ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

II

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

II

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

517.2
В 92
УДК 517.2 (075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Популярный писатель не предполагает не думающего, не желающего или не умеющего думать читателя,— напротив, он предполагает в неразвитом читателе серьезное намерение работать головой и *помогает* ему делать эту серьезную и трудную работу, ведет его, помогая ему делать первые шаги и *уча* идти дальше самостоятельно.
>
> ЛЕНИН,
>
> О журнале «Свобода». Сочинения, т. 5, стр. 358, изд. 5-е, М., 1959.

Как и первый выпуск «Основ высшей математики» (Аналитическая геометрия), этот учебник дифференциального исчисления предназначен в первую очередь для студентов-заочников. Как и в первом выпуске, здесь особое внимание уделено подробным пояснениям и примерам, а достаточное количество задач для самостоятельного решения, снабженных соответствующими указаниями, устраняет необходимость в особых сборниках задач и в дополнительных «методических указаниях».

Объем руководства при этом, конечно, увеличивается по сравнению с учебниками обычного типа. Однако *время*, затрачиваемое читателем, сокращается (мы имеем в виду, разумеется, такого читателя, который имеет «серьезное намерение работать головой»). Правильность этого утверждения подтверждается многочисленными письмами, полученными автором от студентов-заочников.

При подготовке второго выпуска автор с благодарностью учел критические замечания, сделанные по поводу первого выпуска доц. Б. И. Аргуновым (Смоленск), доц. Н. И. Вайсфельдом (Москва), доц. Ю. М. Гайдуком (Харьков), проф. Г. Б. Гуревичем (Москва), доц. В. И. Квальвассером (Куйбышев).

Важные указания почерпнуты автором также из писем студентов-заочников А. М. Гонтаря (Бугуруслан), А. В. Грищука (Новгород),

В. И. Донец (Запорожье), Д. Х. Жеглова (Варна, Болгария), Г. Д. Корвася (Запорожье), А. П. Мелкого (Онега), Н. Ф. Небоги (Днепропетровск), Г. А. и А. Г. Редковых (Шахты, Ростовской обл.), П. Ф. Сукротного (з/с Бауманский, Целинного края), А. И. Супруна (Марганец, Днепропетровской обл.), К. А. Терехова (Славянск), А. М. Щербинина (Махач-Кала), Н. И. Филатушкина (Минск).

Всем этим лицам автор выражает искреннюю признательность.

Рукопись второго выпуска была очень внимательно прочитана доц. Л. Я. Цлафом; его советы автор с благодарностью учел.

Г. М. Асиновская оказывала повседневную помощь автору проверкой вычислений и чертежей, а также ценными критическими замечаниями.

Особо надо отметить самоотверженную работу, проделанную Д. П. Полозковым в процессе редактирования книги. Его опыт в деле заочного преподавания и исключительное внимание, с которым он относился к своей работе, во многом содействовали улучшению книги.

Автор надеется, что читатели сообщат ему свои отзывы, замечания и пожелания. Адрес автора: Тула (обл.), 26, проспект Ленина, д. 103, кв. 54. Марку Яковлевичу Выгодскому.

Тула 15 июля 1964 г.

СОВЕТЫ УЧАЩИМСЯ

Во всяком деле трудно всегда начало. Особенно важно иметь это в виду при изучении математического анализа. Обилие новых понятий и отвлеченность предмета будут тормозить продвижение вперед, если с первых же шагов учащийся не почувствует твердой почвы под ногами.

Чтобы достичь этой цели, надо иметь в виду следующее:

1. Если учащийся убежден, что он понял прочитанный материал,— это хорошо; но этого недостаточно. Надо еще самостоятельно решить задачи, приводимые через каждые два-три параграфа. Лишь тогда можно спокойно идти дальше, не опасаясь недоразумений.

2. Весьма возможно, что некоторые задачи не сразу поддадутся усилиям читателя. В конце книги учащийся всегда найдет ответ, часто указание, а иногда и решение задачи. Но не следует с этим спешить: в ряде случаев требуется не только применить правило, но и подумать над задачей.

3. Многочисленные примеры, приводимые в основном тексте, надо рассмотреть внимательно. Нередко они могут служить образцами при решении задач, но в первую очередь они имеют целью пояснить содержание той или иной теоремы.

4. При всей важности доказательства теоремы не оно является основным объектом изучения. Важно понять, *как* доказывается теорема, но еще важнее понять, *что́* в ней доказывается. Иногда это ясно сразу. Но в математическом анализе много таких теорем и определений, где само их содержание, иной раз обманчиво простое на вид, таит в себе скрытые трудности. В этом и состоит причина «недоходчивости» некоторых доказательств.

Исходя из этого убеждения, автор в ряде случаев счел возможным выделить такие доказательства мелким шрифтом. Это не означает их маловажности. Но читатель, которому рассуждение покажется трудным, поступит благоразумно, если при первом чтении пропустит доказательство. Зато пусть он со всем вниманием отнесется к предварительным и последующим пояснениям, цель которых — уяснить *содержание* теоремы.

5. Все впервые вводимые термины выделяются курсивом; но их определения набираются, как правило, обыкновенным («прямым») шрифтом. Это облегчает наведение справок. В формулировках теорем курсив применяется тоже не сплошь: как правило, выделяется только «центральная» часть. Этим подчеркивается, что учащийся должен уяснить себе смысл теоремы, а не заучить ее текст.

6. При ссылках на первый выпуск перед номером параграфа проставляется римская цифра I. Так, например, указание I, § 36 означает «Основы высшей математики I, М. Я. Выгодский, Аналитическая геометрия, § 36».

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Вводные замечания

Математическим анализом называют систему дисциплин, объединенных следующими характерными чертами:

1. Предметом их изучения являются количественные соотношения действительного мира. Этот признак отличает дисциплины математического анализа от геометрических дисциплин; в последних предметом изучения являются пространственные свойства действительного мира. Впрочем, между аналитическими и геометрическими дисциплинами существует теснейшая связь. Более того, своим возникновением и развитием анализ обязан в первую очередь задачам геометрии и механики; позднее он развивался под влиянием потребностей других отраслей естествознания и техники, и в настоящее время нет такой области научных знаний, где математический анализ не находил бы себе широкого применения.

2. Количественные соотношения выражают в анализе с помощью числовых величин, как и в арифметике; как и в алгебре, мы пользуемся в анализе буквенными обозначениями числовых величин. Но в арифметике и алгебре рассматриваются преимущественно постоянные числовые величины, тогда как в математическом анализе мы имеем дело преимущественно с переменными величинами. Иными словами, числовые величины в арифметике и алгебре характеризуют по преимуществу состояния исследуемых объектов, в анализе же — процессы, наблюдаемые в природе или осуществляемые в технике.

Впрочем, арифметика и анализ не отделены друг от друга резкой чертой; различие между ними скорее носит условный характер, так как и арифметике не чуждо рассмотрение процессов; с другой стороны, и в анализе, наряду с переменными величинами, рассматриваются также и постоянные.

В этом руководстве излагаются следующие разделы математического анализа: дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория рядов и теория дифференциальных уравнений. О предмете каждой из этих дисциплин будет сказано в своем месте.

Зачатки методов математического анализа имелись еще у древнегреческих математиков; у Архимеда (3-й в. до н. э.) эти методы получили довольно широкое применение. В последующие 18 столетий в этой области не было сделано почти ничего нового, и лишь в начале 17-го в., в связи с возросшими требованиями естествознания и техники, идеи Архимеда были воскрешены Галилеем [1]) и рядом других западноевропейских ученых: Торричелли (1608—1647), Кавальери (1591—1647), Робервалем (1602—1675), Ферма (1601—1665), Б. Паскалем (1623—1662) и др. На рубеже 17-го и 18-го вв. Ньютон [2]) и Лейбниц [3]) в общем и целом завершили создание дифференциального и интегрального исчислений, а также положили основу теории рядов и теории дифференциальных уравнений. В 18-м в. последние две дисциплины были систематически развиты Эйлером.

К концу 18-го в. накопился огромный фактический материал, но он был недостаточно разработан в логическом отношении. Этот недостаток был устранен усилиями крупнейших ученых 19-го в., таких, как Коши во Франции, Н. И. Лобачевский в России, Абель в Норвегии, Риман в Германии и др.

§ 2. Действительные (вещественные) числа

Числа, получаемые *на практике* в результате измерения длины какого-либо предмета, веса какого-нибудь тела, продолжительности некоторого процесса и т. п., выражают соответственную величину лишь приближенно. Но степень приближения можно повысить, если применить более совершенные инструменты и более точные методы измерений. Поэтому в *математической теории* отвлекаются от неизбежных на практике неточностей и принимают, что существует число, которое точно выражает измеряемую величину.

Это допущение влечет за собой необходимость введения так называемых *иррациональных* чисел. Для измерительной *практики* совершенно достаточно запаса *рациональных* (т. е. целых и дробных) чисел. Эти числа и действия над ними изучаются в арифметике. Но уже в элементарной геометрии обнаруживается, что для матема-

---

[1]) Галилео Галилей (1564—1642) — великий итальянский ученый; поборник учения Коперника. Создатель телескопа, с помощью которого сделал ряд замечательных открытий (фазы Венеры, спутники Юпитера и др.); основоположник теоретической механики и гидростатики.

[2]) Исаак Ньютон (1642—1727) — великий английский математик и физик, открыл закон всемирного тяготения, сформулировал основные законы механики и применил их к изучению движения земных и небесных тел, исследовал экспериментально и теоретически законы оптики.

[3]) Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — знаменитый немецкий философ и математик.

тической теории этого запаса недостаточно. Так, диагональ квадрата нельзя *точно* выразить никаким рациональным числом, если за единицу измерения принять сторону квадрата.

Действительно, если бы такое число (обозначим его через α) существовало, то квадрат его равнялся бы 2:

$$\alpha^2 = 2. \tag{1}$$

Однако ни одно рациональное число не удовлетворяет этому равенству.

Вот почему необходимо допустить, что наряду с рациональными числами существуют числа иного рода, иррациональные. В частности, мы допускаем, что существует некоторое число α, точно удовлетворяющее равенству (1). Это число обозначается символом $\sqrt{2}$.

Длина отрезка, соизмеримого с единицей масштаба, выражается рациональным числом; длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, выражается иррациональным числом.

Рациональные и иррациональные числа, взятые в совокупности, называются *действительными* или *вещественными* числами (в противоположность мнимым числам, с которыми мы встретимся в дальнейшем).

Строгая математическая теория вещественных чисел слишком трудна для того, чтобы изложить ее в рамках этого руководства [1]). Наша цель состоит лишь в том, чтобы прочнее связать понятие вещественного числа с наглядными представлениями и по возможности рассеять то чувство некоторого недоверия, которое подчас испытывает учащийся по отношению к иррациональным числам.

Замечание. Первые иррациональные числа, с которыми встречается учащийся, связаны с извлечением корня из рационального числа. Таково, например, число $\sqrt{2}$, выражающее отношение диагонали квадрата к его стороне. Таковы числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ и т. п.

Но *числа упомянутого типа отнюдь не исчерпывают совокупности иррациональных чисел.*

Так, например, хорда AB (рис. 1), стягивающая дугу окружности, равную ее радиусу, выражается через радиус OA иррациональным числом λ (оно заключено между 0,9588 и 0,9589). Это число иррационально, т. е. его нельзя (точно) выразить никакой

---

[1]) Впервые такая теория была создана немецким математиком Р. Дедекиндом (1831—1916), который опубликовал ее в 1872 г. К этому времени здание математического анализа (для которого понятие действительного числа является одним из основных) было в общем и целом построено.

дробью. Но его невозможно выразить также и при помощи извлечения корней из рациональных чисел.

В данном случае длину λ отрезка AB можно выразить через отрезок OA такой формулой:

$$\lambda = 2 \sin \frac{1}{2} \tag{2}$$

(число $1/2$ есть радианная мера половины угла AOB). Однако и присоединение формул типа (2) совершенно недостаточно для выражения всех действительных чисел.

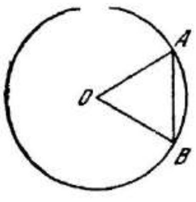


Рис. 1.

Другим примером иррационального числа, не выражаемого через радикалы, может служить десятичный логарифм любого целого числа (кроме 10, 100, 1000 и т. д.), например $\lg 2$ (это число между 0,3010 и 0,3011).

Иррациональное число π, выражающее длину окружности, диаметр которой принят за единицу длины, тоже нельзя точно выразить в радикалах.

Итак, *совокупность вещественных чисел не исчерпывается и в том случае, если к рациональным числам присоединить составленные из них радикальные выражения.*

§ 3. Числовая ось

Действительные числа можно изображать точками прямой линии. Для этого на оси $x'x$ (рис. 2) выбирается (произвольно) точка O (начало координат) и устанавливается единица масштаба OE. Тогда

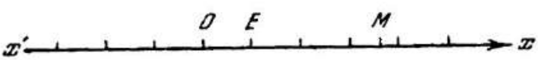


Рис. 2.

каждая точка M прямой $x'x$ приобретает определенную координату x_M. Эта координата является действительным числом, рациональным или иррациональным в зависимости от того, соизмерим или несоизмерим отрезок OM с единицей масштаба OE.

Обратно, каждому действительному числу a будет соответствовать определенная точка прямой $x'x$, а именно та ее точка M, у которой координата $x = a$.

В аналитической геометрии мы пользовались взаимной связью между числами и точками оси $x'x$ для решения геометрических вопросов; в математическом анализе эта связь используется для того, чтобы придать наглядность соотношениям между действительными числами.

Прямая $x'x$, используемая указанным образом для изображения действительных чисел, называется ***числовой осью.***

Замечание 1. Взаимное соответствие между точками числовой прямой дает основание употреблять в ряде оборотов слово «точка» там, где речь идет о числе. Так, вместо выражения «рациональное число» часто пользуются выражением «рациональная точка». Следует помнить, что подобное словоупотребление условно. Сама по себе никакая точка прямой линии не может быть ни рациональной, ни иррациональной. Абсцисса же ее будет рациональной или иррациональной в зависимости от выбора начала координат и единицы масштаба.

§ 4. Сравнение действительных чисел

Изображение вещественных чисел точками числовой оси делает очень наглядным сравнение действительных чисел по их величине.

Если точка M_2 числовой оси $x'x$ лежит (рис. 3) «справа» от точки M_1, то действительное число x_2 больше, чем число x_1; если «слева», то меньше; если же точки M_1 и M_2 совпадают, то числа x_2 и x_1 равны.

Рис. 3.

Если точка M лежит между точками M_1 и M_2, то и изображаемое ею действительное число x заключено между числами x_1, x_2, т. е. оно больше одного из этих чисел и меньше другого. Каждая же из разностей $x-x_1$, $x-x_2$ по абсолютной величине меньше, чем разность x_2-x_1 (ибо каждый из отрезков M_1M, MM_2 короче отрезка M_1M_2).

§ 5. Десятичные приближения действительного числа

Пусть точка C числовой оси $x'x$ (рис. 4*а*, *б*) изображает некоторое положительное действительное число c. Будем отмечать на оси $x'x$ «целочисленные» точки, т. е. точки, изображающие натуральные числа 1, 2, 3, ..., до тех пор, пока не получим (впервые) точку b_0, лежащую справа от C (на рис. 4, *а* имеем $b_0=4$, а на рис. 4, *б* — $b_0=3$). Число b_0 *превосходит* c, а предыдущее целое число $a_0\ (=b_0-1)$ не превосходит c (оно может быть меньше, чем c, как на рис. 4, *а*, или равняться c, как на рис. 4, *б*).

Назовем число b_0 *избыточным десятичным приближением* числа c с точностью до единицы, а число a_0 — *неизбыточным десятичным приближением* с точностью до единицы.

Разделим теперь отрезок a_0b_0 на 10 равных частей и рассмотрим 10 точек $a_0+0{,}1$, $a_0+0{,}2$, ..., $a_0+0{,}9$, $a_0+1{,}0$ (последняя точка совпадает с b_0). Одна из них будет непосредственно следовать за точкой C. Обозначим ее буквой b_1 (на рис. 4, *а* имеем $b_1=3{,}4$). Число b_1 (оно превосходит число c)

назовем избыточным десятичным приближением числа c с точностью до 0,1, а число $a_1 = b_1 - 0{,}1$ (оно не превосходит числа c) — неизбыточным десятичным приближением с точностью до 0,1.

Аналогично определяются избыточные и неизбыточные десятичные приближения с точностью до $0{,}1^2$, до $0{,}1^3$ и т. д.

Пример 1. Пусть точка C, отмеченная на рис. 4, a, изображает число $c = \frac{95}{28}$. Найдем неизбыточное десятичное приближение числа c с точностью до $0{,}1^5$.

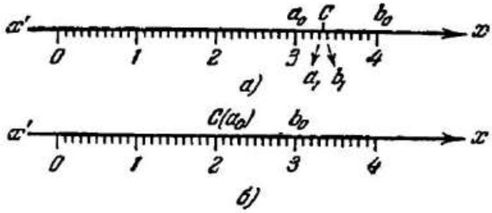


Рис. 4.

Решение. Первая из целочисленных точек, лежащих справа от C, есть, как упомянуто выше, точка $b_0 = 4$. Это — избыточное десятичное приближение числа $\frac{95}{28}$ с точностью до единицы; неизбыточное приближение с точностью до единицы есть

$$a_0 = 4 - 1 = 3.$$

Берем на отрезке $a_0 b_0$ 10 точек:

$$3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3;\ \ldots;\ 3{,}9;\ 4{,}0. \tag{1}$$

Из них непосредственно следующей за точкой c является точка 3,4. Действительно, каждое из чисел

$$3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3$$

меньше, чем $\frac{95}{28}$, но $3{,}4 > \frac{95}{28}$.

Стало быть, $b_1 = 3{,}4$ есть избыточное десятичное приближение числа $c = \frac{95}{28}$ с точностью до 0,1. Неизбыточное приближение с точностью до 0,1 есть $a_1 = 3{,}4 - 0{,}1 = 3{,}3$.

Теперь надо взять на отрезке $a_1 b_1$ точки

$$3{,}31;\ 3{,}32;\ 3{,}33;\ \ldots;\ 3{,}39;\ 3{,}40 \tag{2}$$

и последовательно сопоставить их с точкой c. Вычисление покажет, что

$$3{,}31 < \frac{95}{28};\ 3{,}32 < \frac{95}{28};\ \ldots;\ 3{,}39 < \frac{95}{28},$$

и лишь последняя из точек (2) лежит справа от точки C. Поэтому избыточное приближение с точностью до 0,01 есть $b_2 = 3{,}40$, а неизбыточное — $a_2 = 3{,}39$.

Продолжая этот процесс, получим следующие результаты:

$b_0=4,$	$a_0=3$	(с точностью до 1);
$b_1=3{,}4,$	$a_1=3{,}3$	(» » » 0,1);
$b_2=3{,}40,$	$a_2=3{,}39$	(» » » $0{,}1^2$);
$b_3=3{,}393,$	$a_3=3{,}392$	(» » » $0{,}1^3$);
$b_4=3{,}3929,$	$a_4=3{,}3928$	(» » » $0{,}1^4$);
$b_5=3{,}39286,$	$a_5=3{,}39285$	(» » » $0{,}1^5$).

Искомое приближение есть

$$a_5=3{,}39285.$$

Разумеется, тот же ответ получится гораздо проще, если применить арифметическое правило для обращения простой дроби в десятичную. Однако здесь имелось в виду показать общий прием отыскания десятичных приближений.

Пример 2. Найти неизбыточное десятичное приближение действительного числа $c=\sqrt[3]{10}$ с точностью до $0{,}1^5$.

Решение. Для данного числа $c=\sqrt[3]{10}$ имеем

$$c^3=10.$$

А подвергая испытанию целые числа 1, 2, 3, ..., находим

$$1^3=1,\quad 2^3=8,\quad 3^3=27.$$

Поэтому точка 3 будет первой из тех целочисленных точек, которые лежат справа от точки c, так что число $b_0=3$ есть избыточное, а число $a_0=2$ — неизбыточное приближения (с точностью до единицы).

Берем теперь на отрезке a_0b_0 точки

$$2{,}1;\quad 2{,}2;\quad 2{,}3;\ \ldots$$

Подвергая их испытанию, находим

$$2{,}1^3=9{,}261<10,\quad 2{,}2^3=10{,}648>10.$$

Дальнейшие испытания не нужны; число $b_1=2{,}2$ есть избыточное, а число $a_1=2{,}1$ — неизбыточное приближение с точностью до 0,1.

Продолжая этот процесс, получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}
b_0&=3, & a_0&=2;\\
b_1&=2{,}2, & a_1&=2{,}1;\\
b_2&=2{,}16, & a_2&=2{,}15;\\
b_3&=2{,}155, & a_3&=2{,}154;\\
b_4&=2{,}1545, & a_4&=2{,}1544;\\
b_5&=2{,}15444, & a_5&=2{,}15443.
\end{aligned}$$

Число $a_5=2{,}15443$ есть искомое неизбыточное приближение числа $\sqrt[3]{10}$ [1]).

Замечание 1. *Неизбыточные* приближения положительного числа обладают следующим свойством: каждое последующее получается из предыдущего приписыванием одного нового десятичного знака; *при этом прежде полученные цифры остаются неизменными*. Так, в примере 2 неизбыточное приближение a_1 получается из a_0 приписыванием единицы в разряде десятых

---

[1]) Ответ можно получить гораздо быстрее, но для этого надо знать правило извлечения кубического корня.

долей, приближение a_2 получается из a_1 приписыванием цифры 5 в разряде сотых и т. д.

Важно отметить, что *избыточные* приближения, как правило, не обладают указанным свойством. Так, в примере 1 при переходе от $b_3=3{,}393$ к $b_4=3{,}3929$ неизменными остались лишь три первые цифры, четвертая же уменьшилась на единицу; а при переходе от $b_2=3{,}40$ к $b_3=3{,}393$ изменились даже *две* последние цифры.

Замечание 2. Избыточным десятичным приближением отрицательного числа $(-c)$ называется *неизбыточное* приближение числа c, взятое со знаком минус. Аналогично: неизбыточным десятичным приближением числа $(-c)$ называется *избыточное* приближение числа c, взятое со знаком минус. Например, для числа $-\sqrt[3]{10}$ избыточные приближения суть -2; $-2{,}1$; $-2{,}15$; ..., а неизбыточные: -3; $-2{,}2$; $-2{,}16$ и т. д.

§ 6. Разложение действительного числа в бесконечную десятичную дробь

Последовательные неизбыточные приближения положительного числа легко прочитываются из записи такого вида:

$$a=\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots,$$

где α_0 обозначает некоторое целое положительное число (или нуль), а каждая из букв α_1, α_2, α_3, ... обозначает одну из цифр 0, 1, 2, ..., 8, 9. Так, запись

$$\sqrt{2}=1{,}414\ 213\ 562\ 373\ 095\ \ldots \tag{1}$$

означает, что последовательные неизбыточные приближения числа $\sqrt{2}$ суть 1; 1,4; 1,41 и т. д. Многоточие в конце записи означает, что при необходимости (или при желании) можно было бы найти неограниченное количество более точных приближений. Этим оправдывается и употребление знака равенства. Ни 15 выписанных нами десятичных знаков, ни 20, ни 100 знаков не дадут теоретически точного значения $\sqrt{2}$. Но *возможность получить любое число знаков полностью определяет действительное число.*

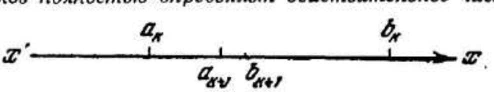


Рис. 5.

