x из интервала (a, b). Тождество (4.11) в силу (4.10) равносильно следующему тождеству:

$$L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0,$$

откуда вытекает, что

$$L(u(x)) \equiv 0, \quad L(v(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

а это означает, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями однородного уравнения $L(y) = 0$.

Таким образом, *вещественная и мнимая части комплексного решения однородного линейного уравнения являются вещественными решениями этого уравнения*, так что знание **одного** комплексного решения дает возможность найти **два** вещественных решения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$L(y) \equiv y'' + y = 0. \tag{4.12}$$

Это уравнение имеет комплексное решение

$$y = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

ибо

$$L(e^{ix}) = (e^{ix})'' + e^{ix} = i^2 e^{ix} + e^{ix} \equiv 0.$$

Поэтому функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ являются вещественными решениями уравнения (4.12), в чем легко убедиться и непосредственно.

16.2. Свойства решений однородного линейного уравнения

Ниже увидим, что знание частных решений однородного линейного уравнения значительно облегчает (а иногда позволяет до конца решить задачу полного интегрирования этого уравнения) построение общего решения. Это оказывается возможным благодаря тому, что частные решения однородного уравнения обладают следующими замечательными свойствами:

1. *Если $y_1 = y_1(x)$ — частное* ***решение*** *однородного линейного уравнения $L(y) = 0$, то*

$$y = Cy_1,$$

где C — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

Действительно, так как

$$L(y_1(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

то

$$L(Cy_1(x)) = CL(y_1(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

а это и означает, что Cy_1— решение уравнения $L(y) = 0$.

Таким образом, зная одно частное решение, можем (без квадратур!) получить целое (однопараметрическое) семейство решений.

Доказанное свойство иногда выражают так: *решение однородного линейного уравнения определяется с точностью до постоянного множителя.*

2. *Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — частные* ***решения*** *однородного уравнения $L(y) = 0$, то их сумма*

$$y = y_1 + y_2$$

тоже является ***решением*** этого уравнения.

В самом деле, мы имеем

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0,$$

откуда и следует свойство 2.

Наличие свойств 1 и 2 говорит о том, что множество решений однородного линейного уравнения является *линейным* пространством.

3. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — *частные* ***решения*** *уравнения* $L(y)=0$, *то*

$$y=\sum_{k=1}^{m} C_k y_k,$$

где $C_1, \ldots, C_m$ — *произвольные постоянные, тоже является* ***решением*** *этого уравнения.*

Это свойство следует из свойства 1 и 2. Его легко можно доказать и непосредственно:

$$L\left(\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\right)=\sum_{k=1}^{m} L(C_k y_k)=\sum_{k=1}^{m} C_k L(y_k)\equiv 0.$$

§ 17. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

17.1. Фундаментальная система решений и определитель Вронского

Зная n частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, можно построить семейство решений, зависящее от n произвольных постоянных:

$$y=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k. \tag{4.13}$$

Это решение, как показано ниже, будет **общим решением**, если частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обладают одним дополнительным свойством, относящимся к характеру зависимости между ними.

Прежде чем сформулировать это свойство, введем понятие о **линейной независимости функций**.

Пусть даны m функций от x:

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \quad (a<x<b). \tag{4.14}$$

Составим их линейную комбинацию с постоянными коэффициентами

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_m y_m.$$

Если эта линейная комбинация тождественно равна нулю в интервале (a, b):

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0 \quad (a < x < b)$$

только в очевидном случае, т. е. при нулевых значениях коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то функции (4.14) называются *линейно независимыми в интервале* (a, b). В противном случае функции (4.14) называются *линейно зависимыми в этом интервале*. Две функции y_1 и y_2 линейно независимы в интервале (a, b), если

$$\frac{y_1}{y_2} \not\equiv \text{const} \quad (a < x < b).$$

Пример 1. Функции

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}$$

линейно независимы в любом интервале. В самом деле, соотношение

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0,$$

в котором хотя бы одно из чисел α_1 и α_2 отлично от нуля, может выполняться не более чем при одном значении x. Это следует также из того, что

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \not\equiv \text{const}.$$

Пример 2. Функции

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = \frac{1}{2} e^x$$

линейно зависимы в любом интервале, ибо

$$y_1 - 2y_2 \equiv 0,$$

так что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$. В этом случае $y_1 = 2y_2$, т. е. y_1 есть однородная линейная функция от y_2.

Теорема. *Если функции (4.14) линейно зависимы в интервале (a, b), то одна из них является линейной комбинацией остальных.*

Действительно, пусть

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0 \quad (a < x < b),$$

где, например, $\alpha_m \neq 0$. Тогда

$$y_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} y_{m-1},$$

т. е. y_m является линейной комбинацией функций y_1, y_2, ..., y_{m-1}.

Совокупность n решений

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \quad (a < x < b) \tag{4.15}$$

однородного линейного уравнения $L(y) = 0$, линейно независимых в интервале (a, b), называется *фундаментальной системой решений этого уравнения в интервале* (a, b). Ее записывают часто так:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad x \in (a, b).$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$L(y) \equiv y'' - y = 0.$$

Это однородное линейное уравнение второго порядка имеет два частных решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$, которые образуют фундаментальную систему решений в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как они линейно независимы в этом интервале.

Дадим **признак линейной независимости** n частных решений (4.15) однородного линейного уравнения n-го порядка. С этой целью введем в рассмотрение определитель, составленный из данных частных решений и их производных до порядка $n-1$ включительно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется *определителем Вронского* решений y_1, y_2, ..., y_n.

Теорема. *Для того чтобы решения* (4.15) *были линейно независимы в* (a, b), *т. е. в интервале* ***непрерывности*** *коэффициентов уравнения* $L(y) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $W(x)$ *не обращался в нуль ни в одной точке из* (a, b).

Необходимость. Пусть решения (4.15) линейно независимы в (a, b). Предположим вопреки утверждению теоремы что $W(x_0) = 0$, где $x_0 \in (a, b)$.

Построим однородную линейную систему n уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\} \quad (4.16)$$

с неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы есть $W(x_0)$. Так как он равен нулю, то система (4.16) имеет ненулевое решение

$$C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n = C_n^{(0)}$$

(т. е. хоть одно из чисел $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ не равно нулю).

Построим линейную комбинацию решений (4.15), взяв в качестве коэффициентов числа $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$. Получим решение

$$y = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n. \quad (4.17)$$

Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y = 0,\ y' = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = 0 \ \text{ при } \ x = x_0,$$

как это видно из системы (4.16), если заменить в ней неизвестные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ их значениями, найденными из этой системы. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, которая имеет место вследствие непрерывности коэффициентов уравнения $L(y) = 0$, решение (4.17) должно быть нулевым, т. е.

$$C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n \equiv 0 \quad (a < x < b). \quad (4.18)$$

Так как среди чисел $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ хоть одно отлично от нуля, то тождество (4.18) означает, что вопреки предположению решения (4.15) линейно зависимы в (a, b).

Достаточность. Предположим, что $W(x)$ не обращается в нуль в (a, b), но решения (4.15) линейно зависимы в (a, b), так что имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

где, например, $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x), \tag{4.19}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y_n'(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1'(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2'(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}'(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)}(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)}(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Заменим теперь элементы последнего столбца определителя Вронского их значениями из формул (4.19) и (4.20). Получим определитель, у которого элементы одного (последнего) столбца являются линейными комбинациями элементов (всех) других столбцов. Такой определитель, как известно, равен нулю. Таким образом, вопреки предложению $W(x) \equiv 0$ в (a, b).

Теорема доказана. Заметим, что при доказательстве необходимости существенно использовано предположение о **непрерывности** коэффициентов уравнения в интервале (a, b).

Значение определителя Вронского n решений однородного линейного уравнения $L(y) = 0$ тесно связано с самим уравнением, а именно: имеет место следующая формула Остроградского—Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \tag{4.21}$$

которую мы приводим здесь без доказательства (см. [70]).

Из формулы (4.21) видно, что определитель Вронского n решений уравнения $L(y) = 0$ обладает двумя замечательными свойствами:

1. *Если $W(x)$ обращается в нуль в одной точке из интервала (a, b), то он равен нулю во всех точках этого интервала.*

2. *Если $W(x)$ не равен нулю хотя бы в одной точке x_0 из интервала (a, b), то он отличен от нуля во всех точках этого интервала.*

Таким образом, для того чтобы n решений (4.15) составляли фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$ в интервале (a, b), достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля в какой-либо **одной** точке $x_0 \in (a, b)$.

В частности, решения (4.15) с начальными условиями $y_1(x_0) = 1$, ..., $y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$; ...; $y_n(x_0) = 0$, $y_n'(x_0) = 0$, ..., $y_n^{n-1}(x_0) = 1$ образуют **фундаментальную систему решений** (почему?). Такая фундаментальная система называется *нормированной* в точке x_0. Существование (и единственность) нормированной фундаментальной системы решений следует из теоремы Пикара (почему?).

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Оно имеет решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$. Составим определитель Вронского. Имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}, \quad W(0) = 1 \neq 0.$$

Следовательно, решения y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений в $(-\infty, +\infty)$.

17.2. Построение общего решения однородного линейного уравнения по фундаментальной системе решений

Знание фундаментальной системы решений уравнения $L(y) = 0$ дает возможность построить **общее решение** этого уравнения.

Основная теорема. *Если функции* (4.15) *образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения n-го порядка* $L(y) = 0$ *в интервале* (a, b), *т. е. в интервале* ***непрерывности*** *коэффициентов* $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, *то функция* (4.13) *дает общее решение этого уравнения в области*

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \ \ldots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (4.22)$$

В самом деле, в каждой точке области (4.22) имеет место существование и единственность решения задачи Коши. Покажем, что функция (4.13) удовлетворяет обоим условиям, указанным в определении общего решения уравнения n-го порядка.

1. Система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k, \\ y' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^{(n-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} \end{array}\right\} \qquad (4.23)$$

разрешима в области (4.22) относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так как определитель этой системы, будучи равным определителю Вронского для фундаментальной системы решений (4.15), отличен от нуля.

2. Функция (4.13) по третьему свойству решений однородного линейного уравнения является решением уравнения $L(y) = 0$ при всех значениях произвольных постоянных C_1, $C_2, \ldots, C_n$.

Поэтому функция (4.13) является **общим решением** уравнения $L(y) = 0$ в области (4.22).

Формула (4.13) содержит в себе **все** решения уравнения $L(y) = 0$, ибо она дает возможность найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \qquad (4.24)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать произвольно, а x_0 брать любым из интервала (a, b). Для этого достаточно подставить в систему (4.23) вместо $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ начальные данные $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и разрешить полученную систему

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k(x_0), \\ y_0' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k'(x_0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_0^{(n-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}(x_0) \end{array}\right\} \qquad (4.25)$$

относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Так как определитель системы (4.25) есть $W(x_0)$ и он отличен от нуля вследствие того, что система решений (4.15) фундаментальная, то эта система имеет единственное решение

$$C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n = C_n^{(0)}.$$

Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение (4.13), получим искомое решение:

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k.$$

Таким образом, фундаментальная система решений (4.15) является *базисом* n-мерного линейного пространства решений уравнения $L(y) = 0$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = 0. \tag{4.26}$$

Это уравнение имеет фундаментальную систему решений

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

поэтому

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{4.27}$$

есть общее решение уравнения (4.26) в области

$$|x| < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty,$$

так что общее решение (4.27) дает возможность решить задачу Коши с **любыми** начальными данными x_0, y_0, y_0' за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных.

Пример 6. Пусть дано уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Оно имеет фундаментальную систему решений

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

так что общим решением будет

$$y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения (4.12)

$$y'' + y = 0.$$

Мы уже показали выше, что функции

$$y_1 = \cos x, \; y_2 = \sin x$$

являются решениями уравнения (4.12). Эти решения образуют фундаментальную систему решений, ибо

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Поэтому общим решением уравнения (4.12) будет

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

§ 18. СВЕДЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

18.1. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения

Рассмотрим теперь **неоднородное** линейное уравнение n-го порядка:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x). \qquad (4.28)$$

Покажем, что, как и в случае линейного неоднородного уравнения первого порядка (см. § 7), интегрирование неоднородного уравнения (4.28) приводится к интегрированию однородного уравнения, если известно одно частное решение неоднородного уравнения (4.28).

Действительно, пусть $y = y_1(x)$ — частное решение уравнения (4.28), т. е.

$$L(y_1(x)) \equiv f(x) \quad (a < x < b). \qquad (4.29)$$

Положим

$$y = y_1 + z, \qquad (4.30)$$

где z — новая неизвестная функция от x. Тогда уравнение (4.28) примет вид

$$L(y_1+z)=f(x) \quad \text{или} \quad L(y_1)+L(z)=f(x),$$

откуда в силу тождества (4.29) получаем

$$L(z)=0. \tag{4.31}$$

Это есть однородное линейное уравнение, левая часть которого та же, что и у рассматриваемого неоднородного уравнения (4.28). Уравнение (4.31) называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (4.28).

Пусть

$$z_1(x),\ z_2(x),\ \ldots,\ z_n(x) \quad (a<x<b)$$

есть фундаментальная система решений однородного уравнения (4.31). Тогда все решения этого уравнения содержатся в формуле его общего решения

$$z=\sum_{k=1}^{n} C_k z_k. \tag{4.32}$$

Подставляя это значение z в формулу (4.30), получим

$$y=y_1+\sum_{k=1}^{n} C_k z_k. \tag{4.33}$$

Эта формула содержит в себе все решения неоднородного линейного уравнения (4.28). Функция (4.33), как нетрудно убедиться, является общим решением уравнения (4.28) в области (4.22).

Таким образом мы доказали следующую теорему о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения (4.28).

Теорема. *Общее решение неоднородного линейного уравнения* (4.28) *равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (4.31).

Общее решение (4.33) дает возможность решить задачу Коши с любыми начальными данными x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ из области (4.22) за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y''-y=-x. \tag{4.34}$$

Здесь в качестве частного решения можно взять

$$y_1 = x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z'' - z = 0$$

имеет (см. пример 5 § 17) общее решение

$$z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Следовательно, общим решением уравнения (4.34) будет

$$y = x + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y'' - 2y' + y = 1.$$

Частным решением будет $y_1 = 1$. Соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 2z' + z = 0$$

имеет (см. пример 6 § 17) общее решение

$$z = e^{x}(C_1 + C_2 x).$$

Поэтому

$$y = 1 + e^{x}(C_1 + C_2 x)$$

будет общим решением данного уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = e^{x}.$$

Имеем

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{x},\ z'' + z = 0,\ z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(см. пример 7 § 17). Следовательно,

$$y = \frac{1}{2} e^{x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

18.2. Принцип наложения

Задача нахождения частного решения неоднородного уравнения (4.28) во многих случаях облегчается, если воспользоваться замечательным свойством частных решений, выражаемым следующей теоремой.

Теорема (*принцип наложения*). *Если в уравнении* (4.28) *правая часть* $f(x)$ *имеет вид*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

и известно, что y_1 *есть частное решение уравнения*

$$L(y) = f_1(x),$$

а y_2 — *частное решение уравнения*

$$L(y) = f_2(x),$$

то сумма этих частных решений $y_1 + y_2$ *будет частным решением уравнения* (4.28).

Действительно, мы имеем

$$L(y_1) \equiv f_1(x), \quad L(y_2) \equiv f_2(x).$$

Поэтому

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x) = f(x),$$

т. е.

$$L(y_1 + y_2) \equiv f(x),$$

а это и означает, что $y_1 + y_2$ является частным решением уравнения (4.28).

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 2e^x + 1. \tag{4.35}$$

Для уравнений

$$y'' + y = 2e^x \quad \text{и} \quad y'' + y = 1$$

легко находятся частные решения. Для первого из них частным решением будет $y_1 = e^x$, для второго — $y_2 = 1$. Поэтому $e^x + 1$ есть частное решение уравнения (4.35), а его общим решением будет

$$y = e^x + 1 + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

19.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения второго порядка

Пусть дано неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$L(y) \equiv y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x), \tag{4.36}$$

где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и правая часть $f(x)$ есть функции от x, **непрерывные** в некотором интервале (a, b).

Рассмотрим наряду с уравнением (4.36) соответствующее ему однородное уравнение

$$L(z) \equiv z'' + p(x)\, z' + q(x)\, z = 0. \tag{4.37}$$

Пусть z_1, z_2 — фундаментальная система решений уравнения (4.37), так что

$$L(z_1) \equiv 0, \quad L(z_2) \equiv 0 \tag{4.38}$$

и

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.39}$$

Тогда, как известно, общее решение уравнения (4.37) имеет вид

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (4.36) в виде

$$y = C_1(x)\, z_1 + C_2(x)\, z_2, \tag{4.40}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые функции от x, подлежащие определению.

Подставляя (4.40) в уравнение (4.36), получим одно условие, которому должны удовлетворять две неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Это условие будет иметь вид

$$L(C_1(x)\, z_1 + C_2(x)\, z_2) = f(x). \tag{4.41}$$

Оно содержит производные второго порядка от искомых функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$, так что на первый взгляд задача усложнилась: вместо уравнения второго порядка (4.36) с одной неизвестной функцией y мы получили уравнение того же порядка, но уже с двумя неизвестными функциями — $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Однако мы покажем, что искомые функции можно подчинить такому дополнительному условию, что в уравнение (4.41) не войдут производные второго порядка от этих функций.

Дифференцируя обе части равенства (4.40), имеем

$$y' = C_1(x)\, z_1' + C_2(x)\, z_2' + C_1'(x)\, z_1 + C_2'(x)\, z_2.$$

Чтобы при вычислении y'' не появились производные второго порядка от $C_1(x)$ и $C_2(x)$, положим

$$C_1'(x)\, z_1 + C_2'(x)\, z_2 = 0.$$

Это и есть то дополнительное условие на искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, о котором говорилось выше. При этом условии выражение для y' примет вид

$$y' = C_1(x)\, z_1' + C_2(x)\, z_2'. \tag{4.42}$$

Вычисляя теперь y'', получим

$$y'' = C_1(x)\, z_1'' + C_2(x)\, z_2'' + C_1'(x)\, z_1' + C_2'(x)\, z_2'. \tag{4.43}$$

Подставим выражения для y, y' и y'' из формул (4.40), (4.42) и (4.43) в уравнение (4.36). Для этого умножим левые и правые части этих формул соответственно на q, p и 1, сложим почленно и приравняем сумму правой части уравнения (4.36). Получим

$$C_1(x)\, L(z_1) + C_2(x)\, L(z_2) + C_1'(x)\, z_1' + C_2'(x)\, z_2' = f(x).$$

Здесь в силу (4.38) первые два слагаемых равны нулю, поэтому

$$C_1'(x)\, z_1' + C_2'(x)\, z_2' = f(x).$$

Это и есть новый вид условия (4.41). Теперь оно уже не содержит производных второго порядка от $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\, z_1 + C_2'(x)\, z_2 = 0, \\ C_1'(x)\, z_1' + C_2'(x)\, z_2' = f(x). \end{array}\right\}$$

Эта система в силу (4.39) однозначно разрешим относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решая ее, получим

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть вполне определенные функции от x. Их можно найти, например, по правилу Крамера. При этом, так как z_1, z_2, z_1' и z_2' непрерывны в интервале (a, b), то в силу (4.39) функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ будут **непрерывны** в интервале (a, b). Поэтому

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя найденные значения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (4.40), получим

$$y = z_1 \int \varphi_1(x)\,dx + z_2 \int \varphi_2(x)\,dx + C_1 z_1 + C_2 z_2. \qquad (4.44)$$

Полагая здесь $C_1 = C_2 = 0$, получим частное решение

$$y_1 = z_1 \int \varphi_1(x)\,dx + z_2 \int \varphi_2(x)\,dx,$$

так что формулу (4.44) можно записать в виде

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

откуда в силу теоремы о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения, доказанной в § 18, следует, что формула (4.44) дает **общее решение** уравнения (4.36). Все решения, входящие в формулу (4.44), заведомо определены в интервале (a, b).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \qquad (4.45)$$

Здесь правая часть непрерывна в каждом из интервалов

$$\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \ \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right),$$

где k — любое целое число. Соответствующее однородное уравнение

$$z'' + 4z = 0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$z_1 = \cos 2x, \quad z_2 = \sin 2x,$$

так что общим решением этого уравнения будет

$$z = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Будем искать решение уравнения (4.45) в виде

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x. \tag{4.46}$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x) \cdot \cos 2x + C_2'(x) \cdot \sin 2x = 0, \\ &C_1'(x) \cdot (-2 \sin 2x) + C_2'(x) \cdot (2 \cos 2x) = \frac{1}{\cos 2x}. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, найдем

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2 \cos 2x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &C_1(x) = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1, \\ &C_2(x) = \frac{x}{2} + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (4.46), получим общее решение уравнения (4.45) в виде

$$y = \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln |\cos 2x| + \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

19.2. Случай уравнения n-го порядка

Изложенный метод вариации произвольных постоянных легко распространяется на уравнение n-го порядка. Пусть дано неоднородное линейное уравнение n-го порядка (4.1)

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x),$$

где коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ суть функции от x, **непрерывные** в некотором интервале (a, b).

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение (4.31).

$$z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z = 0.$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — фундаментальная система решений этого уравнения. Тогда (4.32)

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k$$

есть **общее решение** уравнения (4.31).

Решение данного неоднородного уравнения (4.1) ищется в виде

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, z_k, \qquad (4.47)$$

где функции $C_k(x)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, z_k = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, z_k' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, z_k^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, z_k^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно $C_k'(x)$ $(k = 1, 2, \ldots \ldots, n)$, находим

$$C_k'(x) = \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)\, dx + C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя найденные значения $C_k(x)$ в формулу (4.47), получаем

$$y = \sum_{k=1}^{n} z_k \int \varphi_k(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k. \qquad (4.48)$$

Это и есть **общее решение** уравнения (4.1). Все решения, входящие в формулу (4.48), заведомо определены в интервале (a, b).

Вопросы для повторения

1. Какой вид имеет линейное уравнение n-го порядка? Чем отличается однородное линейное уравнение от неоднородного?

2. Что такое линейный дифференциальный оператор n-го порядка и каковы его основные свойства? Как записываются однородное и неоднородное линейные дифференциальные уравнения с использованием линейного дифференциального оператора?

3. Что такое комплексная функция от вещественной переменной? Как определяется производная от такой функции? Докажите, что $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$.

4. Что такое комплексное решение однородного уравнения $L(y) = 0$? Докажите, что вещественная и мнимая части комплексного решения тоже являются решениями этого уравнения.

5. Докажите, что решения однородного линейного уравнения $L(y) = 0$ образуют линейное пространство, т. е. обладают двумя свойствами: 1) если y — решение, то Cy_1 тоже решение; 2) если y_1 и y_2 — решения, то $y_1 + y_2$ тоже решение. Докажите, что линейная комбинация с постоянными коэффициентами частных решений уравнения $L(y) = 0$ тоже является решением этого уравнения.

6. Что такое фундаментальная система решений однородного линейного уравнения n-го порядка?

7. Что такое определитель Вронского решений однородного линейного уравнения n-го порядка и каковы его свойства?

8. Как при помощи определителя Вронского узнать, образуют ли данные n решений однородного линейного уравнения n-го порядка фундаментальную систему решений?

9. Как строится общее решение однородного линейного уравнения n-го порядка по фундаментальной системе решений? В какой области оно определено?

10. Какой подстановкой (заменой искомой функции) неоднородное линейное уравнение n-го порядка приводится к однородному в случае, когда известно одно частное решение неоднородного уравнения?

11. Что такое принцип наложения частных решений неоднородного линейного уравнения n-го порядка?

12. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) интегрирования неоднородного линейного уравнения второго порядка?

13. Как распространяется метод Лагранжа для уравнения второго порядка на случай уравнения n-го порядка?

Глава 5
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 20. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

20.1. Предварительные замечания

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (5.1)$$

где коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n суть вещественные числа, а правая часть $f(x)$ **непрерывна** в некотором интервале (a, b) $(a \geq -\infty,\ b \leq +\infty)$.

Так как интегрирование неоднородного линейного уравнения приводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения, то рассмотрим сначала вопрос о построении общего решения однородного уравнения

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \qquad (5.2)$$

Для нахождения общего решения этого уравнения достаточно знать фундаментальную систему решений. Так как коэффициенты уравнения постоянны и, следовательно, заведомо непрерывны при всех значениях x, то согласно теореме Пикара и все решения уравнения (5.2) определены при всех значениях x. Поэтому в дальнейшем мы не будем указывать ни интервал существования частных решений, ни область задания общего решения.

Эйлер доказал, что для однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами всегда можно построить фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций, и, следовательно, это уравнение всегда интегрируется в элементарных функциях. Ниже это утверждение доказывается для уравнения второго порядка и распространяется на уравнение n-го порядка.

20.2. Интегрирование однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае различных корней характеристического уравнения

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$L(y) \equiv y'' + py' + qy = 0, \tag{5.3}$$

где p и q — вещественные числа. Будем, следуя Эйлеру, искать частное решение уравнения (5.3) в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{5.4}$$

где λ — подлежащее определению число (вещественное или комплексное). Согласно определению решения функция (5.4) будет решением уравнения (5.3), если λ выбрано так, что функция (5.4) обращает это уравнение в тождество

$$L(e^{\lambda x}) \equiv 0. \tag{5.5}$$

Вычисляя $L(e^{\lambda x})$, т. е. подставляя функцию (5.4) в левую часть уравнения (5.3), и принимая во внимание, что

$$(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}, \tag{5.6}$$

будем иметь

$$L(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)\, e^{\lambda x},$$

так что

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^2 + p\lambda + q)\, e^{\lambda x} \tag{5.7}$$

или

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)\, e^{\lambda x},$$

где

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Из формулы (5.7) следует, что интересующее нас тождество (5.5) будет выполняться тогда и только тогда, когда $P(\lambda) = 0$, т. е. когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{5.8}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения (5.3).

Заметим, что характеристическое уравнение (5.8) может быть составлено по данному дифференциальному уравнению (5.3) заменой y'', y' и y на λ^2, λ и 1, т. е. степень λ совпадает с порядком производной, если условиться считать, что производная нулевого порядка от функции есть сама функция $y^{(0)} \equiv y$.

Структура фундаментальной системы решений, а вместе с ней и общего решения уравнения (5.3) зависит от вида корней характеристического уравнения (5.8).

Рассмотрим сначала случаи, когда эти корни **различные** и **вещественные**. Обозначим их через λ_1 и λ_2. Тогда, подставляя в формулу (5.4) вместо λ числа λ_1 и λ_2, получим два частных решения уравнения (5.3)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}. \tag{5.9}$$

Эти решения, очевидно, **линейно независимы**, так как их отношение

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x}$$

не равно тождественно постоянной величине. В линейной независимости решений (5.9) можно убедиться также при помощи определителя Вронского. Имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Следовательно, частные решения (5.9) образуют **фундаментальную систему решений**. А тогда согласно доказанной в гл. 4 основной теореме **общим решением** уравнения (5.3) будет

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ (вещественные и различные). Поэтому фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{x}, \quad y_2 = e^{-x},$$

а общим решением будет

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

Общим решением будет

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Предположим теперь, что корни характеристического уравнения **комплексные**. Так как коэффициенты этого уравнения **вещественные**, то эти комплексные корни являются **сопряженными**, так что они имеют вид

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib.$$

Подставляя корень $\lambda_1 = a + ib$ в формулу (5.4), получим комплексное решение (см. § 16)

$$y = e^{(a + ib)x}. \tag{5.10}$$

Но

$$e^{(a + ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

поэтому решение (5.10) можно записать так:

$$y = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx. \tag{5.11}$$

Отделяя в комплексном решении (5.11) вещественную и мнимую части, получим два вещественных частных решения

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx. \tag{5.12}$$

Эти решения, очевидно, **независимы**, так как

$$\frac{y_1}{y_2} \not\equiv \text{const}.$$

Аналогично убеждаемся, что сопряженному корню $\lambda_2 = a - ib$ соответствуют вещественные частные решения

$$e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx. \tag{5.13}$$

Решения (5.13), очевидно, линейно зависимы с решениями (5.12).

Таким образом, *паре сопряженных комплексных корней* $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ *соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения* (5.12).

Решения (5.12) образуют **фундаментальную систему решений** уравнения (5.3). Поэтому

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

или

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

будет **общим решением** уравнения (5.3).

Если корни λ_1 и λ_2 **чисто мнимые**, т. е. $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib$ $(b \neq 0)$, то им соответствуют **линейно независимые частные решения** вида

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx. \qquad (5.14)$$

Эти решения образуют **фундаментальную систему решений** уравнения (5.3), а

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$$

есть **общее решение** этого уравнения.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (5.15)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

имеет сопряженные комплексные корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому согласно формуле (5.12) фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Общим решением будет

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \qquad (5.16)$$

Заметим, что из формулы общего решения (5.16) видно, что **все ненулевые** решения уравнения (5.15) обладают **свойством**:

$$y \to 0, \; y' \to 0 \;\text{ при }\; x \to +\infty.$$

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{5.17}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Поэтому согласно формуле (5.14) фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = \cos kx, \quad y_2 = \sin kx,$$

так что общим решением будет

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{5.18}$$

Из формулы общего решения (5.18) видно, что **все** решения уравнения (5.17) **ограничены** по x на интервале $(-\infty, \infty)$.

20.3. Случай кратких корней характеристического уравнения

Предположим теперь, что характеристическое уравнение (5.8) имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$. Нам надо найти два линейно независимых частных решения. Одним частным решением, очевидно, будет

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \tag{5.19}$$

или

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{5.19, a}$$

Убедимся непосредственной подстановкой в уравнение (5.3) в том, что

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x} \tag{5.20}$$

есть второе частное решение уравнения (5.3), линейно независимое с решением (5.19):

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2} xe^{-\frac{p}{2}x}, \\ y_2'' &= -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4} xe^{-\frac{p}{2}x}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Поэтому

$$L\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right) = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4} xe^{-\frac{p}{2}x} + pe^{-\frac{p}{2}x} - \\ -\frac{p^2}{2} xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x} = \left(-\frac{p^2}{4} + q\right) xe^{-\frac{p}{2}x} \equiv 0$$

$$\left(\text{так как } \frac{p^2}{4} - q = 0\right). \tag{5.22}$$

Общим решением уравнения (5.3) будет

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0. \qquad (5.23)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad (5.24)$$

имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Поэтому функции

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x} \qquad (5.25)$$

образуют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x). \qquad (5.26)$$

Из формулы общего решения (5.26) видно, что все ненулевые решения уравнения (5.23) обладают свойством:

$$y \to 0, \; y' \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

§ 21. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

21.1. Случай различных корней характеристического уравнения

Изложенный выше метод построения фундаментальной системы решений для уравнения второго порядка распространяется на уравнение n-го порядка (5.2).

Разыскивая частное решение в виде (5.4), получим, что λ должно быть корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad (5.27)$$

которое составляется по уравнению (5.2) по тому же правилу, что и уравнение (5.8) по уравнению (5.3), а именно: производные от искомой функции заменяются соответствующими степенями λ с учетом того, что искомую функцию y мы рассматриваем как производную нулевого порядка от этой функции.

Уравнение (5.27) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения (5.2). Структура фундаментальной системы решений уравнения (5.2) определяется свойствами корней характеристического уравнения (5.27).

Предположим сначала, что все корни характеристического уравнения **различны**:

1. **Все корни характеристического уравнения различные и вещественные**: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае **фундаментальная система решений** состоит из показательных функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x},$$

а **общим решением** будет

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. **Все корни различные, но среди них имеются комплексные**. Тогда каждой **паре сопряженных корней** вида $a \pm ib$ соответствуют **два вещественных линейно независимых частных решения** вида

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx.$$

Если эти комплексные корни **чисто мнимые** $\pm ib$, то им соответствуют не содержащие показательных множителей **решения**

$$\cos bx,\ \sin bx.$$

Найдя вещественные частные решения, соответствующие всем парам сопряженных комплексных корней, и решения, соответствующие вещественным корням, получают **фундаментальную систему решений**, по которой строят **общее решение**, пользуясь основной теоремой.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0. \qquad (5.28)$$

Составим характеристическое уравнение, заменяя в уравнении (5.28) y''', y'', y' и y соответственно на λ^3, λ^2, λ и 1. Получим

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Так как все корни различные и вещественные, то фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{x}, \quad y_3 = e^{2x},$$

а общим решением будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = -1 - i$, так что все корни различные, но среди них имеются комплексные. Действительному корню $\lambda_1 = -2$ соответствует частное решение

$$y_1 = e^{-2x}.$$

Паре комплексных сопряженных корней $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$ соответствуют два линейно независимых частных решения

$$y_2 = e^{-x} \cos x, \quad y_3 = e^{-x} \sin x.$$

Общим решением будет линейная комбинация частных решений y_1, y_2 и y_3:

$$y = C_1 e^{-2x} + e^{-x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

Из формулы общего решения видно, что **все** решения **ограничены** при $x \to +\infty$ и **все ненулевые** решения обладают **свойством**:

$$y \to 0, \quad y' \to 0, \quad y'' \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{5.29}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

имеет один действительный корень $\lambda_1 = -1$ и два чисто мнимых сопряженных корня $\lambda_{2,3} = \pm i$. Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = \sin x,$$

общим решением будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Из общего решения видно, что **все** решения **ограничены** при $x \to +\infty$. Нельзя утверждать, что всякое ненулевое решение обладает свойством (5.29), однако существует семейство решений

$$y = C_1 e^{-x} \quad (C_1 \neq 0),$$

обладающих этим свойством.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

имеет две пары комплексных сопряженных корней

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i, \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm i.$$

Фундаментальная система имеет вид

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = e^x \cos x, & y_2 = e^x \sin x, \\ y_3 = e^{-x} \cos x, & y_4 = e^{-x} \sin x. \end{array}\right\}$$

Общим решением будет

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

21.2. Случай наличия кратных корней

Предположим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеются **кратные**:

1. **Среди корней характеристического уравнения имеются кратные вещественные корни.** Пусть λ_1 — вещественный корень кратности k. Тогда уравнение (5.2) имеет частное решение вида $e^{\lambda_1 x}$ и еще $k-1$ решений, получающихся из этого решения умножением на последовательные степени x, так что корню λ_1 будут соответствовать k действительных линейно независимых частных решений

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

(последняя степень x на единицу ниже кратности корня λ_1).

Найдя вещественные частные решения, соответствующие другим корням, получают **фундаментальную систему решений**, по которой строят **общее решение**.

2. **Среди корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные корни**. Пусть $\lambda_1 = a + ib$ — корень кратности k. Тогда уравнение имеет сопряженный корень $\lambda_2 = a - ib$ той же кратности (ибо коэффициенты характеристического уравнения **вещественные**). Этим сопряженным комплексным корням соответствует $2k$ вещественных **линейно независимых частных решения** вида

$$\left.\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{array}\right\} \qquad (5.30)$$

Замечание. Решения (5.30) можно получить, написав комплексные решения $e^{(a+ib)x}$, $xe^{(a+ib)x}$, ..., $x^{k-1}e^{(a+ib)x}$, соответствующие корню $\lambda_1 = a + ib$, и отделив в них действительные и мнимые части.

Если $a = 0$, то эти решения принимают более простой вид

$$\left.\begin{array}{l} \cos bx,\ x\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}\cos bx, \\ \sin bx,\ x\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}\sin bx. \end{array}\right\}$$

Найдя вещественные частные решения, соответствующие другим корням, получают **фундаментальную систему решений**, что позволяет построить **общее решение**.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ имеет один трехкратный действительный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ему соответствуют три линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x.$$

Так как других корней нет, то эти решения образуют фундаментальную систему решений, а их линейная комбинация

$$y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^3)$$

является общим решением.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

можно представить в виде

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

поэтому оно имеет двукратные комплексные корни $\lambda_{1,2} = -1 + i$, $\lambda_{3,4} = -1 - i$. Им соответствуют четыре вещественных линейно независимых частных решения

$$\left.\begin{array}{ll} e^{-x}\cos x, & xe^{-x}\cos x, \\ e^{-x}\sin x, & xe^{-x}\sin x, \end{array}\right\}$$

образующие фундаментальную систему решений. Общим решением является

$$y = e^{-x}\left((C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\right).$$

§ 22. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

22.1. Первый случай

Метод вариации произвольных постоянных, изложенный в § 19, требует выполнения квадратур, что часто приводит к сложным вычислениям. Поэтому в тех случаях, когда удается сравнительно легко найти частное решение неоднородного уравнения, этот метод не применяют. В частности, для уравнения с постоянными коэффициентами в случае, когда правая часть имеет специальный вид, удается найти частное решение **методом неопределенных коэффициентов**, понятие о котором дано в § 7.

Рассмотрим этот метод для уравнения n-го порядка с *квазиполиномиальной* правой частью

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = P_m(x)\,e^{ax}, \qquad (5.31)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа, a — вещественное число, $P_m(x)$ — полином от x степени m, которая может быть равной нулю, так что этот полином может вырождаться в число, отличное от нуля.

Как уже сказано в § 7, метод неопределенных коэффициентов состоит в том, что задается вид частного решения с неопределенными коэффициентами, которые определяются подстановкой в данное уравнение. Вид частного решения уравнения (5.31) зависит от того, совпадает ли число a с корнями характеристического уравнения (см. [70]):

1. *Если a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение имеет вид*

$$y_1 = Q_m(x)\, e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m с коэффициентами, подлежащими определению.