В самом деле, зная неизбыточное приближение a_k действительного числа, мы тем самым знаем также и соответствующее избыточное приближение b_k. Если отметить соответствующие точки на числовой оси $x'x$, то отрезок a_kb_k (рис. 5) будет иметь длину $0{,}1^k$. Отрезок $a_{k+1}b_{k+1}$ помещается внутри отрезка a_kb_k и короче его в 10 раз; отрезок $a_{k+2}b_{k+2}$ помещается внутри $a_{k+1}b_{k+1}$ и короче еще в 10 раз. Представляется очевидным, что на оси $x'x$ имеется одна-единственная точка a, к которой неограниченно приближаются точки a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ... (а также точки b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, ...).

Выражение вида

$$\alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots \tag{2}$$

(смысл обозначений α_0, α_1, α_2, ... указан выше), в котором число десятичных знаков мыслится неограниченно увеличивающимися, называют *бесконечной десятичной дробью.*

Бесконечная десятичная дробь, выражающая неизбыточные приближения числа a, называется (десятичным) *разложением* этого числа.

Замечание 1. Десятичным разложением отрицательного числа $(-a)$ называется разложение положительного числа a, взятое со знаком минус. Например, для числа $-\sqrt{2}$ десятичное разложение будет $-1{,}414\ 213\ \ldots$

Замечание 2. Каждое действительное число можно разложить в бесконечную десятичную дробь (и притом единственным образом). Но *не всякая бесконечная десятичная дробь может являться разложением некоторого действительного числа.*

Например, бесконечная десятичная дробь

$$3{,}699\ 999\ 999\ 999\ \ldots, \tag{3}$$

где все цифры, начиная с третьей, — девятки, не является разложением ни для какого числа.

Действительно, допустим, что некоторое действительное число a разлагается в бесконечную десятичную дробь (3). Это значит, что последовательные приближения числа a таковы:

$$\begin{array}{ll}
b_0 = 4, & a_0 = 3; \\
b_1 = 3{,}7, & a_1 = 3{,}6; \\
b_2 = 3{,}70, & a_2 = 3{,}69; \\
b_3 = 3{,}700, & a_3 = 3{,}699; \\
b_4 = 3{,}7000, & a_4 = 3{,}6999.
\end{array}$$

Мы видим, что все избыточные приближения, начиная с b_1, равны одному и тому же числу 3,7; на рис. 6 оно изображено точкой B. К этой точке неограниченно подходят неизбыточные приближения a_0, a_1, a_2, a_3 ... Точка a,

Рис. 6.

существование которой мы допустили, должна принадлежать каждому из отрезков a_0B, a_1B, a_2B, a_3B, ... Но из рис. 6 ясно, что таким свойством обладает только одна точка, а именно точка B. Значит, никакое число, отличное от числа 3,7, заведомо не разлагается в бесконечную десятичную дробь (3).

Но число 3, 7 тоже не разлагается в бесконечную дробь (3), ибо его разложение имеет вид

$$3{,}700\ 000\ 000\ 000\ 000\ \ldots$$

Следовательно, бесконечная десятичная дробь (3) не является десятичным разложением ни для какого действительного числа.

Таким же образом можно убедиться в том, что никакое действительное число не может иметь разложение

$$12{,}249\ 999\ 999\ 999\ 999\ \ldots,$$

или

$$0{,}999\ 999\ 999\ 999\ 999\ \ldots,$$

или

$$2{,}514\ 399\ 999\ 999\ 999\ \ldots$$

и т. п.

Вообще в роли десятичных разложений не может выступать никакая бесконечная десятичная дробь, у которой какая-либо цифра и все последующие — девятки.

Всякая бесконечная десятичная дробь, не обладающая этим свойством, представляет десятичное разложение некоторого вещественного числа.

Замечание 3. Если действительное число a рационально, то его десятичное разложение есть периодическая дробь; в частности, период может оказаться нулем; тогда число a точно обращается в (конечную) десятичную дробь.

Если же действительное число a иррационально, то его десятичное разложение есть бесконечная непериодическая дробь.

Впрочем, эти признаки, играющие важную роль в арифметике, в математическом анализе существенного значения не имеют.

§ 7. Сравнение действительных чисел при помощи их разложений

Зная десятичные разложения двух действительных положительных чисел u_1, u_2, можно с легкостью ответить на вопрос, равны ли эти числа, и если нет, то какое из них больше.

А именно, если десятичные разложения чисел u_1, u_2 одинаковы, то $u_1=u_2$. Если же десятичные разложения неодинаковы, то из двух положительных чисел большим является то, у которого десятичное разложение имеет большую целую часть или (при равенстве целых частей) большую цифру десятых, или (при равенстве целых и десятых) большую цифру сотых и т. д.

Пример. Сравнить по величине два числа

$$u_1=\sqrt[3]{10}, \quad u_2=\frac{37}{50}+\sqrt{2}.$$

Решение. Составим десятичные разложения данных чисел:

$$u_1=2,154\,43\ \ldots,$$
$$u_2=2,154\,21\ \ldots$$

Оба данных числа имеют одинаковые целые части; цифры десятых, сотых и тысячных у них тоже одинаковы. Но у числа u_1 цифра десятитысячных (4) больше, чем цифра десятитысячных (2) числа u_2. Значит, $\sqrt[3]{10}>\frac{37}{50}+\sqrt{2}$.

§ 8. О действиях над действительными числами

Над действительными числами можно производить все действия, выполняемые над числами рациональными. Зная разложения данных чисел u_1 и u_2 в бесконечные десятичные дроби, можно найти разложения их суммы, разности, произведения и т. д. На практике, конечно, приходится иметь дело только с десятичными приближениями, но точность последних можно повышать до любой требуемой степени.

Пример 1. Найти сумму двух чисел

$$\pi=3,141\,592\ \ldots,$$
$$\sqrt{2}=1,414\,213\ \ldots$$

Пояснение. Если AB есть отрезок, длина которого выражается числом π, а CD — отрезок, длина которого выражается *(в том же масштабе)* числом $\sqrt{2}$, то число $\pi+\sqrt{2}$ выражает длину отрезка $AB+CD$.

Решение. Сумма неизбыточных приближений (взятых с точностью до $0{,}1^6$) чисел π и $\sqrt{2}$, т. е. $3{,}141592+1{,}414213=4{,}555805$ не превосходит суммы $\pi+\sqrt{2}$. Сумма же избыточных приближений $3{,}141593+1{,}414214=4{,}555807$ превосходит сумму $\pi+\sqrt{2}$.

Эти результаты, правда, не позволяют найти неизбыточное приближение искомой суммы с точностью до $0{,}1^6$ (потому что неизвестно, является ли дробь $4{,}555806$ избыточным или неизбыточным приближением); но неизбыточное приближение с точностью до $0{,}1^5$ найти можно. Оно составляет $4{,}55580$, ибо это число заведомо меньше, чем $\pi+\sqrt{2}$, а число $4{,}55581$ заведомо больше, чем $\pi+\sqrt{2}$.

Можно было бы получить неизбыточное приближение числа $\pi+\sqrt{2}$ и с точностью до $0{,}1^6$ (или до $0{,}1^7$, до $0{,}1^8$ и т. д.). Для этого надо было бы взять для каждого из слагаемых приближения с точностью до $0{,}1^7$ (или до $0{,}1^8$, до $0{,}1^9$ и т. д.). Стало быть, надо считать известным разложение суммы $\pi+\sqrt{2}$ в бесконечную десятичную дробь.

Пример 2. Найти произведение $\sqrt{2}\pi$.

Пояснение. Первый сомножитель $\sqrt{2}$ есть число, указывающее, во сколько раз диагональ BD квадрата $ABCD$ (рис. 7) длиннее его стороны AB; второй сомножитель π указывает, во сколько раз описанная окружность $ABCD$ длиннее ее диаметра BD. Ясно, что произведение $\sqrt{2}\pi$ указывает, во сколько раз окружность $ABCD$ длиннее стороны квадрата AB.

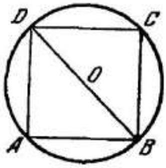


Рис. 7.

Решение. Взяв приближения данных чисел с точностью до $0{,}1^3$ и рассуждая как в примере 1, придем к выводу, что искомое произведение заключено между числами

$$1{,}414\cdot 3{,}141=4{,}441374$$

и

$$1{,}415\cdot 3{,}142=4{,}445930.$$

Уже цифры тысячных у этих двух чисел неодинаковы, поэтому последующие цифры нет смысла рассматривать. Цифры тысячных представляют интерес, но они разнятся на 4 единицы, и потому найти приближение искомого произведения с точностью до $0{,}1^3$ мы пока не можем. Неизбыточное приближение до $0{,}1^2$ составляет $4{,}44$; это число заведомо меньше, чем $\sqrt{2}\pi$, а число $4{,}45$ заведомо больше, чем $\sqrt{2}\pi$.

Чтобы найти десятичные приближения произведения с точностью до $0{,}1^3$, до $0{,}1^4$, надо было бы для каждого из сомножителей взять десятичное приближение с точностью до $0{,}1^4$, до $0{,}1^5$ и т. д.

Таким образом, надо считать известным разложение числа $\sqrt{2}\pi$ в бесконечную десятичную дробь.

§ 9. О приближенных вычислениях

В примере 2 § 8 мы нашли для произведения $\sqrt{2}\pi$ приближение с точностью до $0{,}1^2$, между тем как каждый из сомножителей был взят с точностью до $0{,}1^3$. При этом, чтобы установить степень точности результата, мы выполняли умножение дважды: один раз перемножали неизбыточные приближения, другой раз — избыточные.

Между тем было бы желательно заранее судить о степени точности результата. Тогда можно было бы ограничиться умножением неизбыточных приближений. Вместе с тем можно было бы сразу же узнать, с какой точностью надо взять приближения сомножителей, чтобы получить произведение с требуемой степенью точности. Это позволило бы избавиться от излишних проб.

О том, как это делается, говорится в правилах приближенных вычислений. Учащийся должен твердо знать эти правила [1]) и совершенствовать свои навыки в их применении.

§ 10. Переменные и постоянные величины

В природе и технике мы имеем дело с величинами, которые, как правило, подвержены изменению. Однако некоторые из них обладают постоянством или по крайней мере считаются на практике постоянными. Например, кинетическая энергия подвижной механической системы может меняться, а сумма кинетической и потенциальной энергии остается неизменной.

Различение переменных и постоянных величин играет очень важную роль в математике.

Определение. *Переменной* называется такая величина, которая в *условиях данного вопроса* способна принимать различные значения. *Постоянной* называется такая величина, которая в *условиях данного вопроса* имеет одно и то же значение.

Пояснение. Одна и та же величина в одном вопросе может быть переменной, а в другом — постоянной.

Пример 1. Температура T кипения химически чистой воды при нормальном атмосферном давлении всегда одна и та же (100° C), — сколько бы раз ни повторялся процесс нагревания, каков бы ни был источник тепла, сколько бы времени ни продолжался процесс нагревания и т. д. В упомянутых условиях величина T является постоянной.

Если же условия опыта допускают кипячение при любом состоянии атмосферы, то температура кипения может меняться. При таких условиях величина T переменная.

Пример 2. Парабола (ось которой принята за ось абсцисс, а вершина — за начало координат) представляется уравнением

$$y^2 = 2px.$$

В этом уравнении величины x и y рассматриваются как переменные. Что касается параметра p, то эта величина является постоянной, если рассматривается *одна и та же парабола*. Если же по условиям вопроса приходится рассматривать множество различных парабол, то величина p является переменной.

---

[1]) См. М. Я. Выгодский, Справочник по элементарной математике, раздел II, §§ 33—40.

Замечание. Некоторые величины являются постоянными в любых условиях. Такова, например, сумма внутренних углов треугольника (она при всяких условиях имеет одно и то же значение $2d$); такова величина π (отношение окружности к диаметру); таковы и некоторые физические величины (например, гравитационная постоянная).

Постоянную величину часто называют латинским термином *константа* (что в переводе значит «постоянная»). Термины «постоянная величина», «переменная величина» часто сокращают и говорят просто «постоянная», «переменная».

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z, u, v, w), а постоянные — первыми буквами a, b, c, ... Впрочем, от этого соглашения часто приходится по различным причинам отступать.

§ 11. Область изменения переменной величины; промежуток

Определение. *Областью изменения* переменной величины x называется совокупность всех значений, которые способна принимать величина x.

Пример 1. Зал кинотеатра рассчитан на 600 зрителей. Число билетов, продаваемых на один сеанс, есть переменная величина. Областью ее изменения является совокупность всех целых чисел от нуля (включительно) до 600 (включительно).

Пример 2. Число сторон многоугольника есть переменная величина, которая способна принимать любые целые значения, неменьшие чем 3. Никаких других значений эта переменная принимать не способна. Значит, область ее изменения есть совокупность всех целых чисел, не меньших чем 3.

Пример 3. Температура T химически чистой воды в жидком ее состоянии есть переменная величина, способная принимать любое значение от 0 до 100° (включая эти границы). Никаких других значений она принимать не может. Значит, область изменения переменной T есть совокупность всех значений от 0 до 100°:

$$0 \leqslant T \leqslant 100.$$

Пример 4. Число u, выражающее отношение хорды окружности к ее радиусу, есть переменная величина, способная принимать любое положительное значение, не превышающее 2. Отрицательных значений переменная u принимать не может.

Если понимать слово «хорда» в прямом его смысле, т. е. если считать, что концы хорды должны быть двумя *различными* точками окружности, то переменную u надо считать неспособной принимать значение 0. Напротив, значение 2 переменная u способна принимать (когда хорда является диаметром).

Стало быть, область изменения переменной u есть совокупность всех положительных чисел, не превосходящих 2:

$$0 < u \leqslant 2.$$

Промежуток. Областью изменения переменных величин, рассматриваемых в анализе, часто оказывается так называемый «промежуток».

Промежутком называется совокупность всех действительных чисел, заключенных между двумя данными числами a, b; последние называются *концами* промежутка. Концы промежутка иногда исключаются из него (оба или один из них), а иногда включаются в него. В последнем случае промежуток называется *замкнутым*.

Промежуток с концами a, b обозначается

$$(a, b).$$

В этой записи первая буква обычно обозначает меньший из концов, а вторая — больший.

В примере 3 область изменения переменной T есть замкнутый промежуток (0; 100). В примере 4 область изменения переменной u есть промежуток (0; 2). Этот промежуток незамкнутый, так как один из его концов (левый конец $u=0$) не входит в область изменения переменной u и тем самым исключается из промежутка. Другой конец ($u=2$) включен в рассматриваемый промежуток.

Бесконечный промежуток. Совокупность действительных чисел, превосходящих данное число a, называется *бесконечным промежутком* и обозначается

$$(a, \infty).$$

Иногда в бесконечный промежуток (a, ∞) включается и само число a (конец промежутка). Но и в этом случае бесконечный промежуток не считается замкнутым (так как у него нет второго конца).

Аналогично определяется бесконечный промежуток, содержащий все действительные числа, меньшие данного числа a; иногда в него включается и само число a. Такой бесконечный промежуток обозначается

$$(-\infty, a).$$

Наконец, совокупность всех действительных чисел тоже называют (бесконечным) промежутком и обозначают

$$(-\infty, \infty).$$

Пример 5. Отношение v радиуса окружности к хорде равняется 1/2, когда хорда является диаметром окружности. Во всех других случаях $v > \frac{1}{2}$, причем величина v способна принимать любые значения, большие половины. Значит, область изменения переменной v есть бесконечный промежуток $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; конец $a = \frac{1}{2}$ включается в этот промежуток.

Пример 6. Отношение z гипотенузы прямоугольного треугольника к его катету не может быть ни меньшим единицы, ни равным единице, но способно принимать любые значения, большие чем 1. Значит, область изменения переменной z есть бесконечный промежуток $(1, \infty)$, из которого исключен конец $a = 1$.

Окрестность точки. Говорят, что промежуток (a, b) есть *окрестность* точки x_0, если эта точка принадлежит промежутку (a, b), но не совпадает ни с одним из его концов. Чаще всего окрестность a, b данной точки x_0 выбирают так, чтобы концы a, b

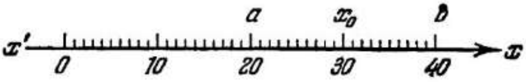


Рис. 8.

находились (рис. 8) на равных расстояниях от x_0. Тогда число $x_0 \left(= \frac{a+b}{2}\right)$ называют ***центром*** окрестности, а расстояние $\rho \left(= \frac{|b-a|}{2}\right)$ от центра до конца a, b — ***радиусом*** окрестности.

На рис. 8 точка $x_0 = 30$ является центром окрестности (20; 40); радиус окрестности $\rho = 10$.

§ 11а. Вопросы к §§ 10 — 11

1. Точка A отстоит от центра O окружности радиуса R на расстояние d. Является ли расстояние AM от точки A до произвольно взятой точки M окружности постоянной или переменной величиной?

2. Какова область изменения переменной величины AM (см. предыдущий вопрос)?

3. Из центра O равносторонней гиперболы проводится произвольно взятая секущая гиперболы. Какова область изменения переменного угла α, образуемого секущей с действительной осью гиперболы?

4. Обозначив через a полуось равносторонней гиперболы, определить область изменения переменной величины OM (O — центр гиперболы; M — произвольная ее точка).

5. На двух противоположных гранях куба с ребром a взяты точки K и L. Определить область изменения длины отрезка KL.

6. Является ли промежуток (0; 3) окрестностью точки $x = 3{,}5$? Точки $x = 3$? Точки $x = 2{,}5$?

7. Какой промежуток является окрестностью точки $x = -8$ радиуса $\rho = 2$?

§ 12. Функциональная зависимость

Если измерять температуру T кипения воды в различных географических пунктах и в различные моменты времени, то величина T окажется переменной. Вместе с тем окажутся переменными и другие величины, например давление атмосферы, температура воздуха, его влажность и т. д.

Но не все эти величины связаны с величиной T одинаково тесно. Так, между величиной T и температурой воздуха T_1 прямой зависимости не обнаруживается: при одной и той же температуре воздуха наблюдается неодинаковая температура кипения воды и, наоборот, при одной и той же температуре кипения воды наблюдается неодинаковая температура воздуха.

Напротив, между атмосферным давлением p и температурой T кипения воды обнаруживается прямая связь. Она выражается в том, что во всех случаях, когда вода кипит при $100°$ С, давление p измеряется 760 *мм* ртутного столба; когда температура кипения $T = 95°$, давление имеет одно и то же значение $p = 634$ *мм* и т. д.

Словом, *каждому значению, которое способна принимать переменная величина* T, *соответствует вполне определенное значение величины* p.

Обратно, каждому значению, которое способна принимать переменная величина p, соответствует вполне определенное значение величины T.

При наличии такого соответствия между значениями двух переменных величин говорят, что эти величины *связаны функциональной зависимостью*.

В нашем примере величины T и T_1 функциональной зависимостью не связаны, а величины T и p—связаны. Наблюдая температуру кипения воды, можно без барометра определить атмосферное давление. Для этой цели пользуются таблицей, которая (в сокращенном виде) выглядит следующим образом.

Таблица I

T, °C	70	75	80	85	90	95	100
p, *мм*	234	289	355	434	526	634	760

При пользовании подобными таблицами одна из двух величин, связанных функциональной зависимостью, является данной; ее называют *аргументом* или *независимой переменной*; другая определяется из таблицы; ее называют *функцией* или *зависимой переменной*. В нашем примере аргументом является величина T (она известна из наблюдения), а функцией — величина p (она определяется по данному значению величины T).

Функциональную зависимость между величинами T и p можно использовать и в обратном направлении. А именно, измеряя атмосферное давление, можно без термометра определять температуру кипения воды. Тогда аргументом будет величина p, а функцией — величина T.

Хотя таблица I может служить и для этой цели, но она не столь удобна, как таблица такого типа:

Таблица II

p, *мм*	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T, °C	75,8	79,6	83,0	85,9	88,7	91,2	93,5	95,7	97,7

Здесь аргумент p растет через равные промежутки (как аргумент T в таблице I).

Замечание. Таблицу I можно пополнить другими значениями аргумента T, скажем значениями $T=65°$, $T=73°$, $T=104°$ и т. п. Однако величина T способна принимать не всякие значения. Так, она не может принимать значение $T=-300°$, которое меньше «абсолютного нуля» ($-273°$). Невозможному значению $T=-300$, конечно, не соответствует никакое значение величины p. Пользуясь термином, введенным в § 11, можно сказать, что во всякой функциональной зависимости аргумент обладает определенной *областью изменения*. В данном случае областью изменения аргумента можно (теоретически) считать бесконечный промежуток $(-273°, \infty)$. В иных случаях аргумент способен принимать *любое* значение. Но и тогда можно сказать, что у него есть определенная область изменения, именно бесконечный промежуток $(-\infty, \infty)$. *Установление области изменения аргумента имеет существенное значение для характеристики функциональной зависимости.*

§ 13. Функция

Важнейшее для всей высшей математики понятие функции имеет своим источником функциональную зависимость между физическими величинами. Но функциональная зависимость между физическими величинами обнаруживается в конечном счете из опыта и наблюдения; в математике же функциональная зависимость устанавливается на основании некоторого *теоретического правила*.

Определение. Пусть переменная величина x *(аргумент)* изменяется в данной области, и пусть каждому значению, которое способна принимать переменная величина x, соответствует определенное значение другой величины y. Тогда говорят, что ***величина y есть функция от переменной x.***

Замечание 1. В этом определении две величины x и y участвуют не на равных правах: в роли аргумента выступает только величина x. Между тем в функциональной зависимости между двумя физическими величинами обе они равноправны (§ 12). Чем оправдывается такое отступление, будет видно из примеров.

Пример 1. Пусть n — число сторон некоторого многоугольника, а u — число его диагоналей. Область изменения переменной n известна — это совокупность всех целых чисел, не меньших чем 3. Область изменения переменной u определить не так просто: переменная u способна принимать значения 0 (при $n=3$), 2 (при $n=4$), 5 (при $n=5$), но не может принимать значений 3, 4, 6.

Поэтому роль аргумента лучше поручить величине n. Величина u будет функцией от n. Действительно, всякий четырехугольник, независимо от его вида, имеет две диагонали, пятиугольник — пять, шестиугольник — девять и т. д., словом, каждому значению, которое способна принимать переменная n, соответствует ***вполне определенное значение переменной u.*** Согласно определению величина u есть функция от переменной n.

Зависимость u от n можно представить такой таблицей:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
u	0	2	5	9	14	20	27	35

Ее можно неограниченно продолжить, руководствуясь, например, таким правилом: каждое число второй строки получается из предыдущего последовательным прибавлением чисел 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.:

$$\begin{gathered}0+2=2\\2+3=5\\5+4=9\\9+5=14\\14+6=20\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\end{gathered}$$

Замечание 2. Зависимость u от n можно представить также формулой

$$u=\frac{n(n-3)}{2}. \tag{1}$$

Но *принципиально* несущественно, известна ли нам эта формула или нет. Важно то, что значение величины *u математически точно определено* для каждого значения переменной *n, взятого из данной области ее изменения.* Знать эту область особенно необходимо при пользовании формулой, ибо по условию вопроса в формулу (1), разумеется, нельзя подставить такие значения, как $n=2$, $n=2\frac{1}{2}$, $n=\pi$ и т. д.

Пример 2. Обозначим буквой x произвольное положительное действительное число, а буквой y — целую часть этого числа (если число x целое, то оно само является своей целой частью). Тогда y есть функция от x.

Действительно, переменная x изменяется в данной области (совокупность всех положительных чисел) и каждому значению, которое способна принимать переменная x, соответствует (согласно установленному правилу) определенное значение величины y. Так, значению $x=6{,}2$ соответствует значение $y=6$; при $x=\pi$ имеем $y=3$, при $x=7$ имеем $y=7$ и т. д.

Что касается величины x, то она не является функцией от y. Действительно, значению $y=6$ соответствуют, наряду со значением $x=6{,}2$, также и значения $x=6{,}1$, $x=6{,}54$, $x=2\pi$, $x=\sqrt{40}$ и бесчисленное множество других значений переменной x, заключенных между 6 и 7.

Из этого примера видно, почему в математическом определении функции величины x и y не могут участвовать на равных правах (ср. замечание 1).

Замечание 3. Определение, помещенное в начале параграфа, выясняет точный смысл фразы «величина y есть функция величины x». Но оно не отвечает на вопрос: «что такое функция?»

Дело в том, что термин «функция» употребляется в двояком смысле. Под функцией понимается, во-первых, сама зависимая величина y (ср. § 12, стр. 28), а во-вторых, *та зависимость*, в которой величина y находится от аргумента x.

Так, скорость v тела, свободно падающего на землю, есть (по точному смыслу определения) функция времени t, протекшего от начала падения. Но под термином «функция» здесь можно понимать: 1) ту величину, которая меняется с течением времени, то есть скорость падения, 2) ту зависимость, в которой скорость падения находится от времени, то есть пропорциональность, выражаемую формулой $v=9{,}8t$ (если за единицу длины принять метр, а за единицу времени — секунду).

Чаще всего слово «функция» употребляется именно в этом втором смысле.

Пусть, например, основание прямоугольника есть 9,8 *м*, а высота h (измеряемая тоже в метрах) меняется. Тогда площадь s

прямоугольника (выраженная в квадратных метрах) есть функция переменной h.

При этом величина s находится в той же зависимости от аргумента h, в какой скорость v находится от времени t. Действительно, $s = 9{,}8h$, так что в обоих случаях зависимая переменная получается из независимой путем умножения на 9,8.

Употребляя слово «функция» в указанном смысле, мы вправе сказать, что в обоих примерах мы имеем дело *с одной и той же функцией* (несмотря на то, что как зависимая, так и независимая переменные различны не только по буквенным обозначениям, но и по физическому смыслу).

Пример 3. Площадь s квадрата есть функция от переменной длины u его стороны. Область изменения аргумента u есть бесконечный промежуток $(0, \infty)$. Каждому значению, которое способна принимать переменная u, соответствует определенное значение величины s; последнее можно найти по формуле

$$s = u^2. \tag{2}$$

В данном примере переменные u и s равноправны: каждому значению, которое способна принимать переменная s [область ее изменения тоже есть промежуток $(0, \infty)$], соответствует определенное значение величины u. Значит, величина u есть функция от переменной s. Эту функцию можно выразить формулой

$$u = \sqrt{s}. \tag{3}$$

Пример 4. Рассмотрим последовательные нечетные числа

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Обозначим через u порядковый номер произвольно взятого нечетного числа, а через s — сумму нечетных чисел от первого до числа с номером u включительно. Тогда s есть функция от u (область изменения аргумента u — совокупность всех натуральных чисел $1, 2, 3, 4, \ldots$): значению $u = 1$ соответствует значение $s = 1$, значению $u = 2$ соответствует значение $s = 1 + 3 = 4$, при $u = 3$ имеем $s = 1 + 3 + 5 = 9$ и т. д. Зависимость s от u можно представить таблицей

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

которую можно неограниченно продолжить, или формулой

$$s = u^2, \tag{4}$$

к которой надо добавить указание области изменения аргумента u.

Переменная u в свою очередь является функцией от s; зависимость u от s можно выразить формулой

$$u = \sqrt{s}, \tag{5}$$

к которой надо добавить указание, что переменная s способна принимать только такие значения, которые являются квадратами натуральных чисел.

Замечание 4. Зависимость s от u в примерах 3 и 4 выражается одной и той же формулой. Тем не менее функции, о которых идет речь в этих примерах, надо считать *различными*. И не по той причине, что различны те величины, которые обозначены через s или через u (см. выше замечание 3), а потому, что различны области изменения аргумента u. В примере 3 эта область есть промежуток $(0, \infty)$, а в примере 4 — совокупность натуральных чисел. В формулу (2) можно подставлять любые положительные значения u, а в формулу (4) — только целые значения.

Замечание 5. Аргумент всякой функции является, согласно определению, переменной величиной. Что касается самой функции, то, как правило, и она является переменной, как это и было в предыдущих примерах. Но в *определении нет требования*, чтобы функция непременно была переменной величиной. Иными словами, допускается и такая возможность, что всем значениям аргумента x соответствует *одно и то же* значение функции.

Это допущение диктуется рядом важных причин. Вот одна из них. Пусть каждая из двух *переменных* величин y и z является функцией от x. Тогда разность их $y-z$, как правило, является переменной величиной, но может оказаться и постоянной. Было бы неразумно в первом (общем) случае считать величину $y-z$ функцией от x, а во втором (исключительном) случае — не считать. В целях общности надо сказать, что величина $y-z$ всегда есть функция от x, но в первом случае эта величина переменная, а во втором — постоянная.

Таким образом, величина y считается функцией от переменной x и в том случае, когда каждому значению, которое способна принимать переменная x, соответствует *одно и то же* (вполне определенное) значение величины y.

В том случае, когда функция y является величиной постоянной, аргумент и функцию *нельзя менять ролями.*

§ 13а. Вопросы к §§ 12—13

1. Обозначим радиус круга через R, а его площадь — через S. Является ли величина R функцией величины S? Если да, то какова область изменения аргумента?

2. Пусть τ[1]) есть число всех делителей целого числа n (включая само это число и единицу), так что, например, для $n=12$ величина $\tau=6$ (делители 1, 2, 3, 4, 6, 12). Является ли величина n функцией величины τ? Если да, то какова область изменения аргумента?

3. Из проволоки длиной 60 *см* делается контур, имеющий форму прямоугольника. Пусть S — площадь этого прямоугольника, а x — его длина. Является ли величина S функцией величины x? Если да, то какова область изменения аргумента?

Замечание. Если прямоугольник не является квадратом, то под длиной прямоугольника понимается длина большей его стороны.

4. Является ли величина x (см. предыдущий вопрос) функцией S? Если да, то какова область изменения аргумента?

5. Является ли площадь S треугольника функцией его периметра p? Если да, то какова область изменения аргумента?

6. Тот же вопрос для квадрата.

7. Пусть r_1 и r_2 — радиусы-векторы точки M, произвольно взятой на эллипсе с данными полуосями a, b. Являются ли функциями от r_1 следующие величины:

а) r_2,

б) r_2-r_1,

в) r_2+r_1?

Если да, то какова область изменения аргумента?

8. Являются ли функции, указанные в предыдущем вопросе, переменными величинами?

§ 14. Способы представления функции

Если известно правило, позволяющее каждому из возможных значений аргумента поставить в соответствие определенное значение функции, то эта функция теоретически считается известной (заданной).

Но для практики важно, чтобы способ задания функции был по возможности наиболее удобным. Эта цель достигается различными средствами, каждое из которых имеет свои достоинства и свои недостатки. Наиболее употребительны три способа задания функции: а) табличный, б) графический, в) аналитический.

а) Табличный способ общеизвестен. Он был применен в примере § 12 и в примерах 1 и 4 § 13. Таблицы логарифмов, таблицы квадратных корней и т. п. также известны читателю.

Табличный способ удобен тем, что для ряда значений аргумента он сразу дает соответствующее значение функции (точное или приближенное с требуемой степенью точности). Неудобство табличного

---

[1]) τ («тау») — греческая буква (строчная), соответствующая русской букве т. Заглавное «тау» пишется Т.

ного способа заключается в том, что таблица часто не содержит всех нужных значений аргумента, и тогда надо либо довольствоваться недостаточной точностью, либо производить подсобные вычисления (для учета поправок).

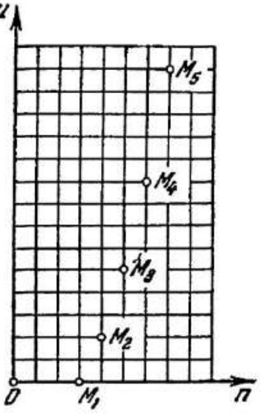


Рис. 9.

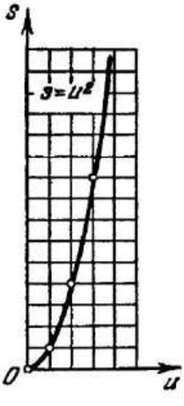


Рис. 10.

б) Графический способ. В этом способе значение x_1 аргумента x и соответствующее значение y_1 функции y изображаются точкой $M_1(x_1, y_1)$. Совокупность полученных точек дает картину зависимости функции от аргумента.

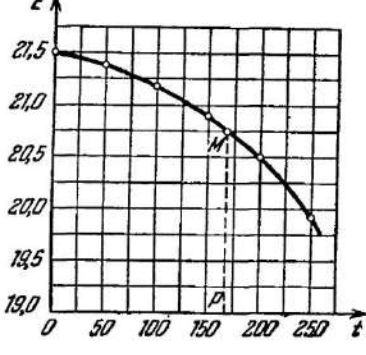


Рис. 11.

На рис. 9 представлено графическое изображение функции, рассмотренной в примере 1 § 13. В данном случае точки графика обособлены друг от друга.

В иных случаях график имеет вид сплошной линии. Таково, например, графическое изображение (рис. 10) функции S, рассмотренной в примере 3 § 13.

Для удобства изображения масштабы на осях координат часто берут различными, а вместо самих осей координат нередко чертятся соответственно равнонаправленные оси. На рис. 11 графически изображена функциональная зависимость модуля упругости E кованого железа (в $m/cм^2$) от температуры t железа. Масштаб на оси ординат в 100 раз крупнее, чем на оси абсцисс; вместо оси абсцисс начерчена равнонаправленная с ней ось, лежащая на 19 единиц масштаба выше. По графику можно прочесть, например, что при $t=170°$ модуль упругости

$$E=20{,}75\ т/см^2.$$

Графический способ широко применяется в экспериментальных работах, особенно там, где используются самопишущие приборы.

Преимущество графического способа перед табличным — легкость обозрения функциональной зависимости в *целом*. Но степень точности при графическом изображении сравнительно невелика; к тому же чтение графика со всей точностью, которую он способен дать, утомительно.

в) Аналитический способ состоит в том, что зависимость функции от аргумента выражается формулой (или системой формул). Этот способ мы применяли в примерах 1, 3, 4 § 13.

Формула (если она не слишком сложна) дает сжатое выражение функциональной зависимости. Действия, указываемые формулой, в ряде случаев позволяют получать точные значения функции для всех значений, которые способен принимать аргумент; в ряде других случаев по формуле можно получать приближенные значения с любой требуемой степенью точности.

Неудобством аналитического способа является отсутствие наглядности, а нередко и утомительность вычислений. Первый из этих недостатков восполняется графическим способом, второй — привлечением таблиц и других вспомогательных средств.

В математическом анализе аналитическим способом пользуются предпочтительно перед всеми другими.

Пример 1. Тело брошено с земли вверх с начальной скоростью $v=7$ *м/сек*. Высота h тела над землей есть функция времени t, протекшего с момента бросания. Эта функция выражается формулой

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

выведенной теоретически [1]) и подтвержденной наблюдениями.

Замечание 1. Хотя эта формула имеет математический смысл при любом значении t, но она может дать неверный результат, если не добавить указания области изменения аргумента. Действительно, через некоторый промежуток времени T тело упадет на землю, после чего величина h будет оставаться равной нулю.

---

[1]) В предположении, что тело движется в пустоте. При движении в воздухе формула (1) верна приближенно.

Значение T можно получить из уравнения

$$v_0T-\frac{1}{2}gT^2=0, \tag{2}$$

откуда находим [1])

$$T=\frac{2v_0}{g}\approx 1{,}4 \text{ сек.} \tag{3}$$

Поэтому формулу (1) лучше записать следующим образом:

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \left(0\leqslant t\leqslant \frac{2v_0}{g}\right). \tag{4}$$

Неравенство, заключенное в скобки, устанавливает область изменения аргумента t, охватывающая тот промежуток времени, в течение которого тело было в движении. Считая, что в дальнейшем тело покоится на земле, мы можем представить зависимость h от t (при $t\geqslant 0$) такой системой двух формул:

$$h=\begin{cases} v_0t-\frac{1}{2}gt^2 & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{2v_0}{g}, \\ 0 & \text{при} \quad t>\frac{2v_0}{g}. \end{cases} \tag{5}$$

Пример 2. Зависимость функции y от аргумента x задана графически (рис. 12). Аргумент изменяется в (замкнутом) промежутке (—7; 7) (вне этого промежутка функция не задана).

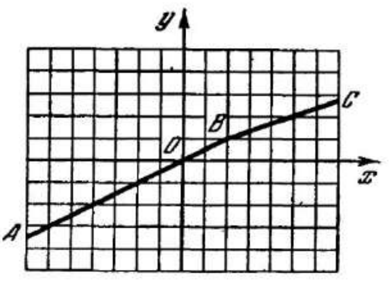


Рис. 12.

Чтобы представить функцию аналитически, составим уравнения прямых AB и BC. Заметив, что прямая AB проходит через точки (0; 0) и (—6; —3), найдем (I, § 40), что

$$y=\frac{1}{2}x.$$

Эта формула аналитически выражает функцию y для значений x, лежащих в промежутке (—7; 2). Заметив, что прямая BC проходит через точки (2; 1) и (5; 2), найдем формулу

$$y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x,$$

выражающую функцию для значений x в промежутке (2; 7).

[1]) Уравнение (2) имеет еще один корень $T=0$. Но это значение соответствует началу полета, а не его концу.

Искомое аналитическое представление можно записать системой двух формул

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{при} \quad -7\leqslant x\leqslant 2, \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}x & \text{при} \quad 2< x\leqslant 7. \end{cases} \tag{6}$$

При $x=2$ оба выражения $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$ дают одно и то же значение $y=1$ (точка B). Поэтому вместо (6) можно написать

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{при} \quad -7\leqslant x\leqslant 2, \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}x & \text{при} \quad 2\leqslant x\leqslant 7. \end{cases} \tag{6а}$$

Пример 3. Пусть воздух при температуре 0° и при давлении 1 *атм* взят в количестве 1 *л*. При той же температуре, но под изменяющимся давлением данная масса воздуха будет занимать переменный объем. Значит, в этих условиях объем v есть функция давления p. Опыт показывает, что пока давление изменяется в известных пределах (примерно от $p_1=1/15$ *атм* до $p_2=10$ *атм*), произведение pv отличается от единицы не более чем на 0,01 (т. е. отступление от закона Бойля — Мариотта не превышает 1%). Таким образом, установленная опытом функциональная зависимость между аргументом p и функцией v выражается формулой

$$pv=1{,}00 \qquad (p_1<p<p_2). \tag{7}$$

Если это уравнение разрешить относительно v, то получим уравнение

$$v=\frac{1{,}00}{p} \qquad (p_1<p<p_2), \tag{8}$$

равносильное уравнению (7). Стало быть, зависимость функции v от аргумента p можно выразить формулой (7) с тем же успехом, что и формулой (8).

Явные и неявные функции. Если зависимость функции y от аргумента x выражена уравнением, разрешенным относительно y, то функция называется *явной;* если же упомянутая зависимость выражена уравнением, не разрешенным относительно y, то функция называется *неявной*. Функция v аргумента p, рассмотренная в примере 3, будет явной, если ее выразить уравнением (8), и неявной, если ее выразить уравнением (7).

Замечание 2. Разделение функций на явные и неявные касается не самих функций, а способа их аналитического представления. Функция, не представленная формулой, не является ни явной, ни неявной.

§ 14а. Задачи и вопросы к § 14

1. Пусть τ — число всех делителей целого числа n (см. задачу 2 § 13а). Представить зависимость τ от n таблицей и графиком (ограничиться значениями n до 16 включительно).

2. Представить аналитически зависимость y от x, графически заданную полуокружностью ACB (рис. 13).

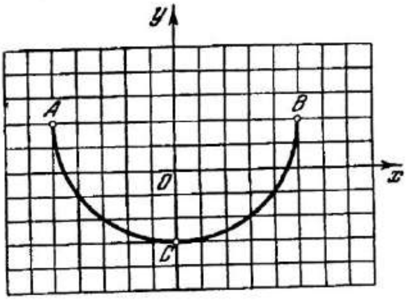


Рис. 13.

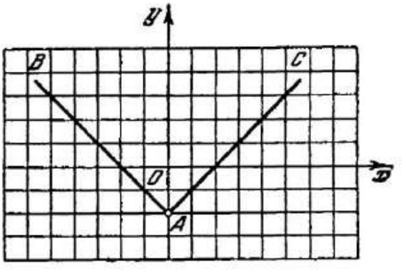


Рис. 14.

3. Представить аналитически зависимость y от x, графически заданную парой лучей AB, AC (рис. 14).

4. Величины x, y связаны уравнением

$$x = \frac{y}{2-y}.$$

Является ли величина y явной функцией от x?

5. Построить график функции

$$y = \begin{cases} -x-a & \text{при} \quad x < -a, \\ -\sqrt{a^2-x^2} & \text{при} \quad -a \leqslant x \leqslant a, \\ x-a & \text{при} \quad x > a \end{cases}$$

(a — положительная величина).

6. Цилиндрическая колонна составлена из трех однородных цилиндров высотой в 2 *м* каждый. Нижний цилиндр весит 3 *т*, средний 2 *т*, а верхний 1 *т*. Пусть P — сжимающая сила, действующая на поперечное сечение колонны, а x — расстояние этого сечения от верхнего основания. Выразить P, как функцию от x, таблицей (через промежуток 0,5 *м*), графиком и аналитически.

7. Стальной шарик был подвешен на высоте $h_0 = 125$ *см* над каменной кладкой. Затем поддерживавшая его нить была пережжена. Пусть h — переменная высота шарика, а t — время, протекшее с момента освобождения шарика. Представить функциональную зависимость h от t в течение первых $1^1/_2$ *сек* таблицей (с точностью до 1 *см* через промежуток 0,1 *сек*), а также графиком и аналитически.

Для упрощения выкладок положить $g \approx 10$ *м/сек*^{2}. Сопротивление воздуха не учитывается; удар предполагается абсолютно упругим.

8. Выразить аналитически зависимость h от t (см. задачу 7) в течение первых $2^1/_2$ *сек* движения шарика.

§ 15. Область существования аналитически заданной функции

В примере 1 § 14 высота h вертикально брошенного тела выражалась через время полета t формулой

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

сопровождаемой указанием области $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{2v_0}{g}\right)$ изменения аргумента. Без указания этой области формула (1) была бы недостаточной, чтобы описать движение тела. Однако взятая сама по себе формула (1) пригодна для всех без исключения значений t.

Но многие формулы и сами по себе пригодны не для всех значений аргумента. Такова, например, формула

$$y=\sqrt{4-x^2}, \tag{2}$$

которая *теряет смысл*, если аргументу дать значение, превосходящее 2 по абсолютному значению (например, $x=3$ или $x=-5$).

Поэтому при рассмотрении аналитически заданных функций важно знать, при каких значениях аргумента соответствующая формула имеет смысл, а при каких не имеет.

Определение. *Областью существования* аналитически заданной функции называется совокупность всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

Пример 1. Область существования функции

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

есть (замкнутый) промежуток (—2; 2). В самом деле, формула $y=\sqrt{4-x^2}$ имеет смысл для всех значений x, заключенных в этом промежутке, и не имеет смысла ни для одного значения x за пределами промежутка.

Замечание 1. Всякий раз, как функция задается формулой, должна быть задана и область изменения аргумента (см. § 14). И если область изменения аргумента специально не оговорена, то надо подразумевать, что область изменения аргумента совпадает с областью существования функции.

Пример 2. Если дана функция

$$y=\sqrt{4-x^2} \tag{3}$$

без каких-либо указаний относительно области изменения аргумента x, то надо подразумевать, что эта область совпадает с областью существования функции, т. е. (пример 1) является замкнутым промежутком (—2; 2). График функции (3) изображен на рис. 15.

Замечание 2. Область изменения аргумента функции может составлять часть области ее существования, но не может содержать ни одной точки, лежащей вне области существования.

Пример 3. На рис. 16 представлен график функции

$$y=\sqrt{4-x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1{,}4). \tag{4}$$

Область изменения аргумента [замкнутый промежуток (—1; 1,4)] составляет часть области существования функции

$$y=\sqrt{4-x^2} \tag{3}$$

(ср. пример 2).

Подобно тому как дугу ACB (рис. 15) мы считаем отличной от дуги DCE (рис. 16), функцию (3) надо считать отличной от функции (4), хотя формула в обоих случаях одна и та же.

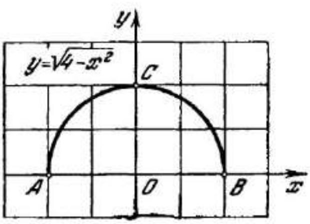


Рис. 15.

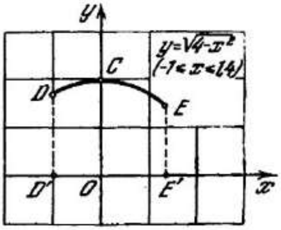


Рис. 16.

Область изменения аргумента функции, выражаемой формулой $y=\sqrt{4-x^2}$, может составлять любую часть промежутка (—2; 2), но ни в каком случае не может содержать ни одной точки, лежащей вне этого промежутка.

Пример 4. Пусть функция s задана формулой

$$s=u^2 \tag{5}$$

без указания области определения аргумента. Тогда подразумевается, что эта область совпадает с областью существования функции, т. е. является множеством *всех действительных* чисел.

В примере 4 § 13 та же формула (5) выражала другую функцию, у которой областью изменения аргумента была совокупность всех натуральных чисел. Эта область изменения составляет часть области существования функции (5).

Пример 5. Функция y задана формулой

$$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}. \tag{6}$$

Найти область ее существования.

Решение. Выражение $\sqrt{x-2}$ имеет смысл только при $x \geqslant 2$, а выражение $\sqrt{7-x}$ — только при $x \leqslant 7$. Для всех значений x, заключенных между числами 2 и 7 (включая эти числа), формула (6) имеет смысл, для остальных — не имеет смысла. Значит, область существования функции (6) есть замкнутый промежуток (2; 7). Это отчетливо видно на графике (рис. 17), который представляет собой дугу AB с концами $A(2; \sqrt{5})$, $B(7; \sqrt{5})$.

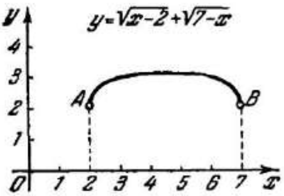


Рис. 17.

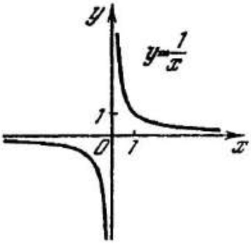


Рис. 18.

Пример 6. Функция y задана формулой

$$y=\frac{1}{x}. \tag{7}$$

Выражение $\frac{1}{x}$ имеет смысл при любом значении x, кроме $x=0$. Значит, область существования функции (7) есть промежуток $(-\infty, \infty)$, *лишенный точки* $x=0$. У графика (рис. 18) нет точки, которая лежала бы над началом координат.

Пример 7. Найти область существования функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{2a^2-x^2}}. \tag{8}$$

Решение. Знаменатель выражения (8) имеет смысл в *замкнутом* промежутке $(-a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ [ср. формулу (2)]. Но на концах этого промежутка, т. е. в точках $x=-a\sqrt{2}$, $x=a\sqrt{2}$ знаменатель обращается в нуль. Вследствие этого дробь (8) теряет смысл («обращается в бесконечность»). Значит, область существования функции (8) есть *незамкнутый промежуток* $(-a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$; в него не включен ни один из концов.

График этой функции (рис. 19) располагается над *внутренними* точками отрезка AB. Прямые $x=-a\sqrt{2}$, $x=a\sqrt{2}$ не встречают графика (это — его асимптоты).

Пример 8. Найти область существования функции

$$y = -\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{9}$$

Решение. Подкоренное выражение становится отрицательным, когда x меньше a по абсолютному значению. При этих значениях функция (9) не имеет смысла; при остальных же значениях имеет.

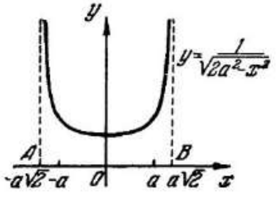


Рис. 19.