2. *Если a является корнем характеристического уравнения кратности k, то*

$$y_1 = x^k Q_m(x)\, e^{ax},$$

т. е. частное решение приобретает множитель x^k.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2. \tag{5.32}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 5z' + 6z = 0,$$

имеем

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,\ \ \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3;\ \ z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Для определения вида частного решения неоднородного уравнения (5.32) заметим, что его правая часть имеет вид $P_m(x)\, e^{ax}$, где $m = 2$, $a = 0$. Так как число 0 не является характеристическим числом, то частное решение следует искать тоже в виде полинома второй степени

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C, \tag{5.33}$$

где A, B и C — неопределенные коэффициенты. Для определения их подставим y_1 в уравнение (5.32). Для этого умножим равенство (5.33) и равенства, полученные из него дифференцированием два раза по x, на соответствующие коэффициенты уравнения (5.32) и приравняем сумму правых частей полученных равенств правой части уравнения (5.32). Будем иметь

$$\begin{array}{r|l} 6\times & y_1 = Ax^2 + Bx + C \\ (-5)\times & y_1' = 2Ax + B \\ 1\times & y_1'' = 2A \\ \hline \end{array}$$

$$6Ax^2 + (6B - 10A)\,x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$6A = 6,$$
$$6B - 10A = -10,$$
$$6C - 5B + 2A = 2,$$

откуда $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. Следовательно, $y_1 = x^2$, и общим решением уравнения (5.32) будет

$$y = x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x. \tag{5.34}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение $z'' - 5z' = 0$, имеем $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $z = C_1 + C_2e^{5x}$.

Найдем частное решение уравнения (5.34). Его правая часть есть полином, т. е. $a = 0$. Но в отличие от предыдущего примера здесь число 0 является корнем характеристического уравнения. Так как этот корень простой, то частное решение следует искать в виде

$$y_1 = x\,(Ax^2 + Bx + C).$$

Далее, как и в примере 1, находим: $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = 0$, $y_1 = \frac{1}{3}x^3$.

Следовательно, общим решением уравнения (5.34) будет

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1 + C_2e^{5x}.$$

Пример 3. Для уравнения

$$y'' - y = 6e^{2x} \tag{5.35}$$

имеем $z'' - z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $z = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$.

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то

$$\begin{array}{r|l} (-1)\times & y_1 = Ae^{2x} \\ 0\times & y_1' = 2Ae^{2x} \\ 1\times & y_1'' = 4Ae^{2x} \\ \hline & \quad 3Ae^{2x} = 6e^{2x}, \end{array}$$

$$A = 2,\ y_1 = 2e^{2x}.$$

Общим решением уравнения (5.35) будет

$$y = 2e^{2x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x}.$$

Пример 4. Пусть дано уравнение

$$y'' - y = 2e^{x}. \tag{5.36}$$

Здесь опять $z'' - z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $z = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$.

Число 1 является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому $y_1 = Axe^{x}$, $A = 1$, $y_1 = xe^{x}$.

Общим решением уравнения (5.36) будет

$$y = xe^{x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x}.$$

Пример 5. Для уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} \tag{5.37}$$

имеем $z'' - 4z' + 4z = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = 2$, $z = e^{2x}(C_1 + C_2x)$.

Число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_1 = Ax^2e^{2x},\ \ A = 1,\ \ y_1 = x^2e^{2x}.$$

Общим решением уравнения (5.37) будет

$$y = x^2e^{2x} + e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^{x} + 5x^2 - 12x + 2. \tag{5.38}$$

Имеем $z'' - 6z' + 5z = 0$, $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$,

$$z = C_1e^{x} + C_2e^{5x}.$$

Правую часть уравнения (5.38) можно представить в виде суммы двух слагаемых $-3e^{x}$ и $5x^2 - 12x + 2$. Поэтому в силу принципа наложения (см. § 18) для построения частного решения уравнения (5.38) достаточно построить частные решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} y'' - 6y' + 5y &= -3e^x, \\ y'' - 6y' + 5y &= 5x^2 - 12x + 2 \end{aligned}\right\}$$

и взять их сумму. Этими частными решениями будут $y_1 = \frac{3}{4} xe^x$, $y_2 = x^2$. Поэтому

$$y_1 + y_2 = \frac{3}{4} xe^x + x^2$$

будет частным решением уравнения (5.38), а общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = \frac{3}{4} xe^x + x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{5x}.$$

22.2. Второй случай

Рассмотрим уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y =$$
$$= e^{ax} (P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx), \qquad (5.39)$$

где a и b — **вещественные** числа, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — **полиномы** от x, старшая степень которых равна m, так что один из них обязательно имеет степень m, а степень другого не превосходит m, и он может быть даже тождественно равен нулю.

Составим комплексное число $a + ib$, где вещественная часть a есть коэффициент показателя множителя e^{ax}, а мнимая часть b — коэффициент аргумента bx функций $\cos bx$ и $\sin bx$.

Укажем вид частного решения уравнения (5.39) в двух случаях (см. [70]):

1. *Если число $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то*

$$y_1 = e^{ax} (Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx),$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — *полиномы степени m с неопределенными коэффициентами; причем надо брать оба эти полинома даже в том случае, когда один из полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ тождественно равен нулю.*

2. *Если число $a+ib$ есть корень характеристического уравнения кратности k, то*

$$y_1 = x^k e^{ax}(Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx),$$

т. е. частное решение приобретает множитель x^k.

Пример 7. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x). \qquad (5.40)$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение $z'' + z' - 2z = 0$, имеем $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $z = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Прежде чем установить вид частного решения уравнения (5.40), заметим, что в правой части аргумент косинуса и синуса один и тот же, так что уравнение (5.40) имеет вид (5.39), где $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$.

Составим число $a + ib$. Получим $a + ib = 1 + i$. Сравним это число с характеристическими числами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Видим, что число $a + ib$ не совпадает ни с одним из чисел λ_1 и λ_2, т. е. не является характеристическим числом. Следовательно, частное решение нужно искать в виде

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x), \qquad (5.41)$$

где A и B — неопределенные коэффициенты (так как $m = 0$, то полиномы $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ вырождаются в постоянные A и B).

Подставляя (5.41) в уравнение (5.40), имеем

$$\begin{array}{r|l}
(-2)\times & y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x) \\
1\times & y_1' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) \\
1\times & y_1'' = e^x(2B\cos x - 2A\sin x) \\
\hline
 & e^x((-A+3B)\cos x - (B+3A)\sin x) = e^x(\cos x - 7\sin x).
\end{array}$$

Сокращая на e^x и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему

$$-A + 3B = 1, \quad -B - 3A = -7,$$

откуда $A = 2$, $B = 1$. Следовательно,

$$y_1 = e^x(2\cos x + \sin x),$$

и общим решением уравнения (5.40) будет

$$y = e^x(2\cos x + \sin x) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 8. Пусть дано уравнение

$$y'' + y' + y = -13\sin 2x.$$

Имеем

$$z'' + z' + z = 0,\ \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Число $a + ib = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_1 = A\cos 2x + B\sin 2x;\ \ A = 2,\ B = 3;$$

$$y_1 = 2\cos 2x + 3\sin 2x.$$

Общим решением будет

$$y = 2\cos 2x + 3\sin 2x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Заметим, что каждое решение **ограничено** при $x \to +\infty$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 2\sin x. \tag{5.42}$$

Имеем $z'' + z = 0$, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $z = C_1\cos x + C_2\sin x$. Здесь число $a + ib = i$ является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$y_1 = x\,(A\cos x + B\sin x);\ A = -1,\ B = 0;\ y_1 = -x\cos x.$$

Общим решением уравнения (5.42) будет

$$y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Заметим, что ни одно из решений **не будет ограничено** при $x \to +\infty$ вследствие наличия слагаемого $-x\cos x$.

§ 23. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

23.1. Применение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к исследованию простейших колебаний

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массы m по оси x. Пусть движение происходит под действием трех сил:

1) силы, притягивающей точку к началу координат и имеющей проекцию на ось x, равную $-ax$ $(a > 0)$;

2) силы сопротивления среды, которую будем считать пропорциональной первой степени скорости:

$$-b\frac{dx}{dt} \quad (b \geq 0);$$

3) возмущающей силы, направленной по оси x и равной $F(t)$ в момент времени t.

Тогда, применяя второй закон Ньютона, получим **дифференциальное уравнение движения**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - ax + F(t). \tag{5.43}$$

Разделив обе части уравнения (5.43) на m, перепишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t), \tag{5.44}$$

где

$$h = \frac{b}{2m} \geq 0, \quad k^2 = \frac{a}{m} > 0, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Уравнение (5.44) есть **неоднородное линейное уравнение** второго порядка с **постоянными** коэффициентами. Проинтегрировав его, найдем **закон движения** рассматриваемой точки.

Так как наибольший интерес имеют случаи, когда движения, определяемые уравнением (5.44), представляют собой колебания точки около положения $x = 0$, то уравнение (5.44) называют *уравнением колебаний*. При этом, если возмущающая сила отсутствует, так что $f(t) \equiv 0$, то уравнение (5.44) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \tag{5.45}$$

и называется *уравнением свободных колебаний*. Дифференциальное уравнение (5.44), в котором $f(t) \not\equiv 0$, называется *уравнением вынужденных колебаний*.

К интегрированию линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами приходим при изучении не только механических колебаний, но и многих других колебательных явлений: например, с такими уравнениями мы встречаемся в теории электрических цепей.

Уравнение (5.44) всегда интегрируется хотя бы в квадратурах, ибо соответствующее однородное уравнение (5.45), будучи однородным линейным уравнением с **постоянными** коэффициентами, всегда интегрируется в **элементарных функциях**, а тогда, применяя метод Лагранжа, можно найти общее решение уравнения (5.44) при любой непрерывной функции $f(t)$, т. е. для любой силы $F(t)$, лишь бы она была **непрерывной** функцией от времени t.

23.2. Свободные колебания

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.45); изучим свойства решений (движений), определяемых этим уравнением. В частности, выясним, как влияют параметры h и k на характер движений. Предположим сначала, что $h = 0$, т. е. колебания происходят **в среде без сопротивления**. В этом случае уравнение (5.45) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{5.46}$$

Его характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = \pm ik$, так что

$$x_1 = \cos kt,\ x_2 = \sin kt,$$

и **общее решение** имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{5.47}$$

Формула (5.47) дает все решения (движения), определяемые уравнением (5.46).

Введем вместо C_1 и C_2 новые произвольные постоянные A и φ, положив

$$C_1 = A \sin \varphi,\ C_2 = A \cos \varphi.$$

Получим движение

$$x = A \sin (kt + \varphi). \tag{5.48}$$

Такое движение называется *гармоническим колебанием*. Как видно из формулы (5.48), оно является **периодическим** движением с **периодом** $T = \frac{2\pi}{k}$ и **частотой** k. Число A называется *амплитудой*, а φ — *начальной фазой* колебания (5.48).

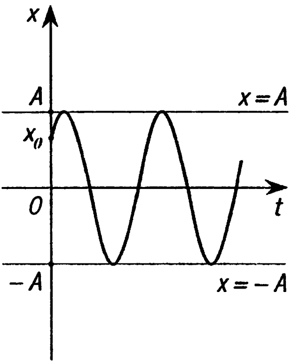

Рис. 34

(*Фазой* гармонического колебания называется аргумент синуса, т. е. $kt+\varphi$. Значение фазы при $t=0$ называется *начальной фазой.*)

Из формулы (5.48) видно, что **все** движения, определяемые уравнением (5.46), **ограничены** при $t\to+\infty$:

$$|x|\le A.$$

График движения (5.48) (рис. 34) получают в результате элементарных преобразований графика функции $x=\sin t$.

Всяким начальным условиям

$$x=x_0,\ \frac{dx}{dt}=x_0' \ \text{ при } \ t=0$$

в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n-го порядка соответствует одно вполне определенное движение; оно содержится в формуле (5.48) при соответствующих значениях амплитуды A и начальной фазы φ, определяемых подстановкой начальных данных 0, x_0 и x_0' в систему

$$x=A\sin(kt+\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt}=Ak\cos(kt+\varphi).$$

Получаем

$$x_0=A\sin\varphi,$$

$$x_0'=Ak\cos\varphi,$$

откуда

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{x_0'^2}{k^2}},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{kx_0}{x_0'}$$

В частности, если точка начинает движение из положения $x_0\ne0$ без начальной скорости ($x_0'=0$), то

$$A=x_0,\ \ \varphi=\frac{\pi}{2},$$

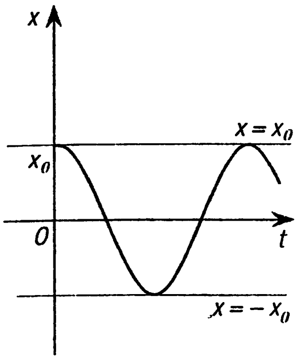

Рис. 35*а*

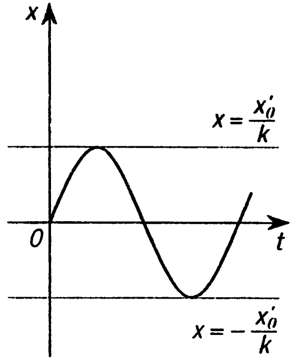

Рис. 35*б*

и движение имеет вид

$$x = x_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \text{ или } x = x_0 \cos kt$$

(рис. 35*а*).

Если точка начинает движение из положения $x_0 = 0$ с начальной скоростью $x_0' \neq 0$, то

$$A = \frac{x_0'}{k}, \quad \varphi = 0,$$

и соответствующим движением будет

$$x = \frac{x_0'}{k} \sin kt$$

(рис. 35*б*).

Наконец, если оба начальных значения x_0 и x_0' равны нулю, то $A = 0$, и движение (5.48) примет вид

$$x \equiv 0,$$

т. е. выродится в состояние покоя. Это есть единственное движение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x = 0, \; x' = 0 \text{ при } t = 0. \tag{5.49}$$

Скорость этого движения, очевидно, равна нулю при всех t.

Состояние покоя $x \equiv 0$, определяемое уравнением (5.46) и начальными условиями (5.49), обладает тем свойством, что *все движения, у которых начальные значения x_0 и x_0' не равны одновременно нулю, но достаточно малы, будут при всех*

$t \geq 0$ *сколь угодно мало отклоняться от состояния покоя и иметь сколь угодно малую скорость.* Действительно, эти движения имеют вид (общее решение в форме Коши)

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} \sin\left(kt + \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{x_0'}\right).$$

Их скорость определяется формулой

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} \cos\left(kt + \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{x_0'}\right).$$

Так как синус и косинус по абсолютной величине не превосходят числа 1, то

$$|x| \leq \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}},$$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leq k\sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}},$$

откуда и следует, что x и $\frac{dx}{dt}$ будут сколь угодно малы при всех $t \geq 0$, если x_0 и x_0' достаточно малы.

Предположим теперь, что в уравнении (5.45) $h > 0$, т. е. колебание происходит **в среде с сопротивлением**.

Выясним, как влияет наличие h на характер колебаний, определяемых уравнением (5.45), как изменяется это влияние с изменением величины h (если k постоянно), т. е. какой характер имеет колебание при малых и больших сопротивлениях среды. Для этого найдем общее решение уравнения (5.45).

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Здесь возможны три случая.

Первый случай. $h^2 - k^2 > 0$, т. е. $h > k$. Оба корня характеристического уравнения вещественные и отрицательные. Общее решение уравнения (5.45) имеет вид

$$x = C_1 e^{(-h+\sqrt{h^2-k^2})t} + C_2 e^{(-h-\sqrt{h^2-k^2})t}. \tag{5.50}$$

Движения, соответствующие решениям (5.50), являются **апериодическими**. Выясним, как ведут себя движения (5.50) по отношению к состоянию покоя $x \equiv 0$ при $t \to +\infty$.

Нетрудно убедиться, что *если* x_0 *и* x_0' *достаточно малы, то* x *и* $\frac{dx}{dt}$ *будут сколь угодно малы при всех* $t \geq 0$. Кроме того, **все ненулевые** решения (5.50) обладают **свойством**:

$$x \to 0, \frac{dx}{dt} \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{5.51}$$

Второй случай. $h^2 = k^2$, т. е. $h = k$. Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = -h < 0$. Общим решением уравнения (5.45) будет

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{5.52}$$

Движения, соответствующие решениям (5.52), также являются **апериодическими**. *Для любых* x_0 *и* x_0' *соответствующие им* x *и* $\frac{dx}{dt}$ *будут бесконечно малыми при* $t \to +\infty$. Другими словами, **все ненулевые** решения (5.52) обладают **свойством** (5.51).

Третий случай. $h^2 - k^2 < 0$, т. е. $h < k$. В этом случае характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни с отрицательной действительной частью

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Поэтому общее решение имеет вид

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos(\sqrt{k^2 - h^2}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{k^2 - h^2}\, t))$$

или

$$x = Ae^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi). \tag{5.53}$$

Движение, соответствующее решению (5.53), называется *затухающим гармоническим колебанием с периодом* $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}$ *и частотой* $\sqrt{k^2 - h^2}$, *амплитудой* Ae^{-ht} *и начальной фазой* φ. В отличие от гармонического колебания (5.48) здесь амплитуда уже **непостоянна**. Заметим, что она **ограничена**, так как

$$|Ae^{-ht}| \leq A,$$

и **стремится к нулю** при $t \to +\infty$. Число A называется *начальной амплитудой*, а h — *коэффициентом затухания*. Множитель e^{-ht} характеризует быстроту затухания.

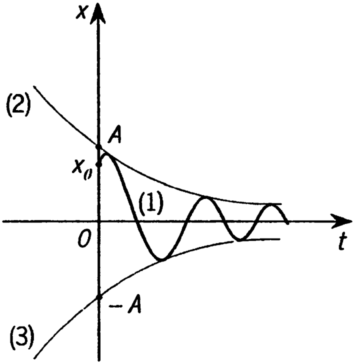

Рис. 36

Начальная амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий. При этом, так как из формулы (5.53) следует, что

$$|x| \le Ae^{-ht},$$

то графики ненулевых решений (1) (колебаний, отличных от состояния покоя) заключены между графиками показательных функций (2) и (3) (рис. 36):

$$x = Ae^{-ht} \text{ и } x = -Ae^{-ht}.$$

Можно показать, что *если x_0 и x_0' достаточно малы, то соответствующие им x и $\frac{dx}{dt}$ будут сколь угодно малы при всех $t \ge 0$.*

Все ненулевые решения (5.53) обладают **свойством** (5.51).

Таким образом, наличие сопротивления среды ($h > 0$) видоизменяет характер колебаний; причем пока сопротивление h сравнительно невелико ($h < k$), движения остаются **периодическими**, затухая при $t \to +\infty$; при большом сопротивлении среды ($h \ge k$) движения становятся **апериодическими**.

Все решения уравнения (5.45) при $h > 0$ обладают свойством (5.51).

§ 24. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

24.1. Колебания в среде без сопротивления. Нерезонансный случай

Рассмотрим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (5.44)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t).$$

Согласно теореме о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения (см. § 18) все движения, определяемые уравнением (5.44), складываются из совокупности всех движений, определяемых соответствующим однородным уравнением и называемых *собственными колебаниями* точки, и какого-нибудь одного движения, определяемого неоднородным уравнением (5.44).

Как было отмечено, все колебания, определяемые уравнением (5.44), всегда можно найти методом вариации произвольных постоянных.

Если правая часть уравнения (5.44) имеет специальный вид, позволяющий найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, то метод Лагранжа применять не следует.

Напомним, что при нахождении частного решения можно воспользоваться принципом наложения частных решений (см. § 18), который в данном случае сводится к наложению *вынужденных колебаний*, определяемых соответствующими **неоднородными уравнениями**.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $F(t)$ периодическая и имеет синусоидальный характер, причем колебания происходят в среде без сопротивления ($h = 0$).

Итак, пусть дано уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x = M \sin \omega t. \tag{5.54}$$

Здесь собственные колебания, определяемые уравнением (5.46)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

являются гармоническими колебаниями (5.48):

$$x = A \sin(kt + \varphi).$$

Остается найти частное решение уравнения (5.54). Вид частного решения зависит от того, будет ли число $a + ib = i\omega$ корнем характеристического уравнения для уравнения (5.46). Так как это характеристическое уравнение имеет корни $\pm ik$, то дело сводится к **совпадению частоты возмущающей силы** с **частотой собственных колебаний** (*резонанс*) или к **несовпадению этих частот** (*нерезонансный случай*).

Рассмотрим сначала нерезонансный случай ($\omega \neq k$). Тогда частное решение уравнения (5.54) следует искать согласно § 22 в виде

$$x_1(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{5.55}$$

где C_1 и C_2 — коэффициенты, подлежащие определению.

Имеем

$$\begin{array}{r|l} k^2 \times & x_1(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \\ 0 \times & x_1'(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \\ 1 \times & x_1''(t) = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t \\ \hline \end{array}$$

$$C_1(k^2 - \omega^2) \cos \omega t + C_2(k^2 - \omega^2) \sin \omega t = M \sin \omega t;$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1(k^2 - \omega^2) = 0, \\ C_2(k^2 - \omega^2) = M; \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = \frac{M}{k^2 - \omega^2}.$$

Поэтому

$$x_1(t) = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \tag{5.56}$$

Общим решением уравнения (5.54) будет

$$x = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(kt + \varphi).$$

Вынужденные колебания, определяемые этим общим решением, являются **наложениями гармонических колебаний.**

24.2. Резонанс

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = M \sin kt. \tag{5.57}$$

Это уравнение есть частный случай уравнения (5.54), когда $\omega = k$, т. е. когда частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний **(резонанс)**. В этом случае, определяя вид частного решения по правилу, указанному в § 22, и составляя число $a + ib$, получаем, что $a + ib = ik$ является простым корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения (5.46). Поэтому частное решение в отличие от нерезонансного случая, рассмотренного выше, приобретает множитель t, т. е. имеет вид

$$x_1 = t\,(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt).$$

Имеем

$$\begin{array}{r|l} k^2 \times & x_1(t) = t\,(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \\ 0 \times & x_1'(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + t\,(-C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt) \\ 1 \times & x_1''(t) = 2\,(-C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt) + t\,(-C_1 k^2 \cos kt - \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - C_2 k^2 \sin kt) \\ \hline \end{array}$$

$$-2C_1 k \sin kt + 2C_2 k \cos kt = M \sin kt;$$

$$\left.\begin{aligned} -2C_1 k &= M, \\ 2C_2 k &= 0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -\frac{M}{2k},\ C_2 = 0.$$

Поэтому

$$x_1(t) = -\frac{M}{2k}\, t \cos kt. \qquad (5.58)$$

Частное решение (5.58) представляет собой **вынужденное колебание**, оно имеет на (t_0, ∞) **неограниченную амплитуду**. График этого колебания заключен между прямыми (1) и (2) (рис. 37):

$$x = \frac{M}{2k}\, t \quad \text{и} \quad x = -\frac{M}{2k}\, t.$$

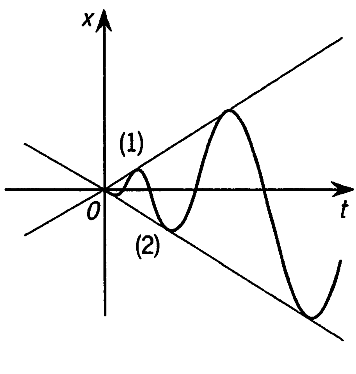

Рис. 37

Общим решением уравнения (5.57) будет

$$x = -\frac{M}{2k} t \cos kt + A \sin (kt + \varphi).$$

Вынужденные колебания, определяемые этим общим решением, являются **наложением колебания с неограниченной амплитудой** (5.58) **и гармонических колебаний** (5.48).

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний (5.44) в среде с малым сопротивлением ($h < k$) в предположении, что возмущающая сила имеет **синусоидальный** характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = M \sin \omega t. \tag{5.59}$$

Собственные колебания имеют вид (5.53). Частное решение уравнения (5.59) следует искать в виде

$$x_1(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{5.60}$$

где коэффициенты C_1 и C_2 находят подстановкой (5.60) в (5.59). Получим

$$C_1 = -\frac{2h\omega M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}, \quad C_2 = \frac{(k^2 - \omega^2) M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

Поэтому

$$x_1(t) = -\frac{2h\omega M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{(k^2 - \omega^2) M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \sin \omega t. \tag{5.61}$$

Общее решение уравнения (5.59) имеет вид

$$x(t) = -\frac{2h\omega M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{(k^2 - \omega^2) M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \sin \omega t +$$

$$+ Ae^{-ht} \sin (\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi).$$

Заметим, что при $t \to +\infty$ последнее слагаемое стремится к нулю, так что при достаточно больших t можно считать, что

$$x(t) = -\frac{2h\omega M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{(k^2 - \omega^2) M}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \sin \omega t,$$

т. е. собственными (затухающими) колебаниями можно пренебречь.

Амплитуда A_1 вынужденного колебания (5.61) выражается формулой $A_1 = \dfrac{M}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}$.

Если сопротивление h очень мало, то $A_1 \approx \frac{M}{|k^2 - \omega^2|}$. В резонансном случае ($\omega = k$) $A_1 = \frac{M}{2h\omega}$, т. е. для достаточно малых значений k амплитуда A_1 становится весьма значительной даже при малом M. Аналогичный вывод, как нетрудно видеть, можно сделать вблизи резонанса ($\omega \approx k$).

Замечание. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, как показано выше, всегда интегрируются в элементарных функциях. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли однородное линейное уравнение с переменными коэффициентами привести к уравнению с постоянными коэффициентами. Можно показать (см., например, [71], с. 259), что в некоторых случаях это удается сделать при помощи соответствующих преобразований независимой переменной или искомой функции.

Приведем два примера.

Пример 1. Рассмотрим однородное линейное *уравнение Эйлера* второго порядка

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \quad (x > 0). \tag{5.62}$$

Сделаем замену независимой переменной x на новую независимую переменную t по формуле

$$x = e^t. \tag{5.63}$$

Нам нужно выразить производные от искомой функции $y = y\,(x)$ по x через производные от $y = y\,(t)$ по t. Имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot \frac{1}{e^t} = y'_t \cdot e^{-t},$$

так что операторы $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dt}$ связаны соотношением

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} \cdot e^{-t}.$$

Используя это соотношение, находим y''_{x^2}:

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_t\, e^{-t})'_t \cdot e^{-t} = y''_{t^2} e^{-t} - y'_t\, e^{-t}$$

или

$$y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)\, e^{-2t}.$$

Заменяя теперь в уравнении (5.62) x на e^t, а y' и y'' найденными значениями, получим

$$y''_{t^2} - y'_t + a_1 y'_t + a_2 y = 0$$

или

$$y''_{t^2}+(a_1-1)\,y'_t+a_2y=0$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами. Интегрируя его и возвращаясь к независимой переменной x, найдем общее решение уравнения (5.62). (Проинтегрируйте уравнение $x^2y''-4xy'+6y=0$).

Нетрудно убедиться (см. там же, с. 260), что та же подстановка (5.63) приводит к уравнению с постоянными коэффициентами и однородное линейное *уравнение Эйлера* n-го порядка

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy+a_ny=0.$$

Пример 2. Пусть дано *уравнение Бесселя*

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \quad (x>0). \tag{5.64}$$

Сделаем (однородную линейную) замену искомой функции y по формуле

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\,z,$$

где $z=z\,(x)$ — новая неизвестная функция от x.

Вычисляя y' и y'' и подставляя в уравнение (5.64), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$z''+z=0$$

(убедитесь в этом!).

Общим решением уравнения Бесселя (5.64) будет

$$y=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

(почему?).

§ 25. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

25.1. Некоторые сведения из операционного исчисления

В этом параграфе мы покажем, как можно найти решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения при помощи операционного метода, который сводит задачу нахождения искомого решения к выполнению линейных а л г е б р а и ч е с к и х операций.

Для изложения этого метода нам потребуются некоторые сведения из операционного исчисления.

Рассмотрим комплексно-значную функцию z от вещественной независимой переменной t, определенную формулой

$$z(t) = u(t) + iv(t),$$

где u и v — вещественные функции от t, заданные на некотором интервале (a, b) $(a \geq -\infty,\ b \leq +\infty$, ср. 16.1, формула (4.8)).

Положим, по определению

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt,$$

предполагая, что интегралы справа существуют.

Пусть теперь $x(t)$ вещественная или комплексно-значная функция от вещественной независимой переменной t, определенная при $t > 0$. Будем предполагать, что она непрерывна и *экспоненциально ограничена*, т. е. существуют такие вещественные постоянные числа M и σ_0 (в том числе и $\sigma_0 = 0$), что имеет место оценка

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \text{ при всех } t \geq 0.$$

Рассмотрим следующий несобственный интеграл

$$\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}\,dt, \qquad (5.65)$$

где $p = \sigma + i\tau$ — комплексное число. Этот интеграл называется *интегралом Лапласа.*

Если $\sigma > \sigma_0$, то интеграл Лапласа (5.65) сходится (почему?). Он определяет (в этом случае) функцию от комплексной переменной p, которую мы обозначим через $\overline{x}(p)$:

$$\overline{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,x(t)\,dt. \qquad (5.66)$$

Эта функция определена во всех точках комплексной плоскости p (рис. 38), лежащих правее прямой $\sigma = \sigma_0$ (почему?).

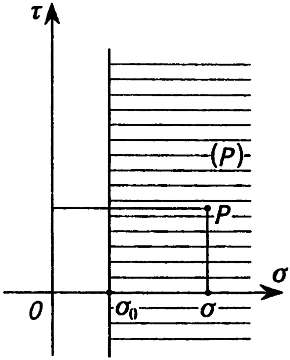

Рис. 38

Преобразование, определяемое формулой (5.66), называется *преобразованием Лапласа*. При этом функция $x(t)$ называется *оригиналом*, а функция $\overline{x}(p)$ *изображением* (точнее L — изображением, изображением по Лапласу) функции $x(t)$. Соответствие между оригиналом и изображением будем символически записывать так:

$$x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p) \text{ или } \overline{x}(p) \div\!\!\rightarrow x(t),$$

где стрелка направлена от изображения к оригиналу.

Аналитическая сущность преобразования Лапласа (5.66) состоит в том, что здесь используется *интегральный оператор*

$$A = \int_0^\infty (\,\cdot\,)\, e^{-pt}\, dt,$$

называемый *оператором Лапласа*. Этим оператором действуют на ф у н к ц и ю $x(t)$, в результате чего получается ф у н к ц и я

$$A(x(t)) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}\, dt \equiv \overline{x}(p).$$

Напоминаем, что функция $x(t)$ определена на $[0, +\infty)$, а функция $\overline{x}(p)$ на указанной части комплексной плоскости (P). В качестве оригиналов здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные в интервале $[0, +\infty)$ и экспоненциально ограниченные функции.

Основная идея применения операционного метода для нахождения решения дифференциального уравнения состоит в том, что, используя свойства изображений, сначала ищут изображение $\overline{x}(p)$ искомого решения $x(t)$, а затем восстанавливают само решение $x(t)$.

Отметим некоторые свойства изображений, позволяющие переходить от операций над оригиналами к операциям над изображениями и восстанавливать оригинал по изображению (см., например, [70, с. 497]; [91, с. 409]; [127, с. 293]).

1. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$, то $cx(t) \leftarrow\!\!\div c\overline{x}(p)$ $(c = \text{const})$.

2. Если $x_1(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}_1(p)$, $x_2(t) \leftarrow\!\!\div x_2(p)$ $(\operatorname{Re} p > \sigma_0)$, то

$$x_1(t) + x_2(t) \leftarrow\!\!\div x_1(p) + x_2(p).$$

3. Если $x_k(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}_k(p)$ $(k = 1, \ldots, n;\ \operatorname{Re} p > \sigma_0)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t) \leftarrow\!\!\div \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{x}_k(p).$$

Свойства 1—3 выражают линейность преобразования Лапласа.

4. Теорема подобия. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$, то

$$x(at) \leftarrow\!\!\div \frac{1}{a}\overline{x}\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a > 0).$$

5. Теорема смещения. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div x(p)$, то

$$e^{\alpha t} x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p - \alpha).$$

6. Теорема свертывания оригиналов. Если

$$x_1(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}_1(p),\ x_2(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}_2(p), \text{ то}$$

$$\int_0^t x_1(\tau)\, x_2(t - \tau)\, d\tau \leftarrow\!\!\div \overline{x}_1(p) \cdot \overline{x}_2(p),$$

где функция от t, стоящая в левой части, называется *сверткой* функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

7. Дифференцирование оригинала. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$ и $x'(t)$ является оригиналом (т. е. $x'(t) \in C\,[0, +\infty)$ и экспоненциально ограничена), то

$$x'(t) \leftarrow\!\!\div p\overline{x}(p) - x(0) \equiv \overline{x}'(p).$$

7^1. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$ и $x(0) = 0$, то

$$x'(t) \leftarrow\!\!\div p\overline{x}(p),$$

т. е. если оригинал $x(t)$ обращается в 0 при $t = 0$, то дифференцированию его соответствует просто умножение изображения на p.

8. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$ и $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$x^{(n)}(t) \leftarrow\!\!\div p^n \overline{x}(p) - (p^{n-1} x(0) + p^{(n-2)} x'(0) + \ldots + x^{(n-1)}(0)).$$

8^1. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$ и $x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$x^{(n)}(t) \leftarrow\!\!\div p^n \overline{x}(p).$$

Отметим, что изображения производных от функции $x(t)$ выражаются линейно через ее изображение $\overline{x}(p)$.

9. Дифференцирование изображения. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$, то

$$t^n x(t) \leftarrow\!\!\div (-1)^n \overline{x}^{(n)}(p),$$

т. е. умножение оригинала на t^n вызывает n-кратное дифференцирование изображения и умножение на $(-1)^n$.

10. Интегрирование оригинала. Если $x(t) \leftarrow\!\!\div \overline{x}(p)$, то

$$\int_0^t x(\tau)\, d\tau \leftarrow\!\!\div \frac{\overline{x}(p)}{p}.$$

Приведем таблицу изображений наиболее часто встречающихся функций (табл. 1) [70, с. 508].

Таблица 1

$x(t)$	$\overline{x}(p)$	$\mathrm{Re}(p)$
c ($c = \mathrm{const}$)	$\frac{c}{p}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
t^n ($n > 0$, целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$e^{\lambda t}$ ($\lambda = \mathrm{const}$)	$\frac{1}{p-\lambda}$	$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\lambda)$
$t^n e^{\lambda t}$ ($n > 0$, целое)	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\lambda)$
$\sin bt$ (b — вещественное)	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$e^{at} \sin bt$ (a и b — вещественные)	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(p) > a$
$t \sin bt$ (b — вещественное)	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$

$x(t)$	$\overline{x}(p)$	Re (p)
$\cos bt$ (b — вещественное)	$\frac{p}{p^2+b^2}$	Re $(p) > 0$
$e^{at}\cos bt$ (a и b — вещественные)	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	Re $(p) > a$
$t\cos bt$ (b — вещественное)	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$	Re $(p) > 0$
ch at ($a \geq 0$)	$\frac{p}{p^2-a^2}$	Re $(p) > a$
sh at ($a \geq 0$)	$\frac{a}{p^2-a^2}$	Re $(p) > a$

25.2. Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти решение уравнения

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t), \tag{5.67}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \tag{5.68}$$

где x_0, x_0', ..., $x_0^{(n-1)}$ (любые) заданные числа. Предположим, что функция $f(t)$ и искомая функция $x(t)$ вместе с ее производными до порядка n включительно являются о р и г и н а л а м и, так что к ним можно применять преобразование Лапласа.

Искомое решение

$$x = x(t) = x(t;\ 0, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}) \tag{5.69}$$

существует и единственно (почему?).

Покажем, как можно найти это решение операционным методом.

Найдем сначала изображение $\overline{x}(p)$ решения $x(t)$. С этой целью возьмем изображения обеих частей уравнения (5.67), применив к ним преобразование Лапласа. При этом мы получим линейное уравнение относительно $\overline{x}(p)$ (почему?).

В самом деле, пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и правилами 7, (7[1]), 8, (8[1]) дифференцирования оригинала, будем иметь

$$p^n\overline{x}(p) - (p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}) +$$
$$+ a_1p^{n-1}\overline{x}(p) - a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}) +$$
$$+ \ldots + a_{n-1}(p\overline{x}(p) - x_0) + a_n\overline{x}(p) = \overline{f}(p).$$

Разрешим это (линейное) уравнение относительно $\overline{x}(p)$. Собрав все члены, содержащие $\overline{x}(p)$, и перенеся остальные члены в правую часть, получим

$$(p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n)\,\overline{x}(p) = \overline{f}(p) + \psi(p),$$

где

$$\psi(p) = p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)} +$$
$$+ a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-1}x_0. \quad (5.70)$$

Заметим, что коэффициент при $\overline{x}(p)$ есть не что иное, как характеристический полином $P(p)$ для однородного линейного уравнения, соответствующего уравнению (5.67). Поэтому уравнение (5.70) можно записать в виде

$$P(p)\,\overline{x}(p) = \overline{f}(p) + \psi(p). \quad (5.71)$$

Это уравнение называется *изображающим уравнением* для задачи Коши (5.67), (5.68), *вспомогательным* или *операторным уравнением*, соответствующим исходной задаче.

Из уравнения (5.71) находим изображение искомого решения

$$\overline{x}(p) = \frac{\overline{f}(p) + \psi(p)}{P(p)}. \quad (5.72)$$

Восстанавливая по изображению (5.72) оригинал, получим искомое решение (5.69).

Отметим, что формула (5.72) для изображения решения принимает наиболее простой вид, если искомое решение $x(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (5.73)$$

т. е. когда мы имеем дело с нулевой задачей Коши. В этом случае имеем

$$\overline{x}(p) = \frac{\overline{f}(p)}{P(p)}, \quad (5.74)$$

и задача нахождения изображения сводится к задаче отыскания изображения правой части уравнения (5.67).