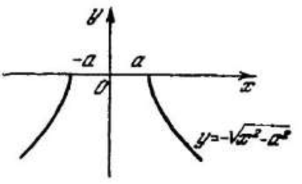


Рис. 20.

Значит, область существования состоит из двух бесконечных промежутков

$$(-\infty, -a) \quad \text{и} \quad (a, \infty)$$

со включенными концами $-a$ и a. График функции (две полуветви равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$) изображен на рис. 20.

§ 15а. Задачи к § 15

Может ли каждая из нижеследующих формул представлять величину y как функцию аргумента x, и если да, то какова область существования такой функции?

1. $y = 0{,}6\sqrt{3-x^2}$. 2. $y = 2\sqrt{x^2-3}$.

3. $y = \sqrt{-x^2-3}$. 4. $y = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$.

5. $y = \frac{x}{x+2}$. 6. $y = \frac{x^2}{x^2+4}$.

7. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}$. 8. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-5}$.

9. $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-5}$. 10. $y = \frac{1}{x(x-2)}$.

11. $y = \lg(x-15)$. 12. $y = \lg(15-x)$.

13. $y = \lg(x-3) + \lg(5-x)$. 14. $y = \lg(3-x) - \lg(x-5)$.

15. $y = \lg\frac{3-x}{x-5}$. 16. $y = \sin x + \cos x$.

17. $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$. 18. $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 16. Обозначение функции

Словесное выражение «функция от x» сокращенно записывается знаком $f(x)$, который читается «эф от икс». Вместо строчной буквы f (начальной буквы латинского слова functio — функция) часто употребляется и заглавная буква F, а также соответствующие греческие буквы φ, Φ:

$F(x)$ (эф большое от икс),
$\varphi(x)$ (фи от икс),
$\Phi(x)$ (фи большое от икс).

Употребляются и такие обозначения:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \quad \text{и т. д.}$$

Нередко вместо букв f, F, φ, Φ употребляются и другие буквы латинского и греческого алфавита. Запись

$$y=f(x) \tag{1}$$

(«игрек равно эф от икс») означает, что величина y есть какая-то функция аргумента x; эта функция может быть как известной, так и неизвестной.

Пояснение. Если величина y есть десятичный логарифм величины x, то мы пишем

$$y=\lg x. \tag{2}$$

Если y есть синус угла x, то мы пишем

$$y=\sin x. \tag{3}$$

Запись (1) построена по тому же образцу, что записи (2) и (3). Но только в записях (2) и (3) величина y является вполне определенной функцией от x, а запись (1) способна изображать любую функцию, в частности логарифмическую или тригонометрическую. Взаимоотношение между записью (1) и записями вида (2), (3) и т. п. — такое же, как между буквенным обозначением числа и цифровым: каждая из цифровых записей 5, $\frac{7}{12}$, $\sqrt{3}$ и т. д. изображает *определенное* число, а буквенная запись a изображает *любое* число, в частности 5 или $\frac{7}{12}$, или $\sqrt{3}$ и т. д.

Когда под буквой a понимается число 5, мы пишем

$$a=5.$$

Аналогично, когда под знаком $f(x)$ понимается функция $\lg x$, пишут

$$f(x)=\lg x. \tag{4}$$

Когда под знаком $f(x)$ понимается функция $\sqrt{x}$, пишут

$$f(x)=\sqrt{x} \tag{5}$$

и т. д.

Точно так же символ $f(4)$ обозначает $\lg 4$, если под знаком $f(x)$ понимается функция $\lg x$. Тот же символ обозначает $\sqrt{4}$, если под знаком $f(x)$ понимается функция $\sqrt{x}$.

Пример 1. Пусть $f(x)=\lg \operatorname{tg} x$. Найти значения

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right),\ f\left(\frac{\pi}{4}\right),\ f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Так как под знаком $f(x)$ понимается функция $\lg \operatorname{tg} x$, то символ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ обозначает число

$$\lg \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\approx -0{,}2386.$$

Точно так же

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lg \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=0;$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lg \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\approx 0{,}2386.$$

Пример 2. Пусть $f(x)=1+\sqrt{x^2+16}$. Найти

$$f(0),\ f(2),\ f(3).$$

Решение.

$$f(0)=1+\sqrt{0^2+16}=5;$$
$$f(2)=1+\sqrt{2^2+16}=1+\sqrt{20}=1+2\sqrt{5};$$
$$f(3)=1+\sqrt{3^2+16}=6.$$

Пример 3. Пусть $F(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}$. Найти

$$F(0),\ F\left(\frac{\pi}{4}\right),\ F\left(\frac{\pi}{2}\right),\ F(\pi).$$

Ответ.

$$F(0)=1,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3},\ F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},\ F(\pi)=1.$$

Пример 4. Запись

$$F(x)=\varphi(x)+f(x) \tag{6}$$

означает, что функция $F(x)$ есть сумма функции $\varphi(x)$ и функции $f(x)$.

Если будет известно, что

$$\varphi(x) = \lg x \text{ и } f(x) = 2x^3,$$

то можно будет написать, что

$$F(x) = \lg x + 2x^3.$$

Замечание 1. В формуле (6) две функции, входящие в правую часть, обозначены различными буквами (φ и f), поэтому эти две функции могут быть различными (хотя могут быть и одинаковыми). Если же мы напишем формулу

$$F(x) = f(x) + f(x), \tag{7}$$

то она будет означать, что оба члена правой части одинаковы. Таким образом, формула (7) есть частный случай формулы (6), подобно тому как равенство $a = b + b$ есть частный случай равенства $a = b + c$.

Замечание 2. Разумеется, как аргумент, так и функцию можно обозначать любыми буквами. Но при этом надо иметь в виду, что совместная запись вида

$$y = f(x), \tag{8}$$

$$z = f(t) \tag{9}$$

означает, что величина y находится *в такой же* зависимости от x, в какой z находится от t. Точнее говоря, если аргументам x и t дать одинаковые значения, то функции y и z тоже будут иметь одинаковые значения.

Пример 5. Если в формуле (8) положить $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, то в формуле (9), рассматриваемой совместно с (8), надо положить $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$.

Пример 6. Если $F(\alpha) = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$, то $F(\beta) = 1 - \operatorname{tg}^2 \beta$, $F(\gamma) = 1 - \operatorname{tg}^2 \gamma$ и т. д.

Пример 7. Если $f(x) = 4$ (т. е. если при любом значении аргумента функция имеет одно и то же значение 4; см. замечание 5 § 13), то $f(u) = 4$, $f(v) = 4$ и т. д.

§ 16а. Задачи к § 16

1. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

2. Пусть $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Убедиться в том, что $F(-1) = F(3)$. Что больше: $F(0)$ или $F(1)$?

3. Пусть $f(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}$. Написать выражение для $f(y)$. Вычислить $f(\sqrt{3})$.

4. Пусть $\varphi(u) = u^2$. Вычислить $\dfrac{\varphi(3) - \varphi(2)}{\varphi(3) + \varphi(2)}$.

5. Пусть $\varphi(u) = u^2$. Вычислить $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$.

6. Пусть $f(x) = x^2+1$. Написать выражение для $f(x+2)$.

7. Пусть $f(x) = 2^x$. Вычислить $\dfrac{f(a+3)}{f(a)}$.

8. Пусть $f(x) = x^3$. Написать выражение для $f(x+h)$.

9. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Написать выражения для $f(t)$, $f(t-1)$.

10. Вычислить выражение $\dfrac{f(a)-f(b)}{1+f(a)\cdot f(b)}$ при условии, что $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

11. Та же задача при условии $f(x) = \operatorname{tg} x$.

12. Пусть $f(x) = x-1$, $F(x) = x+1$. Написать выражения:

а) $\dfrac{F(x)+f(x)}{F(x)-f(x)}$,

б) $\dfrac{F(x)+f(y)}{F(x)\cdot f(y)}$,

в) $\dfrac{F(x)+f(y)}{F(xy)}$.

§ 17. Однозначные и многозначные функции

Согласно определению понятия функции (§ 13) каждому значению, которое способен принимать аргумент x, соответствует *одно* определенное значение функции. Однако в некоторых случаях оказывается целесообразным обобщить понятие функции, допуская, чтобы данному значению аргумента соответствовало не одно, а два или большее количество значений функции (и даже бесконечное множество значений).

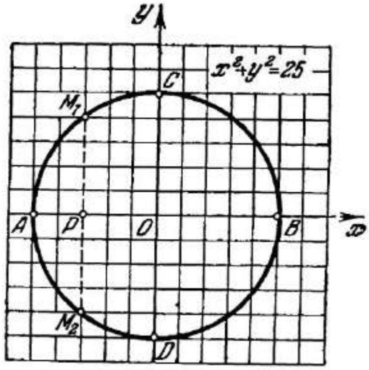


Рис. 21.

Пример 1. Пусть переменные величины x, y связаны уравнением

$$x^2+y^2=25. \tag{1}$$

Тогда величина x может принимать любое значение, заключенное между -5 и $+5$, и каждому такому значению соответствуют в силу уравнения (1) *два* значения величины y; например, значению $x=-3$ (OP на рис. 21) соответствуют значения $y=4$ и $y=-4$ (PM_1 и PM_2 на рис. 21). Вообще, каждому значению, которое способна принимать переменная x, соответствуют два значения переменной y:

$$y=\sqrt{25-x^2} \tag{2}$$

и

$$y = -\sqrt{25 - x^2}. \tag{3}$$

Формула (2), рассматриваемая сама по себе, определяет функцию, графиком которой служит полуокружность ACB; формула (3), рассматриваемая сама по себе, определяет функцию, изображаемую полуокружностью ADB.

Замечание. Кроме двух упомянутых функций, формула (1) включает в себя множество других функций, но их обычно не принимают в расчет по той причине, что их графические изображения лишены плавности. Так, например, функция, заданная системой формул

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{25 - x^2} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ y &= -\sqrt{25 - x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению (1), но ее график состоит из двух отдельных, оторванных друг от друга дуг $\smile{AC}$ и $\smile{DB}$ (дуга $\smile{DB}$ лишена точки D).

Определение. Если каждому из значений, которые способен принимать аргумент, соответствует только одно значение функции, то функция называется *однозначной*; если два или большее количество, то *многозначной* (*двузначной, трехзначной* и т. д.).

В примере 1 величина y есть двузначная функция аргумента x. В равной мере величина x есть двузначная функция аргумента y.

Замечание 2. *Если, говоря о функции, не упоминают о том, что она многозначна, то подразумевается, что функция однозначна.*

Пример 2. Пусть h есть высота тела, брошенного вертикально вверх, а t — время, протекшее с момента бросания. Тогда каждому значению, которое способна принять величина h, соответствуют два значения величины t: одно дает момент, когда тело достигает высоты h при подъеме; другое — момент, когда тело проходит через ту же точку при спуске. Значит, t есть двузначная функция аргумента h.

В предположении, что тело движется в пустоте, величины h и t связаны формулой

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{5}$$

Из нее следует, что

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \tag{6}$$

Эта формула выражает величину t как двузначную функцию от аргумента h.

§ 18. Возрастающие и убывающие (монотонные) функции

Определение 1. Функция называется *возрастающей* в некоторой области изменения аргумента, если *в пределах этой области* большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Так, функция $y=f(x)$, изображенная на рис. 22, *а*, является возрастающей в промежутке (a, b), а также и на любом участке этого промежутка.

Замечание 1. Выраженное в наглядной форме, определение 1 означает, что график AB функции $f(x)$ имеет на некотором участке ab подъем, если идти вправо, или спуск, если идти влево.

Определение 2. Функция называется *убывающей* в некоторой области изменения аргумента, если *в пределах этой области* большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функция $y=\varphi(x)$, изображенная на рис. 22, *б*, является убывающей в промежутке (a, b), а также на любом участке этого промежутка.

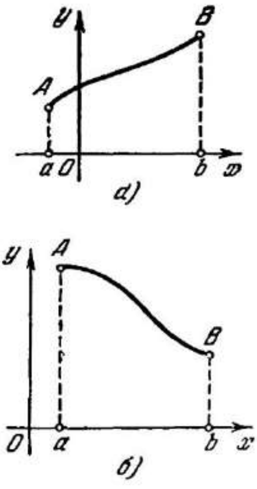


Рис. 22.

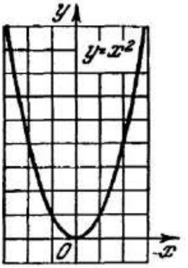


Рис. 23.

Замечание 2. Выраженное в наглядной форме, определение 2 означает, что график AB функции $\varphi(x)$ имеет на некотором участке ab спуск, если идти вправо, или подъем, если идти влево.

Пример 1. Функция $y=x^2$ (рис. 23) является возрастающей в промежутках $(1;\ 2)$, $(0{,}6;\ 3)$, $(0{,}5;\ \infty)$, $(0;\ 3)$. Та же функция является убывающей в промежутках $(-4;\ -1)$, $(-\infty;\ -3)$, $(-1;\ 0)$.

В промежутке $(-2;\ 2)$ функция $y=x^2$ *не является ни возрастающей, ни убывающей*. Равным образом эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей в промежутках $(-2;\ 5)$, $(-\infty;\ 0{,}1)$, $(-3;\ 0{,}01)$ и т. д.

Определение 3. Возрастающие и убывающие функции объединяются под общим названием *монотонных* функций.

Пример 2. Функция $y=-\frac{1}{4}x^3$ (рис. 24) является монотонной в любом промежутке изменения аргумента, так как эта функция убывающая в промежутке $(-\infty,\ \infty)$.

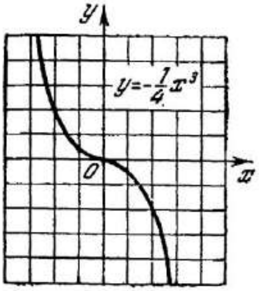


Рис. 24.

Пример 3. Функция $y=x^2$ (рис. 23) не является монотонной в промежутке $(-\infty,\ \infty)$, но она монотонна в промежутке $(1;\ 3)$, где она является возрастающей, в промежутке $\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$, где она является убывающей, в промежутке $(-\infty,\ -1)$, где она тоже является убывающей, и т. д.

Замечание 3. Если функция $f(x)$ не является монотонной в некоторой области изменения ее аргумента, то бывает полезно разбить эту область на такие части, чтобы в каждой из них функция $f(x)$ была монотонна.

Пример 4. Функция $y=x^2$ имеет областью существования весь бесконечный промежуток $(-\infty,\ \infty)$, но она не монотонна в этом промежутке. Но если разбить промежуток $(-\infty,\ \infty)$ на два промежутка $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ \infty)$, то в каждом из них функция $y=x^2$ будет монотонна: в первом промежутке она убывающая, во втором — возрастающая.

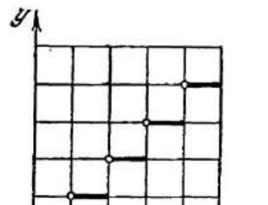


Рис. 25.

Замечание 4. Есть такие функции, для которых вышеуказанное разбиение невыполнимо. Пусть, например, функция $y=f(x)$ есть целая часть числа x (§ 13, пример 2). Тогда *ни в каком промежутке* изменения аргумента x функция $f(x)$ не является монотонной (рис. 25).

Однако в большинстве практически важных случаев из области изменения аргумента удается выделить такую часть, в которой рассматриваемая функция монотонна.

Пример 5. Функция $y=\sin x$ (рис. 26) определена в промежутке $(-\infty,\ \infty)$, но не монотонна в этом промежутке. Однако она монотонна в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, где она возрастает, (соответствующая часть графика изображена на рис. 26 жирной линией AB). Разумеется, функция $y=\sin x$ монотонна и в любом промежутке, составляющем часть промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Данная функция монотонна также и в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, где она убывает (дуга BD на рис. 26), и в промежутке $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ и т. д.

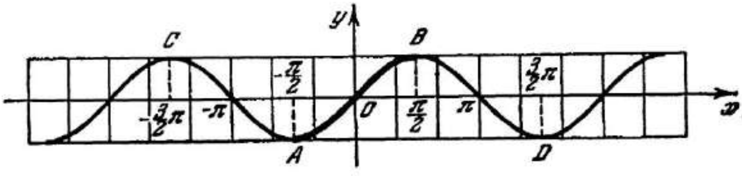


Рис. 26.

Таким образом, любой промежуток изменения x, в котором функция $y=\sin x$ не является монотонной, можно разбить на такие части, где эта функция монотонна.

§ 19. Обратная функция

Пусть дана функция

$$y=f(x), \tag{1}$$

определенная в промежутке (a, b) (рис. 27, a). Пусть при этом значения, принимаемые функцией $f(x)$, заполняют целиком некоторый промежуток (c, d).

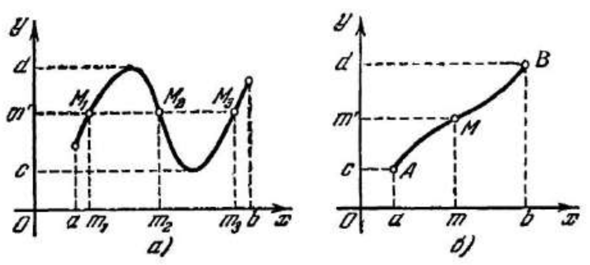


Рис. 27.

Зададим величине y какое-либо значение, принадлежащее промежутку (c, d), например, значение $y=Om'$. Ему может соответствовать не одно, а многие значения величины x (на рис. 27, a

значения Om_1, Om_2, Om_3). Однако если данная функция $f(x)$ возрастающая (рис. 27, *б*), то значению $y = Om'$ не может соответствовать более чем одно значение величины x (это противоречило бы определению возрастающей функции). Значит, если рассматривать y как независимую переменную, то величина x будет некоторой однозначной функцией от y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Функция $\varphi(y)$ называется *обратной* по отношению к функции $f(x)$.

Мы предположили, что функция $f(x)$ возрастающая. В этом случае обратная функция $\varphi(y)$ тоже является возрастающей (это непосредственно следует из определения возрастающей функции). Если теперь мы предположим, что функция $f(x)$ является убывающей, то таким же образом придем к заключению, что обратная функция опять-таки будет однозначной, но на этот раз убывающей.

Если функция $f(x)$, рассматриваемая в промежутке (a, b), не является монотонной, то однозначной обратной функции для нее не существует. Однако во многих случаях удается разбить промежуток (a, b) на отдельные участки таким образом, чтобы на каждом из них функция $f(x)$ была монотонной. Если теперь мы будем рассматривать функцию $f(x)$ на одном из этих участков, то обратная функция $\varphi(y)$ окажется однозначной.

Пример 1. Функция

$$y = -\frac{1}{4}x^3 \tag{3}$$

(рис. 24 на стр. 50) является убывающей в бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$; этому промежутку изменения величины x соответствует тоже бесконечный промежуток $(-\infty, \infty)$ изменения y. Если теперь мы будем рассматривать величину y как независимую переменную, изменяющуюся в промежутке $(-\infty, \infty)$, то в силу формулы (3) величина x будет однозначной, и притом убывающей функцией от y; она выражается формулой

$$x = -\sqrt[3]{4y}.$$

Таким образом, функция $-\sqrt[3]{4y}$ является обратной для функции $-\frac{1}{4}x^3$. С тем же правом можно сказать, что функция $-\frac{1}{4}x^3$ является обратной для функции $-\sqrt[3]{4y}$.

Пример 2. Функция

$$y = x^2 \tag{4}$$

(рис. 23 на стр. 49) определена в промежутке $(-\infty, \infty)$, но не монотонна в этом промежутке (т. е. не является ни возрастающей, ни убывающей). Промежутку $(-\infty, \infty)$ изменения x соответствует промежуток $(0, \infty)$ изменения величины y. Но теперь, в отличие от примера 1, каждое значение y, взятое в промежутке $(0, \infty)$, соответствует в силу формулы (4) не одному значению x, а *двум*. Так, значение $y=9$ соответствует и значению $x=3$, и значению $x=-3$. Иными словами, обратная функция является двузначной. Она выражается формулой

$$x=\pm\sqrt{y} \qquad (0\leqslant y<\infty). \tag{5}$$

Пример 3. Разобьем промежуток $(-\infty, \infty)$, в котором изменяется аргумент функции $y=x^2$, на два промежутка $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. В каждом из них функция монотонна (ср. пример 4 § 18) и, значит, обратная функция однозначна. Будем изменять переменную x, например, в промежутке $(-\infty, 0)$, т. е. рассмотрим функцию

$$y=x^2 \qquad (-\infty<x\leqslant 0). \tag{6}$$

Она является убывающей; величина y изменяется (как и в примере 2), в промежутке $(0, \infty)$. Функция, обратная для (6), однозначна, и тоже является убывающей. Она выражается формулой

$$x=-\sqrt{y} \qquad (0\leqslant y<\infty). \tag{7}$$

Пример 4. Рассмотрим функцию

$$y=E(x) \qquad (0\leqslant x<\infty), \tag{8}$$

где $E(x)$ есть целая часть числа x (рис. 25 на стр. 50). Функция (8) немонотонна, и никаким разбиением промежутка $(0, \infty)$ на частичные промежутки нельзя добиться монотонности.

Когда x изменяется в промежутке $(0, \infty)$, величина y способна принимать любое целое положительное, а также и нулевое значение. Зададим ей одно из таких значений, скажем $y=3$. В силу соотношения (8) это значение соответствует *бесчисленному множеству* значений величины x, например $x=3$, $x=3\frac{5}{7}$, $x=\sqrt{10}$, $x=\pi$ и т. д., так что при $y=3$ значение x остается неопределенным. Эта неопределенность не устраняется и в том случае, если из промежутка $(0, \infty)$ изменения x выделить любой (сколь угодно короткий) промежуток.

Рассмотренный пример показывает, что немонотонная функция может и не иметь обратной. Однако в дальнейшем нам не придется иметь дело с подобными случаями.

Обозначения. Функцию $x=\varphi(y)$, обратную для $y=f(x)$, в целях сохранения стандартных обозначений часто записывают в виде

$$y=\varphi(x),$$

т. е. меняют ролями буквы x и y.

Пример 5. Для функции

$$y=x^3 \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{9}$$

обратной является функция

$$x=\sqrt[3]{y} \qquad (-\infty<y<\infty), \tag{10}$$

но вместо формулы (10) пишут

$$y=\sqrt[3]{x} \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{10a}$$

и говорят, что функция $y=\sqrt[3]{x}$ является обратной для функции $y=x^3$.

Пример 6. Для функции

$$y=x^2 \qquad (-\infty<x\leqslant 0)$$

обратной является функция

$$y=-\sqrt{x} \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

График обратной функции. Если *не менять* ролями буквы x и y, то график функции $y=f(x)$ служит одновременно графиком обратной функции $x=\varphi(y)$.

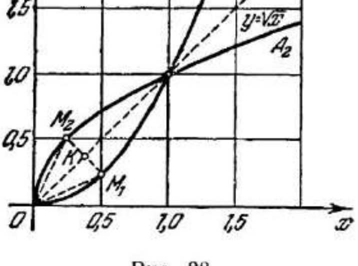


Рис. 28.

Если же ввести стандартное обозначение и для обратной функции (а систему координат сохранить прежнюю), то *графики исходной и обратной функций оказываются симметричными относительно прямой* $y=x$. Это видно на рис. 28, где изображены графики взаимно обратных функций

$$y=x^2 \qquad (x\geqslant 0)$$

и

$$y=\sqrt{x} \qquad (x\geqslant 0).$$

Точка M_1 линии $y=x^2$ имеет координаты

$$x=0,5, \quad y=0,25. \tag{11}$$

Если поменять ролями буквы x и y, то равенства (11) заменятся равенствами

$$x=0,25, \qquad y=0,5, \tag{11a}$$

и мы получим точку M_2 (0,25; 0,5) графика обратной функции $y=\sqrt{x}$.