Формула (5.74) устанавливает связь между изображением решения и изображением правой части. Мы еще вернемся к ней в следующем пункте, а пока рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x'' + x = \sin t. \tag{5.75}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = 0,\ x' = -\frac{1}{2},\ \text{при } t = 0.$$

Возьмем изображение обеих частей уравнения (5.75). Имеем

$$x'' + x \leftrightarrow p^2\,\overline{x}\,(p) + \frac{1}{2} + \overline{x}\,(p),$$

$$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}.$$

Поэтому изображающим уравнением будет

$$p^2\,\overline{x}\,(p) + \frac{1}{2} + \overline{x}\,(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

или

$$(p^2+1)\,\overline{x}\,(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2},$$

откуда

$$\overline{x}\,(p) = \frac{1-p^2}{2\,(p^2+1)^2}. \tag{5.76}$$

Ищем в табл. 1 изображение, совпадающее с этим изображением или хотя бы близкое к нему. Видим, что функция (5.76) является изображением функции $t\cos t$ с точностью до множителя $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Поэтому искомым решением будет

$$x\,(t) = -\frac{1}{2}\,t\cos t.$$

Аналитическая структура этого частного решения вполне согласуется с методом неопределенных коэффициентов (почему?).

Пример 2. Рассмотрим то же уравнение (5.75), но будем искать решение с нулевыми начальными значениями

$$x\,(0) = x'\,(0) = 0.$$

Изображающим уравнением будет

$$(p^2+1)\,\overline{x}\,(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

(почему?). Поэтому

$$\overline{x}\,(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}. \tag{5.77}$$

Такого изображения в табл. 1 нет. Но если умножить его на p, то мы получим изображение

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}$$

для которого с помощью этой таблицы находится оригинал

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}\ \dot{\rightarrow}\ \frac{1}{2}\,t\sin t.$$

Этот факт создает предпосылку для использования теоремы об интегрировании оригинала (см. свойство 10), ибо изображение (5.77) можно представить в виде дроби

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{\dfrac{p}{(p^2+1)^2}}{p}$$

Поэтому

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}\ \dot{\rightarrow}\ \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau\sin\tau\,d\tau$$

Следовательно

$$x\,(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\,[-\,t\cos t+\sin t].$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$x''+k^2x=f\,(t)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x\,(0)=x'\,(0)=0.$$

Изображающим уравнением будет

$$(p^2+k^2)\,\overline{x}\,(p)=\overline{f}\,(p),$$

откуда

$$\overline{x}\,(p)=\overline{f}\,(p)\cdot\frac{1}{p^2+k^2}.$$

Здесь изображение представляет собой произведение двух изображений, имеющих известные оригиналы:

$$\overline{f}(p) \to f(t), \quad \frac{1}{p^2+k^2} \div\!\to \frac{1}{k}\sin kt.$$

Поэтому для нахождения оригинала для $\overline{x}(p)$ мы можем воспользоваться теоремой свертывания оригиналов (см. свойство 6). Получим

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что этому частному решению соответствует чисто вынужденное колебание материальной точки (почему?).

25.3. Интеграл Дюамеля

Рассмотрим снова вопрос о нахождении операционным методом частного решения уравнения (5.67) с нулевыми начальными условиями (5.73). В этом случае изображение искомого решения дается формулой (5.74). Запишем эту формулу в виде

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{P(p)}\cdot\overline{f}(p).$$

Таким образом, для получения изображения искомого решения нам достаточно умножить изображение правой части уравнения (5.67) на функцию

$$\overline{\Pi}(p) = \frac{1}{P(p)}.$$

Имеем

$$\overline{x}(p) = \overline{\Pi}(p)\cdot\overline{f}(p). \tag{5.78}$$

Функция $\overline{\Pi}(p)$ называется *передаточной функцией* уравнения (5.67).

Понятие передаточной функции широко используется в теории автоматического регулирования, где известная функция $f(t)$ и искомая функция $x(t)$ называются соответственно *входным* и *выходным сигналами*.

Наша окончательная цель: найти функцию $x(t)$ (выходной сигнал). Для этого мы воспользуемся формулой (5.78), где изображение $\overline{x}(p)$ представлено в виде произведения изображений. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой свертывания оригиналов (см. свойство 6). Получим

$$x(t)=\int_0^t \Pi(\tau) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{5.79}$$

Интеграл, стоящий в правой части, называется *интегралом Дюамеля*. Он является решением задачи Коши (5.67), (5.73) в виде свертки оригиналов передаточной функции и правой части уравнения (5.67).

Преобразуем интеграл Дюамеля к более удобному для использования виду.

С этой целью найдем, пользуясь формулой (5.79), решение $x_1(t)$ уравнения (5.67) в случае, когда $f(t)\equiv 1$, а начальные условия по-прежнему нулевые. Получим

$$x_1(t)=\int_0^t \Pi(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда

$$\Pi(t)=x_1'(t)$$

(почему?). Поэтому интеграл Дюамеля (5.79) можно записать в виде

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{5.80}$$

Здесь решение уравнения (5.67) с нулевыми начальными условиями представлено в виде свертки решения уравнения с той же левой частью, но с правой частью, равной 1 («единичный» входной сигнал) (с теми же начальными условиями) и правой части данного уравнения.

Отметим, что оба выражения интеграла Дюамеля (5.79) и (5.80) дают решение задачи Коши (5.67), (5.73), доставляя информацию «на выходе» по информации «на входе».

Пример 4. Найти решение уравнения

$$x''+x=\frac{1}{t+1},$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x(0)=x'(0)=0. \tag{5.81}$$

Сначала ищем решение уравнения

$$x'' + x = 1,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям (5.81). Таким решением будет

$$x_1 = -\cos t + 1$$

(почему?). Поэтому $x_1'(t) = \sin t$.

Пользуясь интегралом Дюамеля (5.80), находим искомое решение

$$x = \int_0^t \sin\tau \cdot \frac{1}{t-\tau+1}\,d\tau.$$

§ 26. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

26.1. Понятие о краевой задаче

Наряду с задачей Коши, которая является основной задачей теории дифференциальных уравнений, большое значение как для теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений имеет задача, в которой, в отличие от задачи Коши, дополнительные условия на искомое решение задаются не в одной точке, а на концах некоторого промежутка $[a, b]$, внутри которого ищется решение. Такие условия называются *граничными* (*предельными*) или *краевыми*, а сама задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым условиям, называется *краевой задачей*.

Простейшими краевыми условиями являются условия вида

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Геометрически здесь речь идет о нахождении интегральной кривой, концы которой находятся в заданных точках (a, A) и (b, B).

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'' = 0, \tag{5.82}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{5.83}$$

Так как все решения уравнения (5.82) содержатся в формуле

$$y = C_1 x + C_2, \tag{5.84}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, то для нахождения искомого решения нам нужно выбрать C_1 и C_2 так, чтобы выполнились краевые условия (5.83). Имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 x_1 + C_2, \\ y_2 &= C_1 x_2 + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Разрешая эту систему относительно C_1 и C_2 и подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (5.84), получим искомое решение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (x_1 \le x \le x_2).$$

Это есть о т р е з о к прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), заключенный между точками с абсциссами x_1 и x_2.

В рассмотренном примере оказалось, что решение краевой задачи существует и единственно. Но, как правило, если решение краевой задачи и существует, то оно неединственно.

П р и м е р 2. Пусть поставлена краевая задача

$$y'' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Здесь решением, очевидно, будет любая функция вида

$$y = C \sin x \quad (0 \le x \le \pi),$$

так что поставленная краевая задача имеет бесчисленное множество решений.

К решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся многие задачи математической физики и вариационного исчисления.

Мы встретимся с примерами краевых задач при интегрировании некоторых простейших уравнений математической физики в гл. 7.

26.2. Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим вопрос о решении простейшей краевой задачи для линейного уравнения второго порядка. Пусть дано уравнение

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f_1(x), \tag{5.85}$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f_1(x) \in C[x_0, x_1]$ и требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{5.86}$$

Сделаем стандартизацию краевой задачи (5.85), (5.86), преобразовав уравнение (5.85) и краевые условия к специальному виду.

Преобразуем уравнение (5.85), приведя соответствующее однородное уравнение к *самосопряженному виду* (см., например, [71, с. 266])

$$p(x)\,y'' + p'(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{5.87}$$

или

$$(p(x)\,y')' + q(x)\,y = f(x).$$

Для этого умножим обе части уравнения (5.85) на функцию

$$\mu = e^{\int p_1(x)\,dx}.$$

Получим

$$y'' \cdot e^{\int p_1(x)\,dx} + p_1(x) \cdot e^{\int p_1(x)\,dx}\,y' +$$
$$+ e^{\int p_1(x)\,dx}\,p_2(x)\,y = e^{\int p_1(x)\,dx}\,f_1(x)$$

или

$$\left(e^{\int p_1(x)\,dx}\,y'\right)' + e^{\int p_1(x)\,dx} \cdot p_2(x)\,y = e^{\int p_1(x)\,dx}\,f_1(x),$$

так что

$$p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx} > 0, \quad q(x) = e^{\int p_1(x)\,dx} \cdot p_2(x),$$
$$f(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}\,f_1(x).$$

Заменим краевые условия (5.86) нулевыми краевыми условиями. Для этого сделаем замену искомой функции y по формуле

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0.$$

Получим

$$z(x_0) = 0, \quad z(x_1) = 0.$$

Таким образом, не умаляя общности, достаточно найти решение краевой задачи в *стандартной форме*

$$(p(x)\,y')' + q(x)\,y = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0. \qquad (5.88)$$

С этой целью введем в рассмотрение функцию $G(x, s)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $G(x, s)$ непрерывна по x при фиксированном s при $x \in [x_0, x_1]$, $s \in (x_0, x_1)$.

2. $G(x, s)$ является решением соответствующего однородного уравнения

$$(p(x)\,z')' + q(x)\,z = 0$$

на всем промежутке $[x_0, x_1]$, за исключением точки $x = s$.

3. $G(x, s)$ удовлетворяет нулевым краевым условиям

$$G(x_0, s) = 0, \quad G(x_1, s) = 0.$$

4. В точке $x = s$ производная $G'_x(x, s)$ имеет разрыв первого рода со скачком $\frac{1}{p(s)}$:

$$G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Функция $G(x, s)$, удовлетворяющая условиям 1.—4., называется *функцией Грина* краевой задачи (5.88).

Докажем, что функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\,f(s)\,ds \qquad (5.89)$$

является решением краевой задачи (5.88).

Для этого достаточно убедиться, что функция (5.89) удовлетворяет уравнению (5.87), ибо нулевым краевым условиям она, очевидно, удовлетворяет.

Прежде чем подставлять функцию (5.89) в уравнение (5.87), вычислим y' и y''. Для этого нам потребуется известная (см., например, [120, II, с. 146]) общая формула дифференцирования определенного интеграла по параметру в случае, когда и пределы интеграла зависят от параметра

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx\right) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\,dx +$$

$$+ \beta'(y)\,f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\,f(\alpha(y), y).$$

Используя эту формулу и свойства функции Грина $G(x, s)$, находим:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int_{x}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\, ds,$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} G''_{x^2}(x, s) f(s)\, ds + G'_x(x, x-0) f(x) + \int_{x}^{x_1} G''_{x^2}(x, s) f(s)\, ds -$$

$$- G'_x(x, x+0) f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G''_{x^2}(x, s) f(s)\, ds +$$

$$+ \left[G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)\right] f(x).$$

Подставляя теперь (5.89) в (5.87), имеем

$$p(x) \int_{x_0}^{x_1} G''_{x^2}(x, s) f(s)\, ds + f(x) + p'(x) \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\, ds +$$

$$+ q(x) \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s)\, ds = f(x)$$

или

$$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)\, G''_{x^2}(x, s) + p'\, G'_x(x, s) + q\, G(x, s)]\, f(s)\, ds + f(x) = f(x).$$

Это равенство выполняется для всех $x \in [x_0, x_1]$, так как первое слагаемое в левой части тождественно равно нулю (почему?).

Следовательно, функция (5.89) является решением уравнения (5.87).

26.3. Построение функции Грина

Следуя Л. Э. Эльсгольцу [132, с. 159], покажем, как можно построить функцию Грина краевой задачи (5.88), используя решения специальных задач Коши для соответствующего однородного уравнения.

Специфика упомянутых задач Коши состоит в том, что в качестве одного из начальных условий в каждой задаче берется одно из краевых условий.

Найдем решение $z_1(x)$ задачи Коши

$$(p(x)z')' + q(x)z = 0, \quad z(x_0) = 0, \quad z'(x_0) = z'_0 \neq 0.$$

Решение $z_1(x)$, как видим, удовлетворяет первому краевому условию. Это решение ненулевое (почему?). Оно определено во всем $[x_0, x_1]$, будучи решением (однородного) линейного уравнения с непрерывными коэффициентами. Предположим, что $z_1(x_1) \neq 0$, так что оно не удовлетворяет второму краевому условию. Очевидно, все функции семейства $C_1 z_1(x)$ (C_1 — произвольная постоянная) тоже удовлетворяет первому краевому условию.

Аналогично найдем решение $z_2(x)$ задачи Коши

$$(p(x)z')' + q(x)z = 0, \quad z(x_1) = 0, \quad z'(x_1) \neq 0.$$

Решение $z_2(x)$ удовлетворяет второму краевому условию и вместе с ним этому условию удовлетворяют все функции $C_2 z_2(x)$ (C_2 — произвольная постоянная).

Отметим, что построенные нами решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно независимы, так как мы предположили, что $z_1(x_1) \neq 0$.

В самом деле, если бы $z_2(x)$ зависело линейно от $z_1(x)$, то оно должно было бы содержаться в семействе $C_1 z_1(x)$ при некотором $C_1 \neq 0$ (почему?). Но тогда $z_2(x)$ не могло бы удовлетворять второму краевому условию, так как ему не удовлетворяет $z_1(x)$.

Используем теперь $z_1(x)$ и $z_2(x)$ для построения функции Грина. Будем искать ее в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 z_1(x) & \text{при} \quad x_0 \leq x \leq s, \\ c_2 z_2(x) & \text{при} \quad s \leq x \leq x_1, \end{cases} \tag{5.90}$$

где c_1 и c_2 пока неопределенные коэффициенты. Функция (5.90), очевидно, удовлетворяет условиям 2. и 3. Выберем теперь c_1 и c_2 так, чтобы она удовлетворяла и условиям 1. и 4.

Функция (5.90) должна быть непрерывна как функция от x при фиксированном s и, в частности, при $x = s$. Поэтому c_1 и c_2 должны удовлетворять условию

$$c_1 z_1(s) = c_2 z_2(s).$$

Далее, скачок $G'_x(x, s)$ в точке $x = s$ должен быть равен $\frac{1}{p(s)}$:

$$c_2 z_2'(s) - c_1 z_1'(s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Таким образом, c_1 и c_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} z_1(s)\, c_1 - z_2(s)\, c_2 &= 0, \\ z_1'(s)\, c_1 - z_2'(s)\, c_2 &= -\frac{1}{p(s)}. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель этой системы, будучи равным — $W(s)$, отличен от нуля, то она имеет единственное (ненулевое) решение. Этим решением будет

$$c_1 = \frac{z_2(s)}{p(s)\, W(s)}, \quad c_2 = \frac{z_1(s)}{p(s)\, W(s)}.$$

Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в формулу (5.90), получим

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{z_2(s) \cdot z_1(x)}{p(s)\, W(s)}, & x_0 \le x \le s, \\ \dfrac{z_1(s) \cdot z_2(x)}{p(s)\, W(s)}, & s \le x \le x_1. \end{cases}$$

Функция Грина построена.

Пример 3. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(x); \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

В качестве решения $z_1(x)$ задачи Коши

$$z'' + z = 0; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = z_0' \ne 0$$

можно взять $z_1(x) = \sin x$. Оно не удовлетворяет второму краевому условию.

В качестве решения $z_2(x)$ задачи Коши

$$z'' + z = 0; \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \ne 0$$

возьмем $z_2(x) = \cos x$.

Так как $W(s) = -1$, $p(s) = 1$, то $c_1 = -\cos s$, $c_2 = -\sin s$. Поэтому

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \cdot \sin x, & 0 \le x \le s, \\ -\sin s \cdot \cos x, & s \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задачи к главе 5

В задачах 69—83 проинтегрировать однородное линейное уравнение:

69. $y'' - 6y' + 8y = 0.$ **70.** $y'' + 3y' + 2y = 0.$

71. $y'' + 3y' = 0.$ **72.** $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

73. $y'' - y' + y = 0.$ **74.** $y'' + 2y' + 2y = 0.$

75. $y^{(4)} - y = 0.$ **76.** $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$

77. $y^{(4)} + y = 0.$

Указание. Воспользоваться формулой извлечения корня n-й степени из комплексного числа ($z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

78. $y^{(6)} - y = 0.$

79. $y'' = 0.$ **80.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

81. $y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0.$ **82.** $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$

83. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

В задачах 84—94 проинтегрировать неоднородное линейное уравнение, найдя предварительно его частное решение методом неопределенных коэффициентов:

84. $y'' - y = x^2 - x + 1.$ **85.** $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4.$

86. $y'' + y' = 3.$ **87.** $y'' - y = 4e^x.$

88. $y''' - y'' = -3x + 1.$ **89.** $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x.$

90. $y'' + y = 6\sin 2x.$ **91.** $y'' + 4y = \sin 2x.$

92. $y'' - 4y = e^x\,[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x].$

93. $y'' - 2y' + 2y = e^x\,(2\cos x - 4x\sin x).$

94. $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x.$

В задачах 95—97 определить вид частного решения:

95. $y'' + y = x\cos x.$ **96.** $y''' + y'' + y' + qy = 2.$

97. $y''' + 2y'' + y' = (2x + 1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x.$

98. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$$

методом вариации произвольных постоянных.

В задачах 99—103 найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным или граничным условиям:

99. $y^{(4)} - y = 0;\ y = 1,\ y' = 1,\ y'' = 1,\ y''' = 1$ при $x = 0.$

100. $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0;\ y = 0,\ y' = 0,\ y'' = 0,\ y''' = 0,\ y^{(4)} = 0$ при $x = 1.$

101. $y'' + y = 0$; $y = 0$ при $x = 0$, $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

102. $y'' + y = 0$; $y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ при $x = \pi$.

103. $y'' + y = x$; $y = 1$ при $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

104. Материальная точка массы m движется по оси x, находясь под действием силы $(-ax)$, притягивающей ее к началу координат, силы сопротивления среды $\left(-b\frac{dx}{dt}\right)$ и возмущающей силы, направленной по оси x и равной $F(t)$ в момент времени t. Составить дифференциальное уравнение движения этой точки.

Указание. Воспользоваться законом Ньютона, согласно которому произведение массы тела на ускорение равно силе, действующей на тело. Ввести обозначения: $h = \frac{b}{2m}$, $k^2 = \frac{a}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

105. Проинтегрировать дифференциальное уравнение предыдущей задачи в предположении, что $f(t) \equiv 0$, $h = 0$ (случай свободных колебаний в среде без сопротивления). Найти период и частоту колебаний. Найти амплитуду и начальную фазу колебания, если заданы начальные условия: $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ при $t = 0$.

Рассмотреть случаи: а) $k = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 1$; б) $k = 1$, $x_0 = 2$, $v_0 = 0$.

В задачах 106—107 построить фундаментальную систему решений y_1, y_2 уравнения, нормированную в точке $x = 0$ ($y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$; $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$):

106. $y'' + k^2 y = 0$. **107.** $y'' - k^2 y = 0$.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит метод Эйлера построения фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами? Какой вид имеют фундаментальная система решений и общее решение в случае различных и кратных корней характеристического уравнения?

2. Как распространяется метод Эйлера для уравнения второго порядка на случай уравнения n-го порядка? Какой вклад в фундаментальную систему решений вносят простые и кратные характеристические числа?

3. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов для нахождения частных решений неоднородного линейного уравнения n-го порядка?

4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение, описывающее движение точки массы m по прямой, которую мы принимаем за ось x, если на точку действуют три силы: 1) восстанавливающая сила — сила, притягивающая точку к началу координат $(-ax)$ $(a > 0)$; сила сопротивления среды $\left(-b\,\frac{dx}{dt}\right)$ $(b \geq 0)$; возмущающая сила, направленная по оси x и равная $F(t)$ (t — время)? Когда это уравнение называют соответственно уравнением свободных и вынужденных колебаний?

5. Как интегрируется уравнение свободных колебаний в среде без сопротивления? Какой вид имеет общее решение? Что такое гармоническое колебание, его амплитуда, период, частота и начальная фаза? Как зависят амплитуда и начальная фаза от начальных значений искомой функции и ее производной? Как ведут себя все движения по отношению к состоянию покоя?

6. Как интегрируется уравнение свободных колебаний в среде с сопротивлением? Какой вид имеет общее решение при различных соотношениях между силой сопротивления среды и восстанавливающей силой? Что такое затухающее гармоническое колебание, его период, частота, амплитуда и начальная фаза? Что такое начальная амплитуда? Каково поведение амплитуды при $t \to \infty$? Сравните со случаем свободных колебаний. Как ведут себя все движения, определяемые уравнением свободных колебаний в среде с сопротивлением, по отношению к состоянию покоя? Как влияет наличие сопротивления на характер колебаний?

7. Как интегрируется уравнение вынужденных колебаний в среде без сопротивления в случае периодической возмущающей силы, имеющей синусоидальный характер? Что такое резонанс?

8. Изложите основные понятия операционного исчисления и основные свойства преобразования Лапласа.

9. Как решается задача Коши операционным методом? Приведите примеры.

10. В чем состоит метод решения краевой задачи для линейного уравнения второго порядка, связанный с отысканием функции Грина?

Глава 6
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 27. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

27.1. Понятие о системе дифференциальных уравнений и ее решении

Совокупность соотношений вида

$$F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.1}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции от независимой переменной x, а F_k — известные функции от своих аргументов, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*. Всякая **совокупность** n функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{6.2}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), называется *решением* системы (6.1) в этом интервале, если она обращает все уравнения системы (6.1) в тождества, справедливые при всех значениях x из интервала (a, b). Процесс нахождения решений системы (6.1) называется *интегрированием* этой системы. График решения (6.2) называется *интегральной кривой* системы (6.1).

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2y'^2 - z &= 0, \\ z' - 2y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Эта система имеет решение

$$y = x, \quad z = x^2 \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{6.4}$$

Действительно, подставляя (6.4) в (6.3), получаем тождества

$$\left.\begin{aligned} x^2 \cdot 1 - x^2 &\equiv 0, \\ 2x - 2 \cdot x &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

27.2. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений

Мы будем рассматривать в основном системы дифференциальных уравнений, разрешенные относительно производных от искомых функций:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.5}$$

Такие системы называются системами обыкновенных дифференциальных уравнений в *нормальной форме* или *нормальными системами*.

Если правые части системы (6.5) зависят от искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ **линейно**, т. е. эта система имеет вид:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.6}$$

то она называется *линейной системой дифференциальных уравнений*.

Из линейных систем наиболее важными являются системы с **постоянными** коэффициентами:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.7}$$

Пример 2. Система

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2y, \\ z' &= y + 2z \end{aligned}\right\}$$

является линейной системой с постоянными коэффициентами. Она имеет решения

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0, & z_1 &= e^{2x}, \\ y_2 &= e^{2x}, & z_2 &= xe^{2x} \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(Убедитесь в этом!).

Линейные системы, так же, как и линейные уравнения, обладают рядом замечательных свойств и имеют многочисленные приложения. Они используются также и в теории нелинейных систем в качестве «первого приближения» (см., например [70], с. 649) и при изучении вопросов общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

27.3. Запись нормальной системы дифференциальных уравнений и ее решения в векторной форме

Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \operatorname{colon}[y_1, \dots, y_n], \qquad (6.8)$$

компонентами которого являются искомые функции $y_1, \dots, y_n$ нормальной системы (6.5). Определим производную этого вектора по независимой переменной x равенством

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}. \qquad (6.9)$$

Компонентами этого вектора являются левые части системы (6.5).

Наряду с векторами (6.8) и (6.9) введем еще вектор

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

компонентами которого являются известные функции $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$, стоящие в правых частях нормальной системы (6.5).

Теперь мы можем, используя известное условие равенства векторов, записать нормальную систему (6.5) в виде одного векторного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (6.10)$$

Таким образом, мы заменили n скалярных уравнений одним векторным уравнением, которое по внешнему виду совпадает с дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Таким образом, уравнение вида (6.10) является одновременно и обыкновенным (скалярным) дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме и нормальной системой дифференциальных уравнений. При этом из контекста всегда ясно, о чем идет речь, об одном уравнении или о системе уравнений.

Вектор (вектор-функцию)

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

где $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ есть решение системы (6.5), будем называть *решением* векторного уравнения (6.10) (или системы уравнений (6.5)) в промежутке (a, b), если $y(x) \in C^{(1)}(a, b)$, т. е. все компоненты вектора $y(x)$ непрерывно дифференцируемы в (a, b) и если этот вектор обращает уравнение (6.10) в тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)),$$

справедливое для всех $x \in (a, b)$.

Запись нормальной системы (6.5) и ее решения (6.2) в векторной форме особенно удобна и полезна в случае линейной системы (см. § 31).

27.4. Задача Коши для нормальной системы

Задача Коши, или начальная задача для уравнения первого порядка в нормальной форме

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

обобщается на случай нормальной системы дифференциальных уравнений (6.5). Она ставится так: найти решение (6.2), удовлетворяющее начальным условиям (условиям Коши)

$$y_1(x) = y_1^0, \ \ldots, \ y_n(x) = y_n^0 \ \text{ при } \ x = x_0, \tag{6.11}$$

где $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа (*начальные данные*). Если $y_1^{(0)} = \ldots = y_n^{(0)} = 0$, то задача Коши называется *нулевой*.

Геометрически ищется интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ $(n+1)$-мерного пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Искомое решение задачи Коши (6.5), (6.11) аналогично случаю уравнения первого порядка (см. (1.11)) записывается в виде:

$$y_k = y_k(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{6.12}$$

Здесь возникают и имеют существенное значение вопросы существования и единственности решения (6.12) и зависимости его от независимой переменной x и начальных данных. При этом особое значение для теории и приложений имеет зависимость от начальных значений искомых функций (см. § 42).

Аналитическое представление решения (6.12) зависит от аналитических свойств правых частей системы (6.5).

Наиболее полно свойства решения задачи Коши изучены для линейных систем, где решающую роль играют коэффициенты системы.

Дадим постановку задачи Коши для нормальной системы, записанной в векторной форме, т. е. для векторного уравнения (6.10). Здесь задача Коши ставится так: найти решение (6.8) уравнения (6.10), удовлетворяющее начальному условию (условию Коши)

$$y = y^0 \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где

$$y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

заданный начальный вектор.

Решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y^0$$

может быть записано в виде

$$y = y(x; x_0, y^0).$$

Это есть в е к т о р н а я запись формулы (6.12).

В частности, в случае н у л е в о й задачи Коши пишут

$$y = y(x; x_0, 0),$$

где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

27.5. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения

Рассмотрим нормальную систему вида

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.13}$$

где t — время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$. Это пространство будем называть *фазовым пространством*. В случае $n=1$ фазовое пространство есть ось x (см. § 1); при $n=2$ плоскость (x, y) — *фазовая плоскость*.

Всякое решение

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ \ldots, \ x_n = x_n(t) \tag{6.14}$$

(интегральная кривая) системы (6.13) представляет собой *закон движения* точки в фазовом пространстве. Поэтому решение (6.14) называют просто *движением*, определяемым системой дифференциальных уравнений (6.13), а путь, описываемый точкой в фазовом пространстве,— *фазовой траекторией* этого движения. Последняя является проекцией движения (6.14) в фазовое пространство $\boldsymbol{R}^n$.

Левые части системы (6.13) суть составляющие (по осям координат) **скорости** движения точки. Поэтому система (6.13) задает так называемое *поле скоростей* движений, так что точка может проходить в момент времени t через положение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ только с заданной скоростью. Требуется найти сами движения и изучить их свойства.

Если скорость, с которой точка проходит через положение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не зависит явно от момента времени прохождения, т. е. система (6.13) имеет вид

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{6.15}$$

то она называется *стационарной* или *автономной* системой.

Автономная система, в отличие от систем общего вида, обладает так же, как и автономное уравнение первого порядка (см. 1.18) тем замечательным свойством, что если (6.14) есть решение системы (6.15), то

$$x_1 = x_1(t+\tau), \ \ldots, \ x_n = x_n(t+\tau) \quad (\tau \in \boldsymbol{R})$$

тоже является решением этой системы (см. [71, с. 118]; [96, с. 103]).

Нормальная система (6.13) может быть записана в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{6.16}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad X(t, x) = \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(t, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}.$$

Решению (6.14) системы (6.13) соответствует решение

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

векторного уравнения (6.16).

Стационарная система (6.15) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x).$$

Если система (6.13) такова, что в некоторой точке (x_1^0, ..., x_n^0) ее правые части равны нулю при всех рассматриваемых значениях времени t, т. е.

$$X_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

то она определяет движение

$$x_1 \equiv x_1^0, \dots, x_n \equiv x_n^0$$

(почему?). Это движение называется *состоянием покоя*. Его траекторией является **точка** (x_1^0, ..., x_n^0), называемая *точкой покоя*.

Задача Коши, или *начальная задача* для системы (6.13), состоит в нахождении движения (6.14), удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{6.17}$$

где t_0, x_1^0, ..., x_n^0 — заданные числа (*начальные данные*), т. е. ищется такое движение (6.14), при котором движущаяся точка находится в заданной точке (x_1^0, ..., x_n^0) фазового пространства в заданный момент времени t_0.

Задача Коши (6.13), (6.17) может быть записана в векторной форме так:

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где

$$x^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

— заданный *начальный* вектор.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=y, \\ \frac{dy}{dt}&=-x. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Найдем движения, определяемые этой системой, и изучим их свойства. Заметим, что система (6.18) автономная. Начало координат $x=0$, $y=0$ является точкой покоя, ибо правые части системы (6.18) обращаются в этой точке в нуль при всех значениях времени t. Этой точке соответствует движение

$$x\equiv 0, \quad y\equiv 0 \tag{6.19}$$

— состояние покоя.

Найдем все другие движения и выясним, как они ведут себя по отношению к состоянию покоя (6.19). Проведем сначала предварительное исследование характера движений, определяемых системой (6.18). Для этого изучим поле скоростей.

В точках оси x имеем

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=-x,$$

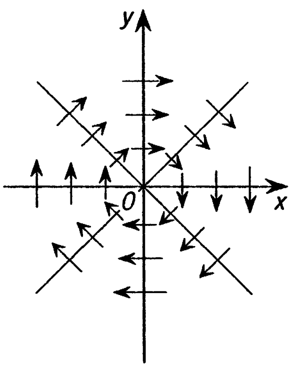

Рис. 39*а*

т. е. составляющая скорости по оси x равна нулю, а составляющая по оси y зависит от x. Направления движений в точках оси x указаны на рисунке 39*а*. Аналогично устанавливаются направления движений в точках, лежащих на оси y и на биссектрисах координатных углов.

Проинтегрируем теперь систему (6.18). Желая исключить одну неизвестную функцию, например y, найдем производные по t от обеих частей первого уравнения этой системы и заменим $\frac{dy}{dt}$ ее значением из второго уравнения. Получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0. \tag{6.20}$$

Уравнение (6.20) имеет общее решение

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

Так как $y=\frac{dx}{dt}$, то $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$.

Таким образом, все решения системы (6.18) даются формулой

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1\cos t+C_2\sin t,\\ y&=-C_1\sin t+C_2\cos t.\end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

Из этой формулы видно, что **всякое решение** системы (6.18) **2π-периодично и ограничено**.

Исключив из уравнений движений (6.21) время t, найдем траектории движений:

$$x^2+y^2=C_1^2+C_2^2.$$

Это окружности с центром в начале координат (в точке покоя системы (6.18)). Движения по этим окружностям происходят в направлении, указанном стрелками на рисунке 39б.

Найдем движение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x=x_0, \quad y=y_0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Заменяя в (6.21) переменные t, x и y числами 0, x_0 и y_0, имеем

$$x_0=C_1, \quad y_0=C_2.$$

Подставляя эти значения произвольных постоянных в (6.21), получим

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0\cos t+y_0\sin t,\\ y&=-x_0\sin t+y_0\cos t.\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

Других решений нет, так как формула (6.21) содержит все решения системы (6.18).

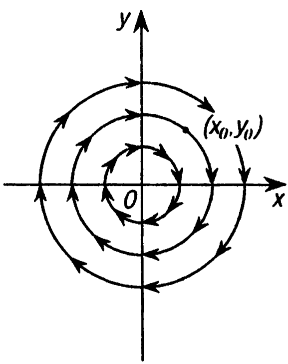

Рис. 39б

Траектория движения, проходящего при $t = 0$ через начальную точку (x_0, y_0), имеет вид (рис. 39б)

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Если $x_0 = y_0 = 0$, то движение (6.22) перейдет в состояние покоя (6.19).

Если начальные данные x_0, y_0 не равны одновременно нулю, но достаточно малы, то соответствующие им движения (6.22) *будут сколь угодно близки к состоянию покоя при всех $t \geq 0$.*

§ 28. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

28.1. Теорема существования и единственности решения нормальной системы

Теорема Пикара, сформулированная в § 2 для уравнения первого порядка в нормальной форме, распространяется и на нормальную систему (6.5).

Теорема Пикара. *Если правые части системы* (6.5) *непрерывны в некоторой окрестности начальной точки* $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ *и имеют непрерывные в этой окрестности частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то система* (6.5) *имеет единственное решение* (6.12), *определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям* (6.11).

Условия теоремы Пикара, в частности, заведомо выполнены, если правые части нормальной системы суть **полиномы** относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, коэффициенты которых **непрерывны** в окрестности начального значения x_0. При этом начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ *можно брать* **произвольно.**

28.2. Случай линейной системы. Выбор начальных данных. Интервал существования решения

Теорема Пикара для **линейной** системы (6.6) имеет те же две особенности, что и в случае линейного уравнения первого порядка: 1) начальные значения искомых функций можно задавать произвольно, а начальное значение независимой переменной можно брать любым из интервала (a, b), в котором коэффициенты $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, ..., n)$ и функции $f_k(x)$ $(k = 1, ..., n)$ непрерывны; 2) решение задачи Коши определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале (a, b).

Если, в частности, все $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ непрерывны при всех значениях x, то все начальные данные можно выбирать совершенно произвольно, и решение существует при всех x.

Задачу Коши для нормальной системы (6.5) не всегда удается решить в точном виде, поэтому возникает необходимость построения приближенных методов нахождения решения задачи Коши.

Рассмотренный в § 2 метод последовательных приближений (метод Пикара) для одного уравнения первого порядка в нормальной форме при выполнении условий сформулированной выше теоремы Пикара распространяется на нормальную систему n уравнений. Этот метод применяется и для нахождения приближенного решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме, так как последнее, как показано ниже, всегда может быть приведено к нормальной системе n уравнений.

§ 29. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ И ЧАСТНОМ РЕШЕНИЯХ

29.1. Общее решение. Общее решение в форме Коши

Рассмотрим нормальную систему (6.5)

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Пусть D есть область в пространстве $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая системы (6.5).

Для этого достаточно предположить, что в каждой точке области D функции $f_1, f_2, ..., f_n$ непрерывны относительно всех своих аргументов и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$.

Совокупность n функций

$$y_k = \varphi_k(x, C_1, C_2, ..., C_n) \quad (\kappa = 1, ..., n), \tag{6.23}$$

определенных в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, ..., C_n и непрерывно дифференцируемых относительно x, называется *общим решением* системы (6.5) *в области* D, если:

1) система (6.23) разрешима в области D относительно произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n:

$$C_k = \psi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{6.24}$$

2) совокупность функций (6.23) является решением системы (6.5) при всех значениях произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, доставляемых формулами (6.24), когда точка $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пробегает область D.

Знание общего решения (6.23) дает возможность решить задачу Коши с любыми начальными данными x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ из области D за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n. Для этого достаточно заменить в (6.23) величины x, y_1, y_2, ..., y_n начальными данными x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$:

$$y_k^{(0)} = \varphi_k(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{6.25}$$

разрешить систему (6.25) относительно C_1, C_2, ..., C_n:

$$C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ \ldots,\ C_n = C_n^{(0)}$$

и подставить найденные значения произвольных постоянных в (6.23). Получим

$$y_k = \varphi_k(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Это и есть искомое решение. Оно единственно.

Если в общем решении (6.23) роль произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n играют начальные значения $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ искомых функций y_1, y_2, ..., y_n при некотором фиксированном значении x_0 независимой переменной

$$y_k = y_k(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

то такую запись общего решения будем называть *общим решением в форме Коши*.

Пример. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y, \\ \frac{dz}{dx} &= y + z. \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

Это есть **линейная** система с постоянными коэффициентами; она может быть проинтегрирована последовательно, ибо первое уравнение не содержит z. Интегрируя это уравнение, подставляя общее решение во второе уравнение и интегрируя полученное уравнение, найдем z. Имеем

$$y = C_1 e^x,$$
$$\frac{dz}{dx} = C_1 e^x + z,$$

откуда

$$z = e^x (C_2 + C_1 x).$$

Совокупность функций

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^x, \\ z &= e^x (C_2 + C_1 x) \end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

является **общим решением** системы (6.26) во всем пространстве (x, y, z).

Действительно, в окрестности любой точки (x_0, y_0, z_0) выполняются условия теоремы Пикара, так что через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая системы (6.26).

Совокупность функций (6.27) удовлетворяет обоим условиям, указанным в определении общего решения:

1) система (6.27) разрешима относительно C_1 и C_2 во всем пространстве (x, y, z):

$$C_1 = ye^{-x},$$
$$C_2 = ze^{-x} - xye^{-x};$$

2) функции (6.27) образуют решение системы (6.26) при всех значениях C_1 и C_2. Поэтому (6.27) есть общее решение системы (6.26) во всем пространстве (x, y, z).

Найдем решение с начальными данными x_0, y_0, z_0. Решая систему

$$y_0 = C_1 e^{x_0},$$
$$z_0 = e^{x_0} (C_2 + C_1 x_0)$$

относительно C_1 и C_2, найдем

$$C_1 = y_0 e^{-x_0} \equiv C_1^{(0)},$$
$$C_2 = z_0 e^{-x_0} - x_0 y_0 e^{-x_0} \equiv C_2^{(0)}.$$

Искомым решением будет

$$y = C_1^{(0)} e^x,$$
$$z = e^x (C_2^{(0)} + C_1^{(0)} x).$$

В частности, при $x_0 = 0$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 e^x, \\ z &= e^x (z_0 + y_0 x). \end{aligned} \right\}$$

Если здесь считать y_0 и z_0 произвольными, то получим **общее решение** системы (6.26) **в форме Коши**.

29.2. Частное решение

Решение нормальной системы дифференциальных уравнений называется *частным*, если в каждой его точке имеют место существование и единственность решения задачи Коши. Всякое решение, содержащееся в формуле общего решения, является частным решением (почему?).

§ 30. СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА И СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

30.1. Приведение дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме к нормальной системе n дифференциальных уравнений

Уравнение n-го порядка (3.19)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

всегда можно привести к нормальной системе n уравнений. С этой целью обозначим искомую функцию y через y_1 и примем $y', \ldots, y^{(n-1)}$ за новые неизвестные функции, положив

$$y' = y_2,\ y'' = y_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_n. \tag{6.28}$$

Составим систему дифференциальных уравнений для функций

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Имеем

$$y_1' = y' = y_2,\ y_2' = y'' = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$
$$y_n' = y^{(n)} = f\,(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Поэтому для функций y_1, y_2, ..., y_n получим следующую нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &y_1' = y_2,\\ &y_2' = y_3,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &y_{n-1}' = y_n,\\ &y_n' = f\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Отыскав решение системы (6.29), найдем и решение уравнения (3.19), так как $y \equiv y_1$.

Если уравнение n-го порядка **линейное**, то и соответствующая ему нормальная система будет **линейной**.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Приведем его к нормальной системе двух уравнений; для этого введем неизвестную функцию y, положив $\frac{dx}{dt} = y$.

Тогда для функций x и y получим следующую нормальную систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = y,\\ &\frac{dy}{dt} = -\,k^2x. \end{aligned}\right\}$$

30.2. Задача о приведении нормальной системы дифференциальных уравнений к одному уравнению

Пусть дана нормальная система n уравнений (6.5)

$$\left.\begin{aligned} &y_1' = f_1\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &y_2' = f_2\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &y_n' = f_n\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\}$$

Одним из способов интегрирования этой системы является так называемый *метод исключения*. Он состоит в том, что из системы (6.5) при помощи дифференцирования одного из уравнений и замены $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ их значениями из системы (6.5) пытаются исключить все искомые функции, кроме одной, для которой, вообще говоря, получается уравнение n-го порядка. Найдя общее решение этого уравнения, находим остальные неизвестные функции без дальнейших квадратур. Именно так мы и поступали в § 27, интегрируя систему (6.18).

На деле не всегда удается привести указанным способом систему (6.5) к одному уравнению n-го порядка, но можно доказать, что тогда система (6.5) приводится к группе уравнений (с одной неизвестной функцией каждое), сумма порядков которых равна n.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + z, \\ \frac{dz}{dt} &= x + y. \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

Дифференцируя первое уравнение и пользуясь вторым и третьим, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + y + z,$$

но $y + z = \frac{dx}{dt}$; поэтому

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + \frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0. \tag{6.31}$$

Получили одно уравнение второго порядка.

Согласно сказанному выше надо получить еще одно уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией: y или z. Исключим z из первых двух уравнений системы (6.30). Вычитая почленно первое уравнение из второго, имеем

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = x - y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dt} + y = x + \frac{dx}{dt}. \tag{6.32}$$

Это и есть искомое уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией y (правая часть уравнения (6.32) есть **известная** функция от t, ибо x определяется из уравнения (6.31)). Проинтегрировав последовательно уравнения (6.31), (6.32), найдем x и y, после чего найдем z:

$$z = \frac{dx}{dt} - y. \tag{6.33}$$

Из уравнения (6.31) найдем

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{6.34}$$

Подставляя в (6.32), имеем

$$\frac{dy}{dt} + y = 3C_2 e^{2t},$$

откуда

$$y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{6.35}$$

Наконец, из (6.33) найдем z:

$$z = -(C_1 + C_3)\, e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{6.36}$$

Формулы (6.34), (6.35) и (6.36) образуют общее решение системы (6.30) в области

$$|t| < +\infty, \ |x| < +\infty, \ |y| < +\infty, \ |z| < +\infty.$$

§ 31. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

31.1. Однородные и неоднородные линейные системы. Векторно-матричная запись

Рассмотрим линейную систему (6.6)

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где $p_{kl}(x)$, $f_k(x) \in C(a, b)$. Если все $f_k(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, то линейная система (6.6) принимает вид

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.37}$$

и называется (аналогично линейному уравнению первого и высших порядков) *однородной* линейной системой. В противном случае линейная система (6.6) называется *неоднородной*.

Теория линейных систем (свойства систем и их решений, структура общего решения и специальные методы интегрирования) аналогична теории линейных уравнений n-го порядка.

Линейная система (6.6), так же, как и любая нормальная система, может быть записана в векторной форме (см. § 27). При этом вектор — функция, соответствующая правой части системы (6.6), может быть представлена как сумма двух вектор-функций $P(x)y$ и $f(x)$, где $P(x)$ — известная матрица коэффициентов системы (6.6),

$$P(x)=\begin{pmatrix} p_{11}(x), p_{12}(x), \ldots, p_{1n}(x) \\ p_{21}(x), p_{22}(x), \ldots, p_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1}(x), p_{2n}(x), \ldots, p_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

y — искомая вектор-функция (6.8), вектор $P(x)y$ — произведение матрицы $P(x)$ на вектор y, а $f(x)$ — известная вектор-функция

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

В результате системе (6.6) будет соответствовать векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y+f(x),$$

которое в отличие от векторного уравнения (6.10) соответствующего нормальной системе общего вида (6.5) будем называть *векторно-матричным* уравнением.

Векторно-матричное уравнение, соответствующее однородной линейной системе (6.37), будет иметь вид

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y. \qquad (6.38)$$

Линейной системе с постоянными коэффициентами (6.7)

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l+f_k(x) \quad (k=1, \ldots, n)$$

будет соответствовать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Векторно-матричное уравнение, соответствующее однородной линейной системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l \quad (k = 1, \ldots, n),$$

будет иметь вид

$$\frac{dy}{dx} = Ay.$$

31.2. Фундаментальная система решений и определитель Вронского

Однородная линейная система (6.37) обладает тем же замечательным свойством, что и однородное линейное уравнение: решения системы (6.37) образуют *линейное* (векторное) *пространство*, т. е. произведение решения системы (6.37) на число c и сумма решений тоже являются решениями этой системы, если при этом рассматривать решение (6.2)

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$$

системы (6.37) как вектор (6.8) с компонентами $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ (как это сделано в п. 27.3)

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

и определять операции умножения решения на число c и сложения двух решений по известным правилам действий с векторами

$$cy(x) = \begin{pmatrix} cy_1(x) \\ \vdots \\ cy_n(x) \end{pmatrix}, \quad y^{(1)} + y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} + y_1^{(2)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} + y_n^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad (6.39)$$

где

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \quad y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

(здесь верхний индекс — номер решения, а нижний — номер искомой функции в этом решении).

Действительно, подставляя (6.39) в уравнение (6.38), получим тождества, справедливые для всех $x \in (a, b)$ (убедитесь в этом!).

Из линейности пространства решений однородной линейной системы следует, что линейная комбинация любого конечного числа решений $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ с произвольными коэффициентами $C_1, \ldots, C_m$,

$$y = \sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \tag{6.40}$$

тоже будет решением системы (6.38) (почему?). Здесь каждая компонента $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ решения $y(x)$ есть линейная комбинация соответствующих компонент $y_i^k(x)$ всех решений $y^k(x)$ с одними и теми же коэффициентами $C_1, \ldots, C_m$:

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k y_i^{(k)}(x) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Вопрос: Нельзя ли (как и в случае однородного линейного уравнения n-го порядка), беря достаточное число (частных) решений $y^{(k)}(x)$, получить линейную комбинацию вида (6.40), содержащую все решения системы (6.38).

Оказывается можно, если взять n линейно независимых частных решений системы (6.38). При этом решения

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n)}(x) \tag{6.41}$$

называются *линейно независимыми* в (a, b), если тождество

$$\alpha_1 y^{(1)}(x) + \alpha_2 y^{(2)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b), \tag{6.42}$$

выполняется только в очевидном случае, т. е. когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Тождество (6.42) равносильно n скалярным тождествам для компонент решений (6.41):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_2 y_1^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_1^{(n)} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_2^{(1)} + \alpha_2 y_2^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_2^{(n)} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_n^{(1)} + \alpha_2 y_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n)} \equiv 0 \end{array}\right\}$$

для всех $x \in (a, b)$.

Совокупность n линейно независимых в (a, b) решений (6.41) системы (6.38) называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Фундаментальную систему решений (6.41) можно записать в виде матрицы, столбцами которой являются решения (6.41):

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *фундаментальной матрицей* однородной линейной системы (6.38).

Можно доказать (см., например, [70], с. 611), что для того, чтобы совокупность решений (6.41) была фундаментальной системой решений, необходимо и достаточно, чтобы *определитель Вронского* (вронскиан) решений (6.41)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

не обращался в нуль ни в одной точке $x \in (a, b)$.

На деле достаточно убедиться, что $W(x)$ отличен от нуля только в одной и притом любой точке $x_0 \in (a, b)$, ибо можно доказать (см., например, [70], с. 612), что если $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$.

Фундаментальная система решений при сделанном предложении относительно непрерывности коэффициентов $p_{kl}(x)$ в (a, b) существует. Например, n решений (6.41) заведомо образуют фундаментальную систему решений, если они удовлетворяют следующим начальным условиям Коши:

$$y^{(1)}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad y^{(n)}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые более подробно можно записать так:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x_0) = 1,\ y_2^{(1)}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(1)}(x_0) = 0, \\ y_1^{(2)}(x_0) = 0,\ y_2^{(2)}(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_n^{(2)}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 0,\ y_2^{(n)}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n)}(x_0) = 1. \end{array}\right\}$$

В самом деле, очевидно, что для этих решений $W(x_0) = 1 \neq 0$ и, следовательно, они образуют фундаментальную систему решений в интервале (a, b). Такая фундаментальная система решений существует и единственна (почему?). Она называется *нормированной* в точке x_0.

Отметим, что фундаментальная матрица $Y(x)$ является неособенной матрицей, ибо ее определитель, будучи равным вронскиану $W(x)$, отличен от нуля при всех $x \in (a, b)$. Если фундаментальная система (6.41) нормирована в точке x_0, то $Y(x_0)$ является единичной матрицей:

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E = I.$$

31.3. Построение общего решения однородной линейной системы по фундаментальной системе решений

Знание фундаментальной системы решений дает возможность найти **все** решения системы (6.38). А именно, если (6.41) есть фундаментальная система решений однородной линейной системы (6.38) в интервале (a, b), то линейная комбинация этих решений

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y^{(k)}(x), \tag{6.43}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные коэффициенты, которую подробно можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_1^{(k)}(x), \\ y_2 &= \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_2^{(k)}(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_n^{(k)}(x) \end{aligned}\right\}. \tag{6.44}$$

являясь решением системы (6.38) при всех значениях $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_n$, будет общим решением этой системы в области

$$a < x < b, \quad |y_k| < +\infty \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.45}$$

в том смысле, что функция (6.43) или, что то же самое, система функций (6.44) содержит в себе за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных все решения системы (6.38) с начальными значениями x_0^*, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ из области (6.45), так что каждое такое решение есть линейная комбинация решений (6.41):

$$y = C_1^{(0)}\, y^{(1)} + C_2^{(0)}\, y^{(2)} + \ldots + C_n^{(0)}\, y^{(n)},$$

которую можно более подробно записать так:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1^{(0)}\, y_1^{(1)} + C_2^{(0)}\, y_1^{(2)} + \ldots + C_n^{(0)}\, y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1^{(0)}\, y_2^{(1)} + C_2^{(0)}\, y_2^{(2)} + \ldots + C_n^{(0)}\, y_2^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= C_1^{(0)}\, y_n^{(1)} + C_2^{(0)}\, y_n^{(2)} + \ldots + C_n^{(0)}\, y_n^{(n)}. \end{aligned}\right\}$$

Значения $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ находятся единственным образом из системы

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= C_1\, y_1^{(1)}(x_0) + C_2\, y_1^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n\, y_1^{(n)}(x_0), \\ y_2^0 &= C_1\, y_2^{(1)}(x_0) + C_2\, y_2^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n\, y_2^{(n)}(x_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^0 &= C_1\, y_n^{(1)}(x_0) + C_2\, y_n^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n\, y_n^{(n)}(x_0), \end{aligned}\right\}$$

определитель которой, будучи равным $W(x_0)$, отличен от нуля (почему?).

Таким образом, для построения общего решения однородной линейной системы (6.38) по фундаментальной системе решений нужно, согласно формулам (6.44), взять линейные комбинации элементов фундаментальной матрицы $Y(x)$ **по строкам** (с одними и теми же произвольными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$).

Задача интегрирования однородной линейной системы сведена к проблеме построения фундаментальной системы решений, которая является *базисом* n-мерного линейного пространства решений этой системы.

Замечание. Общее решение (6.43) можно записать в более компактном виде

$$y = Y(x)\, C, \tag{6.46}$$

где $y = \text{colon}\,[y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n]$ — вектор-столбец из компонент общего решения, $Y(x)$ — фундаментальная матрица, а $C = \text{colon}\,[C_1, C_2, \ \ldots, C_n]$ — произвольный вектор-столбец.

В самом деле, умножая матрицу $Y(x)$ на вектор C по известному правилу умножения матрицы на вектор, мы получим вектор y (убедитесь в этом!).

Решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y, \quad y(x_0) = y^0 \tag{6.47}$$

получается из формулы общего решения (6.46) за счет выбора значения произвольного вектора C.

Имеем

$$y^0 = Y(x_0)\, C \Rightarrow \ C = Y^{-1}(x_0)\, y^0$$

(обратная матрица $Y^{-1}(x_0)$ существует, так как матрица $Y(x_0)$ неособенная). Поэтому решением задачи Коши (6.47) будет

$$y = Y(x)\, Y^{-1}(x_0)\, y^0.$$

31.4. Структура общего решения неоднородной линейной системы

Рассмотрим неоднородную линейную систему

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,y + f(x). \tag{6.48}$$

Предположим, что известно некоторое частное решение этой системы

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x), \quad x \in (a, b).$$

Сделаем в системе (6.48) подстановку

$$y = \tilde{y} + z, \tag{6.49}$$

где z — новая неизвестная вектор-функция. Получим

$$\frac{d\tilde{y}(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = P(x)\,(\tilde{y}(x) + z) + f(x),$$

откуда находим для z однородную линейную систему

$$\frac{dz}{dx} = P(x)\,z \tag{6.50}$$

(почему?), которая называется однородной линейной системой, *соответствующей* неоднородной линейной системе (6.48). Пусть $Z(x)$ фундаментальная матрица системы (6.50). Тогда, в силу формулы (6.46), общим решением этой системы будет

$$z = Z(x)\,C. \tag{6.51}$$

Подставляя (6.51) в (6.49), получим

$$y = Z(x)\,C + \tilde{y}(x).$$

Это есть общее решение системы (6.48) в области (6.45) (почему?).

Таким образом, так же как и в случае неоднородного линейного уравнения n-го порядка, *общее решение неоднородной линейной системы* (6.48) *является суммой какого-нибудь одного частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной линейной системы.*

В случае неоднородной линейной системы с **постоянными** коэффициентами частное решение иногда удается найти методом неопределенных коэффициентов подобно тому, как мы делали это в § 22 для неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (см., например, [72, с. 215]).

Общее решение неоднородной линейной системы, так же, как и общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка (см. § 19), может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (см., например, [71, с. 295]).

§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

32.1. Случай различных вещественных корней характеристического уравнения

Метод построения общего решения однородной линейной системы по фундаментальной системе решений, указанный в § 31, требует знания фундаментальной системы решений. Оказывается, что для однородной линейной системы с постоянными коэффициентами всегда существует фундаментальная система решений, состоящая (так же, как и в случае однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами) из элементарных функций.

Пусть дана однородная линейная система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,\\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n,\end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

где a_{kl} — вещественные числа.

Будем, следуя Эйлеру, искать частное решение системы (6.52) в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\ \ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{6.53}$$

причем число λ одно и то же для всех функций, образующих решение (6.53), а числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не равны одновременно нулю (почему?).

Подставляя (6.53) и (6.52), сокращая на $e^{\lambda t}$ и группируя члены, получим следующую систему уравнений для нахождения чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)\,\gamma_1+a_{12}\,\gamma_2+\ldots+a_{1n}\,\gamma_n=0,\\ a_{21}\,\gamma_1+(a_{22}-\lambda)\,\gamma_2+\ldots+a_{2n}\,\gamma_n=0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{n1}\gamma_1+a_{n2}\,\gamma_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)\,\gamma_n=0.\end{array}\right\}\qquad(6.54)$$

Эта система имеет интересующее нас ненулевое решение относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ только в том случае, если ее определитель равен нулю, т. е. если λ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (6.55)$$

Уравнение (6.55) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* системы (6.52).

Рассмотрим сначала случай, когда все характеристические числа **различные** и **вещественные**. В этом случае, подставляя поочередно каждое характеристическое число λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) вместо λ в (6.54) и заменяя числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ их неравными одновременно нулю значениями $\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \ldots, \gamma_{nk}$, найденными из системы *

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_k)\,\gamma_1+a_{12}\,\gamma_2+\ldots+a_{1n}\,\gamma_n=0,\\ a_{21}\,\gamma_1+(a_{22}-\lambda_k)\,\gamma_2+\ldots+a_{2n}\,\gamma_n=0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{n1}\gamma_1+a_{n2}\,\gamma_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda_k)\,\gamma_n=0,\end{array}\right\}\qquad(6.56)$$

---

* Можно доказать (см., например, [70, с. 627]), что ранг матрицы коэффициентов этой системы равен $n - 1$, так что ее решение определяется с точностью до постоянного множителя.

получим n частных решений вида (6.53):

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{11}\, e^{\lambda_1 x},\ \gamma_{21}\, e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ \gamma_{n1}\, e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{12}\, e^{\lambda_2 x},\ \gamma_{22}\, e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ \gamma_{n2}\, e^{\lambda_2 x}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{1n}\, e^{\lambda_n x},\ \gamma_{2n}\, e^{\lambda_n x},\ \ldots,\ \gamma_{nn}\, e^{\lambda_n x}. \end{array}\right\} \qquad (6.57)$$

Решения (6.57) линейно-независимы [70, с. 610] и следовательно, образуют фундаментальную систему решений, так что матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}\, e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{21}\, e^{\lambda_1 x} & \ldots & \gamma_{n1}\, e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{12}\, e^{\lambda_2 x}, & \gamma_{22}\, e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{n2}\, e^{\lambda_2 x} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{1n}\, e^{\lambda_n x}, & \gamma_{2n}\, e^{\lambda_n x} & \ldots & \gamma_{nn}\, e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \qquad (6.58)$$

будет фундаментальной матрицей системы (6.52). В этой матрице решения расположены по строкам. Транспонируя матрицу (6.58), получим фундаментальную матрицу $Y(x)$, в которой решения расположены по столбцам

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\, e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{12}\, e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{1n}\, e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{21}\, e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{22}\, e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{2n}\, e^{\lambda_n x} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{n1}\, e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{n2}\, e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{nn}\, e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \qquad (6.59)$$

Беря линейные комбинации элементов матрицы (6.59) по строкам, получим согласно сказанному в § 31 общее решение системы (6.52) в виде

$$y = Y(x) \cdot C \qquad (6.60)$$

или

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k\, \gamma_{ik}\, e^{\lambda_k x} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y. \end{array}\right\} \qquad (6.61)$$

Ищем частное решение в виде

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t}. \tag{6.62}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Построим частное решение вида (6.62), соответствующее корню $\lambda_1 = 2$. Согласно формуле (6.56) числа γ_1 и γ_2 надо искать из системы

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

которая, как и следовало ожидать, сводится к одному уравнению

$$-\gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

так что одно из чисел γ_1 и γ_2 можно выбирать произвольно. При этом надо, однако, заботиться о том, чтобы числа γ_1 и γ_2 не оказались одновременно равными нулю. Положив $\gamma_1 = 1$, получим $\gamma_2 = 1$. Поэтому характеристическому числу $\lambda_1 = 2$ соответствует частное решение

$$x^{(1)} = e^{2t}, \quad y^{(1)} = e^{2t}. \tag{6.63}$$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 3$:

$$x^{(2)} = e^{3t}, \quad y^{(2)} = 2e^{3t}. \tag{6.64}$$

Найденные решения (6.63) и (6.64) образуют фундаментальную систему решений, которую, располагая решение по столбцам, запишем в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти общее решение системы (6.61), воспользуемся формулой (6.60), которая в нашем случае примет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому общим решением системы (6.61) будет

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}. \end{aligned}\right\}$$

32.2. Случай различных корней характеристического уравнения, среди которых имеются комплексные

В этом случае частные решения, соответствующие вещественным характеристическим числам (если они имеются), находят так же, как и выше.

Покажем, как найти вещественные частные решения, соответствующие комплексным корням характеристического уравнения. Прежде всего заметим, что комплексные корни обязательно взаимно сопряжены (почему?). Пусть $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ — одна такая пара корней. Найдем вещественные частные решения, соответствующие этой паре.

Пользуясь методом, изложенным выше, построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = a + ib$; оно окажется комплексным и будет иметь вид

$$y_1 = (\gamma_1^{(1)} + i\gamma_1^{(2)})\, e^{(a+ib)x}, \ \ldots, \ y_n = (\gamma_n^{(1)} + i\gamma_n^{(2)})\, e^{(a+ib)x}. \qquad (6.65)$$

Можно доказать (см., например, [70, с. 606]), что *вещественные и мнимые части всякого комплексного решения однородной линейной системы образуют* (вещественные!) *решения этой системы*. Поэтому, отделяя в решении (6.65) вещественные и мнимые части, найдем **два** вещественных линейно независимых частных решения системы (6.52).

Аналогично можно построить вещественные частные решения, соответствующие корню $a - ib$, но они окажутся линейно зависимыми с частными решениями, найденными выше.

Таким образом, *паре сопряженных комплексных корней $a \pm ib$ соответствуют два линейно независимых вещественных частных решения*, которые получаются из комплексного решения (6.65), соответствующего корню $a + ib$, отделением вещественных и мнимых частей.

Найдя частные решения, соответствующие всем корням характеристического уравнения, получим **фундаментальную систему решений,** при помощи которой известным способом строим **общее решение.**

П р и м е р 2. Рассмотрим систему (6.18)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \end{aligned}\right\}$$

проинтегрированную в § 27 методом исключения. Найдем общее решение этой системы методом Эйлера.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Найдем (комплексное) решение, соответствующее $\lambda_1 = i$:

$$x^{(1)} = \gamma_1 e^{ix}, \quad y^{(1)} = \gamma_2 e^{ix}.$$

Ищем γ_1 и γ_2 из системы

$$\left.\begin{aligned} -i\gamma_1 + \gamma_2 &= 0, \\ -\gamma_1 - i\gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$-i\gamma_1 + \gamma_2 = 0.$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, найдем $\gamma_2 = i$. Поэтому

$$x^{(1)} = e^{it}, \quad y^{(1)} = ie^{it}.$$

или

$$x^{(1)} = \cos t + i \sin t, \quad y^{(1)} = -\sin t + i \cos t.$$

Отделяя в найденном комплексном решении вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых решения:

$$\left.\begin{aligned} &\cos t, \quad -\sin t, \\ &\sin t, \quad \cos t, \end{aligned}\right\}$$

которые запишем в виде фундаментальной матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

располагая решения *по столбцам*.

Следовательно, общим решением системы (6.18) в силу формулы (6.60) будет

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

или (6.21)

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned}\right\}$$

32.3. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения

Предположим, что среди корней характеристического уравнения имеется корень λ_1 **кратности** k. Тогда можно доказать [70], что ему соответствует решение системы (6.52) вида

$$y_1 = P_1(x)\, e^{\lambda_1 x}, \; \ldots, \; y_n = P_n(x)\, e^{\lambda_1 x}, \tag{6.66}$$

где $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ суть **полиномы** от x степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k **произвольных коэффициентов.** При этом может оказаться, что все эти полиномы вырождаются в постоянные числа, так что решение (6.66) примет вид

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x}, \; \ldots, \; y_n = \gamma_n e^{\lambda_1 x},$$

где k из коэффициентов γ_1, ..., γ_n являются **произвольными,** а остальные выражаются через них.

Полагая в решении (6.66) один из произвольных коэффициентов полиномов равным единице, а остальные равными нулю, построим k **линейно независимых частных решения.**

Если λ_1 — вещественное характеристическое число, то построенные частные решения будут вещественными.

Если же система (6.52) имеет **комплексное характеристическое число** $a + ib$ кратности k, то она имеет сопряженное характеристическое число $a - ib$ той же кратности.

Построив k линейно независимых комплексных частных решения, соответствующих характеристическому числу $a + ib$, и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ вещественных **линейно независимых частных решений.** Таким образом, *паре сопряженных комплексных характеристических чисел $a \pm ib$ кратности k соответствует $2k$ линейно независимых вещественных частных решений.*

В общем случае каждому простому вещественному характеристическому числу соответствует одно частное решение, каждой паре простых сопряженных комплексных характеристических чисел соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному характеристическому числу кратности λ_1 соответствуют k вещественных линейно независимых частных решения, а каждой паре сопряженных комплексных характеристических чисел кратности k соответствуют $2k$ вещественных линейно независимых частных решений. Всего получается n вещественных линейно независимых частных решения, так что они образуют фундаментальную систему решений, позволяющую построить общее решение указанным выше способом.

Таким образом, *линейная однородная система с постоянными коэффициентами всегда интегрируется в элементарных функциях.*

Пример 3. Пусть дана

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -2$. **Простому** корню $\lambda_1 = 1$ соответствует решение (с точностью до постоянного множителя)

$$y_{11} = e^x, \quad y_{12} = e^x, \quad y_{13} = e^x$$

(почему?).

Найдем линейно независимые частные решения, соответствующие **двукратному** корню $\lambda_{2,3} = -2$. Имеем

$$y_1 = (A_1 x + A_2)\, e^{-2x}, \quad y_2 = (B_1 x + B_2)\, e^{-2x}, \\ y_3 = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x} \tag{6.68}$$

Подставляя (6.68) в (6.67), найдем, что

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0, \quad C_2 = -(A_2 + B_2),$$

где A_2 и B_2 — **произвольные**. Поэтому

$$y_1 = A_2 e^{-2x},\ y_2 = B_2 e^{-2x},\ y_3 = -(A_2 + B_2)\, e^{-2x}.$$

Здесь как раз полиномы, о которых шла выше речь, обратились в постоянные, **две** из которых произвольны.

Корню $\lambda_{2,3} = -2$ соответствуют **два** линейно независимых частных решения

$$y_{21} = e^{-2x},\ y_{22} = 0,\ y_{23} = -e^{-2x};$$
$$y_{31} = 0,\ y_{32} = e^{-2x},\ y_{33} = -e^{-2x}$$

(почему?).

Фундаментальной системой решений будет

$$e^x,\ e^x,\ e^x;$$

$$e^{-2x},\ 0,\ -e^{-2x};$$

$$0,\ e^{-2x},\ -e^{-2x}.$$

Общее решение данной системы (6.67) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 &= C_1 e^x + C_3 e^{-2x}, \\ y_3 &= C_1 e^x - C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.69)$$

Из (6.69) видно, что система (6.67) допускает **двупараметрическое** семейство решений

$$y_1 = C_2 e^{-2x},\ y_2 = C_3 e^{-2x},\ y_3 = -C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x},$$

обладающих **свойством**:

$$y_1 \to 0,\ \ y_2 \to 0,\ \ y_3 \to 0 \ \text{ при } \ x \to +\infty.$$

Задачи к главе 6

В задачах 108—115 проинтегрировать систему последовательным интегрированием или методом исключения:

108. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y, \\ \dfrac{dz}{dx} = z. \end{cases}$ **109.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$ **110.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$

111. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\,y, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$ **112.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z \end{cases}$ **113.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z. \end{cases}$

114. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y. \end{cases}$ **115.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

В задачах 116—122 найти общее решение методом Эйлера и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

116. $y' = y + z,\ z' = -2y + 4z;\ y = 0,\ z = -1$ при $x = 0$.

117. $y' = 3y - z,\ z' = 10y - 4z;\ y = 1,\ z = 5$ при $x = 0$.

118. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$ **119.** $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$

120. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$ **121.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$

122. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -10y - z. \end{cases}$

Вопросы для повторения

1. Каков общий вид системы дифференциальных уравнений первого порядка? Что называется решением этой системы на интервале $(a,\ b)$? Какой вид имеет нормальная форма системы дифференциальных уравнений (нормальная система)? В каком случае нормальная система называется линейной?

2. Как ставится задача Коши для нормальной системы? Каков ее геометрический смысл?

3. Какой механический смысл имеют нормальная система и ее решение? Что такое фазовое пространство (фазовая плоскость, фазовая прямая)? Как связаны между собой движение, определяемое системой дифференциальных уравнений, и его траектория? Какое движение называется состоянием покоя, какова его траектория? Что такое поле скоростей, определяемое системой дифференциальных уравнений? В чем состоит задача интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений с механической точки зрения?

4. Какая нормальная система дифференциальных уравнений называется стационарной или автономной?

5. Каков механический смысл задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?

6. Дайте упрощенную формулировку теоремы Пикара о достаточном условии существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Какие преимущества имеет линейная система дифференциальных уравнений в отношении допустимого произвола выбора начальных данных и гарантированного интервала существования решения?

7. Что называется общим решением нормальной системы дифференциальных уравнений в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши? Как решается задача Коши с начальными данными из области D при помощи формулы общего решения? Какое общее решение называется общим решением в форме Коши?

8. Что такое частное решение нормальной системы дифференциальных уравнений? Как оно связано с общим решением?

9. Докажите, что уравнение n-го порядка в нормальной форме всегда можно привести к равносильной ему нормальной системе дифференциальных уравнений, если принять искомую функцию и ее последовательные производные до $(n-1)$-го порядка включительно за новые неизвестные функции.

10. В чем состоит метод исключения? Всегда ли этим методом можно привести нормальную систему n уравнений к уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией?

11. Какой вид имеет линейная система дифференциальных уравнений в нормальной форме? Чем отличается однородная линейная система от неоднородной?

12. Что такое фундаментальная система решений однородной линейной системы n уравнений?

13. Что такое определитель Вронского решений однородной линейной системы n уравнений?

14. Как узнать при помощи определителя Вронского, образуют ли данные n решений однородной линейной системы n уравнений фундаментальную систему решений?

15. Как строится общее решение однородной линейной системы по фундаментальной системе решений? В какой области оно определено?

16. В чем состоит метод Эйлера построения фундаментальной системы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

17. Как записывается нормальная система n уравнений и ее решение в векторной форме?

18. Как ставится задача Коши для нормальной системы, записанной в векторной форме? Как записывается ее решение?

19. Какой вид имеет векторно-матричная запись линейной системы? Случай системы с постоянными коэффициентами.

20. Что такое фундаментальная матрица однородной линейной системы?

21. Как выражается общее решение однородной линейной системы в векторно-матричной форме через фундаментальную матрицу решений? Какой вид имеет решение задачи Коши?

22. Какова структура общего решения неоднородной линейной системы?

Глава 7
ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 33. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

33.1. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решение

Дифференциальным уравнением с частными производными называется равенство, содержащее неизвестную функцию от нескольких независимых переменных, независимые переменные и частные производные неизвестной функции по независимым переменным. Порядок старшей частной производной, входящей в состав дифференциального уравнения, называется *порядком* этого уравнения.

Уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где u — неизвестная функция от независимых переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ — ее частные производные; F — заданная функция от своих аргументов.

Уравнение вида

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{7.1}$$

есть дифференциальное уравнение второго порядка с искомой функцией z от двух независимых переменных x и y.

Решением уравнения с частными производными, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, называется функция, обращающая это уравнение в тождество.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{7.2}$$

Здесь ищется $z = z(x, y)$. Проверим, что функция

$$z = x^2 + y^2 \tag{7.3}$$

есть решение уравнения (7.2), определенное на всей плоскости (x, y). В самом деле, эта функция имеет частные производные, входящие в состав уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Заменяя в уравнении (7.2) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их значениями, получим тождество

$$x \cdot 2y - y \cdot 2x \equiv 0.$$

Следовательно, функция (7.3) есть решение уравнения (7.2).

Нетрудно убедиться, что решением будет и любая дифференцируемая функция от $x^2 + y^2$

$$z = F\,(x^2 + y^2).$$

Действительно, полагая $x^2 + y^2 = u$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{du} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dF}{du} \cdot 2y.$$

Подставляя в уравнение (7.2), получим тождество

$$x \cdot \frac{dF}{du} \cdot 2y - y \cdot \frac{dF}{du} \cdot 2x \equiv 0.$$

Таким образом, уравнение с частными производными могут иметь семейство решений, зависящее от произвольных **функций** (число которых обычно равно порядку уравнения), а не только от произвольных **постоянных**, как это имеет место в обыкновенных дифференциальных уравнениях (например, уравнение $y'' + y = 0$ имеет семейство решений $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные).

В дальнейшем нас будут интересовать уравнения с частными производными второго порядка, причем именно те уравнения, к решению которых приводятся многие важные задачи физики и техники. Эти уравнения называются *уравнениями математической физики*. Ниже излагаются начальные сведения из теории уравнений математической физики.

33.2. Основные типы уравнений математической физики

Уравнения математической физики в отличие от уравнений с частными производными второго порядка общего вида (7.1) являются **линейными**, т. е. линейно зависят от искомой функции и ее частных производных. Так, в случае двух независимых переменных они имеют вид

$$A(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} +$$
$$+ E(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + G(x, y)z = F(x, y). \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.4) называется *однородным*, если $F(x, y) \equiv 0$. Если $F(x, y) \neq 0$, то уравнение (7.4) называется *неоднородным*.

Будем рассматривать только однородные линейные уравнения с частными производными второго порядка, причем все коэффициенты будем предполагать **постоянными** и **вещественными.**

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Gz = 0. \qquad (7.5)$$

В зависимости от соотношений между коэффициентами при производных второго порядка, а именно в зависимости от знака выражения $AC - B^2$ уравнения (7.5) подразделяются на три основных типа:

$AC - B^2 < 0$ — *уравнение гиперболического типа*;
$AC - B^2 > 0$ — *уравнение эллиптического типа*;
$AC - B^2 = 0$ — *уравнение параболического типа*.

Простейшим из уравнений **гиперболического** типа является *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (7.6)$$

Оно встречается в задачах, связанных с колебательными процессами.

Простейшим из уравнений **эллиптического** типа является *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (7.7)$$

К интегрированию этого уравнения приходят при изучении стационарных процессов.

Простейшим уравнением **параболического** типа является *уравнение теплопроводности (уравнение Фурье)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (7.8)$$

Оно часто встречается при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

В § 34 рассмотрим волновое уравнение (7.6), в § 35 — уравнение Фурье.

В курсе математической физики изучаются также *волновое уравнение, уравнение Лапласа* и *уравнение Фурье* более общего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

§ 34. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

34.1. Вывод уравнения колебаний струны

Рассмотрим физическую задачу, связанную с колебательными процессами — задачу о колебаниях струны. Покажем, что эта задача приводит к волновому уравнению вида (7.6).

Под *струной* будем понимать гибкую упругую нить, которая не оказывает сопротивления изгибу. При этом сила натяжения T всегда направлена по касательной к струне.

Рассмотрим струну конечной длины l, натянутую между двумя точками. Примем прямую, проходящую через эти точки, за ось x (рис. 40). Пусть в этом положении, которое будем называть положением равновесия, струна совпадает с отрезком $[0, l]$ оси x, так что концы ее закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Если вывести струну из положения равновесия, то она

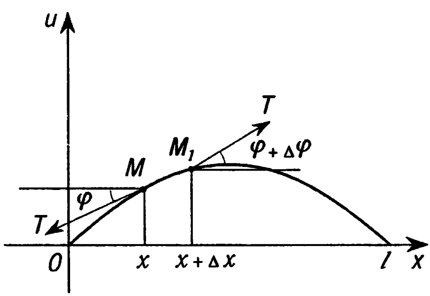

Рис. 40

начнет совершать некоторые колебания. Найдем закон этих колебаний, т. е. положение любой точки струны в любой момент времени t.

Предположим, что эти колебания **поперечные**, т. е. каждая точка струны перемещается вдоль прямой, перпендикулярной оси x (т. е. прямой, на которой расположены точки струны в положении равновесия). При этом будем считать, что струна все время находится в **одной и той же плоскости.** Проведем через точку $x=0$ оси x прямую u, перпендикулярную оси x, и будем считать, что колебания происходят в плоскости xu, так что u есть **смещение** (от положения равновесия) точки струны с абсциссой x. Это смещение, очевидно, зависит как от x, так и от времени t:

$$u = u\,(x,\, t), \tag{7.10}$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $u\,(x,\, t)$. Выведем **дифференциальное уравнение** для этой функции.

Рассмотрим только *малые* колебания струны, т. е. будем считать, что (острый) угол φ (рис. 40), образованный касательной (или, что то же, направлением натяжения T) с осью x, настолько мал, что можно пренебрегать квадратом тангенса его, т. е. квадратом частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Вследствие малости угла φ величину натяжения T можно считать постоянной.

Рассмотрим элемент струны MM_1 (рис. 40), соответствующий отрезку $[x,\, x+\Delta x]$ оси x. На этот элемент действуют силы натяжения струны T, приложенные на его концах и направленные по касательным, образующим с осью x (острые) углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$.