Из чертежа видно, что точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y=x$. То же самое можно сказать о любой паре соответственных точек графиков OA_1, OA_2 и, значит, о самих графиках.

Для доказательства достаточно установить, что прямые M_1M_2 и $y=x$ перпендикулярны и что середина отрезка M_1M_2 лежит на прямой $y=x$. Эти несложные выкладки предоставляются читателю.

Буквально те же рассуждения применимы к произвольной функции.

§ 20. Функция от функции (сложная функция)

Величина y называется *функцией от функции*, если она рассматривается как функция от некоторой (вспомогательной) переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, принятой за аргумент:

$$y=f(u), \qquad u=\varphi(x). \tag{1}$$

Тем самым величина y оказывается функцией от x, что можно записать так:

$$y=f[\varphi(x)]. \tag{2}$$

Пример 1. Пусть

$$y=\lg u \quad \text{и} \quad u=\sin x. \tag{1a}$$

Тогда y есть (логарифмическая) функция от переменной u, которая в свою очередь является (тригонометрической) функцией аргумента x. Тем самым y оказывается функцией от x, она выражается формулой

$$y=\lg\sin x. \tag{2a}$$

Пример 2. Если

$$y=u^3 \quad \text{и} \quad u=\sqrt[3]{2x+1}, \tag{1б}$$

то y есть функция от функции (аргумента x); зависимость y от x выражается формулой

$$y=(\sqrt[3]{2x+1})^3,$$

то есть

$$y=2x+1. \tag{2б}$$

Вместо термина *функция от функции* часто употребляется термин *сложная функция*.

Замечание 1. Подразделение функций на «сложные» и «несложные» относится не к самим функциям, а только к способам их рассмотрения.

Замечание 2. Термин сложная функция неудачен по той причине, что слово «сложный» в обычной речи имеет совершенно иной смысл: функция, именуемая «сложной», может быть совсем несложной в обычном смысле. Так, в примере 2 «сложная» функция (2б) совсем не сложнее, чем «несложные» функции (1б).

§ 20а. Задачи и вопросы к §§ 17—20

1. Пусть h — высота тела, брошенного вертикально вверх, t — время, протекшее с момента бросания. Спрашивается, является ли h монотонной, функцией от t в промежутке времени $(0, T)$, где T — момент падения на землю.

2. Тот же вопрос для промежутка $\left(0, \frac{3}{4}T\right)$.

3. Тот же вопрос для промежутка $\left(0, \frac{3}{7}T\right)$.

4. Из проволоки длиной $2l$ делается прямоугольный контур, одна из сторон которого имеет длину x. Является ли площадь контура S монотонной функцией от x?

5. В условиях задачи 4 является ли функция, обратная функции S, однозначной? В какой области изменяется аргумент обратной функции? Выразить прямую и обратную функции аналитически.

6. Может ли функция $f(x)$ быть монотонной в промежутке (a, b), если $f(a) = f(b)$?

7. Дана функция

$$y = x^2 - 4x \qquad (2 \leqslant x \leqslant 4).$$

Построить ее график и график обратной функции. Выразить обратную функцию аналитически. Однозначна ли обратная функция? Какова область изменения ее аргумента?

8. Те же вопросы для функции

$$y = x^2 - 4x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

Монотонна ли эта функция в указанном промежутке? Если да, то убывает ли она в этом промежутке или возрастает? Если нет, нельзя ли разбить промежуток $0 \leqslant x \leqslant 2$ на два промежутка так, чтобы в каждом из них функция $y = x^2 - 4x$ была монотонной?

9. Те же вопросы для функции

$$y = x^2 - 4x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4).$$

10. Начертить графики функции

$$y = \sin x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

и обратной функции. Является ли обратная функция однозначной? Выразить ее аналитически.

11. Та же задача для функции

$$y = \cos x \qquad \left(-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}\right).$$

Для каждой из нижеследующих функций найти аналитическое выражение обратной функции (с указанием области изменения аргумента [1])).

12. $y=\frac{1}{2}x-1$. **13.** $y=x^5$.

14. $y=3^x$. **15.** $y=1-\sqrt{x^2-1}$.

16. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

17. Даны функции $y=(4-u)^2$, $u=2x+3$. Написать формулу, выражающую y как функцию от x.

18. Даны функции $f(u)=1-u^2$, $\varphi(x)=1-2x$. Выразить формулой функцию $f[\varphi(x)]$. Какова область существования функции $f[\varphi(x)]$?

19. Та же задача для функций $f(u)=1-2u$, $\varphi(x)=1-x^2$.

20. Даны функции $f(x)=x^2-1$, $\varphi(x)=x-1$.

Каковы области существования функций

$$f[\varphi(x)],\quad \varphi[f(x)],\quad \varphi[\varphi(x)],\quad f[f(x)]?$$

Выразить эти функции формулами.

21. При условиях предыдущей задачи вычислить значения

$$f[\varphi(0)],\quad f[\varphi(1)],\quad f[\varphi(2)],\quad f[\varphi(3)],\quad f[\varphi(4)].$$

22. Сложная функция от аргумента x задана формулами $y=\frac{u^2}{2}$, $u=\sqrt{x}$.

Какова область изменения аргумента этой сложной функции? Какой формулой выражается зависимость y от x?

23. Даны функции $f(x)=10^x$ и $\varphi(x)=\lg x$. Выразить аналитически функции $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, указав области их существования.

24. Даны функции $f(x)=x^3$ и $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$.

Выразить аналитически функции $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$.

25. Пусть $f(x)$ есть функция, возрастающая в промежутке $(-\infty, \infty)$ и изменяющаяся в промежутке $(-1; 1)$. Пусть $\varphi(x)$ — функция, обратная для $f(x)$. Спрашивается, каков промежуток изменения ее аргумента и как выражаются аналитически функции $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$?

§ 21. Некоторые важнейшие функции

1. Линейная функция. Так называют функцию вида

$$y=ax+b, \tag{1}$$

где a и b — постоянные величины.

Замечание 1. Термин «линейная» есть сокращение названия «прямолинейная»; это название объясняется тем, что графиком функции (1) является (рис. 29) прямая линия с угловым коэффициентом $a\,(=\operatorname{tg}\alpha)$, отсекающая на оси Oy отрезок $OK=b$.

Замечание 2. В случае, когда $a\neq 0$, линейная функция $ax+b$ есть *многочлен первой степени;* этот многочлен может, в частности, оказаться одночленом ax (при $b=0$). В случае, когда $a=0$,

---

[1]) Область изменения аргумента прямой функции не обозначена; значит (§ 15), подразумевается, что область изменения аргумента совпадает с областью существования функции.

линейная функция принимает вид

$$y=b, \tag{2}$$

т. е. является постоянной величиной; прямая линия, являющаяся графиком (рис. 30) функции (2), параллельна оси Ox. В этом случае линейная функция не является многочленом первой степени[1]).

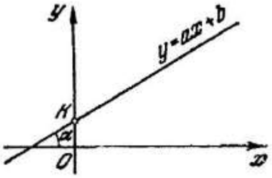


Рис. 29.

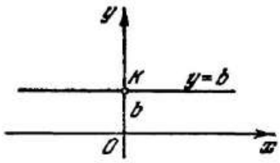


Рис. 30.

Область существования линейной функции есть промежуток $(-\infty, \infty)$, т. е. вся числовая ось.

2. Прямая пропорциональность. При $b=0$ линейная функция имеет вид

$$y=ax \tag{3}$$

и графически представляется (рис. 31) прямой, проходящей через начало O. В случае, когда $a\neq 0$, функция (3) выражает пропорциональную зависимость между x и y[2]), величина a называется *коэффициентом пропорциональности*.

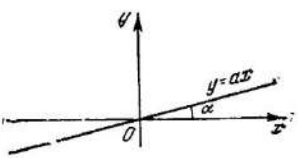


Рис. 31.

В случае, когда $a=0$, величина y постоянна (равна нулю) и график функции (3) совпадает с осью абсцисс.

3. Обратная пропорциональность. Она выражается формулой

$$y=\frac{k}{x}, \tag{4}$$

где k — постоянная величина, не равная нулю. Область сущест-

[1]) Можно сказать, что b есть многочлен *нулевой* степени.

[2]) Величины x, y мы называем пропорциональными, если при изменении одной из них другая изменяется в том же отношении. При таком понимании термина «пропорциональность» формула (3) при $a=0$ *не выражает* пропорциональной зависимости. Можно определить пропорциональность по-иному, а именно принять формулу (3) за *определение* пропорциональности. Тогда величину y надо считать пропорциональной величине x также и в случае $a=0$; однако величину x в этом случае нельзя будет считать пропорциональной величине y.

вования функции (4) — промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точки $x=0$. График функции (рис. 32, *а*; *б*) есть (1, § 60) равносторонняя гипербола, асимптоты которой совпадают с осями координат. Полуоси ее

$$OA = OB = \sqrt{2|k|}. \tag{5}$$

Вершины A, B лежат на прямой $y=x$ (рис. 32, *а*), если $k>0$, и на прямой $y=-x$ (рис. 32, *б*), если $k<0$.

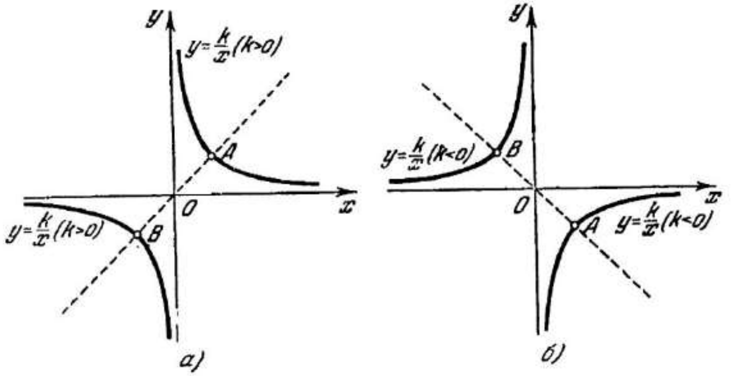


Рис. 32.

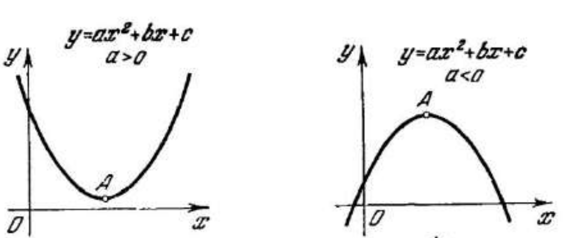


Рис. 33.

Обе координаты каждой из вершин по абсолютному значению равны $\sqrt{|k|}$:

$$|x_A| = |x_B| = |y_A| = |y_B| = \sqrt{|k|}. \tag{6}$$

4. Квадратичная функция. Так называют функцию вида

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{7}$$

где a, b, c — постоянные, причем $a \neq 0$ [при $a=0$ формула (7) представляет линейную функцию].

Область существования — промежуток $(-\infty, \infty)$. График функции (рис. 33, *а*, *б*) есть (I, § 66) парабола, ось которой параллельна оси Oy, а вершина лежит в точке $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Парабола (7) обращена вогнутостью вверх или вниз, смотря по тому, положительна или отрицательна постоянная a. Параметр p параболы в обоих случаях равен $\frac{1}{2|a|}$.

Если $b=c=0$, то вершина параболы ($y=ax^2$) находится в начале координаты. Раствор параболы тем больше, чем меньше абсолютное значение коэффициента a.

§ 22. Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида

$$y=x^{\alpha},$$

где α — любая постоянная величина.

В частности, при $\alpha=0$, $\alpha=1$, $\alpha=2$, $\alpha=-1$ мы получаем функции

$$y=1,\ y=x,\ y=x^2,\ y=\frac{1}{x},$$

уже рассмотренные в § 21.

Функцию вида

$$y=ax^{\alpha},$$

где a и α — постоянные, тоже называют степенной.

П р и м е р ы степенных функций:

$$y=\sqrt{x}\ \left(=x^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$y=12x^5,$$
$$y=\frac{3}{x^2}\ (=3x^{-2}),$$
$$y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\ \left(=ax^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Области существования степенных функций различны при различных значениях α. Так, для функций

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4 \text{ и т. д.}$$

область существования есть весь промежуток $(-\infty, \infty)$, а для функций

$$y=\frac{1}{x^2},\ y=\frac{1}{x^3},\ y=\frac{1}{x^4} \text{ и т. д.}$$

— промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точки $x=0$.

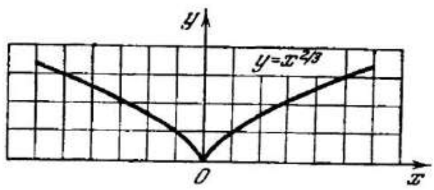


Рис. 34.

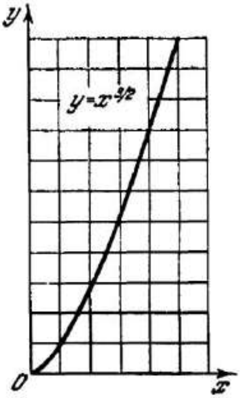


Рис. 35.

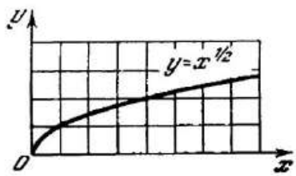


Рис. 36.

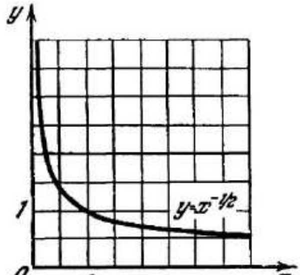


Рис. 37.

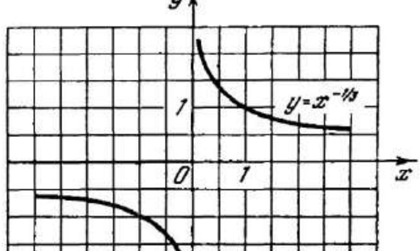


Рис. 38.

Для функции $y=x^{\frac{2}{3}}$ (рис. 34) область существования есть промежуток $(-\infty, \infty)$, а для функции $y=x^{\frac{3}{2}}$ (рис. 35) — промежуток $(0, \infty)$ со включенным концом $x=0$.

Для функции $y=x^{\frac{1}{2}}$ (рис. 36) область существования есть промежуток $(0; \infty)$ со включенным концом $x=0$, а для функции $y=x^{-\frac{1}{2}}$ (рис. 37) — промежуток $(0; \infty)$, лишенный конца $x=0$.

Для функции $y=x^{-\frac{1}{3}}$ (рис. 38) область существования есть промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точки $x=0$.

К одному из четырех выше рассмотренных видов принадлежит область существования любой степенной функции. Таким образом, область существования степенной функции всегда содержит *все положительные значения аргумента*.

Если оставить в стороне случай $\alpha=0$ (т. е. функцию $y=1$), то степенные функции $y=x^{\alpha}$ можно подразделить на два типа:

I. $\alpha>0$;

II. $\alpha<0$.

Степенные функции первого типа $\left(\text{при } \alpha=0{,}1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ 3;\ 4;\ 10\right)$ сопоставлены графически на рис. 39. Здесь учтены лишь положительные и нулевое значения аргумента, так как при отрицательных значениях x не все степенные функции типа I имеют смысл.

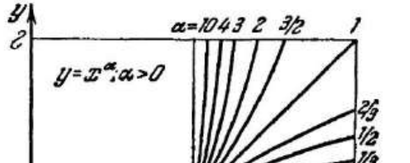


Рис. 39.

Отметим, что графики всех функций типа I исходят из начала O и проходят через точку $(1; 1)$. В их число входит луч OA — биссектриса первого координатного угла (график функции $y=x$). Остальные графики попарно симметричны относительно OA, что и понятно, так как они изображают взаимно обратные функции (таковы, например, функции $y=x^{\frac{3}{2}}$ и $y=x^{\frac{2}{3}}$).

При $\alpha>1$ график располагается сначала (при $x<1$) ниже биссектрисы OA, а потом (при $x>1$) выше нее; при $\alpha<1$ наоборот.

Графики функций $y=ax^{\alpha}$ $(a>0)$ получаются из графиков соответствующих функций $y=x^{\alpha}$ простым изменением масштаба; иными словами, при данном значении α все линии $y=ax^{\alpha}$ подобны друг другу (в I, § 65 подробно рассмотрен случай параболы $y=ax^2$).

По аналогии с линией $y=ax^2$ графики степенных функций типа I называются *параболами* (степени α). В частности, линия $y=ax^3$ называется *кубической параболой*, а линия $y=\pm ax^{\frac{3}{2}}$ (рис. 40) — *полукубической параболой*.

Степенные функции второго типа $\left(\text{при } \alpha=-0{,}1;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ -1;\ -2;\ -3;\ -10\right)$ сопоставлены графически на рис. 41. Здесь учтены лишь положительные значения аргумента; при $x<0$ не все степенные функции типа II имеют смысл, а при $x=0$ не имеет смысла ни одна из них.

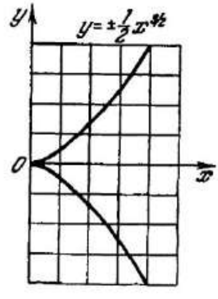


Рис. 40.

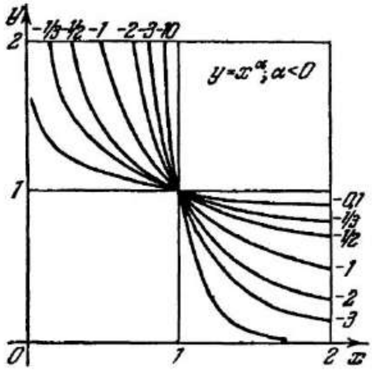


Рис. 41.

Графики всех функций типа II проходят через точку (1; 1). В число их входит равносторонняя гипербола (график функции $y=x^{-1}$).

При $\alpha<-1$ график располагается сначала (при $x<1$) выше равносторонней гиперболы, а потом (при $x>1$) ниже нее; при $\alpha>-1$ наоборот.

Как и для функций типа I, график функции $y=ax^\alpha$ $(a>0)$ типа II получается из графика соответствующей функции $y=x^\alpha$ простым изменением масштаба, т. е. при данном значении α линии $y=ax^\alpha$ подобны друг другу (в I, § 60 подробно рассмотрен случай равносторонней гиперболы $y=ax^{-1}$).

По сходству с линией $y=ax^{-1}$ графики степенных функций типа I называются *гиперболами* (степени α).

§ 22а. Задачи и вопросы к §§ 21—22

1. Известно, что $f(x)$ есть линейная функция и что $f(9)=3$, $f(3)=7$. Выразить функцию $f(x)$ аналитически. Построить график.

2. В условиях задачи 1 найти значения $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$, $f(12)$: а) с помощью вычисления, б) по графику (с точностью до 0,1).

3. Найти графически значения $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$, $f(-4)$ линейной функции $f(x)$, зная, что $f(-5)=4$, а $f(5)=11$. Проверить вычислением.

4. Составить общее выражение линейной функции $f(x)$, считая известными значения x_1, x_2, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

5. Начертить в промежутке $-5 \leqslant x \leqslant 5$ графики функций: $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$, $y=x^2-x$, $y=0{,}2x^2-4{,}5x+2$.

6. Написать выражение квадратичной функции $f(x)$, зная, что $f(2)=3{,}2$, $f(4)=2{,}3$, $f(8)=2{,}9$.

7. Построить графики функций

$$y=\frac{1}{3}x^3,\ y=\frac{1}{4}x^3,\ y=\frac{1}{10}x^3$$

в промежутке $(-3;\ 3)$.

8. Построить графики функций

$$y=-\frac{1}{3}x^3,\quad y=-\frac{1}{4}x^3,\quad y=-\frac{1}{10}x^3$$

в промежутке $(-3;\ 3)$.

9. Построить графики функций

$$y=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}},\ y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}},\ y=\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$$

в промежутке $(0,10)$.

10. Построить графики функций, обратных функциям задачи 9.

11. Решить графически уравнение $x^3-\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}=0$.

Указание. Представим данное уравнение в виде $x^3=\frac{7}{4}x-\frac{3}{4}$ и введем вспомогательное неизвестное y с помощью формулы $y=x^3$. Получим систему уравнений

$$y=x^3,\quad y=\frac{7}{4}x-\frac{3}{4}.$$

Построим соответствующие графики и прочтем абсциссы их общих точек (если таковые будут). (Для бо́льшей точности лучше взять на осях Ox и Oy неодинаковые масштабы.)

12. Решить графически (с точностью до 0,1) уравнение

$$x^3+x-4=0.$$

§ 23. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида

$$y=a^x,$$

где a (*основание* показательной функции) — какое-либо постоянное положительное[1]) число, отличное от единицы (при $a=1$ функция a^x есть постоянная, равная единице).

[1]) Число a не берется отрицательным по той причине, что при $a<0$ выражение a^x лишено смысла для таких дробных значений аргумента, как $x=\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$ и т. п., не говоря уже об иррациональных значениях x.

Примеры показательных функций:

$$y=10^x, \quad y=2^x, \quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad y=\pi^x.$$

Область существования любой степенной функции — промежуток $(-\infty, \infty)$.

Графики показательных функций (с основаниями $a=2$, $1/2$, 3, $1/3$, 10, $1/10$) изображены на рис. 42. Все они проходят через точку $(0; 1)$. Графики функций $y=m^x$ и $\left(\frac{1}{m}\right)^x$ симметричны друг другу относительно оси ординат; таковы, например, графики $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Показательные функции можно подразделить на два типа:

I. $a>1$.

II. $a<1$.

Функции обоих типов монотонны во всем промежутке $(-\infty, \infty)$, но функции типа I возрастающие, а функции типа II убывающие. Графики показательных функций обоих типов имеют асимптотой ось Ox, но в первом случае сближение с осью Ox происходит при удалении влево, а во втором — при удалении вправо.

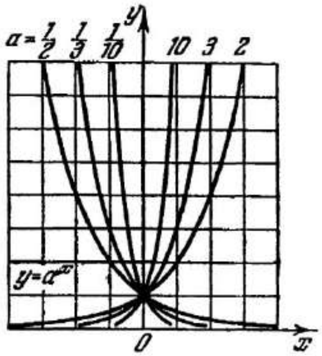


Рис. 42.

Каждая показательная функция принимает только положительные значения и способна получить *любое* положительное значение.

§ 24. Логарифмическая функция

Так как показательная функция $y=a^x$ монотонна, то для нее существует обратная (однозначная) функция. Последняя называется *логарифмической*:

$$y=\log_a x. \tag{1}$$

Здесь a (*основание* логарифмической функции) — произвольное положительное число, отличное от единицы.

Область существования любой логарифмической функции — промежуток $(0, \infty)$, лишенный точки $x=0$.

Графики логарифмических функций (при основании $a=2$, $1/2$, 3, $1/3$, 10, $1/10$) изображены на рис. 43. Все они проходят через точку $(1; 0)$ и имеют асимптотой ось Oy. Графики функций

$y=\log_a x$ и $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ симметричны относительно оси Ox. Линии, являющиеся графиками логарифмических функций (а также графики показательных функций), называются *логарифмиками.*

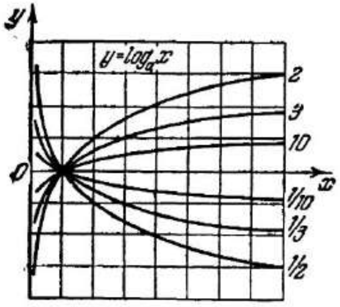


Рис. 43.

Все логарифмические функции монотонны в промежутке $(0, \infty)$: при $a>1$ логарифмическая функция возрастающая, а при $a<1$ убывающая.

Важно отметить, что *график каждой логарифмической функции получается из графика каждой другой пропорциональным изменением ординаты.* Это следует из того, что логарифмы всех чисел при одном основании получаются из логарифмов тех же чисел при другом основании умножением на постоянное число (*модуль перехода* от одной системы логарифмов к другой):

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \tag{2}$$

или

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{3}$$

§ 24а. Задачи и вопросы к §§ 23—24

1. Построить на одном чертеже графики функций

$$y=2^x,\ y=2^{-x},\ y=\log_2 x,\ y=-\log_2 x.$$

Нет ли среди этих функций взаимно обратных?