Подсчитаем проекцию этих сил на ось u; она равна

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi.$$

Но так как угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$, и можем написать:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \approx \operatorname{tg}\varphi,$$

ибо величиной $\operatorname{tg}^2\varphi$ пренебрегаем.

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi = T\,(\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - \operatorname{tg}\varphi) =$$
$$= T\left(\frac{\partial u\,(x+\Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u\,(x,\, t)}{\partial x}\right).$$

Предположим, что частная производная $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ существует и непрерывна. Тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(x+\Theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x$$

$$(0<\Theta<1)$$

или

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\approx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$$

(здесь мы воспользовались непрерывностью частной производной $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$). Поэтому

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x.$$

Подсчитаем теперь силу инерции. Положим, что струна однородна и имеет линейную плотность ρ. Длину элемента MM_1 можем считать равной Δx, ибо, пренебрегая величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, будем иметь

$$\cup MM_1=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx\int_x^{x+\Delta x}1\cdot dx=\Delta x.$$

Поэтому масса элемента MM_1 равна $\rho\cdot\Delta x$. Сила инерции равна $\rho\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Так как согласно принципу Даламбера все силы, действующие на участок струны, должны уравновешиваться, то

$$\rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\left(a^2=\frac{T}{\rho}\right).\tag{7.11}$$

Это есть **волновое** уравнение.

Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять *граничным условиям*

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\tag{7.12}$$

ибо струна **закреплена** на концах. Кроме того, искомая функция должна удовлетворять *начальным условиям*

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \tag{7.13}$$

($f(x)$ и $F(x)$ — заданные функции), характеризующим состояние струны в начальный момент времени $t=0$. Первое из начальных условий (7.13) задает **форму** струны, а второе — **скорость** колебаний точек струны в **начальный момент времени $t=0$**. Задачи вида (7.11)—(7.13) называются *начально-краевыми задачами*.

34.2. Интегрирование уравнений малых колебаний струны методом Фурье

Рассмотрим уравнение малых колебаний струны (волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.14}$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{7.15}$$

и начальными условиями

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \tag{7.16}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ заданы в интервале $[0, l]$, причем $f(0) = f(l) = 0$ (почему?). Нас интересует ненулевое решение ($u \not\equiv 0$) уравнения (7.14) (почему?).

Будем искать решение уравнения (7.14) в виде **произведения** двух функций:

$$u = X(x) \cdot T(t), \tag{7.17}$$

из которых одна зависит **только от x**, а другая — **только от t** (разделение переменных), причем $X(x) \not\equiv 0$ и $T(t) \not\equiv 0$. В силу граничных условий (7.15) функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{7.18}$$

Подставляя (7.17) в (7.14), получим

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно относительно x и t. Но левая часть не зависит от x, а правая не зависит от t. Следовательно, обе части должны быть равны одной и той же постоянной величине, которую обозначим через $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что $X(x)$ и $T(t)$ должны быть решениями уравнений

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{7.19}$$

и

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{7.20}$$

Это однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (см. § 20).

Рассмотрим сначала уравнение (7.19). Надо найти **ненулевое** решение этого уравнения, удовлетворяющее **краевым условиям** (7.18). Выясним, при каком значении λ эта краевая задача может иметь **ненулевые** решения. Исследуем возможные случаи.

1. $\lambda < 0$. Тогда характеристическое уравнение

$$r^2 + \lambda = 0 \tag{7.21}$$

имеет различные вещественные корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Общим решением уравнения (7.19) будет

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}. \tag{7.22}$$

Удовлетворяя краевым условиям (7.18), имеем

$$\left.\begin{aligned} &C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 0, \\ &C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = 0$ (почему?), и решение (7.22) оказывается нулевым.

2. $\lambda = 0$. В этом случае уравнение (7.19) примет вид $X'' = 0$ и имеет общее решение $X = C_1 x + C_2$.

Удовлетворяя краевым условиям (7.18), имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 \cdot l + C_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда снова получаем $C_1 = C_2 = 0$, так что $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda > 0$. Здесь характеристическое уравнение (7.21) имеет чисто мнимые корни $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, поэтому общее решение уравнения (7.19) имеет вид

$$X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{7.23}$$

Удовлетворяя краевым условиям (7.18), имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1 = 0, \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как $C_2 \neq 0$, ибо в противном случае мы имели бы $X(x) \equiv 0$, то λ должно удовлетворять условию

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{7.24}$$

причем $\lambda > 0$.

Ненулевые решения уравнения (7.24) имеют вид

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

(почему?). Только при этих значениях краевая задача (7.19), (7.18) имеет ненулевые решения. В качестве этих ненулевых решений можно взять

$$X_k = \sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

(они получаются из (7.23), если принять во внимание, что $C_1 = 0$, и положить $C_2 = 1$, $\lambda = \lambda_k$).

Обратимся теперь к уравнению (7.20). Заменив в нем λ на λ_k и обозначив соответствующую искомую функцию через T_k, получим

$$T_k'' + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$T_k = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные (почему?).

Подставляя найденные значения $X = X_k$ и $T = T_k$ в формулу (7.17) и обозначая соответствующее им значение u через u_k, получаем

$$u_k(x, t) = \left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Эти функции удовлетворяют и уравнению (7.14), и граничным условиям (7.15) при любых значениях A_k и B_k.

Можно показать, что сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

или

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (7.25)$$

будет дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения (7.14), удовлетворяющим граничным условиям (7.15), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой (7.25) в (7.14) и в (7.15), если только ряд (7.25) допускает двукратное почленное дифференцирование по x и t; причем ряды, полученные в результате дифференцирования, равномерно сходятся (ниже указаны условия, при которых это требование заведомо выполнено).

Выберем теперь произвольные постоянные A_k и B_k так, чтобы решение (7.25) удовлетворяло и начальным условиям (7.16). Полагая в (7.25) $t = 0$ и используя первое из начальных условий (7.16), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = f(x). \qquad (7.26)$$

Дифференцируя (7.25) по t, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}\left(-A_k \sin\frac{ak\pi}{l}t + B_k \cos\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Полагая здесь $t = 0$ и используя второе из начальных условий (7.16), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}B_k \sin\frac{k\pi}{l}x = F(x). \qquad (7.27)$$

Разложения (7.26) и (7.27) представляют собой разложения функций $f(x)$ и $F(x)$, заданных на интервале $[0, l]$, в ряды Фурье только по синусам. Поэтому коэффициенты A_k и B_k должны иметь значения

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx, \\ B_k &= \frac{2}{ak\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

При этих значениях A_k и B_k формула (7.25) и дает искомое решение волнового уравнения (7.14) с граничными условиями (7.15) и начальными условиями (7.16).

Чтобы обеспечить требуемую при этом равномерную сходимость рядов, полученных в результате двукратного почленного дифференцирования ряда (7.25) по x и t, достаточно предположить, что функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в начальные условия (7.16), непрерывно дифференцируемы соответственно три и два раза.

Найденное решение (7.25) единственно.

Решение (7.25) можно записать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot \sin\left(\frac{ak\pi}{l}t + \varphi_k\right),$$

откуда следует, что оно представляет собой **наложение бесконечного числа колебаний**. Каждое из этих колебаний имеет свой период $\frac{2l}{ak}$, свою амплитуду, равную $\left|M_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right|$, и начальную фазу φ_k.

§ 35. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

35.1. Вывод уравнения теплопроводности для стержня

Рассмотрим однородный теплоизолированный с боков стержень конечной длины l, имеющий постоянную по длине толщину, и настолько тонкий, чтобы в любой момент времени темпе-

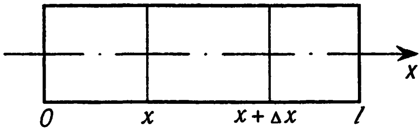

Рис. 41

ратуру тела во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой.

Выберем ось x (направив ее по оси стержня) так, чтобы стержень совпадал с отрезком $[0, l]$ оси x (рис. 41). Обозначим температуру стержня в сечении x в момент времени t через $u(x, t)$. Тогда функция

$$u = u(x, t) \tag{7.28}$$

дает закон распределения температуры в стержне. Выведем дифференциальное уравнение для этой функции.

Выделим элемент стержня $[x, x + \Delta x]$ (рис. 41) и составим для него уравнение теплового баланса, согласно которому скорость изменения количества тепла в рассматриваемом объеме (изменение количества тепла в единицу времени), обусловленная теплоемкостью материала, равна количеству тепла, поступившему в этот объем в единицу времени вследствие теплопроводности.

Скорость изменения количества тепла в выделенном элементе стержня равна

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, dx, \tag{7.29}$$

где c — теплоемкость материала стержня; ρ — плотность; S — площадь поперечного сечения.

Замечание. Это выражение может быть получено, например, путем вычисления приближенного значения скорости изменения количества тепла и последующего предельного перехода. При этом, как обычно, интервал $[x, x + \Delta x]$ разбивается на частичные интервалы, и к каждому из них применяется известный из физики закон $Q = cm\Delta u$, выражающий зависимость между количеством тепла Q, сообщаемого однородному телу массы m, и вызываемым им изменением температуры тела Δu.

Применяя к интегралу (7.29) теорему о среднем и учитывая, что величина c, ρ и S постоянны (ибо стержень однороден, а его толщина постоянна), получим

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, dx = c\rho S \frac{\partial u(x+\Theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x,$$

где $0 < \Theta_1 < 1$.

Подсчитаем теперь количество тепла, поступившее в выделенный элемент стержня в единицу времени.

Так как стержень теплоизолирован с боков, то тепло может поступать только через сечения, ограничивающие выделенный элемент стержня. Известно, что количество тепла, протекающее через сечение с абсциссой x за единицу времени, равно

$$-k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S,$$

где k — коэффициент теплопроводности, а S — площадь сечения.

Поэтому искомое количество тепла равно

$$-k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S - \left(-k \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} S\right) =$$

$$= kS\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right) = kS \frac{\partial^2 u(x+\Theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x,$$

где $0 < \Theta_2 < 1$ (мы применили здесь формулу конечных приращений Лагранжа к функции $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$).

Теперь можем написать уравнение теплового баланса. Оно будет иметь вид

$$c\rho S \frac{\partial u(x+\Theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x = kS \frac{\partial^2 u(x+\Theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \tag{7.30}$$

Разделим обе части уравнения (7.30) на $S\Delta x$ (объем выделенного элемента стержня) и устремим Δx к нулю (стягивая выделенный элемент стержня к сечению x). Получим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right). \tag{7.31}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности* для однородного стержня. Величина $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ называется *коэффициентом температуропроводности*.

Искомая функция (7.28) должна удовлетворять уравнению (7.31), *начальному условию*

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u(x, 0) = f(x) \quad (0 \le x \le l),$$

где $f(x)$ — заданная функция от x (это условие выражает закон распределения температуры по длине стержня в начальный момент времени $t = 0$), и *граничным условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(x, t)\big|_{x=0} &= u(0, t) = \varphi_1(t), \\ u(x, t)\big|_{x=l} &= u(l, t) = \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < +\infty), \tag{7.32}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — заданные функции от времени t (условия (7.32) задают температуру, поддерживаемую на концах стержня).

35.2. Интегрирование уравнения распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье

Задача о распространении тепла в однородном теплоизолированном с боков стержне длины l приводится, как показано выше, к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.33}$$

в области $0 \le x \le l$, $0 \le t < +\infty$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \le x \le l) \tag{7.34}$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi_1(t), \\ u(l, t) &= \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < +\infty).$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура, т. е. когда граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_0 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_1 = \text{const} \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < +\infty). \tag{7.35}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи замены искомой функции $u(x, t)$ по формуле

$$v(x, t) = u(x, t) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{l} x, \tag{7.36}$$

где v — новая неизвестная функция.

Действительно, так как

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

то функция v удовлетворяет тому же уравнению, что и функция u:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Далее из (7.36) в силу (7.35) следует, что

$$\left.\begin{aligned} v(0, t) = 0, \\ v(l, t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < +\infty).$$

Таким образом, достаточно найти решение уравнения (7.33), удовлетворяющее начальному условию (7.34) и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < +\infty). \tag{7.37}$$

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение уравнения (7.33) в виде произведения двух функций

$$u = X(x) \cdot T(t), \tag{7.38}$$

одна из которых зависит только от x, а другая — только от t; причем $X(x) \not\equiv 0$ и $T(t) \not\equiv 0$, ибо в противном случае $u(x, t) \equiv 0$, что невозможно: функция $u \equiv 0$ не удовлетворяет начальному условию (7.34), так как мы, конечно, предполагаем, что $f(x) \not\equiv 0$.

В силу граничных условий (7.37) функция $X(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала $[0, l]$:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Подставляя (7.38) в (7.33), получим

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Это равенство может выполняться тождественно только в том случае, когда его обе части равны одной и той же постоянной величине (ибо левая часть не зависит от x, а правая не зависит от t), которую обозначим через $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

Отсюда заключаем, что функции $X(x)$ и $T(t)$ должны быть решениями однородных линейных дифференциальных уравнений

$$X''+\lambda X=0 \tag{7.39}$$

и

$$T'+a^2\lambda T=0. \tag{7.40}$$

В § 34 (уравнение (7.19)) мы показали, что ненулевые решения уравнения (7.39) существуют только при $\lambda=\lambda_k$, где

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

причем в качестве этих решений можно взять функции

$$X_k=\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Обратимся теперь к уравнению (7.40). Заменяя λ на λ_k, получим уравнение

$$T_k'+\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k=0.$$

Его общим решением будет $T_k=C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}$, где C_k — произвольная постоянная, соответствующая взятому значению k.

Подставляя найденные значения $X=X_k$ и $T=T_k$ в (7.38), получим решение уравнения (7.33) в виде

$$u_k(x,t)=C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{7.41}$$

Каждая из функций (7.41) удовлетворяет граничным условиям (7.37). Можно показать, что функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{7.42}$$

тоже является **решением** уравнения (7.33), удовлетворяющим **граничным условиям** (7.37).

Выберем теперь коэффициенты C_k таким образом, чтобы функция (7.42) удовлетворяла и **начальному условию** (7.34). Для этого должно быть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{7.43}$$

Предположим, что функция $f(x)$ разложима в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье только по синусам

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{7.44}$$

Тогда $b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$. Сравнивая (7.43) и (7.44), видим, что $C_k = b_k$, т. е.

$$C_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx,$$

чем и завершается решение задачи.

На этом мы заканчиваем изложение начальных сведений из теории уравнений математической физики.

Для более глубокого изучения теории уравнений математической физики рекомендуем обратиться к учебному пособию [105].

Обстоятельное и строгое изложение теории уравнений математической физики читатель найдет в известных учебниках [27], [111].

Вопросы для повторения

1. Что такое дифференциальное уравнение с частными производными? Как определяется его порядок? Что называется его решением?

2. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме? Каково геометрическое и механическое истолкование задачи Коши в случае уравнения второго порядка? Сравните с уравнением первого порядка (чем отличаются условия Коши?).

3. Дайте упрощенную формулировку теоремы Пикара о достаточном условии существования и единственности n раз непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме. Какие преимущества имеет линейное уравнение в отношении допустимого произвола выбора начальных данных и гарантированного интервала существования решения? Сравните с теоремой Пикара для уравнения первого порядка.

4. Что называется общим решением дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши? Как решается задача Коши с начальными данными из области D при помощи формулы общего решения? Убедитесь, что $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ есть общее решение уравнения $y'' + y = 0$ в области $D = \boldsymbol{R}^3$. Решите, пользуясь этим общим решением, задачи Коши: $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. Какое общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ называется общим решением в форме Коши?

6. Какой вид имеет общий интеграл уравнения n-го порядка?

7. Что такое частное решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$? Как оно связано с общим решением? Убедитесь, что $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ являются частными решениями уравнения $y'' + y = 0$.

8. Как находится общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$? Какой вид имеет решение этого уравнения с нулевыми начальными условиями?

9. Как понижается порядок уравнения, не содержащего искомой функции, и уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных?

10. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?

Глава 8
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

§ 36. ПОНЯТИЕ О ГОЛОМОРФНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ

Теоретической основой нахождения решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов является доказываемая ниже **теорема Коши** о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши.

Напомним сначала определение голоморфной функции. Функция f называется *голоморфной* в точке x_0, если она разложима в некоторой окрестности этой точки в степенной ряд по степеням $x - x_0$:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{8.1}$$

В этом случае говорят также, что $f(x)$ допускает в области $|x - x_0| < \rho$ аналитическое представление в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$.

При этом на $f(x)$ и на представляющий ее степенной ряд налагаются в указанной окрестности три условия: $f(x)$ определена, т. е. имеет конечное значение, ряд сходится и его сумма совпадает с $f(x)$.

Пример 1. Функции $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ голоморфны в точке $x = 0$, ибо, как известно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots,$$

причем ряды справа сходятся при $|x| < 1$.

Важным частным случаем голоморфных функций являются функции, для которых представление (8.1) имеет место в окрестности любой точки x_0, а ряд сходится при всех значениях x. Такие функции называются *целыми*.

Пример 2. Полином от x, e^x, $\sin x$, $\cos x$ — целые функции (почему?). В частности, при $x_0 = 0$ имеем известные разложения:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

причем ряды справа сходятся при всех x.

Данное выше определение голоморфности функции $f(x)$ распространяется на случай функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящей от n независимых переменных. Последняя называется *голоморфной в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1, \ldots, m_n} (x_1 - x_1^0)^{m_1}, \ldots, (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

где ряд справа сходится в области

$$|x_1 - x_1^0| < \rho_1, \ \ldots, \ |x_n - x_n^0| < \rho_n.$$

Пример 3. Функция $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$ является голоморфной в точке $(0, 0)$, ибо

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m=0}^{\infty} y^m = \sum_{k,\, m=0}^{\infty} x^k y^m,$$

причем ряд справа сходится в области $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Вернемся к функции $f(x)$, зависящей от одной независимой переменной. Из теории степенных рядов известно, что если $f(x)$ допускает разложение (8.1), то это разложение единственно; причем коэффициенты c_0, c_k выражаются через значения $f(x)$ и ее производных в точке x_0 по известным формулам

$$c_0 = f(x_0), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому разложение (8.1) можно переписать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \ |x - x_0| < \rho. \tag{8.2}$$

Ряд справа называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, всякий сходящийся степенной ряд есть ряд Тейлора для своей суммы, и мы можем говорить, что *функция $f(x)$ голоморфна в точке x_0, если она допускает в окрестности этой точки разложение в ряд Тейлора.* В частности, функция $f(x)$, для которой имеет место разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad |x| < \rho,$$

голоморфна в точке 0.

Из разложения (8.2) следует, что функция $f(x)$, голоморфная в точке x_0, допускает следующее *асимптотическое представление при $x \to x_0$*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

где $o((x - x_0)^n)$ — *бесконечно малая функция при $x \to x_0$ более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$.*

В частности, при $x \to 0$ имеем *асимптотическое представление*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Отбросив все члены ряда Тейлора (8.2), кроме свободного и члена с первой степенью разности $x - x_0$, получаем *линеаризацию функции $f(x)$ в точке x_0*:

$$Y = Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{8.3}$$

При этом $f(x)$ допускает *асимптотическое представление*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \ \ x \to x_0.$$

Геометрически (рис. 42) здесь речь идет о замене отрезка графика функции $y = f(x)$ в достаточно малой окрестности точки x_0 отрезком касательной (8.3) к нему в точке $(x_0, f(x_0))$ $(\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0))$. Совершаемая при этом погрешность будет иметь порядок $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$, т. е. является **бесконечно малой функцией при $x \to x_0$ более высокого порядка малости, чем $x - x_0$.**

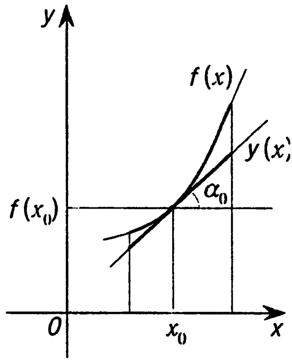

Рис. 42

Обратимся теперь к задаче Коши.

Рассмотрим сначала задачу Коши для уравнения первого порядка в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{8.4}$$

Говорят, что задача (8.4) имеет решение

$$y = y(x) = y(x, x_0, y_0), \tag{8.5}$$

голоморфное в точке x_0 (т. е. при начальном значении независимой переменной), если функция (8.5) голоморфна в точке x_0, т. е. представима в виде (8.1):

$$y = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho$$

или

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho \tag{8.6}$$

(здесь свободный член y_0 есть начальное значение решения (8.5) при $x = x_0$).

Линеаризация решения задачи Коши (8.4) *в точке* x_0 имеет вид

$$Y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \quad (c_1 = y'(x_0))$$

или

$$Y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

(так как $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$).

Рассмотрим пример, в котором решение задачи Коши представимо в виде сходящегося степенного ряда.

Пример 4. Найти голоморфное решение задачи Коши

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \tag{8.7}$$

т. е. нужно найти функцию, которая удовлетворяла бы начальному условию $y(0) = 1$, дифференциальному уравнению $y' = y^2$ и была бы голоморфна в точке 0.

Решение задачи Коши существует и единственно (почему?).

Так как представление этого решения в виде ряда по степеням x (если такое представление существует) единственно (почему?), а уравнение $y' = y^2$ легко интегрируется, то мы сначала найдем искомое решение, а потом попытаемся представить его в виде ряда по степеням x.

Интегрируя уравнение $y' = y^2$, имеем

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \quad (y = 0\,?), \quad -\frac{1}{y} = x + c.$$

Удовлетворяя начальному условию $y(0) = 1$, находим, что $c = -1$. Следовательно, искомым решением будет

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (-\infty < x < 1). \tag{8.8}$$

Это решение представимо в окрестности начального значения x, т. е. в окрестности нуля, известным степенным рядом, а именно геометрическим рядом:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \tag{8.9}$$

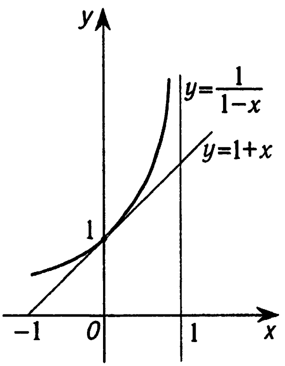

Рис. 43

Заметим, что решение (8.8) определено в более широком интервале $(-\infty, 1)$, так что ряд (8.9) дает аналитическое представление не всего решения (8.8), а лишь **сужения** его на интервал $(-1, 1)$.

Линеаризацией в точке 0 будет

$$Y = 1 + x$$

(см. рис. 43).

Для непосредственного нахождения голоморфного решения поставленной задачи Коши (8.7) можно использовать либо метод последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения, основанный на представлении решения в виде ряда Тейлора (ибо всякий сходящийся степенной ряд есть ряд Тейлора для его суммы), либо метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим оба эти метода.

Представляя искомое решение в виде ряда Тейлора по степеням x, имеем

$$y = y(0) + y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \ldots . \qquad (8.10)$$

Свободный член $y(0)$ нам известен из начального условия $y(0) = 1$. Коэффициент при x можно найти из дифференциального уравнения $y' = y^2$, положив в его обеих частях $x = 0$; приняв во внимание начальное условие $y(0) = 1$, получим $y'(0) = y^2(0) = 1$.

Далее, дифференцируя обе части уравнения $y' = y^2$ по x (при этом y^2 рассматривается как сложная функция от x), имеем

$$y'' = 2yy'. \qquad (8.11)$$

Полагая здесь $x = 0$ и заменяя y и y' их значениями при $x = 0$, получим $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2!$.

Дифференцируя (8.11) по x, найдем

$$y''' = 2\,(y'^2 + yy''),$$

откуда, полагая $x = 0$, получим

$$y'''(0) = 2\,(1^2 + 1 \cdot 2) = 3!.$$

Аналогично найдем $y^{(k)}(0) = k!$. Подставляя значение $y(0)$ и найденные значения производных от y в точке $x = 0$ в (8.10), получим снова разложение (8.9).

В методе неопределенных коэффициентов голоморфное решение задачи Коши (8.7) ищется согласно (8.6) в виде

$$y = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots + c_kx^k + \ldots, \qquad (8.12)$$

где c_1, c_2, ...— неопределенные коэффициенты, значения которых определяются подстановкой (8.12) в дифференциальное уравнение $y' = y^2$ и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства (предполагая, что ряд (8.12) сходится, и используя известную теорему о тождестве степенных рядов). Имеем

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + kc_kx^{k-1} + \ldots .$$

Подставляя (8.12) в $y' = y^2$, получим

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + kc_kx^{k-1} + \ldots =$$
$$= (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots + c_kx^k + \ldots)^2.$$

Выполняя справа операцию возведения степенного ряда в квадрат, получим

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + kc_kx^{k-1} + \ldots =$$
$$= 1 + 2c_1x + (c_1^2 + 2c_2)\, x^2 + 2\,(c_3 + c_1c_2)\, x^3 +$$
$$+ \ldots + \left(\sum_{m=0}^{k} c_m c_{k-m}\right) x^k + \ldots .$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^0\colon\ c_1 = 1$$
$$x^1\colon\ 2c_2 = 2c_1$$
$$x^2\colon\ 3c_3 = c_1^2 + 2c_2$$
$$x^3\colon\ 4c_4 = 2\,(c_3 + c_1c_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{k-1}\colon\ kc_k = \sum_{m=0}^{k-1} c_m c_{k-1-m}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Определяя отсюда последовательно c_1, c_2, ..., найдем $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \ldots = 1$. Подставляя найденные значения c_1, c_2, ... в ряд (8.12), получим искомое решение и на этот раз в виде (8.9).

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} = f\,(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}),\\ &y\,(x_0) = y_0,\ y'\,(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\,(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

Говорят, что задача (8.13) имеет решение

$$y = y\,(x) = y\,(x,\, x_0,\, y_0,\, y_0',\, \ldots,\, y_0^{(n-1)}), \tag{8.14}$$

голоморфное в точке x_0, если функция (8.14) голоморфна в точке x_0, т. е. представима в виде (8.1):

$$y = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,(x - x_0)^k,\quad |x - x_0| < \rho$$

или

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{8.15}$$

(Здесь $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ заданные начальные значения решения (8.14) при $x = x_0$). Коэффициенты c_k $(k \geq n)$ так же, как и в случае построения голоморфного решения задачи Коши для уравнения первого порядка, могут быть найдены из самого дифференциального уравнения и уравнений, полученных из него последовательным дифференцированием, или методом неопределенных коэффициентов.

Заметим, что формула (8.6) есть частный случай формулы (8.15) при $n = 1$. В этом последнем случае нам заранее известно лишь одно первое слагаемое $y_0 = y(x_0)$.

Обратимся, наконец, к задаче Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &y_m(x_0) = y_m^0 \end{aligned}\right\} (m = 1, \ldots, n). \tag{8.16}$$

Решение этой задачи

$$y_m = y_m(x) = y_m(x, x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \quad (m = 1, \ldots, n) \tag{8.17}$$

называется голоморфным в точке x_0, если все функции (8.17) голоморфны в этой точке. Оно имеет вид

$$y_m = y_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(m)} (x - x_0)^k \quad (m = 1, \ldots, n),$$

где $y_m^{(0)}$ — заданные числа (начальные значения искомых функций $y_m(x)$).

Во всех рассмотренных случаях голоморфные решения задачи Коши представимы рядами Тейлора.

Следует иметь в виду, что всегда представляется весьма перспективным иметь голоморфное решение задачи Коши, которое является источником приближенных решений. Здесь степенной ряд выступает как поисковый **аналитический аппарат**, представляющий собой решение задачи Коши. Получающиеся при этом степенные ряды, как правило, не суммируются, т. е. их суммы не являются элементарными функциями, так что в этом случае дифференциальные уравнения являются источником новых неэлементарных функций.

Иногда степенные ряды, представляющие голоморфные решения дифференциальных уравнений, обрываются, обращаясь в **полиномы**.

§ 37. ТЕОРЕМА КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

37.1. Теорема Коши

Начнем с уравнения первого порядка в нормальной форме. Пусть поставлена задача Коши (8.4)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \; y(x_0) = y_0.$$

Оказывается, если функция f голоморфна в точке (x_0, y_0), то задача Коши (8.4) имеет голоморфное в точке x_0 решение, и притом единственное. Это решение имеет вид (8.6).

Не умаляя общности, можно считать начальные данные x_0, y_0 нулевыми ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), ибо этого всегда можно добиться преобразованием $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$. Таким образом, вместо задачи Коши (8.4) мы можем рассматривать задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \; y(0) = 0. \tag{8.18}$$

Теорема Коши. *Если f голоморфна в точке* (0, 0), *т. е. допускает разложение*

$$f(x, y) = \sum_{m,\, n = 0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \; |x| < \rho, \; |y| < r, \tag{8.19}$$

то задача Коши (8.18) *имеет единственное решение* $y = y(x; 0, 0)$, *голоморфное в точке* 0:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \; |x| < \rho_1 < \rho. \tag{8.20}$$

Доказательство. Утверждение теоремы будет доказано, если покажем, что все **коэффициенты** c_k могут быть

найдены (единственным образом) и что **ряд** (8.20) **сходится** в указанной окрестности точки 0. В связи с этим разобьем доказательство на две части.

Часть I (*построение* (*единственного*) *формального решения* (8.20)). Будем искать (8.20) методом неопределенных коэффициентов. Подставляя ряд (8.20) в уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \tag{8.21}$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k. \tag{8.22}$$

(Здесь выполнены формальные операции почленного дифференцирования степенного ряда и подстановки ряда в ряд, законность которых следует из сходимости ряда (8.20), которую мы установим во второй части доказательства.)

Считая равенство (8.22) тождеством (ибо (8.20) — решение дифференциального уравнения (8.21)) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь

$$x^0\colon\ 1 \cdot c_1 = a_{00} \Rightarrow c_1 = a_{00}$$

$$x^1\colon\ 2 \cdot c_2 = a_{10} + a_{01} c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} (a_{10} + a_{01} a_{00}) \equiv P_2 (a_{\lambda\mu}).$$

Мы видим, что c_1 и c_2 выражены через некоторые первые коэффициенты разложения функции f.

Аналогично, приравнивая в (8.22) коэффициенты при x^{k-1}, найдем

$$c_k = P_k (a_{\lambda\mu}), \tag{8.23}$$

где P_k — полиномы от своих аргументов с положительными коэффициентами (у P_2 эти коэффициенты равны $\frac{1}{2}$).

Таким образом, формальное решение (8.20) построено. Из единственности определения c_k следует, что если голоморфное решение задачи Коши (8.18) существует, то оно **единственно**.

Часть II. Докажем теперь, что ряд (8.20) сходится в некоторой окрестности точки 0. Для этого достаточно построить степенной ряд, *мажорирующий* ряд (8.20), т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k x^k \tag{8.24}$$

с **положительными** коэффициентами, **сходящийся** в некоторой области

$$|x| < \rho_1 \tag{8.25}$$

и такой, что

$$|c_k| \leq \bar{c}_k \ (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8.26}$$

Тогда, как известно, ряд (8.20) будет **заведомо сходиться** в той же области (8.25).

Для построения ряда (8.24) рассмотрим *мажорантную задачу Коши*:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = F\,(x,\, \bar{y}), \quad \bar{y}\,(0) = 0, \tag{8.27}$$

где $F\,(x,\, y)$ — некоторая **мажоранта** функции $f\,(x,\, y)$. В качестве $F\,(x,\, y)$ возьмем *мажоранту Коши*

$$F\,(x,\, y) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \dfrac{y}{r'}\right)} \ (|x| < \rho',\ |y| < r'),$$

где $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, а M — сумма ряда

$$\sum_{m,\, n = 0}^{\infty} |a_{mn}|\, \rho'^m r'^n = M \tag{8.28}$$

(который сходится вследствие абсолютной сходимости ряда (8.19) в области $|x| < \rho$, $|y| < r$). Мажоранта F конструируется на основе оценки Коши коэффициента сходящегося степенного ряда (8.19)

$$|a_{mn}| \leq \frac{M}{\rho'^m r'^n} \equiv A_{mn}, \tag{8.29}$$

вытекающей из (8.28).

Взяв ряд по степеням x и y с коэффициентами A_{mn}, получим

$$\sum_{m,\, n = 0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n = \sum_{m,\, n = 0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^m r'^n}\, x^m y^n = M \sum_{m,\, n = 0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho'}\right)^m \left(\frac{y}{r'}\right)^n =$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \dfrac{y}{r'}\right)} \equiv F\,(x,\, y) \ \ (|x| < \rho',\ |y| < r').$$

Мажорантная задача Коши (8.27) примет вид

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{\bar{y}}{r'}\right)},\quad \bar{y}\,(0)=0. \tag{8.30}$$

Дифференциальное уравнение, входящее в задачу (8.30), называется *мажорантным уравнением* для уравнения задачи (8.18).

Мажорантная задача (8.30) имеет единственное решение (почему?). Найдем его. Интегрируя мажорантное уравнение, имеем

$$\left(1-\frac{\bar{y}}{r'}\right)d\bar{y}=\frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}\,dx,$$

$$-\frac{r'}{2}\left(1-\frac{\bar{y}}{r'}\right)^2=-M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)+C. \tag{8.31}$$

Удовлетворяя начальному условию $\bar{y}\,(0)=0$, найдем $C=-\frac{r'}{2}$. Подставляя это значение C в (8.31) и умножая обе части на $\left(-\frac{2}{r'}\right)$, получим

$$\left(1-\frac{\bar{y}}{r'}\right)^2=1+\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right).$$

Разрешая относительно $\bar{y}$, найдем

$$\bar{y}=r'\left(1-\sqrt{1+\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)}\right). \tag{8.32}$$

Это решение голоморфно в точке 0 как суперпозиция двух голоморфных функций:

$$\sqrt{1+\alpha},\quad \alpha=\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right).$$

Таким образом, решение (8.32) представимо в виде

$$\bar{y}=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{c}_k x^k, \tag{8.33}$$

где ряд справа сходится в некоторой окрестности точки 0 (по определению голоморфной функции). Оценим область сходимости ряда (8.33).

Согласно известной теореме Абеля достаточно ограничиться исследованием **положительных значений** x. Так как радиус сходимости логарифмического и биномиального рядов равен 1, то допустимые значения x должны удовлетворять системе двух неравенств

$$\left.\begin{aligned} &0 < x < \rho', \\ &-\frac{2M\rho'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) < 1. \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

Последнее неравенство следует из неравенства $|\alpha| < 1$ с учетом того, что $\alpha < 0$ (почему?).

Решая второе из неравенств (8.34), имеем

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) > -\frac{r'}{2M\rho'}, \quad 1 - \frac{x}{\rho'} > e^{-\frac{r'}{2M\rho'}},$$

$$x < \rho'\left(1 - e^{-\frac{r'}{2M\rho'}}\right).$$

Первое из неравенств (8.34) выполняется автоматически. Таким образом, ряд (8.33) сходится в области

$$|x| < \rho_1 = \rho'\left(1 - e^{-\frac{r'}{2M\rho'}}\right).$$

Остается показать, что все коэффициенты ряда (8.33) положительны и что имеют место оценки (8.26).

Но это следует из того, что $\bar{c}_k$ можно найти методом неопределенных коэффициентов по тому же алгоритму, что и c_k. Получим

$$\bar{c}_k = P_k\,(A_{\lambda\mu}), \tag{8.23$'$}$$

где P_k — те же самые полиномы, что и в (8.23), только аргументы другие: не коэффициенты разложения функции f, а коэффициенты разложения мажоранты F. Из формулы (8.23′) в силу положительности коэффициентов полиномов P_k и оценок (8.29) следует, что все $\bar{c}_k$ положительны и мажорируют c_k, т. е. имеют место оценки (8.26). **Мажорирующий** ряд (8.24) построен.

Таким образом, ряд (8.33) **мажорирует** формальное решение (8.20), чем и завершается доказательство теоремы Коши.

37.2. Случай линейного уравнения. Выбор начальных данных. Радиус сходимости ряда, представляющего решение

Рассмотрим линейное уравнение, записанное в нормальной форме,

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y + q(x) \equiv f(x, y). \tag{8.35}$$

Мы видим, что его правая часть $f(x, y)$, будучи линейной функцией от y, голоморфна относительно y в любой точке $y_0 : y = y_0 + (y - y_0)$. Поэтому для выполнимости условий теоремы Коши достаточно потребовать голоморфности p и q в точке x_0, беря y_0 любым. Будем по-прежнему считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Итак, пусть поставлена задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y + q(x),\ y(0) = 0. \tag{8.36}$$

Предположим, что p и q **голоморфны** в точке 0:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \end{aligned}\right\}\quad |x| < \rho. \tag{8.37}$$

Утверждение. *Задача Коши* (8.36) *имеет единственное решение, голоморфное в точке* 0; *причем ряд* (8.20), *представляющий это решение, будет заведомо сходиться в той же самой области*

$$|x| < \rho, \tag{8.38}$$

в которой сходятся ряды (8.37), *представляющие функции p и q*.

Доказательство этого утверждения будем проводить по той же схеме, что и в общем случае. При этом окажется, что в силу **линейности** уравнения (8.35) можно взять мажоранту, определенную в более широкой области, что и обеспечит сходимость решения (8.20) в области (8.38).

Сначала методом неопределенных коэффициентов строим формальное решение (8.20). Окажется, что

$$c_k = P_k(p_\lambda, q_\mu). \tag{8.39}$$

Для доказательства сходимости ряда (8.20) воспользуемся мажорантной задачей Коши (8.27), где F — мажоранта для функции (8.35). Для построения мажоранты F достаточно заменить функции p и q их общей мажорантой Φ, в качестве которой можно взять

$$\Phi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}}, \quad |x| < \rho', \tag{8.40}$$

где M — некоторое положительное число.

В самом деле, взяв положительное число ρ', меньшее ρ, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_k| \, \rho'^k = M_1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |q_k| \, \rho'^k = M_2.$$

Поэтому

$$|p_k| \le \frac{M_1}{\rho'^k}, \quad |q_k| \le \frac{M_2}{\rho'^k}$$

и ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_1}{\rho'^k} x^k = \frac{M_1}{1 - \frac{x}{\rho'}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2}{\rho'^k} x^k = \frac{M_2}{1 - \frac{x}{\rho'}}$$

будут мажорировать ряды (8.37). Поэтому в качестве общей мажоранты для p и q можно взять функцию (8.40), где $M = \max(M_1, M_2)$.

Итак,

$$F(x, y) = \Phi(x)\, y + \Phi(x) = \Phi(x)(y + 1)$$

или

$$F(x, y) = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}}(y + 1), \quad |x| < \rho'.$$

Таким образом, в качестве **мажорантной задачи Коши** можно взять

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}}(\bar{y} + 1), \quad \bar{y}(0) = 0.$$

Решая эту задачу, имеем

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}+1}=\frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}}\,dx,\quad \ln(\bar{y}+1)=-M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)+C$$

$$(\bar{y}(0)=0\Rightarrow C=0),\quad \ln(\bar{y}+1)=-M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right),$$

откуда

$$\bar{y}+1=\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'},$$

$$\bar{y}=-1+\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'}.$$

Полученное решение, очевидно, голоморфно в точке 0:

$$\bar{y}=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{c}_k x^k,\quad |x|<\rho'. \tag{8.41}$$

Далее, так же как и в общем случае теоремы Коши, устанавливается, используя (8.39), что

$$\bar{c}_k>0,\quad |c_k|\le\bar{c}_k\quad (k=1,2,\ldots).$$

Поэтому ряд (8.41) **мажорирует** формальный ряд (8.20), вследствие чего ряд (8.20) заведомо сходится в области $|x|<\rho'$. Но ρ' можно выбрать сколь угодно близким к ρ. Поэтому ряд (8.20) представляет решение задачи Коши **во всем интервале** (8.38). Утверждение доказано.

На практике возможность построения голоморфного решения задачи Коши для линейного уравнения зависит от аналитических свойств и аналитической структуры функций p и q. Если, в частности, эти функции суть **полиномы**, то не только y_0, но и x_0 можно задавать **произвольно**, а ряд

$$y=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(x-x_0)^k, \tag{8.42}$$

представляющий решение, будет сходиться **при всех x**. В случае, когда p и q являются отношениями полиномов $\frac{P(x)}{Q(x)}$, за x_0 можно брать любое число, не являющееся нулем знаменателя (только при таком выборе x_0 в качестве y_0 можно брать любое число); причем **радиус сходимости** ряда (8.42) равен **расстоянию от точки x_0 до ближайшего из нулей знамена-**

теля, включая комплексные. Наконец, если p и q — любые **целые** функции (не обязательно полиномы), то будем иметь ту же ситуацию, что и в случае полиномов: x_0 и y_0 — любые и ряд (8.42) сходится при всех x.

Отмеченные два преимущества линейных уравнений, относящиеся к выбору x_0 и y_0 и области сходимости ряда (8.42), имеют большое теоретическое и прикладное значение, значительно облегчая построение общей теории. Нелинейные уравнения такими свойствами не обладают. Мы это уже видели для уравнения $y' = y^2$ (см. задачу Коши (8.7)).

Доказанная теорема Коши и ее линейный случай распространяются на нормальную систему дифференциальных уравнений [70].

Пусть поставлена задача Коши (8.16)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &y_m(x_0) = y_m^{(0)}. \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, \ldots, n).$$

Предположим, что все f_m голоморфны в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, y_n^{(0)})$; тогда существует единственное решение задачи Коши (8.16), *голоморфное в точке x_0*.

В случае линейной системы *задача Коши*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_m}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{ml}(x)\, y_l + f_m(x), \\ &y_m(x_0) = y_m^{(0)} \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, \ldots, n)$$

при условии, что $p_{ml}(x)$ и $f_m(x)$ голоморфны в точке x_0, а $y_m^{(0)}$ — любые заданные числа, имеет единственное решение, голоморфное в точке x_0; причем ряды

$$y_m = y_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(m)} (x - x_0)^k \quad (m = 1, \ldots, n),$$

представляющие это решение, заведомо сходятся в той же области, в которой сходятся ряды, представляющие $p_{ml}(x)$ и $f_m(x)$.

Для уравнений высших порядков (и для систем таких уравнений) тоже имеет место теорема существования и единственности голоморфного решения задачи Коши [70].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме (8.13).

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\}$$

Если функция f голоморфна в точке $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, то задача Коши (8.13) *имеет единственное решение, голоморфное в точке x_0.*

Это следует из того, что задача Коши (8.13) равносильна задаче Коши для соответствующей нормальной системы (§ 28)

$$\left.\begin{aligned} &y'_1 = y_2, \\ &y'_2 = y_3, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &y'_{n-1} = y_n, \\ &y'_n = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &y_1(x_0) = y_0,\ y_2(x_0) = y'_0, \ldots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.43)$$

существование и единственность голоморфного решения которой обеспечено теоремой существования и единственности голоморфного решения нормальной системы, ибо правые части системы (8.43) голоморфны в начальной точке (почему?).

В случае линейного уравнения n-го порядка *задача Коши*

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x), \\ &y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (8.44)$$

при условии, что функции $p_1, \ldots, p_n$ и f голоморфны в точке x_0, а $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые заданные числа, имеет единственное решение, голоморфное в точке x_0, а ряд (8.15)

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

представляющий это решение, заведомо сходится в той же области, в которой сходятся ряды, представляющие функции p_1, ..., p_n и f.

Это утверждение следует из того, что задача Коши (8.44) равносильна задаче Коши для соответствующей нормальной системы, которая на этот раз окажется линейной:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1' = y_2,\\
&y_2' = y_3,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&y_{n-1}' = y_n,\\
&y_n' = -p_1(x)\,y_n - \ldots - p_{n-1}(x)\,y_2 - p_n(x)\,y_1 + f(x),\\
&y_1(x_0) = y_0,\ y_2(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

Все коэффициенты этой (линейной) системы и функция f голоморфны в точке x_0 (почему?). А тогда задача Коши (8.45) имеет единственное решение y_1, ..., y_n, голоморфное в точке x_0, какие бы начальные значения искомых функций ни взяли. В том числе существует и $y_1 = y$. Это решение представимо в виде ряда (8.15) (почему?).

§ 38. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Пусть дано линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{8.46}$$

и требуется найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \tag{8.47}$$

и голоморфное в точке x_0, т. е. представимое в некоторой окрестности точки x_0 степенным рядом

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{8.48}$$

Из указанной выше теоремы Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши для линейного уравнения n-го порядка следует, что искомое решение заведомо существует и единственно, если точка x_0 является **точкой голоморфности** функций p, q и f. Что касается начальных данных y_0 и y_0', то их можно брать **любыми**. Теорема Коши гарантирует также, что ряд (8.48) сходится по крайней мере в той же области $|x - x_0| < \rho$, в которой сходятся ряды по степеням $x - x_0$, представляющие функции p, q и f.

Остается только найти коэффициенты c_k. Это всегда можно сделать, например, методом неопределенных коэффициентов, вычисляя y' и y'' почленным дифференцированием ряда (8.48) (которое законно, ибо этот ряд сходится в рассматриваемом интервале $|x - x_0| < \rho$) и подставляя y, y' и y'' в уравнение (8.46), разложив предварительно p, q и f в ряды по степеням $(x - x_0)$. Приравнивая в полученном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, придем к уравнениям относительно c_k ($k \geq 2$), которые всегда (последовательно) разрешимы. Заметим, что исследовать найденное решение (8.48) на сходимость не требуется. Она уже гарантирована теоремой Коши.

На деле (особенно если c_k не имеет удобной структуры) ограничиваются вычислением нескольких первых коэффициентов c_k, чтобы обеспечить заданную точность приближенного решения задачи Коши (8.46), (8.47), получающегося из (8.48) сохранением только первых членов ряда.

В частности, **линеаризация** решения задачи Коши (8.46), (8.47)

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0),$$

получающаяся из (8.48) отбрасыванием всех степеней $x - x_0$, начиная со второй, доставляется уже начальными условиями (8.47) без использования самого дифференциального уравнения (8.46), которое обеспечивает за счет голоморфности функций p, q и f справедливость **асимптотического представления** точного решения задачи Коши (8.46), (8.47):

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Коэффициенты c_k ряда (8.48) можно найти также **методом последовательного дифференцирования**. При этом мы исходим из представления голоморфного решения задачи Коши

(8.46), (8.47) в виде ряда Тейлора, т. е. переписываем (8.48) в виде

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Значение $y''(x_0)$ можем найти из уравнения (8.46), подставив в него вместо x, y и y' их начальные значения x_0, y_0 и y_0'. Затем, дифференцируя (8.46), имеем

$$y''' + p'(x)\,y' + p(x)\,y'' + q'(x)\,y + q(x)\,y' = f'(x).$$

Заменяя здесь x, y, y', y'' числами x_0, y_0, y_0', $y''(x_0)$, найдем $y'''(x_0)$ и т. д.

Пример. Найти голоморфное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{1 - x}\,y = x, \tag{8.49}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Так как

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1,$$

то искомое решение существует, единственно и имеет вид

$$y = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k, \tag{8.50}$$

(почему?), причем ряд справа заведомо сходится при $|x| < 1$.

Найдем c_k $(k \geq 2)$. Перепишем уравнение (8.49) в виде

$$y'' + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot y = x, \tag{8.51}$$

разложив коэффициент при y в ряд по степеням x. Вычислим y' и y''. Имеем

$$y' = \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)\,c_k x^{k-2}.$$

Подставим разложения y и y'' в дифференциальное уравнение (8.51).

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k\right) = x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^0:\ 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 1 = 0$$
$$x^1:\ 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 1 = 1$$
$$x^2:\ 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 1 + c_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из этой системы находим

$$c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4},\ \dots .$$

Искомым решением будет

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots . \tag{8.52}$$

Линеаризация этого решения имеет вид

$$y = 1.$$

Найдем коэффициенты c_k методом последовательного дифференцирования. Имеем

$$c_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}\ (k \geq 2).$$

Значение $y''(0)$ находим из уравнения (8.49), полагая $x = 0$, $y = 1$. Получим

$$y''(0) + 1 = 0,$$

откуда $y''(0) = -1$. Дифференцируя (8.49), имеем

$$y''' + \frac{1}{(1-x)^2}y + \frac{1}{1-x}y' = 1,$$

откуда

$$y'''(0) + 1 = 1 \Rightarrow y'''(0) = 0.$$

Далее, имеем

$$y^{(4)} + \frac{2}{(1-x)^3}y + \frac{1}{(1-x)^2}y' + \frac{1}{(1-x)^2}y' + \frac{1}{1-x}y'' = 0,$$

откуда

$$y^{(4)}(0)+2-1=0 \Rightarrow y^{(4)}(0)=-1.$$

Заменяя в (8.50) c_2, c_3, c_4, ... их значениями, снова получим (8.52).

§ 39. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0. \tag{8.53}$$

Предположим, что его коэффициенты p и q *голоморфны* в некоторой точке x_0, т. е. $p(x)$ и $q(x)$ представимы в окрестности этой точки степенными рядами по степеням $x-x_0$, сходящимся в некоторой области $|x-x_0|<\rho$. Тогда, пользуясь теоремой Коши, можно построить фундаментальную систему решений, голоморфную в этой точке, т. е. состоящую из голоморфных решений — *голоморфный базис* линейного пространства решений.

Обычно строят голоморфный базис (y_1, y_2), нормированный в точке x_0, т. е. линейно независимые решения y_1 и y_2 с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} y_1(x_0)=1, \quad y_1'(x_0)=0,\\ y_2(x_0)=0, \quad y_2'(x_0)=1,\end{aligned}\right\}$$

так что y_1 и y_2 представимы степенными рядами

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k,\\ y_2&=x-x_0+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k,\end{aligned}\right\}$$

сходящимися в некоторой окрестности $|x-x_0|<\rho$ точки x_0, что позволяет согласно основной теореме теории линейных уравнений (§ 17) построить общее решение

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

в области

$$|x - x_0| < \rho, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty.$$

Таким образом, при сделанном предположении относительно голоморфности коэффициентов уравнения (8.53) всегда можем проинтегрировать последнее с помощью степенных рядов.

Рассмотрим два модельных примера.

Пример 1. Проинтегрировать с помощью степенных рядов уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Построим сначала голоморфный базис (y_1, y_2), нормированный в точке 0, которая (как и любая точка $x \in \boldsymbol{R}$) является точкой голоморфности коэффициента при y. Теорема Коши для случая линейного уравнения гарантирует существование и единственность этого базиса (как, впрочем, и любого другого); причем ряды, представляющие функции y_1 и y_2, заведомо сходятся при всех x (почему?), представляя, таким образом, целые функции. Нам остается только построить y_1 и y_2.

Строим y_1 в виде

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} x^k.$$

Будем искать c_k методом последовательного дифференцирования, рассматривая их как коэффициенты Тейлора для функции y_1.

$$c_k^{(1)} = \frac{y_1^{(k)}(0)}{k!} \quad (k \geq 2).$$

Дело сводится, таким образом, к нахождению $y_1^{(k)}(0)$.

Из тождества

$$y_1'' = -y_1 \tag{8.54}$$

находим

$$y_1''(0) = -y_1(0) \quad (y_1(0) = 1) \Rightarrow y_1''(0) = -1.$$

Дифференцируя (8.54), имеем

$$y_1''' = -y_1',$$

откуда

$$y_1'''(0) = -y_1'(0) \; (y_1'(0) = 0) \Rightarrow y_1'''(0) = 0.$$

Далее, имеем

$$y_1^{(4)} = -y_1'' \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = -y_1''(0) \; (y_1''(0) = -1) \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = 1.$$

Легко видеть, что

$$y^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad y^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \cos x.$$

Аналогично найдем

$$y_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots = \sin x.$$

Как и следовало ожидать, ряды для y_1, y_2 сходятся при всех x, а их суммы $\cos x$ и $\sin x$ — целые функции.

Легко непосредственной проверкой убедиться, что функция $\cos x$ и $\sin x$ образуют голоморфный в точке 0 базис, нормированный в этой точке.

Используя найденный голоморфный базис, получаем общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

в области

$$|x| < +\infty, \; |y| < +\infty, \; |y'| < +\infty. \tag{8.55}$$

Пример 2. Построить фундаментальную систему решений уравнения

$$y'' - y = 0, \tag{8.56}$$

нормированную в точке 0 в виде степенных рядов.

Известно (§ 20, пример 1), что уравнение (8.56) имеет фундаментальную систему решений e^x, e^{-x}. Оба эти решения голоморфны в точке 0 (почему?). Но эта фундаментальная система не нормирована в точке 0. (Убедитесь в этом.) Для построения нормированной в точке 0 фундаментальной системы y_1, y_2 можно воспользоваться общим решением

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{8.57}$$

Получим $y_1 = \operatorname{ch} x$, $y_2 = \operatorname{sh} x$ (почему?). Найдем эту фундаментальную систему непосредственно.

Имеем

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \quad |x| < +\infty;$$

$$c_k^{(1)} = \frac{y_1^{(k)}(0)}{k!}\ (k \geq 2);\ \ y_1'' = y_1 \Rightarrow y_1''(0) = y_1(0) = 1;$$

$$y_1''' = y_1' \Rightarrow y_1'''(0) = y_1'(0) = 0;\ \ y_1^{(4)} = y_1'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1^{(4)}(0) = y_1''(0) = 1; \ldots$$

$$y_1^{(2k)}(0) = 1,\ y_1^{(2k-1)}(0) = 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично находим

$$y_2 = x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \operatorname{sh} x.$$

Снова получили ту же самую фундаментальную систему, чего и следовало ожидать, в силу единственности фундаментальной системы решений, нормированной в данной точке.

Используя фундаментальную систему $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, можем записать общее решение уравнения (8.56) в виде

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x.$$

Это общее решение, так же как и общее решение (8.57), определено в области (8.55).

Рассмотренный способ интегрирования дифференциальных уравнений распространяется и на системы дифференциальных уравнений с опорой на теорему Коши. Наиболее успешно он применяется к интегрированию однородных линейных систем, для чего, так же как и в случае однородного линейного уравнения, достаточно построить фундаментальную систему решений, голоморфную в некоторой точке голоморфности коэффициентов системы (обычно строят фундаментальную систему решений, нормированную в этой точке [72]).

Вопросы для повторения

1. Какая функция называется голоморфной в точке x_0? Какая функция называется целой? Приведите три примера целых функций. Являются ли функции $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ целыми?

2. Дайте определение голоморфной функции нескольких независимых переменных.

3. Какой вид имеет асимптотическое представление функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если эта функция голоморфна в точке x_0? Какая приближенная формула следует из этого асимптотического представления, какова погрешность этой формулы?

4. Что такое линеаризация функции $f(x)$ в точке x_0? Как она получается из ряда Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0? Каков геометрический смысл линеаризации? Найдите линеаризации функций $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ в точке 0. Постройте графики этих линеаризаций.

5. Какой вид имеет решение задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, голоморфное в точке x_0? Какой вид имеет линеаризация этого решения в точке x_0? (Сделайте рисунок.)

6. В чем состоят метод последовательного дифференцирования и метод неопределенных коэффициентов для нахождения голоморфного решения задачи Коши? Найдите этим методом голоморфные решения задач Коши: $y' = y$, $y(0) = 1$ и $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Найдите линеаризации этих решений в точке 0. (Сделайте рисунки.) Почему линеаризации совпадают?

7. Какой вид имеет голоморфное решение задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме? Как оно может быть найдено?

8. Какой вид имеет голоморфное решение задачи Коши для нормальной системы n уравнений?

9. Дайте формулировку теоремы Коши о достаточном условии существования и единственности голоморфного решения задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Укажите этапы доказательства этой теоремы с использованием метода мажорант. Что такое мажорантная задача Коши?

10. Сформулируйте теорему Коши о достаточном условии существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для линейного уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$, $y(x_0) = y_0$. Сравните этапы доказательства с общим (нелинейным) случаем (как проявляет себя линейность уравнения?).

Какими преимуществами обладает линейное уравнение? Как реализуются эти преимущества, когда p и q — целые функции (в частности, полиномы) или отношения полиномов?

11. Дайте формулировку теоремы Коши для нормальной системы n уравнений? Какие преимущества имеет линейная система?

12. Дайте формулировку теоремы Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме. Какими преимуществами обладает линейное уравнение?

13. Дайте формулировку теоремы Коши для однородного линейного уравнения второго порядка. Как можно выбирать начальные данные в условиях Коши? Как связаны интервал сходимости ряда, представляющего решение, с интервалом сходимости рядов, представляющих коэффициенты?

14. Как можно выбирать начальные данные при постановке задачи Коши для однородного линейного уравнения второго порядка в случаях, когда его коэффициенты являются целыми функциями (в частности, полиномами) или отношениями полиномов? Каков радиус сходимости рядов, представляющих решение задачи Коши в этих случаях?

15. Для каждого из указанных ниже уравнений выясните, какие начальные данные можно задавать, чтобы задача Коши имела голоморфное решение, и укажите радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение:

а) $y'' + \frac{1}{1-x}\, y = 0$; б) $y'' + \frac{x}{1+x^2}\, y = 0$.

16. Как можно найти коэффициенты степенного ряда, представляющего решение задачи Коши для однородного линейного уравнения второго порядка?

17. Как интегрируется однородное линейное уравнение второго порядка с помощью степенных рядов?

Глава 9
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

§ 40. ТЕОРЕМА ПИКАРА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Фундаментом общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, предметом которой является изучение свойств решений по свойствам самого дифференциального уравнения, является теорема Пикара для уравнения (системы уравнений) в нормальной форме. Требования, предъявляемые теоремой Пикара к правой части уравнения, менее жесткие, чем в теореме Коши, изложенной в предыдущей главе. Но она все-таки в отличие от теоремы Пеано [70] обеспечивает не только существование, но и единственность решения. Требование единственности является существенным как для непосредственных приложений теоремы Пикара, так и для изучения поведения решений дифференциальных уравнений в окрестности начальных данных и во всей области существования их.

Правда, следует отметить, что условия теоремы Пикара являются стеснительными для современной теории дифференциальных уравнений и ее многочисленных приложений в новейших областях.

Однако в классической теории дифференциальных уравнений, в вопросах зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных, при изучении поведения интегральных кривых в окрестности (изолированных) особых точек уравнения или точек покоя системы уравнений, в вопросах теории устойчивости и связанных с нею классических проблем теории управления теорема Пикара и следствия из нее имеют непреходящее значение, не говоря уже о методологической роли теоремы Пикара для формирования основных понятий и определений теории дифференциальных уравнений.

Ниже будет рассмотрена теорема Пикара для уравнения первого порядка, системы уравнений и уравнения n-го порядка в нормальной форме и указаны преимущества линейного случая как в отношении выбора начальных данных, так и в отношении гарантированного интервала существования решения.

Так же как и при изложении теоремы Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши, начнем с уравнения первого порядка в нормальной форме.

Итак, пусть поставлена задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{9.1}$$

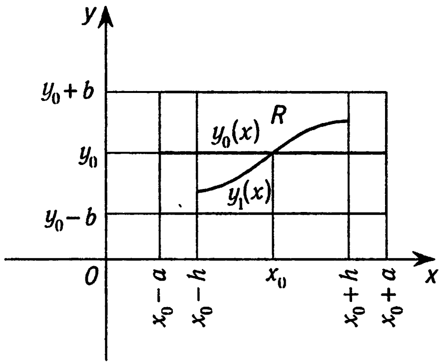

Рис. 44

Предположим, что функция f определена и непрерывна по совокупности переменных x и y в некоторой замкнутой области, в качестве которой возьмем прямоугольник R (рис. 44):

$$|x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b.$$

Тогда в силу известной теоремы Вейерштрасса f будет ограничена в R:

$$|f(x, y)| \le M \ \forall (x, y) \in R,$$

где $M > 0$ — постоянное число. Потребуем дополнительно, чтобы f в отношении искомой функции y была не только непрерывна, но и липшицева, т. е. удовлетворяла *условию Липшица*

$$|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})| \le L\, |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|, \tag{9.2}$$

где $L > 0$ — постоянная (константа Липшица), а $(x, \bar{y})$ и $(x, \bar{\bar{y}})$ — любые две точки из прямоугольника R.

Условие Липшица дает оценку роста f по y. Опираясь на формулу конечных приращений, легко показать [71], что условие Липшица будет заведомо выполнено, если $\frac{df}{dy}$ существует и непрерывна в R.

Напомним, что именно это более сильное требование положено в основу упрощенной формулировки теоремы Пикара в главе 1, в то время как для липшицевости оно не требуется, как показывает пример функции $f = |y|$, для которой условие Липшица выполнено (почему?), хотя f в точке 0 даже не дифференцируема.

При сделанных предположениях можно доказать, что задача Коши (9.1) имеет решение и что последнее единственно, а именно, имеет место следующая

Теорема Пикара. *Если $f(x, y) \in C(R)$ (f непрерывна в R) и удовлетворяет условию Липшица* (9.2), *то задача Коши* (9.1) *имеет единственное решение*

$$y = y(x) = y(x, x_0, y_0), \tag{9.3}$$

причем решение $y(x) \in C^1(|x - x_0| \le h)$, т. е. определено и непрерывно дифференцируемо в интервале

$$|x - x_0| \le h, \ h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{9.4}$$

и решение (9.3) *не выходит из области R*:

$$|y(x) - y_0| \le b \text{ при } |x - x_0| \le h. \tag{9.5}$$

Доказательство. Как показано в главе 1, задача Коши (9.1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx, \tag{9.6}$$

так что достаточно доказать существование и единственность непрерывного решения интегрального уравнения (9.6), определенного в интервале (9.4) и не выходящего из R. Для нахождения этого решения воспользуемся методом последовательных приближений (метод Пикара), рассмотренным в главе 1.

Будем строить последовательные приближения $y_n(x)$ к искомому решению $y = y(x)$ по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx, \tag{9.7}$$

взяв в качестве исходного (нулевого) приближения постоянную функцию

$$y_0(x) \equiv y_0. \tag{9.8}$$

Может оказаться, что

$$f(x, y_0) \equiv 0,$$

так что функция (9.8) будет являться решением уравнения $y' = f(x, y)$. Тогда существование решения задачи Коши (9.1) уже доказано. Будем, однако, предполагать, что это не так, и продолжим доказательство.

Докажем, что

$$y_n(x) \in C \quad (|x - x_0| \leq h),$$
$$|y_n(x) - y_0| \leq b \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h \tag{9.9}$$

(т. е. последовательные приближения определены и непрерывны в интервале $|x - x_0| \leq h$ и не выходят при этих значениях x из области R) и что (при $n \to \infty$)

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x) \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h \tag{9.10}$$

(т. е. последовательные приближения $y_n(x)$ **равномерно** сходятся в $|x - x_0| \leq h$ к некоторой функции $y(x)$). Предельная функция $y(x)$ будет непрерывной в $|x - x_0| \leq h$ и не будет выходить из области R, т. е. будет выполняться неравенство (9.5). После этого нам останется сделать предельный переход в (9.7) (при $n \to \infty$, $|x - x_0| \leq h$), чем и завершится доказательство существования решения (9.3) задачи Коши (9.1).

Убедимся сначала, что первое приближение $y_1(x)$ обладает указанными свойствами.

Имеем

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx.$$

Из известной теоремы о непрерывности определенного интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $y_1(x) \in C \quad (|x - x_0| \leq a)$ (почему?).

Докажем, что $y_1(x)$ не выходит из R при $|x - x_0| \leq h$, т. е.

$$|y_1(x) - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h. \tag{9.11}$$

Оценим разность $y_1(x) - y_0$. Имеем

$$|y_1(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx\right| \le M\, |x - x_0|.$$

Если ограничить изменение x интервалом (9.4), то оценку можно продолжить и получим

$$|y_1(x) - y_0| \le M\, |x - x_0| \le Mh \le b,$$

т. е. (9.11) имеет место.

Методом математической индукции легко доказать (сделайте это), что все $y_n(x)$ обладают указанным выше свойством (9.9).

Для доказательства (равномерной) сходимости последовательности $y_n(x)$ воспользуемся известным из теории рядов фактом о равносильности сходимости последовательности и соответствующего ряда. А именно: рассмотрим ряд

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{9.12}$$

Ясно, что сходимость этого ряда равносильна сходимости последовательности $y_n(x)$, ибо его частичная сумма $s_n(x)$ совпадает с $y_n(x)$. Поэтому нам достаточно доказать, что ряд (9.12) сходится. Так как при этом нас устраивает только **равномерная** сходимость, то воспользуемся известным из теории рядов признаком Вейерштрасса, оценив предварительно члены ряда (9.12).

Имеем

$$|y_1 - y_0| \le M\, |x - x_0| \tag{9.13}$$

(почему?). Далее

$$|y_2 - y_1| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0)|\, dx\right|.$$

Воспользуемся условием Липшица и оценкой (9.13):

$$|y_2 - y_1| \le \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1 - y_0|\,dx\right| \le ML\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\,dx\right|,$$

откуда

$$|y_2 - y_1| \le ML\,\frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Методом математической индукции можно доказать, что (сделайте это)

$$|y_n - y_{n-1}| \le ML^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

или

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{M}{L} \frac{(L\,|x - x_0|)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому для x, удовлетворяющих условию (9.4), имеем оценку

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9.14}$$

В качестве ряда, мажорирующего ряд (9.12), можно взять

$$|y_0| + Mh + \frac{M}{L}\frac{(Lh)^2}{2!} + \frac{M}{L}\frac{(Lh)^3}{3!} + \ldots + \frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!} + \ldots$$

или

$$|y_0| + \frac{M}{L}\left(Lh + \frac{(Lh)^2}{2!} + \frac{(Lh)^3}{3!} + \ldots + \frac{(Lh)^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= |y_0| + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1).$$

Поэтому на основании признака Вейерштрасса с учетом равномерной оценки (9.14) можем утверждать, что ряд (9.12), а вместе с ним и последовательность $y_n(x)$ равномерно сходятся в интервале (9.4) к некоторой функции $y\,(x)$, т. е. имеет место (9.10). Предельная функция $y\,(x)$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций согласно теореме Коши будет непрерывна в интервале (9.4) и не будет выходить из области R, т. е. выполняется неравенство (9.5), получающееся предельным переходом в неравенстве (9.9).

Сделаем теперь предельный переход в тождестве (9.7), справедливом при $|x - x_0| \le h$. Получим

$$y\,(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(x, y\,(x))\,dx, \quad |x - x_0| \le h. \tag{9.15}$$

Законность этого предельного перехода следует из известной теоремы о предельном переходе под знаком определенного интеграла (в момент предельного перехода x есть фиксированное число из интервала (9.4)), на основании которой

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx. \qquad (9.16)$$

В справедливости (9.16) легко убедиться и непосредственно, используя определение равномерной сходимости последовательности $y_n(x)$. В самом деле, имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall\, n > N \Rightarrow |y_n(x) - y(x)| < \varepsilon,$$

$$\forall\, x \in |x_0 - h, x_0 + h|,$$

а тогда

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))|\, dx\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_n(x) - y(x)|\, dx\right| \le L\varepsilon\, |x - x_0| \le L\varepsilon h.$$

(Мы воспользовались здесь условием Липшица, на что имеем право, ибо $y_n(x)$ и $y(x)$ не выходят из области R при $|x - x_0| \le h$.)

Итак, справедливо тождество (9.15), а тогда $y(x)$ есть решение интегрального уравнения (9.6), причем непрерывное в интервале (9.4) и не выходящее из области R.

Существование решения (9.3) доказано.

Докажем теперь, что оно единственно. Для этого предположим, что существует другое решение

$$y = y^*(x) = y^*(x, x_0, y_0),$$

определенное в некотором интервале $|x - x_0| \le h' \le h$. Тогда имеем тождество

$$y^*(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^*(x))\, dx \quad (|x - x_0| \le h').$$

Оценим разность $y_n(x) - y^*(x)$. Имеем

$$|y_n(x) - y^*(x) \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y^*(x))| dx\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x) - y^*(x)| dx\right|$$

или

$$|y_n(x) - y^*(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x) - y^*(x)|\, dx\right|. \qquad (9.17)$$

Это пока **рекуррентная** оценка. Оценив непосредственно $y_0(x) - y^*(x)$ и пользуясь оценкой (9.17), найдем интересующую нас оценку разности $y_n(x) - y^*(x)$.

Имеем

$$|y_0 - y^*(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y^*(x))| dx\right| \le$$

$$\le M\, |x - x_0|$$

или

$$|y_0 - y^*(x)| \le M\, |x - x_0|.$$

Теперь из (9.17) при $n = 1$ получаем

$$|y_1(x) - y^*| \le ML\, \left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0| dx\right| =$$

$$= ML\, \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Далее

$$|y_2(x) - y^*| \le ML^2\, \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

(почему?). Методом математической индукции установим оценку

$$|y_n(x) - y^*| \le ML^n\, \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |x - x_0| \le h'.$$

Перепишем эту оценку в виде

$$|y_n(x) - y^*| \le \frac{M}{L}\, \frac{(L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |x - x_0| \le h'. \qquad (9.18)$$

Здесь правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого фиксированного x из интервала $|x - x_0| \le h'$, ибо

$$\frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

как общий член сходящегося при всех значениях x ряда для функции $e^{L|x - x_0|}$.

Переходя к пределу в (9.18), получаем

$$|y_n(x) - y^*| \to 0, \quad |x - x_0| \le h',$$

откуда

$$y_n(x) \to y^*(x), \quad |x - x_0| \le h'.$$

Но $y_n(x) \to y(x)$ при $|x - x_0| \le h'$, а двух пределов быть не может. Поэтому $y^*(x) = y(x)$ при $|x - x_0| \le h'$.

Единственность доказана.

Теорема Пикара не только обеспечивает существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши, но и дает оценку гарантированного интервала существования решения. Этот интервал определяется формулой (9.4).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = x^2 + y^2. \tag{9.19}$$

Так как правая часть есть **полином**, то можем в качестве начальных данных брать **любые** значения x_0 и y_0, так как в любом прямоугольнике R с центром в точке (x_0, y_0) будут, очевидно, выполнены оба условия теоремы Пикара.

Оценим интервал существования решения уравнения (9.19) с начальным условием $y(0) = 0$. Возьмем $a = b = 1$. Тогда $M = 2$, и следовательно, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, теорема Пикара гарантирует существование решения задачи Коши

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

в интервале $|x| \le \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь случай **линейного** уравнения

$$y' + p(x)\, y = q(x). \tag{9.20}$$

Предположим, как мы это уже делали в главе 1, что p и q **непрерывны** в (a, b). Записав уравнение (9.20) в нормальной форме

$$y' = -p(x)\,y + q(x) \equiv f(x, y),$$

мы видим, что его правая часть будет удовлетворять обоим условиям теоремы Пикара в окрестности любой начальной точки (x_0, y_0) из полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty,$$

так как f непрерывна в этой полосе, а условие Липшица выполняется вследствие того, что $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ непрерывна в окрестности начальной точки.

Поэтому *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши*

$$y' + p(x)\,y = q(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{9.21}$$

В главе 1 показано, что *это решение определено во всем интервале* (a, b) (*т. е. в интервале* ***непрерывности*** *функций* p и q).

Отметим еще раз два преимущества теоремы Пикара для линейного уравнения первого порядка: 1) при постановке задачи Коши x_0 можно брать любым из промежутка непрерывности функций p и q, а y_0 — произвольным (при соблюдении ограничения на выбор x_0); 2) решение задачи Коши (9.21) заведомо существует во всем интервале непрерывности функций p и q.

Доказанная теорема Пикара и ее линейный случай распространяются на **нормальную систему** дифференциальных уравнений (см., например, [70, с. 260]).

Пусть поставлена задача Коши

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &y_k(x_0) = y_k^{(0)} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9.22}$$

Предположим, что все f_k: 1) непрерывны в некотором параллелепипеде R:

$$|x - x_0| \le a, \quad |y_k - y_k^{(0)}| \le b,$$

и следовательно

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| \le M, \ \forall\,(x, y_1, \ldots, y_n) \in R \ (k = 1, \ldots, n);$$

2) удовлетворяет *условию Липшица* относительно $y_1, \ldots, y_n$:

$$|f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \le L \sum_{l=1}^{n} |\bar{\bar{y}}_l - \bar{y}_l|$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

Тогда *существует единственное (непрерывно дифференцируемое) решение задачи Коши* (9.22), *заведомо определенное в интервале*

$$|x - x_0| \le h, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

В случае **линейной** системы *задача Коши*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x), \\ &y_k(x_0) = y_k^{(0)} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9.23}$$

при условии, что $p_{kl}(x)$ *и* $f_k(x)$ *непрерывны в интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0, а $y_k^{(0)}$ — *любые заданные числа, имеет единственное (непрерывно дифференцируемое) решение, заведомо определенное во всем интервале* (a, b).

Здесь мы имеем те же преимущества, что и в случае линейного уравнения первого порядка.

Для уравнения n-го порядка тоже имеет место теорема существования и единственности (n раз непрерывно дифференцируемого) решения задачи Коши (см., например, [70, с. 292]).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения n-го порядка в нормальной форме

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.24}$$

Если функция f *непрерывна в некоторой окрестности начальной точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *и удовлетворяет условию Липшица относительно* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *в частности, если она имеет в этой окрестности ограниченные частные производные по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *то задача Коши* (9.24) *имеет единственное (n раз непрерывно дифференцируемое) решение.*

Это следует из того, что задача Коши (9.24) равносильна задаче Коши для соответствующей нормальной системы (8.43).

В случае линейного уравнения n-го порядка *задача Коши*

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x),$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{9.25}$$

при условии, что функции $p_1, \ldots, p_n$ и f непрерывны в интервале (a, b), содержащем точку x_0, а $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые заданные числа, имеет единственное (n раз непрерывно дифференцируемое) решение, заведомо определенное во всем интервале (a, b).

Доказательство этого утверждения следует из того, что задача Коши (9.25) равносильна задаче Коши для соответствующей линейной системы (8.45).

Снова видим, что теорема Пикара в линейном случае имеет два отмеченных выше преимущества: относительная свобода выбора начальных данных и гарантия существования решения во всем интервале непрерывности функций, входящих в уравнение.

Здесь реализуются потенциальные возможности структуры дифференциального уравнения.

На этом мы заканчиваем обзор различных случаев теоремы Пикара и переходим к изучению свойств решений задачи Коши как функций параметров и начальных данных.

§ 41. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda),\quad y(x_0) = y_0. \tag{9.26}$$

Так как f зависит от λ, то и решение задачи Коши будет зависеть от λ; причем, если f зависит от λ непрерывно, то естественно ожидать, что такой же характер зависимости имеет и решение задачи Коши. Имеет место

Теорема [71]. *Если $f(x, y, \lambda)$ определена в области R_λ:*

$$\left.\begin{aligned} &|x - x_0| \le a,\quad |y - y_0| \le b, \\ &\lambda^{(1)} \le \lambda \le \lambda^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

и удовлетворяет в ней двум условиям:

1) *f непрерывна в (9.27), и следовательно,*

$$|f(x, y, \lambda| \le M, \quad (x, y, \lambda) \in R_\lambda;$$

2) *f удовлетворяет условию Липшица относительно y, то задача Коши (9.26) имеет единственное решение*

$$y = y(x, \lambda) = y(x, x_0, y_0, \lambda), \tag{9.28}$$

определенное (и непрерывно дифференцируемое) как функция x в интервале

$$|x - x_0| \le h, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

и непрерывное как функция λ в интервале $\lambda^{(1)} \le \lambda \le \lambda^{(2)}$ равномерно относительно независимой переменной x из интервала $|x - x_0| \le h$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ |\Delta\lambda| < \delta \Rightarrow |y(x, \lambda + \Delta\lambda) - y(x, \lambda)| < \varepsilon,$$
$$|x - x_0| \le h.$$

Эта теорема может быть доказана по той же схеме, что и теорема Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$ с почти очевидными изменениями, вызванными присутствием λ. Она легко распространяется также на случай, когда f зависит от нескольких параметров, и на нормальную систему уравнений

$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \ldots, y_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \ (m = 1, \ldots, n),$$

правые части которой зависят от любого конечного числа параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, и даже на случай, когда параметры входят в начальные условия. Распространяется также и на уравнение n-го порядка в нормальной форме.