2. Пользуясь таблицей логарифмов или счетной линейкой, вычислить $\log_2 5$, $\log_2 6$, $\log_2 7$ с точностью до 0,01.

3. Вычислить $\log_3 4$, $\log_3 5$, $\log_3 6$, $\log_3 7$, $\log_3 8$ с точностью до 0,01.

Решить графически (с точностью до 0,1) следующие уравнения:

4. $2^x=4x$. 5. $2^x=2x$.

6. Решить графически (с точностью до 0,5) уравнение $\log_2 x = \frac{3}{4}x - \frac{11}{8}$.

§ 25. Тригонометрические функции

Под *тригонометрическими функциями* в математическом анализе понимаются функции, определяемые формулами

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x,\ y=\sec x,\ y=\operatorname{cosec} x, \tag{1}$$

где буквой x обозначается некоторое (отвлеченное) *число*, а символами $\sin x$, $\cos x$ и т. д. — синус, косинус и т. д. *угла*, содержащего x радиан.

Замечание 1. Таким образом, в каждой из формул (1) обе буквы x, y обозначают некоторые числа.

Замечание 2. Напомним, что

$$\begin{aligned} &1 \text{ радиан} \approx 57^\circ 18', \\ &1^\circ \qquad\quad \approx 0{,}01745 \text{ радиана.} \end{aligned}$$

Таблицы для перехода от градусной меры угла к радианной и обратно помещены в конце книги (стр. 583—584).

Пример. Найти $\sin 0{,}4$.

Решение. Значение аргумента есть число 0,4. Согласно определению надо взять угол, содержащий 0,4 радиана, т. е. (приблизительно) $57^\circ 17' \cdot 0{,}4 \approx 22^\circ 55'$, и найти синус этого угла. С помощью таблиц получаем

$$\sin 0{,}4 = \sin 0{,}4 \textit{ рад} \approx \sin 22^\circ 55' \approx 0{,}3894. \qquad (2)$$

Пояснение. Согласно определению тригонометрической функции значения ее аргумента — это числа, и каждому из этих чисел ставится в соответствие определенный угол, содержащий столько же единиц измерения угла, сколько единиц в числе. То, что за единицу измерения угла принимается радиан (а не градус или какая-либо другая единица измерения угла), обусловлено практическими соображениями (какими именно, будет объяснено в своем месте).

Принципиально же ничто не мешало бы считать синусом числа x синус угла, содержащего x угловых *градусов* или угловых *минут* и т. д. В первом случае запись $\sin 0{,}4$ означала бы синус угла, содержащего $0{,}4^\circ$, т. е. $24'$, и мы имели бы

$$\sin 0{,}4 = \sin 0{,}4^\circ = \sin 24' \approx 0{,}0070. \qquad (3)$$

Во втором случае

$$\sin 0{,}4 = \sin 0{,}4' = \sin 24'' \approx 0{,}00012 \qquad (4)$$

и т. д.

Таким же образом, исходя из радианного измерения угла, получаем формулу (2)[1].

Область существования. Для функций $y = \sin x$ (рис. 44, сплошная линия) и $y = \cos x$ (рис. 44, пунктирная линия) областью существования служит промежуток $(-\infty, \infty)$.

Для функций $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 45, сплошная линия) и $y = \sec x$ (рис. 46, пунктирная линия) область существования есть промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точек $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ и т. д.

[1]) Разумеется, формулы (2), (3) и (4) несовместны друг с другом. Какую из них считать верной, всецело зависит от того, как определить понятие «синус числа x».

Для функций $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 45, пунктирная линия) и $y = \operatorname{cosec} x$ (рис. 46, сплошная линия) область существования — промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точек 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ и т. д.

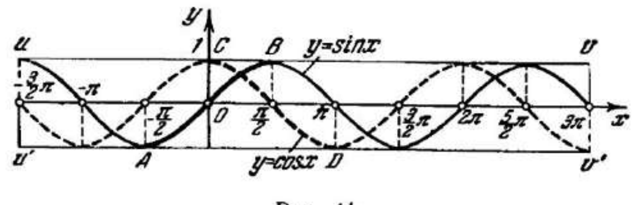


Рис. 44.

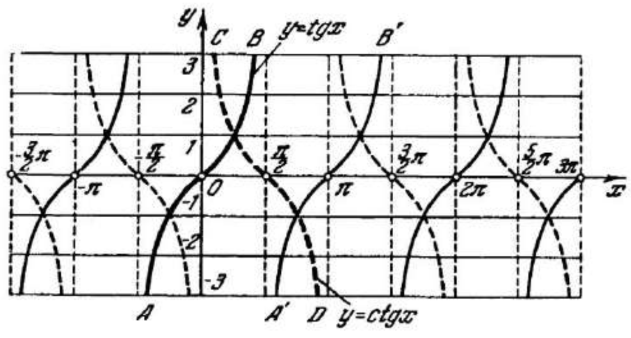


Рис. 45.

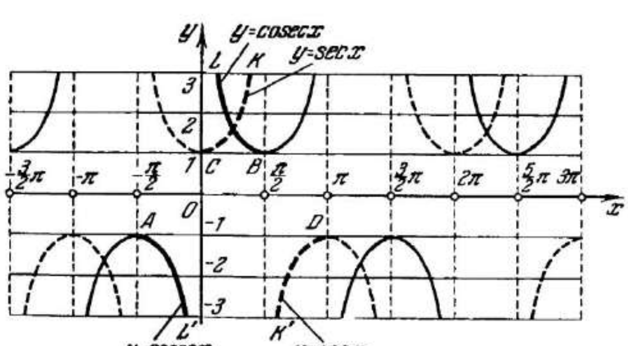


Рис. 46.

Периодичность. *Все тригонометрические функции периодичны, с общим периодом* 2π.

Это значит, что при увеличении всякого значения аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается прежним. Например, при всяком значении x имеем

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \sin(x+4\pi)=\sin x,$$
$$\cos(x-4\pi)=\cos x, \quad \operatorname{tg}(x-2\pi)=\operatorname{tg} x \text{ и т. д.}$$

Функции $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ обладают, кроме того, периодом π; это значит, что значение функции остается неизменным и в том случае, когда аргумент увеличивается на число, кратное π. Например:

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+3\pi)=\operatorname{ctg} x.$$

На графиках периодичность тригонометрических функций проявляется в том, что при смещении вправо или влево на отрезок, кратный 2π, график совмещается сам с собой; для графиков функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ такое совмещение происходит при смещении на всякий отрезок, кратный π.

Синусоида. Линия, изображающая функцию $y=\sin x$ (рис. 44), называется *синусоидой*; линия, изображающая функцию $y=\cos x$ есть та же синусоида, но смещенная вдоль оси абсцисс $\left(\text{влево на расстояние } \frac{\pi}{2} \text{ или вправо на расстояние } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Линию, изображающую функцию $y=\operatorname{tg} x$, иногда называют *тангенсоидой*; линия, изображающая функцию $y=\operatorname{ctg} x$, есть та же тангенсоида, но зеркально отраженная от прямой $x=\frac{\pi}{4}$.

График функции $y=\sec x$ получается из графика функции $y=\operatorname{cosec} x$ смещением вдоль оси абсцисс $\left(\text{влево на } \frac{\pi}{2} \text{ или вправо на } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Асимптоты[1]). График функции $y=\operatorname{tg} x$ состоит из бесчисленного множества ветвей, содержащихся в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ и т. д. Каждая из прямых $x=\pm\frac{\pi}{2}$, $x=\pm\frac{3\pi}{2}$ служит асимптотой для двух ветвей. Так, прямая $x=\frac{\pi}{2}$ является асимптотой для ветвей AB и $A'B'$ (по ветви AB надо двигаться вверх, по ветви $A'B'$ — вниз). Те же прямые являются асимптотами для графика функции $y=\sec x$.

Для графиков $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\operatorname{cosec} x$ асимптотами служат прямые $x=0$, $x=\pm\pi$, $x=\pm 2\pi$ и т. д.

---

[1]) Определение асимптоты дано в I, § 59.

§ 26. Обратные тригонометрические функции

Предварительные замечания. Функция $y = \sin x$, рассматриваемая в замкнутом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 44, дуга AB, выделенная жирной чертой), является монотонной. При этом переменная y способна принимать любое значение в (замкнутом) промежутке $(-1; 1)$. Значит, для рассматриваемой функции существует (§ 19) *однозначная* обратная функция, аргумент которой изменяется в промежутке $(-1, 1)$; сама же обратная функция изменяется в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, значению $y = -1$ соответствует *только одно* значение x, а именно значение $x = -\frac{\pi}{2}$, значению $y = \frac{1}{2}$ соответствует *только одно* значение $x = \frac{\pi}{6}$, при $y = 0$ имеем $x = 0$ и т. д.

Геометрически: всякая горизонтальная прямая, принадлежащая полосе между прямыми uv, $u'v'$ (рис. 44), имеет одну-единственную общую точку с дугой AB синусоиды; горизонтальные прямые, лежащие вне упомянутой полосы, не имеют общих точек с дугой AB.

Дуга AB называется ***главной ветвью*** синусоиды.

Определение 1. Функция, обратная функции $y = \sin x$, рассматриваемой в замкнутом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y = \sin x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \tag{1}$$

называется *арксинусом* (arcsin), так что из соотношения (1) следует, что

$$x = \arcsin y. \tag{2}$$

Область существования функции

$$y = \arcsin x \tag{3}$$

(мы перешли к стандартному обозначению аргумента) есть замкнутый промежуток $(-1; 1)$. Функция (3) возрастает в этом промежутке. График функции дан на рис. 47.

Рассуждая как выше, мы придем к следующему определению.

Определение 2. Функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\text{с исключенными концами } \pm\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

называется ***арктангенсом*** (arctg), так что из соотношения (4) следует, что

$$x = \operatorname{arctg} y.$$

Область существования функции

$$y = \operatorname{arctg} x \tag{5}$$

есть промежуток $(-\infty, \infty)$. Функция (5) возрастает в этом промежутке.

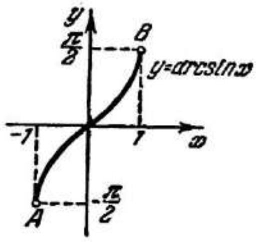


Рис. 47.

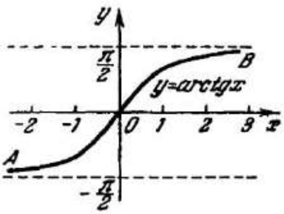


Рис. 48.

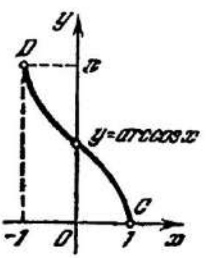


Рис. 49.

Дуга AB тангенсоиды, выделенная на рис. 45 жирной линией, называется ***главной ветвью*** тангенсоиды. На рис. 48 дан график функции (5).

Функция $y = \cos x$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ не монотонна. Поэтому ее рассматривают в промежутке $(0, \pi)$, где она монотонна. В остальном рассуждаем, как выше, и приходим к следующему определению.

Определение 3. Функция, обратная функции $y = \cos x$, рассматриваемой в замкнутом промежутке $(0, \pi)$,

$$y = \cos x \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \tag{6}$$

называется ***арккосинусом*** (arccos).

Область существования функции

$$y = \arccos x \tag{7}$$

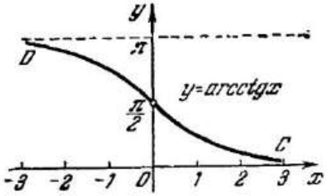


Рис. 50.

(рис. 49) есть замкнутый промежуток $(-1; 1)$. Функция (7) убывает в этом промежутке.

Аналогично определяется функция

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

(рис. 50), у которой область существования есть промежуток $(-\infty, \infty)$

и которая убывает в этом промежутке. Но эта функция применяется в математическом анализе редко. Еще реже применяются функции arcsec x, arccosec x. Поэтому на них мы не останавливаемся.

Замечание. Если функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ рассматривать во всем промежутке $(-\infty, \infty)$, то обратные функции будут многозначны. Они обозначаются $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$ и выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} x &= \arcsin x + 2k\pi, \\ \operatorname{Arccos} x &= \arccos x + 2k\pi, \\ \operatorname{Arctg} x &= \operatorname{arctg} x + k\pi, \\ \operatorname{Arcctg} x &= \operatorname{arcctg} x + k\pi \end{aligned}\right\} \quad (k = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots).$$

§ 27. Построение графиков с помощью изменения масштабов и параллельного переноса

1. О выборе масштабов. Если график обладает на каком-либо участке крутым подъемом или спуском, то точность его чтения на этом участке будет меньшей, чем точность построения. Это видно из рис. 51, где изображен график функции

$$y = 2\sin 3x.$$

Он построен на сетке, дающей точность до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1$; однако при чтении графика в окрестности точки $x = 0{,}3$ мы не достигаем этой степени точности. Препятствием служит крутой подъем графика.

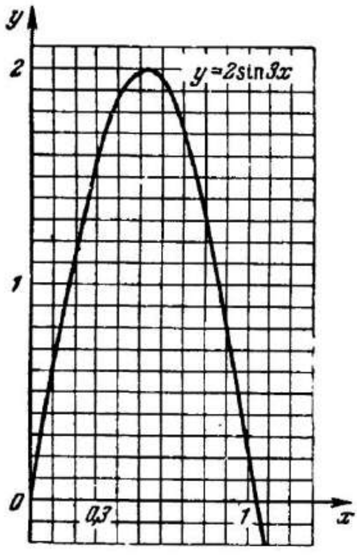


Рис. 51.

Точность чтения повысится, если на обеих осях увеличить, скажем втрое, единицу масштаба. Но при этом площадь, занимаемая графиком, увеличится в 9 раз, между тем достаточно увеличить единицу масштаба только по оси Ox (рис. 52), ибо тогда график станет достаточно пологим.

Вообще при построении графиков отношение масштабов на осях Ox, Oy полезно выбирать таким образом, чтобы график не обладал в рассматриваемом промежутке слишком крутым подъемом или спуском.

2. **Изменение масштаба.** Пусть линия uv (рис. 53) служит графиком функции $y=f_1(x)$, когда за единицы масштаба на осях Ox, Oy приняты отрезки Oe_1, Oe_2 (они могут быть равными, как на рис. 53, или неравными).

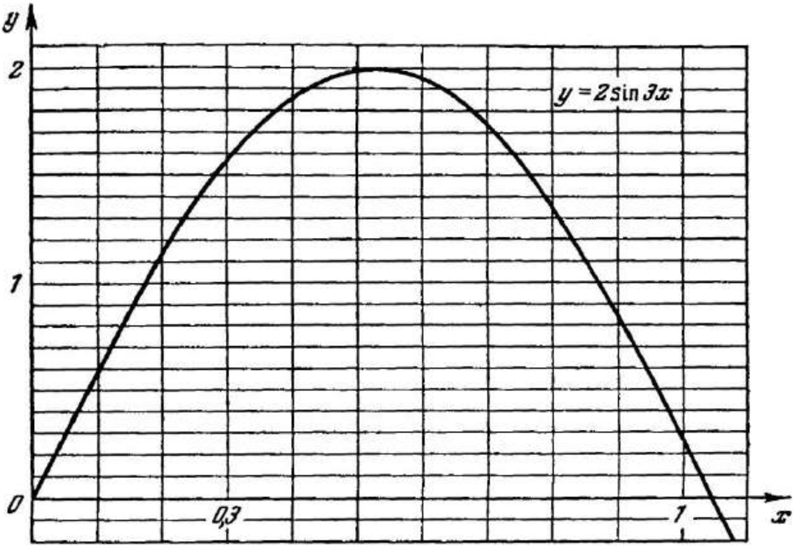


Рис. 52.

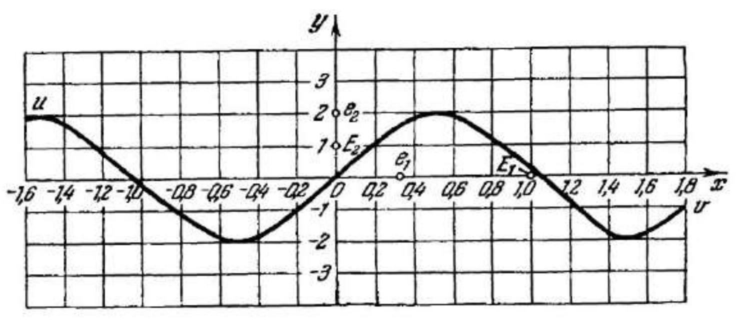


Рис. 53.

Покажем, что линию uv можно использовать также в качестве графика функции

$$y = Af_1(ax),$$

где A и a — произвольные числа, отличные от нуля (сначала предположим, что эти числа положительны).

Введем на осях Ox, Oy новые единицы масштаба OE_1, OE_2 (пока произвольные) и будем обозначать через X, Y координаты точки $M(x, y)$ при новых масштабах. Так как численное выражение длины отрезка с увеличением единицы масштаба пропорционально уменьшается, то

$$x:X = OE_1:Oe_1, \quad y:Y = OE_2:Oe_2. \tag{1}$$

В силу соотношений (1) уравнение $y = f(x)$ принимает вид

$$Y = \frac{Oe_2}{OE_2} f\left(\frac{OE_1}{Oe_1} X\right). \tag{2}$$

Теперь ясно, что линия uv представляется уравнением

$$Y = Af(aX),$$

если соблюсти следующие пропорции:

$$OE_1:Oe_1 = a:1, \quad OE_2:Oe_2 = 1:A. \tag{3}$$

Заменяя обозначения координат X, Y стандартными обозначениями x, y, мы приходим к выводу, что при новых единицах масштаба линия uv служит графиком функции $y = Af(ax)$.

Замечание 1. Если число a отрицательно, то надо соблюсти пропорцию $OE_1:Oe_1 = |a|:1$ и одновременно изменить положительное направление оси Ox. Аналогично изменяем направление оси Oy, если $A < 0$.

Пример 1. Построить график функции

$$y = 2\sin 3x.$$

Решение. Предварительно строим (рис. 53) график функции $y = \sin x$ при произвольно взятых единицах масштаба Oe_1, Oe_2. Затем вводим новые единицы OE_1, OE_2 с таким расчетом, чтобы уравнение $y = \sin x$ приняло вид $Y = 2\sin 3X$ или

$$\frac{1}{2} Y = \sin 3X.$$

Для этого достаточно связать старые и новые координаты соотношением

$$x:X = 3:1, \quad y:Y = 1:2.$$

Стало быть, между старыми и новыми масштабами надо соблюсти пропорцию [см. формулы (1)]:

$$OE_1:Oe_1 = 3:1, \; OE_2:Oe_2 = 1:2, \tag{3а}$$

т. е. по оси Ox масштаб надо увеличить втрое, а по оси Oy — уменьшить вдвое.

Замечание 2. Произвол в выборе единиц Oe_1, Oe_2 позволяет построить указанным способом график функции $y = Af(ax)$ при заранее данных масштабах OE_1, OE_2. Действительно, из пропорций (3) находим масштабные отрезки

$$Oe_1 = \frac{1}{a} OE_1, \; Oe_2 = A \cdot OE_2. \tag{3б}$$

Пример 2. Пусть на осях Ox и Oy заданы единицы масштаба, указанные на рис. 51 (они одинаковы, но могли бы быть различными). Тогда изображенный на рис. 51 график функции $y = 2\sin 3x$ можно построить следующим образом. Из формул (3б), полагая в них $A = 2$, $a = 3$, находим новые единицы масштаба $Oe_1=\frac{1}{3}OE_1$, $Oe_2=2OE_2$. Значит, надо втрое уменьшить масштаб по оси Ox и вдвое увеличить масштаб по оси Oy. При новых единицах Oe_1, Oe_2 строим график функции $y=\sin x$. Получается линия, изображенная на рис. 51. В первоначально заданной системе масштабов эта линия является графиком функции $y=2\sin 3x$.

3. Параллельный перенос. График uv функции $y=f(x)$ можно использовать также для изображения функции

$$y=Af(ax+b)+B,$$

где a, b, A, B — произвольные числа. Для этого мы поступим следующим образом.

Сначала введем, как объяснено в п. 2, новые единицы масштаба OE_1, OE_2 таким образом, чтобы линия uv стала графиком функции

$$y=Af(ax). \tag{4}$$

А затем, сохранив направления осей Ox, Oy и единицы OE_1, OE_2, перенесем начало координат в точку $O'(x_0, y_0)$, выбрав числа x_0, y_0 с таким расчетом, чтобы в новой системе $x'O'y'$ линия uv представлялась уравнением

$$y'=Af(ax'+b)+B \tag{5}$$

или, что то же,

$$y'-B=Af\left[a\left(x'+\frac{b}{a}\right)\right]. \tag{6}$$

Сопоставляя уравнения (4) и (6), мы видим, что координаты x, y надо связать с координатами x', y' следующими соотношениями:

$$x=x'+\frac{b}{a},\quad y=y'-B. \tag{7}$$

Эти соотношения будут соблюдены, если новое начало координат поместить в точку O', координаты которой (при единицах масштаба OE_1, OE_2) суть

$$x_0=\frac{b}{a},\quad y_0=-B.$$

В системе координат $x'Oy'$ линия uv станет графиком функции $y'=Af(ax'+b)+B$.

Пример 3. Построить график функции

$$y=2\sin(3x+1)+4.$$

Решение. Строим график uv (рис. 54) функции $y=\sin x$, приняв за единицы масштаба по осям Ox, Oy произвольно взятые отрезки Oe_1, Oe_2. Затем вводим новые единицы масштаба $OE_1=3Oe_1$, $OE_2=\frac{1}{2}Oe_2$ (см. пример 1); тогда линия uv становится графиком функции

$$y=2\sin 3x.$$

Для того чтобы та же линия представлялась уравнением

$$y'-4=2\sin 3\left(x'+\frac{1}{3}\right),$$

надо связать координаты x, y с координатами x', y' соотношениями

$$x = x' + \frac{1}{3}, \quad y = y' - 4. \tag{7a}$$

Значит, надо перенести начало координат в точку O', координаты которой $\left(\text{при единицах масштаба } OE_1 = 3Oe_1,\ OE_2 = \frac{1}{2}Oe_2\right)$ суть

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad y_0 = -4.$$

В системе координат $x'O'y'$ при единицах масштаба OE_1, OE_2 линия uv является графиком функции $y = 2\sin(3x+1)+4$.

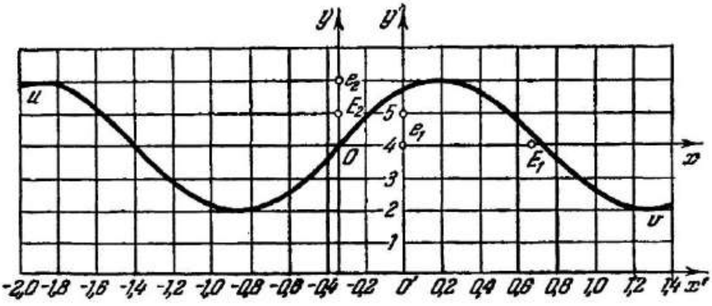


Рис. 54.

Замечание 3. Пусть график функции $y = Af(ax+b)+B$ требуется построить при заранее данных осях $O'x'$, $O'y'$ и единицах масштаба $O'E_1'$, $O'E_2'$. Тогда, в соответствии с формулами (7), мы переносим начало координат в точку O, координаты которой (при единицах $O'E_1'$, $O'E_2'$) суть

$$x_0' = -\frac{b}{a}, \quad y_0' = B'.$$

Затем вводим в системе xOy единицы масштаба Oe_1, Oe_2 по формулам (3б) и, наконец, строим в этой системе график функции $y = f(x)$.