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Что произойдет с решением, если мало изменить начальные значения? Изменится ли оно тоже мало? Этот вопрос имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение: как скажется ошибка в измерении или в вычислении начальных данных при постановке задачи Коши на самом решении? В тех случаях, когда достаточно малым изменениям начальных данных соответствуют сколь угодно малые же изменения решения, говорят, что последнее непрерывно зависит от начальных данных.

Оказывается, что в условиях теоремы Пикара непрерывная зависимость решения от начальных данных имеет место. А именно: можно доказать [71] следующую теорему.

Теорема. *Если правая часть уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9.29}$$

удовлетворяет в прямоугольнике R:

$$|x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b$$

обоим условиям теоремы Пикара, то решение

$$y = y(x, x^*, y^*), \tag{9.30}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x^*) = y^*,$$

является непрерывной функцией от x и начальных данных x^*, y^* в области

$$|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega, \ |x^* - x_0| \le \omega, \ |y^* - y_0| \le \frac{b}{2}$$
$$\left(h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \ \ 0 \le \omega < \frac{h}{4}\right).$$

При этом решение (9.30) *будет непрерывно как функция начальных данных x^*, y^* в области*

$$|x^* - x_0| \le \omega, \ \ |y^* - y_0| \le \frac{b}{2}$$

равномерно относительно x из интервала $R_{h,\omega}$:

$$|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega,$$

т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ |\Delta x^*| < \delta,\ |\Delta y^*| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |y(x; x^* + \Delta x^*, y^* + \Delta y^*) - y(x; x^*, y^*)| < \varepsilon$$

при $\forall\, x \in R_{h,\omega}$.

Доказательство этой теоремы проводится методом сведения к теореме о непрерывной зависимости решения некоторой задачи Коши от параметров, причем роль параметров играют x^* и y^*.

Эта теорема легко распространяется на нормальную систему уравнений.

§ 42. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ (ДВИЖЕНИЯ)

Здесь пойдет речь об одном асимптотическом свойстве решений дифференциального уравнения, которое называется устойчивостью. Рассмотрим сначала этот вопрос на модельном примере.

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x, \tag{9.31}$$

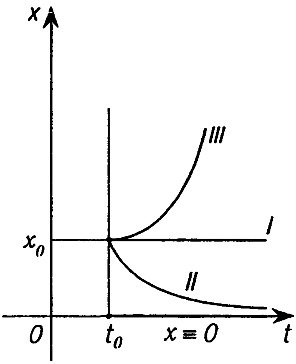

Рис. 45

где $\lambda=\text{const}$ — параметр. Это — однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом. Оно имеет, очевидно, нулевое решение (рис. 45)

$$x\equiv 0. \tag{9.32}$$

Это решение удовлетворяет нулевому начальному условию

$$x(t_0)=0 \tag{9.33}$$

и может быть записано, согласно сказанному в 1.5, в виде

$$x=x(t;\, t_0,\, 0)\equiv 0.$$

Других решений с начальным условием (9.33) уравнение (9.31) не имеет (почему?).

Будем называть решение (9.32) *невозмущенным*, а всякое решение

$$x=x(t;\, t_0,\, x_0) \tag{9.34}$$

с ненулевым начальным значением x_0 — *возмущенным*. При этом x_0 ($\neq 0$) называется *возмущением* начального значения $x_0=0$ невозмущенного решения (9.32).

Поставим вопрос: как ведут себя возмущенные решения (9.34) по отношению к невозмущенному решению (9.32) при $t\to+\infty$. А именно, будет ли решение (9.34) сколь угодно мало отличаться от решения (9.32) при всех $t\geq t_0$, если его начальное значение x_0 ($\neq 0$) достаточно мало отличается от начального значения $x_0=0$ решения (9.32). Точнее: существует ли для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0) - 0| < \varepsilon$$
$$\text{при } \forall\, t \geq t_0$$

или

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon \text{ при } \forall\, t \geq t_0$$

(рис. 46).

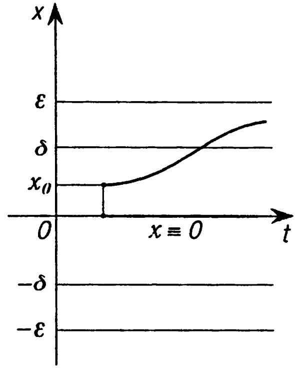

Рис. 46

Для ответа на этот вопрос воспользуемся уравнением семейства возмущенных решений (9.34), которое в настоящем случае имеет вид (общее решение в форме Коши)

$$x = x(t; t_0, x_0) = x_0\, e^{\lambda(t - t_0)} \tag{9.35}$$

(см. 7.2, пример 2).

Рассмотрим три возможных случая в зависимости от значений параметра λ:

1^0. $\lambda = 0$ (прямая 1 на рис. 45). Возмущенные решения имеют вид

$$x \equiv x_0 \quad (x_0 \neq 0). \tag{9.36}$$

Ясно; что если начальное значение x_0, т. е. возмущение достаточно мало:

$$|x_0| < \delta, \tag{9.37}$$

то решение (9.36) будет отличаться от нулевого решения (9.32) сколь угодно мало, т. е.

$$|x - 0| = |x_0 - 0| = |x_0| < \varepsilon \tag{9.38}$$

при всех $t \geq t_0$. Здесь $\varepsilon > 0$ — «сколь угодно малое» положительное число, а $\delta > 0$ — соответствующее ему «достаточно малое» положительное число. Очевидно, что в качестве δ можно взять само ε (но, конечно, можно, взять и любое число $< \varepsilon$, например, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$). Во всяком случае ясно, что в рассматриваемом случае из (9.37) следует (9.38).

В подобных случаях говорят, что невозмущенное решение (9.32) *устойчиво в смысле Ляпунова* [63].

2^0. $\lambda < 0$ (кривая II на рис. 45). Из аналитической структуры семейства возмущенных решений (9.35) видно, что, во-первых, невозмущенное решение (9.32) устойчиво в смысле Ляпунова. В самом деле, оценивая разность решений (9.35) и (9.32), имеем

$$|x_0\, e^{\lambda(t-t_0)} - 0| = |x_0\, e^{\lambda(t-t_0)}| \le |x_0| \quad \forall\, t \ge t_0$$

(почему?). Достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Во-вторых, невозмущенное решение (9.32) обладает дополнительным свойством: оно «притягивает» к себе все возмущенные решения (9.35):

$$\lim_{t \to +\infty} x\,(t;\, t_0,\, x_0) = \lim_{t \to +\infty} x_0 e^{\lambda(t-t_0)} = 0.$$

В подобных случаях говорят, что невозмущенное решение (9.32) *асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.*

3^0. $\lambda > 0$ (кривая III на рис. 45). В этом случае из (9.35) ясно, что каким бы малым x_0 ни взяли, мы не сможем обеспечить наперед заданную малость $x = x\,(t;\, t_0,\, x_0)$ при всех $t \ge t_0$ (почему?).

В подобных случаях невозмущенное решение (9.32) называется *неустойчивым в смысле Ляпунова.*

Таким образом, наличие свойства устойчивости невозмущенного решения (9.32) уравнения (9.31) целиком зависит от знака параметра λ: $\lambda = 0$ — устойчивость, $\lambda < 0$ — асимптотическая устойчивость, $\lambda > 0$ — неустойчивость.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решения в смысле Ляпунова в общем случае дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = f\,(t,\, x). \tag{9.39}$$

Предположим, что правая часть уравнения (9.39) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши в рассматриваемой области изменения t и x, причем такова, что

$$f\,(t,\, 0) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge t_0.$$

При сделанных предположениях уравнение (9.39), так же как и уравнение (9.31) имеет единственное (нулевое) решение (9.32),

$$x \equiv 0, \tag{9.40}$$

которое удовлетворяет начальному условию (9.33). Будем называть это решение *невозмущенным*, а всякое решение

$$x = x\,(t;\, t_0,\, x_0), \tag{9.41}$$

где $x_0 \neq 0$ — *возмущенным.*

Относительно возмущенных решений (9.41) будем предполагать, что они определены при всех $t \geq t_0$ (например, нельзя ставить вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt} = x^2$).

Будем называть невозмущенное решение (9.40) *устойчивым в смысле Ляпунова* (при $t \to +\infty$), если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ |x_0| < \delta \Rightarrow |x\,(t;\, t_0,\, x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{9.42}$$

В противном случае невозмущенное решение (9.40) называется *неустойчивым в смысле Ляпунова.*

Если невозмущенное решение (9.40) устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, имеет место «притяжение»:

$$\lim_{t \to +\infty} x\,(t;\, t_0,\, x_0) = 0 \tag{9.43}$$

для достаточно малых x_0, то оно называется *асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова.*

Может оказаться, что свойство (9.43) имеет место при в с е х x_0 и решение (9.40) у с т о й ч и в о в смысле Ляпунова, тогда оно называется *устойчивым в целом.* Например, это имеет место для решения $x \equiv 0$ уравнения (9.31) в случае $\lambda < 0$.

Обращаем внимание читателя на то, что, как это видно из (9.42), устойчивость в смысле Ляпунова, с точки зрения математического анализа, представляет собой н е п р е р ы в н у ю з а в и с и м о с т ь р е ш е н и я о т н а ч а л ь н о г о з н а ч е н и я x_0 р а в н о м е р н у ю о т н о с и т е л ь н о н е з а в и с и м о й п е р е м е н н о й t во всем п о л у б е с к о н е ч н о м интервале $[0, +\infty)$ (а не в конечном интервале изменения независимой переменной, как это отмечено в предыдущем параграфе).

Напомним, что если в уравнении (9.39) рассматривать независимую переменную t как время, а x как положение точки, движущейся по оси x, в момент времени t, то всякое решение

$$x = x\,(t) \tag{9.44}$$

можно рассматривать (см. 1.5) как закон движения точки и его называют просто *движением*, определяемым уравнением (9.39).

Поэтому будем считать *решение* и *движение* синонимами и вместо понятия «устойчивость решения» в тех случаях, когда имеется в виду приложения к механике, говорить об «устойчивости движения», определяемого данным дифференциальным уравнением.

Заметим, однако, что при этом «решение» отождествляется только с «движением», а отнюдь не с «траекторией движения», которая, как отмечено в 27.5, является проекцией движения (9.44) на ось x, играющей в этом случае роль фазовой прямой.

Движение (9.40) является *состоянием покоя*. Его траектория есть точка $x=0$ — *точка покоя*. Устойчивость нулевого решения (9.40) уравнения (9.39) есть устойчивость состояния покоя, соответствующего этому решению.

Отметим, что рассмотренное выше понятие об устойчивости решения (движения) распространяется на нормальную систему уравнений (см., напр., [44, с. 11], [128, с. 210], [7, с. 328], [30, с. 268], [70, с. 309], [66, с. 11]). Ниже мы ограничимся системой двух дифференциальных уравнений.

Итак, рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(t, x, y), \end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

где правые части удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, причем

$$X(t; 0, 0) = 0, \ Y(t; 0, 0) = 0 \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{9.46}$$

Здесь t — время, x и y — координаты точки на фазовой плоскости (x, y).

Система (9.45) вследствие (9.46) определяет решение (движение)

$$x \equiv 0, \ y \equiv 0. \tag{9.47}$$

Это решение удовлетворяет *нулевым* начальным условиям

$$x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0 \tag{9.48}$$

и может быть записано в виде

$$x = x(t;\, t_0,\, 0,\, 0) \equiv 0, \quad y = y(t;\, t_0,\, 0,\, 0) \equiv 0.$$

Других решений с начальными условиями (9.48) нет.

Будем называть решение (движение) (9.47) *невозмущенным*, а все решения (движения)

$$x = x(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0), \quad y = y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0) \tag{9.49}$$

с ненулевыми начальными условиями ($|x_0| + |y_0| \neq 0$) *возмущенными*.

Предположим (как и в случае одного дифференциального уравнения первого порядка), что все возмущенные решения (движения) (9.49) определены при всех $t \geq t_0$.

Приведем четыре определения, связанные с понятием устойчивости невозмущенного решения (движения).

Определение 1. Если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon\ |x_0| < \delta,\ |y_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0)| < \varepsilon,\ |y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0)| < \varepsilon\ \forall\, t \geq t_0,$$

то решение (движение) (9.47) называется *устойчивым в смысле Ляпунова.*

Пример 1. Возьмем систему (6.18)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \end{aligned}\right\}$$

рассмотренную нами в примере 3 § 27. Она допускает нулевое решение

$$x \equiv 0,\ y \equiv 0. \tag{9.50}$$

Исследуем это решение на устойчивость. Возмущенные решения с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{9.51}$$

имеют вид (общее решение в форме Коши)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

(почему?). Оценивая эти решения, имеем

$$|x| = |x_0 \cos t + y_0 \sin t| \le |x_0| + |y_0|,$$
$$|y| = |-x_0 \sin t + y_0 \cos t| \le |x_0| + |y_0|.$$

Из этих оценок ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее $\delta > 0$.

В самом деле, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon \ \forall\, t \ge t_0.$$

Это означает, что (невозмущенное) движение (9.50) устойчиво в смысле Ляпунова.

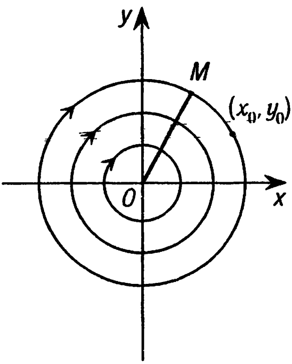

Рис. 47

Интересно отметить, что траекторией невозмущенного движения (9.50) является точка покоя $x = 0$, $y = 0$ (рис. 47), а траекториями возмущенных движений (9.52) — окружности

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \qquad (9.53)$$

(почему?).

Еще более интересно отметить, что траектории возмущенных движений являются замкнутыми кривыми, содержащими внутри себя траекторию невозмущенного движения (точку покоя) и заполняющими сплошь окрестность ее. При этом расстояние от точки M (x, y), лежащей на траектории (9.53), до точки покоя 0, равное $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора начальных значений x_0 и y_0, но не стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Определение 2. Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (9.47) называется *неустойчивым в смысле Ляпунова*.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y. \end{aligned}\right\} \qquad (9.54)$$

Здесь нулевое решение

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0, \tag{9.55}$$

очевидно, неустойчиво, ибо семейство возмущенных решений с начальными условиями (9.51) имеет вид (общее решение в форме Коши)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^t, \\ y &= y_0 e^{2t} \end{aligned}\right\} \tag{9.56}$$

(почему?). Ясно, что какие бы малые ненулевые начальные значения x_0, y_0 ни взяли, хоть одна из функций (9.56) будет неограниченной при $t \to +\infty$, и мы не сможем обеспечить выполнение неравенств

$$|x_0 e^t| < \varepsilon, \quad |y_0 e^{2t}| < \varepsilon \text{ при всех } t \geq 0$$

за счет выбора $\delta > 0$ (ср. уравнение (9.31) в случае $\lambda > 0$).

Установленная неустойчивость решения (9.55) означает, что соответствующее ему состояние покоя неустойчиво.

Траекториями движений, определяемых системой (9.54), являются точка покоя $x = 0$, $y = 0$, полупараболы

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2 \quad (x \neq 0) \tag{9.57}$$

и полуоси координат

$$y = 0 \ (x \neq 0), \quad x = 0 \ (y \neq 0) \tag{9.58}$$

(рис. 48).

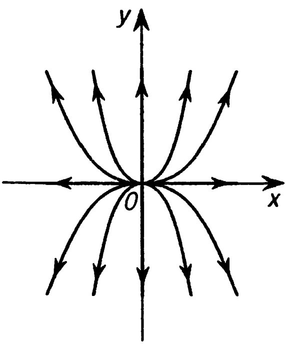

Рис. 48

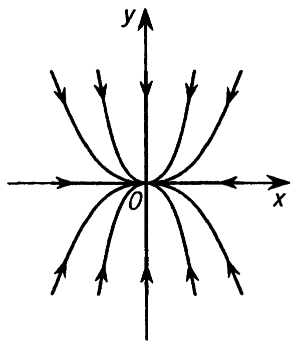

Рис. 49

Точки, лежащие на траекториях, отличных от точки покоя, неограниченно удаляются от нее при $t \to +\infty$, как это видно из аналитической структуры возмущенных движений (9.56).

Определение 3. Решение (9.47) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, все возмущенные решения (9.49) с достаточно малыми x_0, y_0 стремятся к решению (9.47) при $t \to +\infty$:

$$\left.\begin{aligned} x(t;\, t_0, x_0, y_0) \to 0 \\ y(t;\, t_0, x_0, y_0) \to 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } t \to +\infty.$$

Пример 3. Для системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y \end{aligned}\right\} \tag{9.59}$$

нулевое решение

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0 \tag{9.60}$$

будет асимптотически устойчивым.

В самом деле, возмущенные решения системы (9.59) с начальными условиями (9.51) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{-t}, \\ y &= y_0 e^{-2t} \end{aligned}\right\} \tag{9.61}$$

(почему?). Поэтому невозмущенное решение (9.60), во-первых, устойчиво ($\delta = \varepsilon$). Кроме того,

$$x_0 e^{-t} \to 0,\ y_0 e^{-2t} \to 0 \ \text{ при } t \to +\infty.$$

Заметим, что здесь начальные значения x_0 и y_0 можно брать сколь угодно большими, так что движение (9.60), определяемое системой (9.59), устойчиво в целом.

Траекториями возмущенных движений (9.61) будут те же полупараболы (9.57) и полуоси координат (9.58), что и в предыдущем примере, но движения происходят в обратном направлении (рис. 49). При этом точки, лежащие на траекториях возмущенных движений, стремятся к точке покоя при $t \to +\infty$ (почему?).

Определение 4. Невозмущенное решение (9.47) называется *условно устойчивым в смысле Ляпунова*, если оно неустойчиво, но для любого $\varepsilon > 0$ существует соответствующее $\delta > 0$ при условии, что на начальные значения возмущенных решений наложены некоторые ограничения вида

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(x_0, y_0) \geq 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= y. \end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

Решение (движение)

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0, \tag{9.63}$$

определяемое системой (9.62), неустойчиво. Это вытекает из вида возмущенных решений (движений) с начальными условиями (9.51):

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{-t}, \\ y &= y_0 e^{t} \end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

(почему?).

Но если ограничиться рассмотрением возмущенных решений

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{-t}, \\ y &\equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.65}$$

т. е. подчинить начальное значение y_0 условию

$$y_0 = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ ($\delta = \varepsilon$). Поэтому невозмущенное решение (движение) (9.63) условно устойчиво.

Траекториями возмущенных движений (9.64) являются ветви равнобочных гипербол

$$xy = x_0 y_0$$

и полуоси координат

$$y = 0 \ (x \neq 0), \quad x = 0 \ (y \neq 0)$$

(рис. 50).

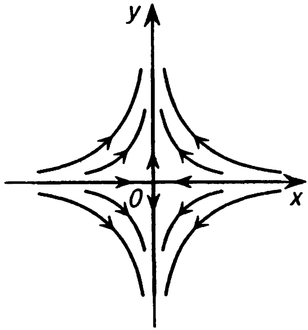

Рис. 50

Траекториями движений (9.65) служат полуоси оси x. Точки, лежащие на этих траекториях, стремятся к точке покоя, что и обеспечивает установленную выше условную устойчивость движения (9.63).

Замечание. Если решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво и даже нет условной устойчивости, то оно называется *вполне неустойчивым* или *абсолютно неустойчивым*. Таким является решение (9.55), определяемое системой (9.54) (почему?).

Рассмотренное выше понятие устойчивости решения системы двух дифференциальных уравнений в нормальной форме распространяется адекватным образом на дифференциальные уравнения второго порядка в нормальной форме с учетом того, что последнее всегда может быть сведено к нормальной системе двух уравнений стандартным методом, указанным в 30.1.

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка [72, с. 265]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{9.66}$$

описывающее движение материальной точки по оси x, где x и $\frac{dx}{dt}$ положение и скорость точки в момент времени t. Предположим, что

$$f(t, 0, 0) = 0 \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Тогда уравнение (9.66) определяет решение (движение)

$$x \equiv 0 \quad (t \geq t_0), \tag{9.67}$$

которое является состоянием покоя (см. 11.1). Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x = 0, \ \frac{dx}{dt} = 0 \ \text{ при } \ t = t_0.$$

Пусть f такова, что решения

$$x = x\,(t;\, t_0, x_0, v_0) \tag{9.68}$$

с начальными условиями

$$x = x_0, \ \frac{dx}{dt} = v_0 \ \text{ при } \ t = t_0,$$

где x_0 и v_0 достаточно малы, существуют, единственны и продолжимы на все $t \geq t_0$.

Решение (движение) (9.67) называется *невозмущенным*, а решения (движения) (9.68) с н е н у л е в ы м и начальными значениями x_0 и v_0 — *возмущенными*.

Решение (9.67) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0{:}\; |x_0| < \delta,\; |v_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x(t;\, t_0, x_0, v_0)| < \varepsilon,\; \left|\frac{dx(t;\, t_0, x_0, v_0)}{dt}\right| < \varepsilon \;\; \forall\, t \ge t_0.$$

Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (9.67) называется *неустойчивым*.

Решение (9.67) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и кроме того для достаточно малых x_0 и v_0

$$x(t;\, t_0, x_0, v_0) \to 0, \;\; \frac{dx(t;\, t_0, x_0, v_0)}{dt} \to 0 \;\; \text{при} \;\; t \to +\infty.$$

Если решение неустойчиво, но можно подчинить достаточно малые x_0 и v_0 такому дополнительному условию вида $\varphi(x_0, v_0) \ge 0$, $\varphi(0, 0) = 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее $\delta > 0$, то решение (9.67) называется *условно устойчивым*.

Отметим, что наиболее просто и полно удается исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения (9.66), когда оно является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \tag{9.69}$$

так как это уравнение интегрируется, как показано в § 20, в элементарных функциях и заключение об устойчивости можно сделать по аналитической структуре возмущенных решений (9.68). При этом решающее значение имеют характеристические числа уравнения (9.69).

Так, например, для уравнения (5.46)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

описывающего движение материальной точки в среде без сопротивления, возмущенными решениями, как показано в 23.2, являются

$$x = x(t;\, 0, x_0, v_0) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}\, \sin\left(kt + \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0}\right).$$

Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \cos\left(kt + \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0}\right),$$

и имеют место оценки

$$|x| \le \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \left|\frac{dx}{dt}\right| \le k\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}},$$

из которых следует, что $|x|$ и $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ будут сколь угодно малы при всех $t \ge 0$, если x_0 и v_0 остаточно малы. Следовательно, решение $x \equiv 0$ устойчиво, но асимптотической устойчивости нет, ибо x и $\frac{dx}{dt}$ не стремятся к 0 при $t \to +\infty$.

Можно показать, что решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

описывающего движение материальной точки в среде с положительным сопротивлением $(h > 0)$ будет асимптотически устойчивым (сделайте это).

Таким образом, наличие (положительного) сопротивления улучшает характер устойчивости состояния равновесия: обычная устойчивость переходит в асимптотическую.

§ 43. АВТОНОМНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе рассматривается классификация Пуанкаре типов особой точки уравнения первого порядка с однородной дробно-линейной правой частью и их связь с характером устойчивости нулевого решения соответствующей линейной однородной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \qquad (9.70)$$

где a, b, c, d — постоянные, причем $ad - bc \ne 0$.

Прежде всего отметим, что система (9.70) определяет состояние покоя (см. гл. 6).

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0. \tag{9.71}$$

Других состояний покоя нет (почему?).

Системе (9.70) соответствует одно уравнение с однородной дробно-линейной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \tag{9.72}$$

в том смысле, что все интегральные кривые последнего уравнения вместе (в силу 1.3) с присоединенными к нему интегральными кривыми перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{9.72'}$$

являются (фазовыми) траекториями системы (9.70) (т. е. траекториями движений, определяемых этой системой) (почему?). Правда этим не исчерпываются все (фазовые) траектории системы (9.70). Она, как сказано выше, допускает движение (9.71), траекторией которого является точка

$$x = 0, \quad y = 0 \tag{9.73}$$

(точка покоя). Заметим, что точка (0, 0) является вместе с тем единственной (изолированной) особой точкой уравнения (9.72) (почему?). В силу теоремы существования и единственности, условия которой в нашем случае выполнены (почему?), окрестность этой точки сплошь заполнена непересекающимися интегральными кривыми уравнения (9.72), (9.72′), или, что то же, (фазовыми) траекториями системы (9.70).

Поведению интегральных кривых уравнения (9.72), (9.72′) в окрестности особой точки (0, 0) по отношению к этой особой точке соответствует определенное поведение (фазовых) траекторий движений, определяемых системой (9.70) по отношению к точке покоя (9.71), или, что то же, возмущенных движений по отношению к невозмущенному движению $x \equiv 0$, $y \equiv 0$.

Система (9.70) есть линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Она всегда может быть приведена при помощи соответствующего неособенного линейного преобразования

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\} \quad (\alpha\delta - \gamma\delta \neq 0) \tag{9.74}$$

к определенным простейшим, так называемым каноническим формам, которым соответствуют простейшие формы уравнения (9.72) (см., например, [70, с. 709]; [71, с. 194]).

Вид канонических форм системы (9.70) и соответствующих простейших форм уравнения (9.72) вполне определяется характеристическими числами системы (9.70), т. е. корнями характеристического уравнения этой системы (см. § 32):

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9.75}$$

Уравнение (9.75) и его корни называются также соответственно *характеристическим уравнением* и *характеристическими числами* уравнения (9.72), соответствующего системе (9.70).

Пуанкаре показал, что возможны только рассматриваемые ниже случаи, каждый из которых отвечает за расположение интегральных кривых уравнений (9.72), (9.72′) в окрестности особой точки (0, 0) или, что то же, за расположение (фазовых) траекторий системы (9.70) в окрестности точки покоя (9.73), являющейся *особой* траекторией системы (9.70).

Рассмотрим сначала случай различных корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (9.75) (вещественных или комплексных). В этом случае система (9.70) приводится при помощи неособого линейного преобразования вида (9.74) (см., например, [70, с. 702]) к диагональному виду

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_1\eta, \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda_2\xi,$$

а соответствующей простейшей формой уравнения (9.72) будет

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}. \tag{9.76}$$

При этом следует различать четыре возможности:

1. λ_1 и λ_2 — вещественные и одного знака. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тогда интегральными кривыми уравнения (9.76) и присоединенного к нему перевернутого уравнения

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_2\xi}{\lambda_1\eta} \tag{9.76′}$$

будут

$$\begin{aligned} &\eta = C\,|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi \neq 0), \\ &\xi = 0 \quad (\eta \neq 0). \end{aligned} \tag{9.77}$$

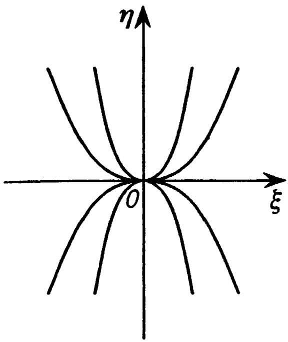

Рис. 51

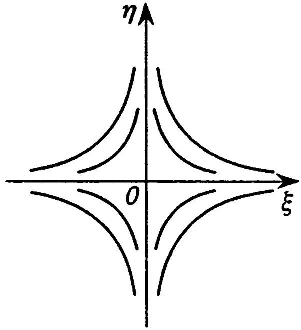

Рис. 52

Все они примыкают к особой точке (0, 0) (рис. 51), причем интегральные кривые

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi \neq 0)$$

примыкают к точке (0, 0), касаясь в ней оси 0ξ, ибо

$$\eta'_\xi \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to 0$$

(почему?). Полуоси оси $0\eta : \xi = 0$ $(\eta \neq 0)$ примыкают к особой точке (0, 0) со своим (другим) направлением касательной (вдоль оси 0η). Особая точка (0, 0) такого типа называется *обыкновенным узлом.*

Так как преобразование (9.74) неособенное, то в окрестности особой точки $x = 0$, $y = 0$ уравнения (9.72), (9.72′) мы будем иметь ту же качественную картину расположения интегральных кривых. Поэтому особая точка (0, 0) уравнения (9.72), (9.72′) также называется *обыкновенным узлом.*

2. λ_1 и λ_2 — вещественные и противоположных знаков. Тогда из формул (9.77) видно, что к особой точке (0, 0) уравнения (9.72), (9.72′) примыкает только конечное число интегральных кривых, а именно четыре:

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (C = 0), \\ &\xi = 0 \quad (\eta \neq 0). \end{aligned}\right\} \qquad (9.78)$$

(полуоси осей 0ξ и 0η) (рис. 52).

Всякая другая интегральная кривая обладает тем свойством, что при $\xi \to 0$ точка (ξ, η), лежащая на ней, сначала приближается к особой точке $(0, 0)$, а затем начинает удаляться от нее (см. рис. 52). Особая точка $(0, 0)$ такого типа называется *седлом*. При этом интегральные кривые (9.78) называются *сепаратрисами* седла.

В рассматриваемом случае соответствующая особая точка $(0, 0)$ уравнения (9.72), (9.72′) также называется *седлом*. Напишите уравнения сепаратрис этого седла. Сепаратрисы седла $(0, 0)$ являются траекториями автономной системы (9.70). Они, так же, как и точка покоя (9.73) являются *особыми траекториями* этой системы.

3. λ_1 и λ_2 — комплексные, но не чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ $(p \neq 0)$. Тогда уравнение (9.76) будет комплексным:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(p+iq)\,\eta}{(p-iq)\,\xi}. \tag{9.79}$$

Коэффициенты преобразования (9.74) можно выбрать так, что оно примет вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y, \end{aligned}\right\}$$

где $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ — комплексные числа, сопряженные с числами α и β [70, с. 352]. Тогда $\eta = \overline{\xi}$. Полагая в (9.79)

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv$$

где u и v — вещественные переменные, получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{pv - qu}{pu + qv} \tag{9.80}$$

(почему?). Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\sqrt{u^2 + v^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}},$$

откуда, переходя к полярным координатам по формулам

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi,$$

получаем

$$r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}.$$

Это — логарифмические спирали на плоскости (u, v) (рис. 53). Все интегральные кривые уравнения (9.80) примыкают к особой точке $u=0$, $v=0$ при $\varphi \to +\infty$, если $pq > 0$ и при $\varphi \to -\infty$, если $pq < 0$ (см. рис. 53), но не имеют в ней определенного направления. Они обходят бесконечное число раз особую точку (0, 0) в одном и том же направлении, асимптотически приближаясь к ней. Та же качественная картина будет иметь место и в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ уравнения (9.72). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

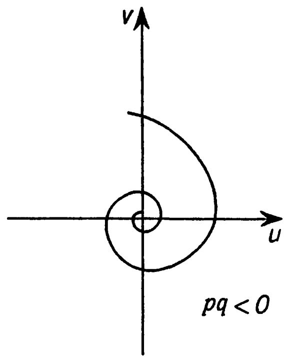

Рис. 53

4. λ_1 и λ_2 — чисто мнимые: $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$. Здесь вместо уравнения (9.80) получим

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}. \tag{9.81}$$

Интегральными кривыми будут окружности

$$u^2 + v^2 = C^2$$

с центром в особой точке $u=0$, $v=0$ (рис. 54), а интегральными кривыми уравнения (9.72) — эллипсы, с центром в особой точке $x=0$, $y=0$ (почему?). В этом случае особая точка $u=0$, $v=0$ уравнения (9.81) и соответственно особая точка $x=0$, $y=0$ уравнения (9.72) называется *центром*.

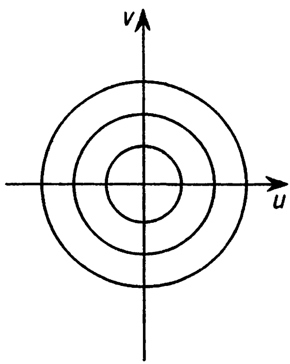

Рис. 54

Рассмотрим теперь случай кратных характеристических чисел $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2}$. В этом случае уравнение (9.72), вообще говоря, уже не приводится к виду (9.76). Различают две возможности [70, с. 354]:

1. Уравнение (9.72) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2} y, \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \quad (a \neq 0)$$

приводится к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \lambda_1 \eta}{\lambda_1 \xi}, \tag{9.82}$$

с особой точкой $\xi = 0$, $\eta = 0$. Интегральными кривыми уравнения (9.82) будут

$$\left.\begin{aligned} &\eta = \xi \left(C + \frac{1}{\lambda_1} \ln |\xi|\right) \ (\xi \neq 0), \\ &\xi = 0 \ (\eta \neq 0) \end{aligned}\right\}$$

(почему?). Все они примыкают к особой точке $\xi = 0$, $\eta = 0$ уравнения (9.82), касаясь в ней оси 0η (рис. 55) (почему?), так что все интегральные кривые примыкают к особой точке с одним и тем же направлением касательной. В этом случае особая точка (0, 0) уравнения (9.82) и соответственно особая точка (0, 0) уравнения (9.72) называется *вырожденным узлом.*

2. Уравнение (9.72) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Интегральными кривыми будут

$$\left.\begin{aligned} &y = Cx \quad (x \neq 0), \\ &x = 0 \quad (y \neq 0). \end{aligned}\right\}$$

Все они примыкают к особой точке $x = 0$, $y = 0$, причем каждая из них имеет свое направление касательной в этой точке (рис. 56). Особая точка такого типа называется *дикритическим узлом.*

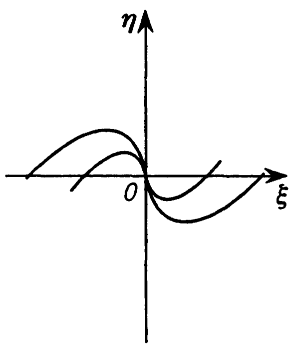

Рис. 55

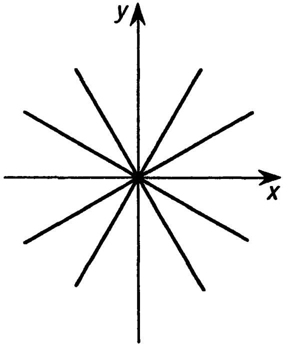

Рис. 56

Для автономной системы (9.70), соответствующей уравнению (9.72), (9.72′), точка покоя (9.73) называется в качественной теории дифференциальных уравнений *особой точкой* этой системы. При этом она называется *узлом* (обыкновенным, вырожденным или дикритическим), *седлом, фокусом* или *центром,* если для соответствующего уравнения (9.72), (9.72′) особая точка $x = 0$, $y = 0$ является соответственно узлом, седлом, фокусом или центром.

Точка покоя (9.73) называется *устойчивой* или *неустойчивой* в зависимости от того, будет решение (9.71) системы (9.70) устойчивым или нет. При этом центр всегда является устойчивой особой точкой (но не асимптотически), седло неустойчиво, но условно устойчиво, а узел и фокус либо асимптотически устойчивы, либо вполне неустойчивы (см., например, [70, с. 357]).

Подробное изложение теории автономных систем общего вида читатель найдет, например, в [31, 46, 83, 96, 116, 128, 135].

§ 44. АВТОНОМНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 2-ГО ПОРЯДКА

Пусть дано автономное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad \left(\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}\right), \tag{9.83}$$

где x — неизвестная функция от независимой переменной t. Уравнение (9.83) можно рассматривать как дифференциальное уравнение движения точки P единичной массы по оси x под действием силы $f(x, \dot{x})$ (рис. 57*а*), а его решение

$$x = x(t) \tag{9.84}$$

как движение, определяемое этим уравнением. Изучение свойств движений (9.84) составляет основную задачу теории интегрирования уравнения (9.83).

Наглядное представление о реальном прямолинейном движении (9.84) дает приводимая ниже кинематическая интерпретация этого движения (см., например, [3, с. 91], [81, с. 39], [46, с. 344], [89, с. 20]).

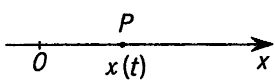

Рис. 57*а*

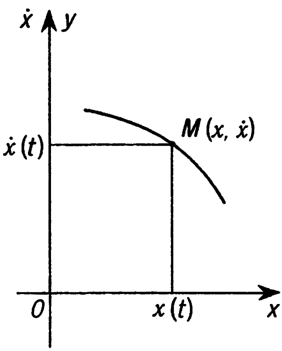

Рис. 57б

Введем в рассмотрение плоскость (x, y) (рис. 57б) и будем откладывать по осям координат соответственно значения функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в момент времени t. Тогда точка $M(x, \dot{x})$ будет характеризовать *состояние* движения (9.84) в момент времени t, т. е. положение и скорость. Эту точку называют *изображающей* или *представляющей точкой* движения (9.84), а плоскость $(x, y) = (x, \dot{x})$ *фазовой плоскостью* уравнения (9.83). Координаты изображающей точки $(x, \dot{x})$ называют также *переменными состояния* движения (9.84), а фазовую плоскость — *плоскостью состояний* уравнения (9.83) (см., например, [106, с. 198]).

С изменением времени t изображающая точка $(x, \dot{x})$ будет двигаться по некоторой кривой, которая называется *фазовой траекторией* движения (9.84). Фазовая траектория дает важную характеристику состояния движения (9.84): связь между положением и скоростью. По поведению фазовых траекторий можно судить о поведении самих движений. Если фазовые траектории ограничены, то это говорит о наличии ограничений на положение точки P и на скорость ее движения во всем интервале задания движения (9.84). В частности, если фазовая траектория есть простая замкнутая кривая, то соответствующее движение (9.84) — ограниченное и периодическое.