Этот способ удобно применять в тех случаях, когда графики нескольких функций надо сопоставить друг с другом на одном рисунке.

Пример 4. В системе координат, изображенной на рис. 55 (единицы масштаба $O'E_1'$, $O'E_2'$), построить график функции $y = -3\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)+1$.

Решение. Здесь $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $A = -3$, $B = 1$.

Начало вспомогательной системы координат помещаем в точке O с координатами

$$x_0' = -\frac{b}{a} = -4, \quad y_0' = B = 1.$$

Вспомогательные масштабные единицы будут

$$Oe_1 = \frac{1}{a} O'E_1' = 2O'E_1', \quad Oe_2 = A \cdot O'E_2' = -3O'E_2'.$$

Значит, на оси Ox положительное направление будет тем же, что на оси $O'x'$, а на оси Oy оно противоположно положительному направлению оси $O'y'$.

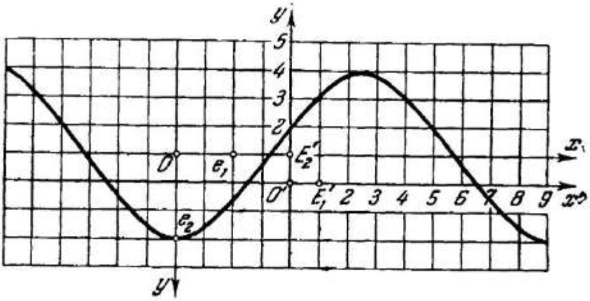


Рис. 55.

Теперь строим в системе координат xOy с масштабами Oe_1, Oe_2 график функции $y = \cos x$. Эта же линия в системе координат $x'O'y'$ будет графиком функции $y = -3\cos\left(\frac{x}{2} + 2\right) + 1$.

§ 28. Дробно-линейная функция

Функция

$$f(x) = \frac{mx+n}{px+q} \quad (m,\ n,\ p,\ q \text{ — постоянные}) \tag{1}$$

называется *дробно-линейной* при условии, что

$$p \neq 0$$

и что при этом определитель $\delta = \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix}$ тоже отличен от нуля:

$$\delta \neq 0.$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда $p=0$, функция $f(x)$ линейная: она имеет вид $\frac{m}{q}x + \frac{n}{q}$ (постоянная q отлична от нуля, так как при $p=q=0$ выражение (1) не имеет смысла). Рассмотрим теперь случай, когда $p \neq 0$, но $\delta = np - mq = 0$. Тогда $n = \frac{mq}{p}$ и, значит, $mx + n = \frac{m}{p}(px+q)$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет постоянное значение $\frac{m}{p}$ (всюду, кроме точки $x = -\frac{q}{p}$, где $f(x)$ не имеет определенного значения).

График дробно-линейной функции. Выполнив деление (с остатком) двучлена $mx+n$ на двучлен $px+q$, получим частное $\frac{m}{p}$ и остаток $\frac{np-mq}{p}=\frac{\delta}{p}$. Следовательно,

$$f(x)=\frac{mx+n}{px+q}=\frac{m}{p}+\frac{\delta}{p(px+q)},$$

или

$$f(x)=\frac{\delta}{p^2}\frac{1}{x+\frac{q}{p}}+\frac{m}{p}. \tag{2}$$

Из этой формулы видно, что построение графика функции $f(x)$ сведется к построению графика функции

$$y=\frac{\delta}{p^2}\frac{1}{x}, \tag{3}$$

если начало координат перенести в точку

$$x_0=-\frac{q}{p}, \quad y_0=\frac{m}{p}$$

(см. § 27, замечание 3). Но линия (3) является, как известно, (I, § 60) равносторонней гиперболой; ее асимптоты совпадают с новыми осями координат, а полуоси имеют длину $\frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}$. Эта гипербола располагается в I и III координатных углах новой системы, если $\delta>0$; в противном же случае — во II и IV углах.

Замечание. При надлежащем выборе единицы масштаба новой системы координат построение графика сведется к построению гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

Пример. Построить график функции

$$y=\frac{2x-9}{2x-1}. \tag{4}$$

Решение. Здесь

$$m=2,\ n=-9,\ p=2,\ q=-1.$$

При этом

$$\delta=\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

Стало быть, данная функция дробно-линейная.

Выполнив деление двучлена $2x-9$ на двучлен $2x-1$, получим в частном 1 и в остатке -8. Таким образом, уравнение (4) можно представить в виде

$$y=1-\frac{8}{2x-1}$$

или

$$y-1=-4\frac{1}{x-\frac{1}{2}}.$$

Если перенести начало координат в точку O' (рис. 56) с координатами

$$x_0=\frac{1}{2}, \quad y_0=1,$$

то искомый график представится уравнением

$$y'=-\frac{4}{x'}$$

и его легко будет построить по точкам. Получим равностороннюю гиперболу, у которой одна ветвь (uv) расположена во II координатном угле системы $x'O'y'$, а другая ($u'v'$) — в IV угле. Прямые $O'x'$, $O'y'$ суть асимптоты гиперболы.

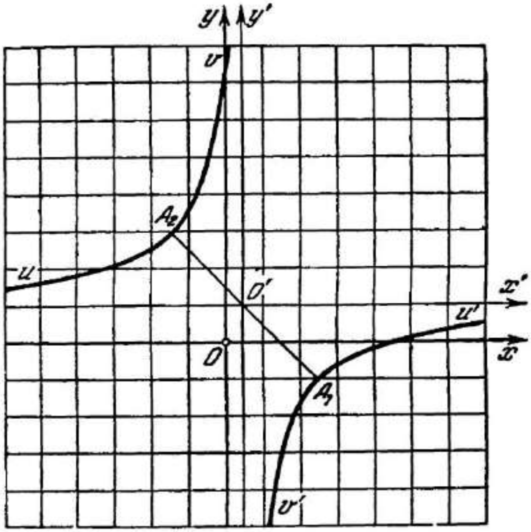


Рис. 56.

Вершинами гиперболы служат точки A_1, A_2, которые в системе $x'O'y'$ имеют координаты

$$x_1'=2, \quad y_1'=-2, \quad x_2'=-2, \quad y_2'=2,$$

а в системе xOy — координаты

$$x_1=2{,}5, \; y_1=-1, \quad x_2=-1{,}5, \; y_2=3.$$

Полуоси $|O'A_1|=|O'A_2|=2\sqrt{2}$.

Если на осях $O'x'$, $O'y'$ ввести вдвое большую единицу масштаба и на оси $O'y'$ (или на оси $O'x'$) изменить положительное направление, то наша гипербола будет графиком функции $y=\frac{1}{x}$.

§ 28а. Задачи к §§ 25—28

Построить графики следующих функций:

1. $y=-3\sin(2x+1)$. 2. $y=-2\cos(3x+1)$.

3. $y=3\cos\left(\frac{1}{2}x+1\right)-2$. 4. $y=3\operatorname{arctg}(2x+1)$.

5. $y=\frac{x-1}{x+1}$. 6. $y=\frac{2x}{3-x}$. 7. $y=\frac{2x-5}{3x-7{,}5}$.

8. $y=\frac{4x-9}{2x-6}$. 9. $y=2-3\sqrt{x+5}$. 10. $y=2\lg(3x+6)$.

§ 29. Элементарные функции

Степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции называются *элементарными*.

Всякая функция, которую можно получить из вышеперечисленных функций посредством четырех арифметических действий и операций образования сложных функций, последовательно применяемых в *ограниченном числе*, также называется элементарной.

Всякая функция, которую нельзя получить вышеуказанным образом, считается неэлементарной.

Пример 1. Функция

$$\sqrt{x^2\sin x+\lg\operatorname{tg}x} \tag{1}$$

является элементарной, так как она получается из вышеперечисленных «основных» элементарных функций путем последовательного применения следующих действий:

1) степенная функция x^2 помножена на тригонометрическую функцию $\sin x$;

2) из логарифмической функции $\lg x$ и тригонометрической $\operatorname{tg}x$ образована сложная функция $\lg\operatorname{tg}x$;

3) две полученные функции сложены;

4) из полученной функции и функции $x^{1/2}$ образована сложная функция (1).

Пример 2. Функция

$$y=(\sin^2 x)^x \tag{2}$$

является элементарной, так как ее можно представить в виде

$$y=10^{2x\lg\sin x}, \tag{3}$$

т. е. ее можно получить последовательным применением следующих действий: 1) образуется сложная функция $\lg\sin x$; 2) выполняется умножение $2\cdot x\cdot\lg\sin x$; 3) из показательной функции 10^x и вышенайденной функции образуется сложная функция.

Пример 3. Пусть переменная v изменяется в промежутке $(1, \infty)$, а переменная u выражается через v формулой

$$u = v^v.$$

Тогда u является элементарной функцией от v. Эта функция монотонно возрастает во всем промежутке изменения аргумента, т. е. $(1, \infty)$, и сама изменяется в промежутке $(1, \infty)$. Поэтому переменная v в свою очередь является (однозначной) функцией от u. Однако оказывается, что ее невозможно выразить через u с помощью *ограниченного* количества вышеуказанных действий. Поэтому v есть неэлементарная функция переменной u.

ГЛАВА II
ПРЕДЕЛ

§ 30. Вводные замечания

С понятием предела читатель уже встречался в элементарной математике (при рассмотрении геометрической прогрессии, длины окружности, площади круга). Но мы рассмотрим это понятие заново, так как оно является основным в высшей математике.

Для большей ясности мы по отдельности рассмотрим два важнейших типа функций:

1) Функции натурального аргумента. Так называют те функции, у которых область изменения аргумента есть совокупность всех натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. Предел такой функции называют *пределом последовательности* (§§ 31, 32).

2) Функции непрерывного аргумента. Это те функции, где область изменения аргумента есть некоторый промежуток (конечный или бесконечный). При этом не исключается возможность, что промежуток лишен отдельных его точек (граничных или внутренних). Предел функции непрерывного аргумента для краткости именуется просто *пределом функции* (§§ 33, 34).

§ 31. Последовательность

Предварительное замечание. В тех случаях, когда величина y есть функция *натурального* аргумента n, значения функции, соответствующие значениям $n=1$, $n=2$, $n=3$ и т. д., обычно обозначаются символами $y_1, y_2, y_3, \ldots$ [вместо символов $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ и т. д.]. Так, если величина y есть квадрат *натурального* числа, то вместо записи

$$y(1)=1^2=1,\ y(2)=2^2=4,\ y(3)=3^2=9,\ \ldots,\ y(n)=n^2,\ \ldots$$

обычно пользуются записью

$$y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=9,\ \ldots,\ y_n=n^2,\ \ldots$$

Определение. Совокупность значений

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots \tag{1}$$

функции натурального аргумента называется *последовательностью*, если эти значения следуют друг за другом в порядке возрастания аргумента.

Сами значения $y_1, y_2, y_3, \ldots$ называются *членами последовательности*.

Пример 1. Совокупность значений

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$$

функции $y = 2^n$ образует последовательность (в данном случае она является геометрической прогрессией).

Совокупность тех же чисел, взятых в ином порядке, скажем

$$2^2,\ 2^1,\ 2^4,\ 2^3,\ 2^6,\ \ldots,$$

тоже является последовательностью, но эта новая последовательность соответствует другой функции, которую можно представить, например, формулой

$$y = 2^{n+(-1)^{n+1}}.$$

Пример 2. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n сумму

$$1+2+3+\ldots+n$$

всех натуральных чисел от 1 до n включительно (натуральному числу 1 ставится в соответствие само это число). Установленный закон соответствия можно представить формулой

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n. \tag{2}$$

Величина S_n есть функция целочисленного аргумента n. Совокупность значений этой функции

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1+2 = 3,\ S_3 = 1+2+3 = 6,$$
$$S_4 = 10,\ S_5 = 15,\ \ldots, \tag{3}$$

взятых в указанном порядке, образует последовательность; сами значения $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$ являются членами последовательности. Каждый из членов этой последовательности равен сумме членов некоторой арифметической прогрессии.

Замечание 1. Как известно из алгебры, сумма членов арифметической прогрессии 1, 2, 3, ..., n выражается формулой

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4}$$

Как и формула (2), формула (4) способна представить закон образования последовательности (3). Для вычислений формула (4), несомненно, предпочтительна. Но надо помнить, что формула (4), взятая сама по себе, в отличие от (2), имеет смысл при *любых* значениях n, однако в рассматриваемом примере аргумент n способен принимать только натуральные значения.

Всякая формула, выражающая n-й член последовательности через аргумент n, называется ***формулой общего члена.***

Однако далеко не всегда закон образования последовательности удается выразить формулой. Это видно из следующего примера.

Пример 3. Цифры десятичного разложения числа $\sqrt{2}$ образуют последовательность

$$y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=1,\ y_4=4,\ y_5=2,\ y_6=1,\ \ldots$$

Никакой формулы общего члена мы написать не можем. Тем не менее закон составления последовательности указан математически точно.

Замечание 2. Из примера 3 видно, что среди членов последовательности могут быть равные друг другу. Не исключается, что даже все члены последовательности будут равны друг другу.

Пример 4. Последовательность задана следующим законом: первые два ее члена равны единице, а остальные определяются из соотношения

$$y_n=y_{n-1}+y_{n-2}. \tag{5}$$

Написать первые десять членов последовательности.

Решение. По условию имеем

$$y_1=1,\ y_2=1.$$

Далее, согласно (5),

$$\begin{aligned} y_3&=y_2+y_1=1+1=2,\\ y_4&=y_3+y_2=2+1=3,\\ y_5&=y_4+y_3=3+2=5 \end{aligned}$$

и т. д. В результате получаем [1])

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

[1]) Любознательному читателю сообщаем, что общий член этой последовательности можно выразить формулой

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

§ 32. Предел последовательности

Определение (предварительная формулировка). Число b называется *пределом последовательности*

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,$$

если это число сколь угодно мало разнится от всех членов последовательности с *достаточно большими* номерами.

Как надо понимать выражение «достаточно большие номера», будет ясно из нижеследующего примера.

Пример 1. Пусть дана последовательность

$$y_1 = 0{,}3,\ y_2 = 0{,}33,\ y_3 = 0{,}333,\ y_4 = 0{,}3333,\ \ldots$$

Число $b = \frac{1}{3}$ является пределом этой последовательности, так как оно обладает следующим характерным свойством.

Пусть требуется, чтобы разность $y_n - \frac{1}{3}$ была (по абсолютной величине) меньше чем 0,001. Члены y_1, y_2 не удовлетворяют этому требованию; но *все члены*, номера которых больше 2, удовлетворяют требованию. «Достаточно большими» являются все номера, большие чем 2. Действительно,

$$\left|y_3 - \frac{1}{3}\right| = \left|0{,}333 - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3000}\right| = \frac{1}{3000},$$

$$\left|y_4 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{30\,000}, \qquad \left|y_5 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{300\,000} \text{ и т. д.,}$$

а каждое из этих чисел меньше чем 0,001.

Но число 0,001 мы назвали лишь для примера; вместо него можно назвать любое другое положительное число, *сколь угодно* малое. Возьмем, например, число 0,000001 и потребуем, чтобы

$$\left|y_n - \frac{1}{3}\right| < 0{,}000001. \tag{1}$$

Этому требованию удовлетворят все номера, большие чем 5:

$$n > 5.$$

Стало быть, по отношению к требованию (1) «достаточно большими» будут все номера, большие 5; номера 3 и 4, которые прежде были достаточно велики, теперь являются слишком малыми.

Если же потребовать, чтобы члены y_n разнились от $\frac{1}{3}$ еще меньше, чем этого требует неравенство (1), то и некоторые номера, большие чем 5, могут оказаться недостаточно большими. Так, если потребовать, чтобы

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| < 0{,}000\,000\,001,$$

то номера 6, 7 и 8 будут слишком малыми. Но номера, большие 8, будут достаточно велики.

Короче говоря, номер N, за которым следуют «достаточно большие» номера, ***зависит*** от того положительного числа ε, которое в силу требования

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

устанавливает степень малости разности $y_n - \frac{1}{3}$.

Так, при $\varepsilon = 0{,}001$ мы имели $N = 2$,
при $\varepsilon = 0{,}000\,001$ » » $N = 5$,
при $\varepsilon = 0{,}000\,000\,001$ » » $N = 8$.

После этих разъяснений будет понятно следующее сжатое и вместе с тем точное определение.

Определение (полная формулировка). Число b называется пределом последовательности

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,$$

если неравенству

$$|y_n - b| < \varepsilon, \tag{2}$$

где ε — произвольно взятое положительное число, удовлетворяют все номера n, превосходящие некоторый номер N (как правило, зависящий от ε).

Обозначение

$$b = \lim y_n$$

читается: «b равно лимит игрек эн» [1]).

Употребляется и более подробная запись:

$$b = \lim_{n \to \infty} y_n. \tag{3}$$

Обозначение $n \to \infty$ читается: «при n, стремящемся к бесконечности».

Применительно к примеру 1 запись (3) имеет вид

$$\frac{1}{3} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}}.$$

---

[1]) Символ lim есть сокращенная запись латинского слова limes (лимес — предел) или равнозначного французского слова limite (лимит).

Замечание 1. Вместо фразы «b есть предел последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$» употребляется фраза «последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *сходится к пределу* b»; говорят также: «величина y_n стремится к b, когда n стремится к бесконечности».

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$y_1=\frac{3}{2}, \quad y_2=\frac{5}{4}, \quad y_3=\frac{7}{6}, \quad y_4=\frac{9}{8}, \ \ldots, \tag{4}$$

общий член которой выражается формулой

$$y_n=\frac{2n+1}{2n}. \tag{5}$$

Можно подметить, что при n, стремящемся к бесконечности, величина y_n стремится к единице, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1. \tag{6}$$

Докажем, что эта догадка правильна. Возьмем произвольное положительное число и потребуем, чтобы величина y_n разнилась от единицы меньше чем на ε:

$$|y_n-1|<\varepsilon. \tag{2а}$$

Надо доказать, что требованию (2а) удовлетворят все «достаточно большие» номера n. Если подставить выражение (5) в неравенство (2а), то последнее примет вид

$$\left|\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon. \tag{7}$$

Так как n есть число положительное, то $\left|\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n}$ и, следовательно, вместо (7) можно написать

$$\frac{1}{2n}<\varepsilon.$$

А этому неравенству удовлетворяет всякий номер n, превосходящий число $\frac{1}{2\varepsilon}$:

$$n>\frac{1}{2\varepsilon}. \tag{8}$$

Итак, требованию (2а) удовлетворяют все номера n, превосходящие число $\frac{1}{2\varepsilon}$. Эти номера и будут «достаточно большими».

Если, например, положить $\varepsilon=0{,}1$, т. е. если потребовать, чтобы

$$|y_n-1|<0{,}1, \tag{2б}$$

то «достаточно большими» будут все номера, превосходящие число $\frac{1}{2\cdot 0{,}1}=5$. Стало быть, в этом случае можно положить $N=5$.

Если же положить теперь $\varepsilon=\frac{2}{81}$, то некоторые номера, превосходящие число 5, окажутся недостаточно большими. Так, номеру $n=10$ соответствует в последовательности (4) член $y_{10}=\frac{21}{20}$; он разнится от 1 на $\frac{1}{20}$, т. е. больше, чем на $\frac{2}{81}$, так что требование (2а) не удовлетворяется. Однако в силу (8) достаточно большими теперь будут все номера, превосходящие число $1:\left(2\cdot\frac{2}{81}\right)=20\frac{1}{4}$. Стало быть, теперь можно положить $N=20$.

Вообще требованию (2а) удовлетворят все номера, бо́льшие чем

$$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right], \tag{9}$$

где символ $\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{1}{2\varepsilon}$.

Итак, мы доказали, что неравенству (2а) удовлетворяют все номера, превосходящие некоторый номер N; последний, как показывает формула (9), зависит от ε.

Тем самым доказано равенство (6), выражающее, что последовательность (4) сходится к пределу единица.

Замечание 2. Не всякая последовательность имеет предел. Так, последовательность

$$y_1=2,\ y_2=4,\ y_3=2,\ y_4=4,\ y_5=2,\ y_6=4,\ \ldots,$$

общий член которой выражается формулой

$$y_n=3+(-1)^n,$$

очевидно, не имеет предела.

Замечание 3. Два числа, не равные друг другу, не могут быть пределами одной и той же последовательности.

Это почти очевидное предложение можно доказать так: допустим, что каждое из двух неравных чисел, например $b_1=3{,}258$ и $b_2=3{,}259$, является пределом некоторой последовательности. Тогда все ее члены с достаточно большими номерами должны разниться меньше чем на 0,0001 как от числа b_1, так и от числа b_2, а это невозможно.

Замечание 4. Как в примере 1, так и в примере 2 каждый последующий член последовательности был ближе к ее пределу, чем предшествующий член. Это свойство обусловлено монотонностью последовательности (в примере 1 мы имели возрастающую последовательность, в примере 2 — убывающую). Немонотонная последовательность тоже может иметь предел, но указанным свойством она не обладает. Это видно из следующего примера.

Пример 3. Рассмотрим последовательность, заданную формулой

$$y_n=[3+(-1)^n]\cdot\frac{1}{n}. \tag{10}$$

Первые ее члены таковы:

$$y_1=2,\quad y_2=2,\quad y_3=\frac{2}{3},\quad y_4=1,\quad y_5=\frac{2}{5},\quad y_6=\frac{2}{3},\quad \ldots$$

Эта последовательность не монотонна: каждый ее член, начиная

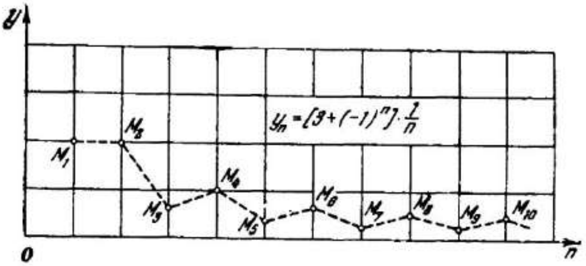


Рис. 57.

с третьего, поочередно то меньше, то больше, чем предшествующий (рис. 57).

Легко подметить, что

$$\lim y_n=0.$$

Докажем это. Возьмем произвольное положительное число и потребуем, чтобы

$$|y_n-0|<\varepsilon. \tag{11}$$

В силу (10) это требование принимает вид

$$[3+(-1)^n]\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon. \tag{12}$$

Если n — нечетное число, то неравенство (12) принимает вид

$$2\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon. \tag{13}$$

Если же n — четное число, то (12) принимает вид

$$4\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon. \tag{13a}$$

Чтобы удовлетворилось неравенство (13), достаточно, чтобы номер n был больше чем $\frac{2}{\varepsilon}$; чтобы удовлетворилось неравенство (13а), достаточно, чтобы $n>\frac{4}{\varepsilon}$. Значит, если номер n будет больше чем $\frac{4}{\varepsilon}$, то удовлетворится как неравенство (13), так и неравенство (13а). Следовательно, требованию (11) будут удовлетворять все номера (как четные, так и нечетные), превосходящие число $\frac{4}{\varepsilon}$. Так, если потребовать, чтобы член y_n

отличался от нуля меньше чем на 0,01, то «достаточно большими» будут все номера n, превосходящие 400. Проверьте это для номеров 401, 402, 403.

Итак, оказывается, что y_n стремится к пределу нуль. Но это не значит, что *каждый* член последовательности ближе к пределу, чем предшествующий; напротив, начиная с четвертого, каждый член с *четным* номером находится *дальше* от предела по сравнению с предшествующим членом.

Замечание 5. Может случиться, что некоторые члены последовательности равны ее пределу. Более того, последовательность может содержать бесчисленное множество таких членов.