Фазовую траекторию движения (9.84) можно построить приближенно геометрически (см., например, [122, с. 14]), используя графики функций $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$ на соответствующих плоскостях (t, x) и $(t, \dot{x})$, снимая с них значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в один и тот же момент времени t и перенося их на плоскость $(x, \dot{x})$, как показано схематически на рис. 58 для движения

$$x = \sin t \quad (\dot{x} = \cos t) \quad (0 \le t \le \pi), \tag{9.85}$$

определяемого уравнением

$$\ddot{x} = -x.$$

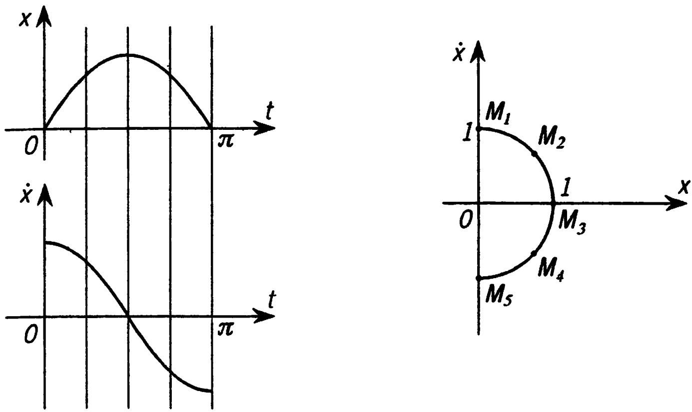

Рис. 58

(Точки M_1, ..., M_5 соответствуют моментам времени t: 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π).

Аналитически фазовая траектория движения (9.84) задается параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(t), \\ \dot{x} &= \dot{x}\,(t) \end{aligned}\right\} \quad (t_0 \le t \le T).$$

Исключая параметр t, можно получить уравнение фазовой траектории в неявной форме

$$\Phi\,(x, \dot{x}) = 0$$

или иногда даже в явной

$$\dot{x} = \dot{x}\,(x).$$

Так для движения (9.85) имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin t, \\ \dot{x} &= \cos t \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le \pi).$$

Исключая параметр t, получим изображенную на рис. 58 полуокружность

$$x^2 + \dot{x}^2 = 1 \quad (x > 0).$$

Ниже мы покажем, что фазовые траектории движений, определяемых автономным дифференциальным уравнением второго порядка (9.83) можно найти, интегрируя некоторое дифференциальное уравнение первого порядка.

С этой целью представим уравнение (9.83) в виде равносильной ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений, используя указанный в 28.1 прием сведения уравнения n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Приняв $\dot{x}$ за новую неизвестную функцию y ($\dot{x} = y$), получим для функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ искомое *представление* уравнения (9.83):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

Это автономная система двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Фазовые траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (9.86) (см. 25.4) и являются фазовыми траекториями движений, определяемых уравнением (9.83) (почему?).

Отметим, что фазовые траектории системы (9.86), отличные от возможных точек покоя, являются интегральными кривыми уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

(почему?). Эти интегральные кривые и будут фазовыми траекториями соответствующих движений, определяемых уравнением (9.83).

Направление движения изображающей точки $(x, y) = (x, \dot{x})$ по фазовой траектории определяется полем скоростей, задаваемым системой (9.86) (см. 25.4).

Совокупность всех фазовых траекторий системы (9.86) или, что то же самое, уравнения (9.83) называют *фазовым портретом* этой системы или соответствующего ей уравнения (9.83). Возможные структуры фазовых портретов автономных систем дифференциальных уравнений изучаются в качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [135, с. 24]).

Пример. Рассмотрим уравнение свободных колебаний в среде без сопротивления (см. 23.2)

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{9.87}$$

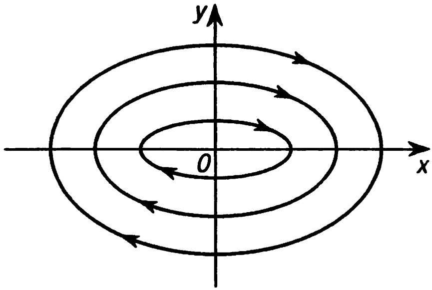

Рис. 59

Соответствующая система дифференциальных уравнений (9.86) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -k^2x. \end{aligned}\right\} \tag{9.88}$$

Ее фазовые траектории, отличные от единственной точки покоя $x = 0$, $y = 0$, можно найти, интегрируя уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k^2x}{y}$$

(почему?). Это эллипсы

$$y^2 + k^2x^2 = C^2 \quad (\dot{x}^2 + k^2x^2 = C^2, \quad C \neq 0) \tag{9.89}$$

(рис. 59). Они (вместе с точкой покоя $x = 0$, $y = 0$) образуют фазовый портрет системы (9.88) и уравнения (9.87). Направления движений изображающей точки $(x, y) = (x, \dot{x})$ по фазовым траекториям определяются системой (9.88) и указаны на рис. 59 стрелками.

Из уравнения

$$\dot{x}^2 + k^2x^2 = C^2 \quad (C \neq 0)$$

видно, что x и $\dot{x}$ ограничены. Так как все фазовые траектории (9.89) являются простыми замкнутыми кривыми, то все соответствующие им движения, определяемые уравнением (9.87) — периодические, что непосредственно видно и из формулы общего решения уравнения (9.87):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Легко убедиться, что фазовыми портретами уравнений $\ddot{x} = 0$ (равномерное движение) и $\ddot{x} = a > 0$ (равноускоренное движение) будут соответственно семейство прямых и семейство парабол (найдите их уравнения и сделайте рисунки).

Фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0$$

в общем случае подробно изучен в [19] и [81].

Вопросы для повторения

1. В чем состоит теоретическое, практическое и методологическое значение теоремы Пикара?

2. Дайте формулировку теоремы Пикара о достаточных условиях существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Укажите этапы доказательства этой теоремы методом последовательных приближений.

3. Сформулируйте теорему Пикара о достаточных условиях существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для линейного уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$, $y(x_0) = y_0$. Какими преимуществами обладает теорема Пикара для линейного уравнения первого порядка в отношении выбора начальных данных и интервала существования решения?

4. Дайте формулировку теоремы Пикара для нормальной системы n уравнений. Какие преимущества имеет линейная система?

5. Дайте формулировку теоремы Пикара для уравнения n-го порядка в нормальной форме. Какими преимуществами обладает линейное уравнение?

6. Дайте формулировку теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши: $y' = f(x, y, \lambda)$; $y(x_0) = y_0$ — от параметра λ. В чем состоит основная идея доказательства?

7. Сформулируйте теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x^*) = y^*$$

от начальных данных x^*, y^*. В чем состоит основная идея доказательства?

8. Как зависят наличие и характер устойчивости нулевого решения уравнения $y' = \lambda y$ от значений параметра λ? (Сделайте рисунки.)

9. Дайте определение устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения системы двух дифференциальных уравнений.

Как определяется неустойчивость, асимптотическая устойчивость и условная устойчивость? Приведите примеры.

10. Как связаны между собой автономная линейная однородная система двух дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= cx + dy,\\ \frac{dy}{dt} &= ax + by\end{aligned}\right\}\quad (ad - bc \neq 0)$$

и уравнение первого порядка с однородной дробно-линейной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}\ ?$$

11. Дайте классификацию Пуанкаре особых точек уравнения с однородной дробно-линейной правой частью и точек покоя соответствующей ему автономной системы дифференциальных уравнений. В каком случае точка покоя называется устойчивой, неустойчивой, асимптотически устойчивой, условно устойчивой. Докажите, что центр является всегда устойчивой особой точкой (но не асимптотически), седло неустойчиво, но условно устойчиво, а узел и фокус либо асимптотически устойчивы, либо вполне неустойчивы.

12. Для каждого из указанных ниже уравнений найдите особую точку, определите ее тип Пуанкаре и исследуйте на устойчивость нулевое решение соответствующей ему автономной системы:

а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{x + 2y}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y}{2x + y}$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + 2y}{2x + y}$; г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x - y}{x + 2y}$.

13. Для каждой из указанных ниже автономных систем укажите тип Пуанкаре точки равновесия в случае, когда она изолированная; найдите общее решение в форме Коши (полагая $t_0 = 0$), траектории движений, определяемых этой системой, указав на рисунке стрелками направление движения при возрастании времени t, и исследуйте на устойчивость нулевое решение (устойчивость точки покоя):

а) $\dfrac{dx}{dt} = -x;\quad \dfrac{dy}{dt} = -x - y$; б) $\dfrac{dx}{dt} = 0,\quad \dfrac{dy}{dt} = x$; в) $\dfrac{dx}{dt} = 0,\quad \dfrac{dy}{dt} = 0$.

ОТВЕТЫ

В ответах к задачам на интегрирование уравнений указываются только общее решение (в той или иной форме) и особые решения.

В ответах на задачи Коши указываются только частное и особое решения. Возможные гладкие комбинации решений не указываются.

Для задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям, указываются дифференциальное уравнение задачи и искомое решение.

Проверяя правильность найденных общего и особого решений или решения задачи Коши, нужно сравнить полученный ответ с результатом предварительного аналитического и качественного исследования дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений). Последнее включает в себя определение типа уравнения (системы уравнений), его области задания, области существования решения задачи Коши, области существования и единственности решения задачи Коши, нахождение особых точек уравнения (точек равновесия системы уравнений), выяснение возможности особых решений, изучение поля направлений, определяемых данным уравнением (системой уравнений), выяснение возможной аналитической структуры и поведения решений (траекторий) в окрестности особых точек (точек равновесия) и во всей области задания уравнения (системы уравнений).

Проверяя правильность выполненных рисунков, нужно контролировать расположение интегральных кривых (траекторий) результатами предварительного исследования уравнения (системы уравнений).

Правильность общего решения (общего интеграла) можно проверить подстановкой ответа в данное уравнение. Если это требует длительных вычислений, то полезно сделать хотя бы частичную проверку ответа, подставляя в данное уравнение решение, соответствующее какому-нибудь конкретному (допустимому) числовому значению произвольной постоянной C.

Проверяя особое решение, нужно убедиться, что указанная в ответе функция является решением данного уравнения и что в каждой точке (x_0, y_0) этого решения нарушена единственность решения задачи Коши, для чего достаточно найти все решения с начальными данными x_0, y_0, используя при этом все семейство найденных решений уравнения. Чтобы проверить, все ли особые решения указаны в ответе, нужно найти и испытать все кривые, подозрительные на особое решение.

Если в ответе указано только общее решение, то нужно обосновать отсутствие особых решений.

Во избежание потери решений нужно внимательно следить за равносильностью переходов, выполняемых в процессе интегрирования дифференциального уравнения.

Чтобы проверить ответ на задачу Коши, нужно убедиться, что указанная в ответе функция (или каждая из функций, если их несколько) является решением данного уравнения, удовлетворяет поставленным начальным условиям и что других решений нет. При этом всегда нужно, исходя из аналитической структуры дифференциального уравнения и опираясь на теорему существования и единственности, отчетливо уяснить себе, имеет ли место единственность решения задачи Коши или нет. В частности, не имеем ли мы дело со случаем, когда условия теоремы Пикара заведомо выполнены, так что единственность гарантирована.

Решив задачу Коши, нужно изучить свойства полученного решения и проследить их связь со свойствами самого дифференциального уравнения и начальных данных, сравнить интервал задания решения с интервалом, обеспеченным теоремой существования и единственности, и изучить поведение решения задачи Коши в окрестности особой точки уравнения и на бесконечности.

Для проверки правильности найденного общего и особых решений или решения задачи Коши для простейших дифференциальных уравнений полезно использовать известную аналитическую структуру общего решения и возможный аналитический вид особых решений, а также известный характер поведения решений. Так, общее решение линейного уравнения любого порядка является линейной функцией от произвольных постоянных; если все коэффициенты линейного уравнения непрерывны, то оно не имеет особых решений; всякое решение линейного уравнения определено во всем интервале непрерывности коэффициентов, содержащем начальное значение независимой переменной, и может обращаться в бесконечность только в точке разрыва хотя бы одного из коэффициентов этого уравнения; если коэффициенты линейного уравнения голоморфны в точке x_0, то радиус сходимости степенного ряда, представляющего любое решение, голоморфное в точке x_0, не меньше чем наименьший из радиусов сходимости степенных рядов, представляющих коэффициенты самого уравнения в окрестности этой точки.

Глава 2

1. $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$ **2.** $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

3. $y = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$ **4.** $y = \arcsin\frac{x}{2} + C,\ x = \pm 2.$

5. $y = \int \frac{e^x}{x}\,dx + C.$

6. $y = -e^{-x^2} + C,\ y = -e^{-x^2}.$

7. $y = -\sqrt{1-x^2} + C;\ x = \pm 1,\ y = -\sqrt{1-x^2},$
$y = -\sqrt{1-x^2} + 2,\ y = -\sqrt{1-x^2},\ x = 1.$

8. $y' = \frac{1}{x}.$ **9.** $y' = \frac{k}{x},\ y = k\ln|x| + C.$

10. $e^{-y} = -x + C.$ **11.** $y - \operatorname{arctg} y = x + C.$

12. $y = (x + C)^2,\ x \geq -C$ при $y \geq 0$; $y = -(x + C)^2,\ x \leq -C$ при $y \leq 0$; $y = 0.$

13. $y' = \frac{p}{y}.$ **14.** $y = Ce^{kx}.$

15. $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$, T — температура тела в момент времени t; $T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$; 60 мин.

16. $\frac{dp}{dh} = -kp,\ p = 0{,}92^{\frac{h}{500}}.$ **17.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C.$

18. $y = \frac{C}{x-1},\ y = \frac{1}{1-x}.$

20. $0{,}006\sqrt{2gh}\,dt = (2h - h^2)\,dh$, t — время; $\cong 35{,}2$ с.

21. $x^2 - y^2 = C.$ **22.** $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$

23. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy},\ (x - C)^2 + y^2 = C^2.$

24. $y = Ce^{-ax} + \frac{1}{m+a}e^{mx}$ при $m \neq -a$; $y = e^{-ax}(C + x)$ при $m = -a.$

25. $y = (1 + x^2)(C + x).$ **26.** $x = \frac{C}{y^2} - \frac{2}{3}y.$

27. $y_1 = x,\ y = x + Ce^{-x}.$ **28.** $y_1 = x,\ y = x + Ce^{-\frac{x}{2}}.$

29. $y_1 = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x} + Ce^{-x}.$

30. $y = \frac{1}{2}x\ (x \neq 0),\ \ x = 0\ (y \neq 0).$

31. $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{A}{L}\sin\omega t$, $i=i_0e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{A\,(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)}{R^2+\omega^2L^2}+$
$+\frac{AL\omega}{R^2+\omega^2L^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}$.

32. $y=\left(Ce^{x^3}-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{9}\right)^3$, $y=0$ $y=\left(\frac{2}{9}e^{x^3}-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{9}\right)^3$, $y=0$.

33. $U\equiv\frac{y}{x}=C$.

34. Решения нет.

37. $(\sqrt{y}-x-C)(\sqrt{y}+x-C)=0$, $y=0$; $y=x^2\ (x\geq 0)$, $y=(x-2)^2\ (x\leq 2)$; $y=(x-1)^2$, $y=0$.

38. $(\sqrt{|y|}-x-C)(\sqrt{|y|}+x-C)=0$, $y=0$.

39. $\left(y-\frac{x^2}{2}-C\right)(y-Ce^{-x}+x-1)=0$.

40. $\left(y-\frac{C}{x}\right)\left(y-\frac{C}{x^2}\right)=0$.

41, 42. Особых решений нет.

43. $-\frac{y}{y'}+x=\sqrt{x^2+y^2}$, $y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$.

44. $y=-x+C$.

45. $x=t^3+1$, $y=\frac{3}{4}t^4+C$.

46. $x=2t+3t^2+C$, $y=t^2+2t^3$; $y=0$.

47. $y=Cx^2+\frac{1}{C}$, $y=\pm 2x$.

48. $x=Ce^{-p}-2p+2$, $y=x\,(1+p)+p^2$.

49. $y=Cx-C^2$, $y=\frac{x^2}{4}$.

50. $y=Cx-a\sqrt{1+C^2}$, $x^2+y^2=a^2\ (ay<0)$.

51. а) $\frac{x^2}{2}+y^2=C$; б) $y-b=C\,(x-a)\ \ (x\neq a)$.

52. 1. Подпрограмма для вычисления значений функции $x+\sin(y/2{,}25)$ имеет вид, представленный в таблице 10.

Таблица 10

1		2	3	1		2	3
пр. 1	пр. 2			пр. 1	пр. 2		
27	37	ИП 3	63	30	40	F sin	1Г
28	38	ИП 4	64	31	41	ИП 1	61
29	39	+	13	32	42	+	10

Здесь предполагается, что параметр 2,25 занесен в регистр памяти П4.

Напомним, что последняя команда подпрограммы в программе 1 должна быть В/О.

Таблица 11

№ п/п	x_k	$y_{пр.\,1}$	$y_{пр.\,2}$
1	1,5	2,4304865	2,4306129
2	1,6	2,6759348	2,6761919
3	1,7	2,9355404	2,935931
4	1,8	3,2082362	3,2087614
5	1,9	3,4927012	3,4933602
6	2,0	3,7873883	3,7881784
7	2,1	4,0905726	4,091489
8	2,2	4,4004172	4,4014527
9	2,3	4,7150515	4,7161966
10	2,4	5,0326546	5,0338971

2. При составлении подпрограммы функции $1 + 0{,}2y \sin x - 1{,}5y^2$, которая приведена в таблице 12, учитывалось, что параметр 0,2 находится в регистре П4, а 1,5 — в регистре П5.

Таблица 12

1		2	3	1		2	3
пр. 1	пр. 2			пр. 1	пр. 2		
27	37	ИП 3	63	34	44	+	10
28	38	ИП 4	64	35	45	ИП 3	63
29	39	×	12	36	46	F x^2	22
30	40	ИП 1	61	37	47	ИП 5	65
31	41	F sin	1Г	38	48	×	12
32	42	×	12	39	49	−	11
33	43	1	01				

Таблица 13

№ п/п	x_k	$y_{пр.\,1}$	$y_{пр.\,2}$
1	0,1	0,099349835	0,09956886
2	0,2	0,19615993	0,19660686
3	0,3	0,28816581	0,28884537
4	0,4	0,37357611	0,37448351
5	0,5	0,45118343	0,45230053
6	0,6	0,52037339	0,52166813
7	0,7	0,58105292	0,5824823
8	0,8	0,6335212	0,63504731
9	0,9	0,67839316	0,67994517
10	1,0	0,71637062	0,71791502

3. При составлении подпрограммы функции $1{,}6x + 0{,}5y^2$, которая приведена в таблице 14, учитывалось, что параметр 1,6 находится в регистре П4, а параметр 0,5 — в регистре П5.

Таблица 14

1		2	3	1		2	3
пр. 1	пр. 2			пр. 1	пр. 2		
27	37	ИП 3	63	31	41	ИП 1	61
28	38	F x^2	22	32	42	ИП 4	64
29	39	ИП 5	65	33	43	×	12
30	40	×	12	34	44	+	10

Таблица 15

№ п/п	x_k	$y_{пр. 1}$	$y_{пр. 2}$
1	0,1	0,31256801	0,31265088
2	0,2	0,34179025	0,3496503
3	0,3	0,38831376	0,38859195
4	0,4	0,45300859	0,45340613
5	0,5	0,53708934	0,53762972
6	0,6	0,64227117	0,6429905
7	0,7	0,77098208	0,77193761
8	0,8	0,92666807	0,92795303
9	0,9	1,1142543	1,1160248
10	1,0	1,3408753	1,3434013

Глава 3

53. $y = \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

54. $y = \ln|x| + C_1x^2 + C_1x + C_3$.

55. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1} + C_1x + C_2$.

56. $y = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^2\,dt + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

57. $y = \dfrac{x^2}{2} + y_0'x - x_0x + y_0 + \dfrac{x_0^2}{2} - y_0'x_0$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{x^2}{2} + x$, $y = \dfrac{x^2}{2} - x$, $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$.

58. $y = x^2 - x$.

59. $y = -x^3$.

60. $y = -e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1$.

61. $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2,\ y=\frac{ex^2}{2}+C.$

62. $y=C_1x^2+C_2.$ 63. $y=-\sqrt{1-x^2}+2.$

64. $y=x^2-x,\ y=-x^2-x;\ y=0,\ y=\frac{x^3}{3}.$

65. $y\ln|y|+x+C_1y+C_2=0,\ y=C.$

66. $2C_1y=(\pm C_1x+C_2)^2+1.$

67. $y=3\ln\frac{3}{|x|}\ (x<0).$ 68. $y=-x+1.$

Глава 5

69. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}.$

70. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$ 71. $y=C_1+C_2e^{-3x}.$

72. $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}.$

73. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

74. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$

75. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$

76. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$

77. $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+$
$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$

78. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$
$+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

79. $y=C_1+C_2x.$ 80. $y=e^{2x}(C_1+C_2x+C_3x^2).$

81. $y=e^{x}(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$

82. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x.$

83. $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$

84. $y=-x^2+x-3+C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$

85. $y=x^3+x+C_1+C_2e^{4x}.$ 86. $y=3x+C_1+C_2e^{-x}.$

87. $y=2xe^{x}+C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$

88. $y=\frac{1}{2}x^3+x^2+C_1e^{x}+C_2+C_3x.$

89. $y=-\sin x+2\cos x+C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$

90. $y=-2\sin 2x+C_1\cos x+C_2\sin x.$

91. $y=-\frac{1}{4}x\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$

92. $y = e^x (x \cos x + \sin x) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

93. $y = x^2 e^x \cos x + e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

94. $y = x^2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

95. $y_1 = x ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$.

96. $y_1 = A$ при $q \neq 0$; $y_1 = Ax$ при $q = 0$.

97. $y_1 = (Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x$.

98. $y = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln |\sin 2x| + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

99. $y = e^x$.

100. $y = 0$.

101. $y = \sin x$.

102. $y = C \sin x$.

103. $y = \cos x + x$.

104. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = f(t)$.

105. $x = A \sin (kt + \varphi)$, k — частота колебаний, $T = \frac{2\pi}{k}$ — период, A — амплитуда, φ — начальная фаза; $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{v_0}$; $x = \sin t$; $x = 2 \cos t = 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

106. $y_1 = \cos kx$, $y_2 = \frac{\sin kx}{k}$.

107. $y_1 = \operatorname{ch} kx$, $y_2 = \frac{\operatorname{sh} kx}{k}$.

Глава 6

108. $y = C_1 e^{-2x}$, $z = C_2 e^x$.

109. $x = C_1$, $y = C_2 e^{-t}$.

110. $y = C_1 e^{2t}$, $x = \frac{C_1}{2} e^{2t} + C_2$.

111. $y = C_1 x$, $z = C_2 e^x - C_1 (x + 1)$.

112. $z = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{2t}$, $x = C_3 e^t - 2C_2 e^{2t}$.

113. $z = C_1 e^{2t}$, $y = e^{2t} (C_2 + C_1 t)$, $x = e^{2t} \left(C_3 + C_2 t + \frac{C_1}{2} t^2\right)$.

114. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$.

115. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = C_1 \sin t - C_2 \cos t$.

116. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}$; $y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$.

117. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $z = 2C_1e^x + 5C_2e^{-2x}$; $y = e^{-2x}$, $z = 5e^{-2x}$.

118. $y = C_1 + C_2e^{5x}$, $z = C_1 - 4C_2e^{5x}$.

119. $y = C_1 + C_2e^{-3x}$, $z = -2C_1 - 3C_2e^{-x}$.

120. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$; $z = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)$.

121. $x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t$; $y = (-4C_1 + 2C_2) \cos 2t - (2C_1 + 4C_2) \sin 2t$.

122. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, $z = (-C_1 + 3C_2) \cos 3x - (3C_1 + C_2) \sin 3x$.

Примерные темы контрольных работ

Ниже предлагаются темы двух контрольных работ по материалу, изложенному соответственно в главах 1—3 и 4—6.

При выполнении каждой контрольной работы рекомендуется:

а) решать все задачи, соблюдая порядок, указанный в контрольной работе;

б) выписывать полностью условие каждой задачи перед тем, как ее решать;

в) проводить предварительное изучение данного дифференциального уравнения: определить область задания уравнения, область существования и единственности решения задачи Коши; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением; установить тип уравнения и выяснить вопрос о возможности существования особых решений;

г) решая поставленные задачи Коши, строго следовать плану, указанному в условии; мотивировать каждый этап решения, делая ссылки на соответствующие теоремы из теории дифференциальных уравнений;

д) выполнять все требуемые рисунки, контролируя расположение интегральных кривых уравнения первого порядка областью задания уравнения и полем направлений;

е) сопоставлять полученный ответ с результатами предварительного исследования.

Интегрируя уравнение (систему уравнений), нужно найти его общее решение (общий интеграл) и особые решения. При этом во избежание потери решений надо внимательно следить за равносильностью переходов, выполняемых в процессе интегрирования уравнения.

При нахождении особого решения следует убедиться, что кривая, подозрительная на особое решение, является интегральной кривой данного уравнения и что в каждой ее точке нарушена единственность решения задачи Коши.

Правильность найденного общего решения (общего интеграла) можно проверить подстановкой его в данное дифференциальное уравнение. Если выполнение этой подстановки требует длительных вычислений, то полезно сделать хотя бы частичную проверку ответа, подставляя в данное уравнение решение, соответствующее какому-нибудь конкретному (допустимому) числовому значению произвольных постоянных.

Для проверки правильности найденного общего и особых решений для простейших дифференциальных уравнений полезно использовать известную структуру общего решения и возможный аналитический вид особых решений, а также известный характер поведения решений.

Решая задачу Коши, следует предварительно (исходя из аналитической структуры дифференциального уравнения и опираясь на теорему существования и единственности) выяснить вопрос о существовании и единственности решения, об интервале существования решения и о возможных особенностях решения. При этом нужно находить все решения задачи Коши, не ограничиваясь нахождением решения, содержащегося в формуле общего решения.

Найдя решение задачи Коши, нужно:

а) сделать проверку, убедившись, что найденная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию;

б) выявить свойства найденного решения, сопоставить их с результатами предварительного исследования и установить дополнительные свойства, исходя из его аналитической структуры;

в) проследить связь свойств решения со свойствами самого дифференциального уравнения и начальных данных. В частности, изучить поведение найденного решения задачи Коши в окрестности особых точек уравнения и на бесконечности.

Контрольная работа № 1

1. Определить область задания уравнения, область существования и единственности, указать особые точки; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y' = 0$, $y' = 1$, $y' = -1$, $y' = \infty$, определить направление поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, найти линии точек перегиба); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение решений (интегральных кривых) в окрестности особых точек, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду решений; сделать рисунок:

а) $y' = \dfrac{y}{x+y}$; б) $y' = 2\sqrt{|y-1|}$;

в) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Проинтегрировать уравнение

$$2\,(y - 2xy + x^2\sqrt{y}) + x^2y' = 0$$

и найти решение, удовлетворяющее начальному условию:
а) $y(1) = 1$; б) $y(1) = 0$; в) $y \to 0$ при $x \to 0$,
выяснив предварительно вопрос о его существовании и единственности.

3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' = \sin x^2.$$

Найти решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y = 0,\quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

доказав предварительно, что искомое решение существует, единственно и определено в $\boldsymbol{R}$, т. е. при всех конечных значениях x.

4. Проинтегрировать уравнение

$$y''^2 - xy'' + y' = 0$$

и найти решения, удовлетворяющие нулевым начальным условиям

$$y = 0,\quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Почему получается два решения?

Контрольная работа № 2

1. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + y' = 2x - e^{-x} + e^x - 2\sin x,$$

воспользовавшись принципом наложения при нахождении частного решения.

2. Материальная точка единичной массы движется по оси x под влиянием силы $(-4x)$, притягивающей ее к началу координат, и возмущающей силы, направленной по оси x и равной $\cos 2t$ в момент времени t. Составить дифференциальное уравнение движения этой точки. Найти движение, определяемое полученным уравнением и нулевыми начальными условиями

$$x = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

доказав предварительно, что искомое движение существует, единственно и определено при всех $t \geq 0$. Построить график найденного движения.

3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - y = 2e^x \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$$

методом вариации произвольных постоянных. Выделить решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 1,$$

доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

4. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

методом Эйлера. Существуют ли ненулевые решения (движения, отличные от состояния покоя, $x \equiv 0$, $y \equiv 0$), ограниченные при $t \to +\infty$. Выделить решение (движение), удовлетворяющее начальным условиям

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

доказав предварительно, что искомое решение существует, единственно и определено при всех значениях $t \geq 0$.

Рекомендуемая литература

1. *Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.— С.-П.: Изд-во СПбУ, 1992.

2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.

3. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях.— М.: Наука, 1987.

4. *Анапольский Л. Ю., Иртегов В. Д., Матросов В. М.* Способы построения функций Ляпунова.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 2. М., ВИНИТИ, 1975, с. 53—112.

5. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений.— Мн.: ВШ, 1972.

6. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Е.* Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.

7. *Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.* Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1965.

8. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1984.

9. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1984.

10. *Арсеньев А. А., Самарский А. А.* Что такое математическая физика.— М.: Знание, 1983.

11. *Атанс М., Фалб Т.* Оптимальное управление.— М.: Машиностроение, 1968.

12. *Бабаков И. М.* Теория колебаний.— М.: Наука, 1965.

13. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1969.

14. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова.— М.: Наука, 1970.

15. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости.— М.: Наука, 1971.

16. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1954.

17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.

18. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ВШ, 1991.

19. *Богданов Ю. С.* Лекции по дифференциальным уравнениям.— Мн.: ВШ, 1977.

20. *Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б.* Дифференциальные уравнения.— Мн.: ВШ, 1983.

21. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления.— М.: Наука, 1969.

22. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1989.

23. *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В.* Асимптотические представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений//Итоги науки. Математика.— М.: Наука, 1968.

24. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Наука, 1974.

25. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука, 1977.

26. *Виленкин Н. Я., Доброхотова М. А., Сафонов А. Н.* Дифференциальные уравнения.— М.: Просвещение, 1984.

27. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.

28. *Воробьев Н. Н.* Теория рядов.— М.: Наука, 1986.

29. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1966.

30. *Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем.— М.: Наука, 1969.

31. *Гусарова Р. С.* Дифференциальные уравнения.— М.: Изд-во МГУ, 1980.

32. *Густомесов В. А., Данилин А. Р.* Дифференциальные уравнения.— Свердловск, 1990.

33. *Гутер Р. С., Янпольский А. Р.* Дифференциальные уравнения.— М.: ВШ, 1976.

34. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления.— Л.— М.: ГТИ, 1941.

35. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1968.

36. *Директор С., Рорер Р.* Введение в теорию систем.— М.: Мир, 1974.

37. *Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.* Математическое моделирование плазмы.— М.: Наука, 1982.

38. *Доценко А. В.* Применение дифференциальных уравнений для математического моделирования реальных процессов.— Л.: Изд-во ЛГПИ, 1986.

39. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Мн.: Наука и техника, 1972.

40. *Есипов А. А., Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Руководство к решению задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1989.

41. *Еругин Н. П., Штокало И. З.* и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев: ВШ, 1974.

42. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения.— М.: Наука, 1993.

43. *Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В.* Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Методы и алгоритмы.— Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, № 84, 1988.

44. *Зубов В. И.* Устойчивость движения.— М.: ВШ, 1973.

45. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования.— Л.: Машиностроение, 1974.

46. *Зубов В. И.* Теория колебаний.— М.: ВШ, 1979.

47. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.

48. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1985.

49. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.

50. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— М.: Наука, 1980.

51. *Кирьянен А. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

52. *Коддингтон Э. Л., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.

53. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения.— М.: Мир, 1966.

54. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные.уравнения.— М.: ВШ, 1983.

55. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: ВШ, 1978.

56. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: ФМ, 1959.

57. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.

58. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях.— М.: ГТИ, 1950.

59. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2.— М.: ВШ, 1981.

60. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом. Л.—М.: Мир, 1964.

61. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М.: ФМ, 1963.

62. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами математического анализа.— М.: Наука, 1981.

63. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М.: ВШ, 1966.

64. *Ляшко И. И., Боярчук А. К.* и др. Математический анализ. Ч. 3 (Интегрирование дифференциальных уравнений).— Киев: ВШ, 1987.

65. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.— М.: ГТИ, 1949.

66. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.

67. *Мантуров О. В.* Курс высшей математики. Т. 3.— М.: ВШ, 1991.

68. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики. Т. 1.— М.: ВШ, 1986.

69. *Матвеев Н. М.* Ряды.— Л.: Изд-во СЗПИ, 1974.

70. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мн.: ВШ, 1974.

71. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения.— Мн.: ВШ, 1976.

72. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Мн.: ВШ, 1987.

73. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения.— М.: Просвещение, 1988.

74. *Матвеев Н. М.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений.— Л.—Изд-во ЛГПИ, 1988.

75. *Матвеев Н. М.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Уравнения класса Фукса и иррегулярная особая точка.— Л.: Изд-во ЛГПИ, 1989.

76. *Матвеев Н. М.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— С.-П., Изд-во СПбУ, 1995.

77. *Матвеев Н. М., Доценко А. В.* Математическое моделирование реальных процессов.— Л.: Знание, 1985.

78. *Михайлов П. С.* Некоторые специальные функции.— Л.: Изд-во СЗПИ, 1967.
79. *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— М.: Наука, 1965.
80. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.
81. *Младов А. Г.* Системы дифференциальных уравнений и устойчивость движения по Ляпунову.— М.: ВШ, 1966.
82. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент.— М.: Наука, 1979.
83. *Мышкис А. Д.* Математика для втузов. Специальные курсы.— М.: Наука, 1971.
84. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М.: Наука, 1972.
85. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
86. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики.— М.: Наука, 1978.
87. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1973.
88. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.
89. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний.— М.: Наука, 1980.
90. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.
91. *Пискунов Н. С.* Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов. Т. 2.— М.: Наука, 1978.
92. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
93. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.—Л.: Наука, 1964.
94. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1977.
95. *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений.— Мн.: ВШ, 1973.
96. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1974.
97. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.

98. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов. Т. 1, 2, 3.— Рига: Зинатне, 1974, 1977, 1981.

99. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.

100. *Самарский А. А.* Что такое вычислительный эксперимент? Математическая модель.— В кн.: Что такое прикладная математика.— М.: Знание, 1980.

101. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.— М.: ВШ, 1989.

102. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, 2.— М.: ИЛ, 1953, 1954.

103. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1989.

104. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2.— М.: Наука, 1965.

105. *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.— М.: Наука, 1964.

106. Современная теория систем управления. Под редакцией К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.

107. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М.: ФМ, 1959.

108. *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах.— М.: Наука, 1986.

109. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.

110. *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Рассказы о прикладной математике.— М.: Наука, 1979.

111. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.

112. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1962.

113. *Уваренков И. М., Маллер М. З.* Курс математического анализа. Т. 1, 2.— М.: Просвещение, 1976.

114. *Уваров В. Б.* Математический анализ.— М.: ВШ, 1984.

115. *Уваров В. Б.* Дифференциальные уравнения.— М.: Изд-во МГУ, 1989.

116. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.

117. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент: ФАН, 1971.

118. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1979.

119. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука, 1985.

120. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1970.

121. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний.— М.: ВШ, 1988.

122. *Харкевич А. А.* Автоколебания.— М.: Гостехиздат, 1953.

123. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.

124. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966.

125. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.

126. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения.— М.: ГТИ, 1955.

127. *Шахно К. У.* Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления.— Мн.: ВШ, 1975.

128. *Шестаков А. А.* и др. Курс высшей математики. Т. 2.— М.: ВШ, 1987.

129. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Киев: ВШ, 1985.

130. *Щитов И. Н.* Лекции по методам оптимизации.— Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1981.

131. *Эльсгольц Л. Э.* Качественные методы в математическом анализе.— М.: Гостехиздат, 1955.

132. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1969.

133. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся переменным.— М.: Наука, 1971.

134. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения.— М.: ФМ, 1976.

135. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Качественная теория с приложениями.— М.: Мир, 1986.

136. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения и их приложения.— М.: Наука, 1972.

137. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции.— М.: Наука, 1964.

138. *Agnew R. P.* Differential equations. New York, Toronto, London, 1960.

139. *Burkill J. C.* The Theory of Ordinary Differential Equations, 1962.

140. *Collatz L.* Differentialgleichungen, Stuttgart, 1967.

141. *Derrick W. R., Grossman S. J.* Elementary differential equations with applications.— 2-nd ed.— Reading. Mass.: Addison-Wisley, 1981.

142. *Golomb M., Shanks M.* Elements of ordinary differential equations, 1962.

143. *Hill Einar.* Lectures on ordinary differential equations, 1962.

144. *Horn J.* Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig, 1934.

145. *Horn J., Wittich H.* Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin, 1960.

146. *Reid W. T.* Ordinary differential equations, New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

147. *Simmons G. F.* Differential equations with applications and historical notes.— New York: Mc Graw — Hill Book Co, 1972.

148. *Spiegel M. R.* Applied differential equations.— Englewood Cliffs, N. J.: Printice — Hall, 1981.

149. *Tricomi F. G.* Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg, New York, 1968.

150. *Zaitsev V. F., Polyanin A. D.* Discrete group methods for integrating equations of nonlinear mechanics.— CRC Press — Begel — Hous, 1994.— 312 p.

Предметный указатель

(ДУ — дифференциальное уравнение)

Оглавление

Николай Михайлович Матвеев

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Зав. редакцией *Беккерман Ю. И.*
Научный редактор *Шакиров В. Н.*
Оформление обложки *Домогацкая В. Ю.*
Технический редактор *Костылева Н. В.*
Корректоры *Смирнова И. А., Ткаченко И. П.*
Компьютерная верстка *Яшенкова Е. Л.*

ЛР № 071099 от 09.11.94. Подписано в печать 18.03.96.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 12. Тираж 5 000 экз.
Заказ № 137

Издательство «Специальная Литература»
198052, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

Отпечатано в ГИПП «Искусство России»
Комитета Российской Федерации по печати.
198099, Санкт-Петербург, Промышленная, 40.