Пример 4. Рассмотрим последовательность, заданную формулой

$$y_n = [1 + (-1)^n] \cdot \frac{1}{2n}. \tag{14}$$

Первые ее члены таковы:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = \frac{1}{4}, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = \frac{1}{6}, \quad \ldots$$

Последовательность (14) имеет пределом число нуль, так как требованию

$$|y_n - 0| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число, будут удовлетворять все члены, номера которых превосходят $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так, требованию $|y_n - 0| < 0{,}1$ удовлетворяют все члены, номера которых превосходят 10. Например:

$$|y_{11} - 0| = 0, \quad |y_{12} - 0| = \frac{1}{12}, \quad |y_{13} - 0| = 0, \quad |y_{14} - 0| = \frac{1}{14}, \quad \ldots$$

Все эти числа меньше чем 0,1.

Мы доказали, что

$$\lim y_n = 0.$$

Вместе с тем мы видим, что все члены с нечетными номерами равны пределу последовательности.

Замечание 6. Если в некоторой последовательности все ее члены (или все члены, начиная с какого-то номера) равны одному и тому же числу b, то это число вместе с тем является и пределом последовательности.

Пример 5. Последовательность

$$y_1=3, \quad y_2=3, \quad y_3=3, \quad \ldots, \quad y_n=3, \ \ldots$$

имеет пределом число 3.

Действительно, неравенству

$$|y_n-3|<\varepsilon, \tag{15}$$

где ε — произвольно взятое положительное число, будут удовлетворять все члены последовательности. Поэтому, назначив совершенно произвольно номер N (скажем, $N=5$), мы можем утверждать, что неравенству (15) будут удовлетворять все номера, превосходящие N (в данном случае число N не зависит от ε).

§ 32а. Вопросы и задачи к §§ 31—32

1. Напишите первые 10 членов последовательности нечетных натуральных чисел и общий член этой последовательности.

2. Последовательность задана формулой

$$y_n=1+3+5+7+\ldots+(2n-1).$$

Напишите первые 10 членов. Нельзя ли выразить общий член более удобной формулой?

3. Найти (хотя бы по догадке) предел последовательности

$$0{,}6;\ 0{,}66;\ 0{,}666;\ \ldots;\ y_n=\underbrace{0{,}66\ldots6}_{n\ \text{раз}};\ \ldots \tag{1}$$

4. Укажите такой номер N, чтобы все члены последовательности (1), имеющие более высокие номера, разнились от предела последовательности менее чем на 0,001.

5. Дана последовательность

$$\frac{5}{1},\quad \frac{9}{2},\quad \frac{13}{3},\quad \frac{17}{4},\quad \frac{21}{5},\ \ldots \tag{2}$$

Закон ее образования: знаменатели членов — последовательные натуральные числа; числители образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=4$. Представить ее графически. Написать формулу общего члена. Указать предел последовательности.

6. Укажите такой номер N, чтобы все члены последовательности (2) с большими чем N номерами разнились от предела: а) менее чем на $\frac{1}{15}$; б) менее чем на 0,01; в) менее чем на ε.

7. Последовательность дана формулой

$$y_n=\frac{n}{n+2}. \tag{3}$$

Написать первые 8 членов. Изобразить их на графике. Указать ее предел b.

8. Указать такой номер N, чтобы все члены последовательности (3) с более высокими номерами удовлетворяли: а) требованию $|y_n-b|<0{,}1$; б) требованию $|y_n-b|<\frac{2}{37}$; в) требованию $|y_n-b|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$.

9. Написать первые 10 членов последовательности

$$y_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Имеет ли эта последовательность предел?

10. Та же задача для последовательности

$$y_n = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

11. Пусть α_n есть внутренний угол правильного n-угольника ($n = 3, 4, 5, \ldots$), а β_n — внешний угол. Напишите первые 6 членов последовательности $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Имеет ли эта последовательность предел? Та же задача для последовательности β_n.

§ 33. Предварительное понятие о пределе функции

Понятие предела функции сложнее, чем понятие предела последовательности. Поэтому мы начнем с примеров.

Пример 1. Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}.$$

Эта формула определяет функцию $f(x)$ во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, за исключением точки $x = 0{,}5$, где выражение, определяющее функции, теряет смысл.

Возьмем какую-либо точку $x = a$, отличную от $0{,}5$, скажем точку $x = 6$ $(=a)$. В этой точке функция $f(x)$ имеет значение

$$f(a) = f(6) = \frac{4\cdot 6^2-1}{2\cdot 6-1} = 13.$$

Составим теперь какую-либо последовательность значений

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \tag{1}$$

стремящихся к пределу $a = 6$. При этом позаботимся, чтобы среди точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не встретилась точка $x = 0{,}5$, где функция $f(x)$ не определена. Положим, например,

$$x_1 = 6{,}1, \quad x_2 = 6{,}01, \quad x_3 = 6{,}001, \quad \ldots \tag{1a}$$

Этой последовательности соответствует последовательность значений

$$f(x_1) = 13{,}2, \quad f(x_2) = 13{,}02, \quad f(x_3) = 13{,}002, \quad \ldots \tag{2}$$

Легко подметить, что она имеет пределом число $b = 13$, т. е. предел последовательности (2) равен значению $f(a)$. Тот же предел будет иметь последовательность

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad f(x_3), \ \ldots \tag{3}$$

при любом ином выборе последовательности (1), лишь бы последняя имела пределом число $a=6$ и не содержала точки $x=0,5$. Так, например, вместо убывающей монотонной последовательности (2) можно было бы взять возрастающую монотонную последовательность

$$x_1'=5,9, \quad x_2'=5,99, \quad x_3'=5,999, \ \ldots$$

или немонотонную последовательность

$$x_1''=6,1, \quad x_2''=5,9, \quad x_3''=6,01, \quad x_4''=5,99, \ \ldots$$

Всякий раз последовательность (3) будет иметь пределом одно и то же число $b=13$.

Таким образом, числом $b=13$ характеризуется не столько та или иная *последовательность*, пределом которой оно является, сколько *сама функция* $f(x)$, *рассматриваемая в окрестности данной точки* $x=a$. Вот почему говорят, что «число 13 есть *предел функции* $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ *при* x, *стремящемся* к 6, и записывают это следующим образом:

$$13=\lim_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}.$$

Замечание 1. Для большей наглядности надо представить себе, что аргумент x стремится к пределу a монотонно, и притом не скачкообразно, как мы предполагали при рассмотрении последовательности (1а), а плавным движением, принимая не только значения 6,1; 6,01; 6,001 и т. д., а также и все промежуточные значения. Функция $f(x)$ будет тогда пробегать не только последовательность значений 13,2; 13,02; 13,002 и т. д., но также и все промежуточные значения.

Замечание 2. Чтобы найти $\lim\limits_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}$, мы могли бы подставить в выражение $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ значение $x=6$. Получим число 13, которое и является искомым пределом. Но такой бесхитростный прием далеко не всегда ведет к цели. Это видно из следующего примера.

Пример 2. Требуется найти $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{4x^2-1}{2x-1}$. Подстановка $x=0,5$ не приводит к цели: получается неопределенность $\frac{0}{0}$. Составив же последовательность

$$x_1=0,51, \ x_2=0,501, \ x_3=0,5001, \ \ldots, \tag{4}$$

сходящуюся к пределу 0,5, мы получим соответствующую последовательность значений

$$f(x_1)=2{,}02,\quad f(x_2)=2{,}002,\quad f(x_3)=2{,}0002,\ \ldots,$$

которая, очевидно, имеет пределом число $b=2$.

Но поскольку число $b=2$ теперь не является значением функции $f(x)$ при $x=0{,}5$, естественно, возникает вопрос, получится ли то же самое число $b=2$ и в том случае, если вместо последовательности (4) взять какую-либо другую последовательность, сходящуюся к пределу 0,5.

Оказывается, что к пределу $b=2$ сходится *всякая* последовательность вида

$$y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2),\quad \ldots,\quad y_n=f(x_n),\ \ldots \tag{5}$$

при условии, что последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{6}$$

сходится к пределу $a=0{,}5$ и не содержит точки a.

Вот почему мы вправе сказать: число $b=2$ есть предел функции $\frac{4x^2-1}{4x-1}$ при x, стремящемся к 0,5:

$$\lim_{x\to 0{,}5}\frac{4x^2-1}{4x-1}=2.$$

§ 34. Определение предела функции

Исходные условия. Предполагается:

1) что точка $x=a$ лежит внутри или на границе некоторого промежутка (m, n);

2) что во всех точках промежутка (m, n), отличных от a, определена некоторая функция $f(x)$ [не исключается возможность, что функция $f(x)$ определена и в самой точке a, но это не обязательно].

При этих условиях каждой последовательности точек

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \tag{1}$$

принадлежащих промежутку (m, n), но отличных от точки a, соответствует определенная последовательность значений

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3),\quad \ldots,\quad f(x_n),\ \ldots \tag{2}$$

Определение. Число b называется *пределом функции $f(x)$ при $x\to a$*, если всякой последовательности значений (1), стремящихся к пределу a, соответствует последовательность вида (2), имеющая пределом число b.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=13$ (ср. § 33, пример 1).

Здесь в качестве промежутка (m, n) можно взять любой промежуток, содержащий точку $x=6$ $(=a)$, но не содержащий точки $x=0{,}5$. Если бы мы взяли такой промежуток, который содержал бы как точку $x=6$, так и точку $x=0{,}5$, то при составлении последовательности (1) пришлось бы отстранить от участия в последовательности (1) не одну точку $x=6$ (как сказано в исходных условиях), а две точки. Отстранение самой точки $x=6$ вызвано предосторожностью, которая в данном случае оказывается излишней (ибо данная функция определена и в самой точке 6).

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2$ (ср. § 33, пример 2). Здесь в качестве промежутка (m, n) можно взять любой промежуток, содержащий точку $x=0{,}5$ $(=a)$.

Замечание. Предел функции существует не всегда. Это видно из следующего примера.

Пример 3. Возьмем какой-либо промежуток (m, n), внутри которого лежала бы точка $x=0$ $(=a)$, скажем промежуток $(-2; 2)$. Функция $f(x)$, заданная формулой

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{2x}, \tag{3}$$

определена во всех точках этого промежутка, отличных от точки $a=0$ [в самой точке a функция $f(x)$ не определена, так как формула (3) не имеет смысла при $x=0$]. Таким образом, исходные условия определения соблюдены.

Из промежутка $(-2; 2)$ выберем точки

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n=\frac{1}{n},\ \ldots$$

Они образуют последовательность, имеющую пределом число $a=0$. Соответствующие значения функции $f(x)$ образуют последовательность

$$f(x_1)=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ f(x_2)=\cos\pi=-1,\ f(x_3)=\cos\frac{3\pi}{2}=0,$$
$$f(x_4)=\cos 2\pi=1,\ f(x_5)=0,\quad f(x_6)=-1,$$
$$f(x_7)=0,\quad f(x_8)=1,\ \ldots$$

Эта последовательность *не имеет предела*. Стало быть, и функция $f(x)$ при $x\to 0$ предела не имеет [1]).

[1]) Впрочем, как видно из графика (рис. 58), можно составить и такую сходящуюся к нулю последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, чтобы соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ тоже имела некоторый предел b. Этот предел можно назначить заранее, выбрав любое число, заключенное между -1 и 1.

Предел постоянной величины. *Предел постоянной величины b (рассматриваемой как функция некоторого аргумента x) равен самой величине b:*

$$\lim_{x\to a} b = b.$$

Действительно, если $f(x) = b$, то всякой последовательности

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

имеющей пределом число a, соответствует последовательность значений

$$f(x_1) = b,\quad f(x_2) = b,\quad \ldots,\quad f(x_n) = b,\quad \ldots$$

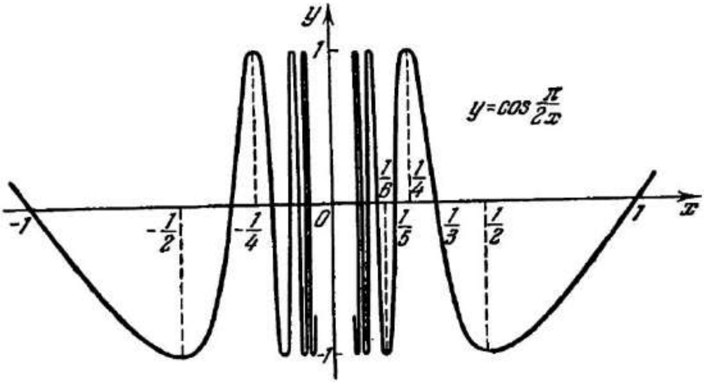


Рис. 58.

Эта последовательность имеет пределом (§ 32, замечание 6) число b.

§ 34a. Задачи к §§ 33—34

Найдите (хотя бы по догадке) следующие пределы (если таковые существуют):

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (ср. пример 1 § 33).

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (ср. пример 2 § 33).

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(1-2\cos^2 x)\sin x$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

§ 35. Односторонний предел

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, заданную формулой

$$\varphi(x)=\frac{x+x^2}{|x|}. \tag{1}$$

Эта функция (рис. 59), как и функция $f(x)$ в примере 2 § 33, определена всюду, кроме одной точки ($x=0$). Но в отличие от функции $f(x)$ функция $\varphi(x)$ при $x\to 0$ предела не имеет. Правда, если x стремится к нулю, пробегая последовательность *положительных* значений [в этом случае $\varphi(x)=1+x$], то $\varphi(x)$ стремится к 1. Но если $x\to 0$, пробегая *отрицательные* значения [в этом случае $\varphi(x)=-(1+x)$], то $\varphi(x)$ стремится к -1. А если положительные значения x чередуются с отрицательными, то последовательные значения $\varphi(x)$ вообще не стремятся к пределу.

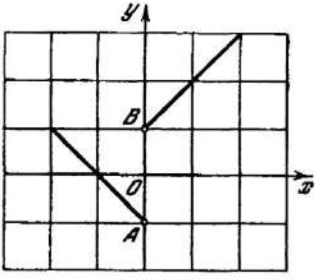


Рис. 59.

Стало быть, функция $\varphi(x)$ при $x\to 0$ не имеет предела *в том смысле этого термина, который был установлен определением* § 34.

Но можно слегка видоизменить это определение, введя в него дополнительное указание, что все значения x, стремящиеся к пределу a, должны быть *больше*, чем a (или, наоборот, что все они должны быть *меньше*, чем a).

Если при этом дополнительном условии стремление $x\to a$ всегда влечет за собой стремление $f(x)$ к одному и тому же числу b, то это число b называется *правосторонним* (*левосторонним*) *пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$.

Обозначения. Правосторонний предел функции $f(x)$ при $x\to a$ обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x);$$

левосторонний предел обозначается

$$\lim_{x\to a-0} f(x).$$

Если $a=0$, то вместо $0+0$, $0-0$ пишут просто $+0$, -0.

Пример 1. Правосторонний предел функции $\varphi(x)=\frac{x+x^2}{|x|}$ при $x\to 0$ равен единице:

$$\lim_{x\to +0}\frac{x+x^2}{|x|}=1. \tag{2}$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to -0}\frac{x+x^2}{|x|}=-1. \tag{3}$$

Пример 3. Функция $\varphi(x)=\cos\frac{\pi}{2x}$ (см. § 34, пример 3) при $x\to 0$ *не имеет ни правостороннего, ни левостороннего предела.*

Правосторонний и левосторонний пределы объединяются наименованием *односторонний предел.* В связи с этим обыкновенный предел называют иногда *двусторонним.*

Замечание 1. Если число b является двусторонним пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, то оно же является как правосторонним пределом, так и левосторонним. Стало быть, понятия «одностороннего» и «двустороннего» пределов не противопоставляются друг другу.

Скачок функции. Пусть

$$b_1=\lim_{x\to a+0} f(x),\quad b_2=\lim_{x\to a-0} f(x).$$

Тогда величина $|b_1-b_2|$ называется *скачком функции в точке* $x=a$ и обозначается $d_a f(x)$.

Пример 4. Скачок функции $\varphi(x)=\frac{x+x^2}{|x|}$ в точке $x=0$ (ср. примеры 1, 2) равен

$$d_0 f(x)=|+1-(-1)|=2.$$

Геометрически скачок d_0 изображается (рис. 59) отрезком AB.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ в точке $x=a$ обладает двусторонним пределом, то (ср. замечание 1) скачок $d_0 f(x)=0$.

§ 36. Расширение понятия предела последовательности

Определение. Говорят, что последовательность

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots \tag{1}$$

имеет бесконечный предел, если неравенству

$$|y_n|>E, \tag{2}$$

где E — произвольно взятое положительное число, удовлетворяют все номера n, превосходящие некоторый номер N (зависящий от E).

Короче: *последовательность* (1) *имеет бесконечный предел, если все члены последовательности с достаточно большими номерами превосходят по абсолютной величине любое наперед заданное число.*

Говорят также, что величина y_n *«стремится к бесконечности».*

Обозначение

$$\lim y_n = \infty \tag{3}$$

читается: «предел y_n равен бесконечности».

Пример 1. Последовательность

$$y_1 = 10,\ y_2 = 100,\ y_3 = 1000,\ \ldots,\ y_n = 10^n,\ \ldots$$

имеет бесконечный предел

$$\lim 10^n = \infty.$$

Действительно, неравенству

$$|10^n| > E$$

удовлетворят все номера n, превосходящие $\lg E$.

Пример 2. Последовательность

$$y_1 = -2,\ y_2 = 4,\ y_3 = -8, \ldots,\ y_n = (-2)^n, \ldots \tag{4}$$

имеет бесконечный предел

$$\lim (-2)^n = \infty. \tag{5}$$

Действительно, если задано какое-либо положительное число E и поставлено требование, чтобы y_n превосходило E *по абсолютной величине*, то все номера n, превосходящие $\log_2 E$, удовлетворят этому требованию.

Дополнение к определению. Если в последовательности (1), обладающей бесконечным пределом, все члены (или все члены, начиная с некоторого номера) положительны, то говорят, что последовательность имеет предел $+\infty$ (плюс бесконечность):

$$\lim y_n = +\infty. \tag{6}$$

Говорят также, что «y_n стремится к $+\infty$».

Если же в последовательности (1) все члены (или все, начиная с некоторого номера) отрицательны, то говорят, что последовательность имеет предел $-\infty$ (минус бесконечность) или что «y_n стремится к $-\infty$»:

$$\lim y_n = -\infty. \tag{7}$$

Пример 3. $\lim 10^n = +\infty$. Ср. пример 1.

Пример 4. Последовательность

$$y_1 = -2,\ y_2 = -2\frac{1}{2},\ y_3 = -3\frac{1}{3},\ \ldots,\ y_n = -n - \frac{1}{n},\ \ldots \tag{8}$$

имеет бесконечный предел:

$$\lim \left(-n - \frac{1}{n}\right) = \infty. \tag{9}$$

А так как, сверх того, все члены последовательности (8) отрицательны, то, уточняя формулу (9), можем написать

$$\lim\left(-n-\frac{1}{n}\right)=-\infty. \tag{9a}$$

Замечание 1. Формула $\lim(-2)^n=\infty$ (ср. пример 2) такому уточнению не поддается, так как в последовательности (4) положительные члены чередуются с отрицательными. Иными словами, величина $y_n=(-2)^n$ стремится к бесконечности, но *не стремится* ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Замечание 2. В отличие от бесконечного предела, обычный предел последовательности (§ 32) называют также ***конечным пределом***.

§ 37. Расширение понятия предела функции

В определении предела функции $f(x)$ (§ 34) фигурировали две последовательности:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

и

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots \tag{2}$$

Первая строилась так, чтобы ее пределом было данное число a:

$$\lim x_n=a. \tag{3}$$

Относительно второй предполагалось, что она имеет пределом некоторое число b:

$$\lim f(x)=b. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем допускать, чтобы как равенство (3), так и равенство (4) понимались в расширенном смысле (§ 36). Иными словами, мы будем допускать, что каждая из последовательностей (1), (2) может иметь как конечный предел, так и бесконечный. Тем самым мы расширяем понятие предела функции.

Пример 1. Запись

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\infty \tag{5}$$

означает, что всякой последовательности значений (1), стремящихся к пределу $a=3$, соответствует последовательность (2), имеющая бесконечный предел.

Пример 2. Запись

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=12 \tag{6}$$

означает, что всякой последовательности (1), имеющей бесконечный предел, соответствует последовательность (2), имеющая пределом число 12.

Замечание 1. В примере 2 предполагается, что функция $f(x)$ определена *во всех* точках, лежащих *вне* некоторого промежутка (m, n); в противном случае не всякой последовательности (1), сходящейся к бесконечности, соответствовала бы последовательность (2). Это условие служит заменой обоих исходных условий § 34.

В примере 1 и вообще во всех случаях, когда аргумент стремится к конечному пределу, исходные условия § 34 остаются неизменными.

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Пусть x, оставаясь не равным нулю, пробегает произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящуюся к нулю. Это значит, что величина $|x_n|$ будет сколь угодно малой при достаточно больших номерах n. Значит, величина $\left|\frac{1}{x^2}\right|$ будет сколь угодно большой при достаточно больших n.

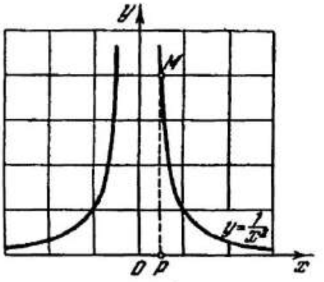


Рис. 60.

Иными словами (§ 36, определение), последовательность $\frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}, \ldots$ имеет бесконечный предел. Но последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ выбиралась произвольно. Поэтому бесконечным пределом при $x \to 0$ обладает и сама функция $\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \tag{7}$$

Более того, так как все члены $\frac{1}{x_n^2}$ положительны, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \tag{7a}$$

Равенство (7a) иллюстрируется рис. 60. Когда точка P стремится к точке O (будь то справа или слева), точка M «удаляется в бесконечность», направляясь вверх.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$.

Решение. Как в примере 3, заключаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty. \tag{8}$$

Однако искомый предел не равен ни $+\infty$, ни $-\infty$. Действительно, если аргумент x будет стремиться к нулю, принимая поочередно то положительные, то отрицательные значения, то и функция $\frac{1}{x^3}$ будет принимать то положительные, то отрицательные значения, и поэтому (ср. § 36, дополнение к определению) не будет стремиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$ (рис. 61).

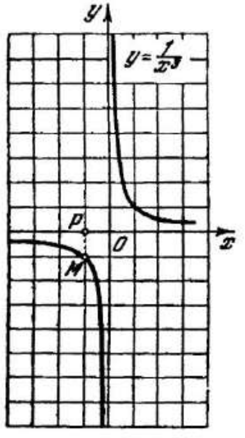


Рис. 61.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{x^3}$.

Решение. В отличие от примера 4, здесь мы ищем односторонний предел (§ 35). Как и в примере 4, искомый предел является бесконечным:

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^3}=\infty \tag{8a}$$

(ср. § 35, замечание 1). Но теперь формулу (8a) можно уточнить следующим образом:

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^3}=-\infty. \tag{8б}$$

Действительно, по определению одностороннего предела (§ 35) точка x (P на рис. 61) стремится к точке O, оставаясь *слева* от нее. Значит, величина $\frac{1}{x^3}=PM$ остается отрицательной.

В примерах 3—5 предел *аргумента* был конечным. В следующих примерах аргумент стремится к бесконечному пределу.

Пример 6. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x}.$$

Решение. Пусть x пробегает произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, имеющую бесконечный предел. Рассмотрим соответствующую последовательность

$$f(x_1)=\frac{3x_1+4}{x_1}=3+\frac{4}{x_1},\ f(x_2)=3+\frac{4}{x_2},\ \ldots,\ f(x_n)=3+\frac{4}{x_n},\ \ldots$$

Величина $|x_n|$ при достаточно больших номерах n будет сколь угодно велика. Значит, величина $\frac{4}{x_n}$ будет сколь угодно мала.

Следовательно, величина $f(x_n) = 3 + \frac{4}{x_n}$ будет сколь угодно мало разниться от числа 3, т. е. последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots$ $\ldots, f(x_n), \ldots$ имеет предел 3:

$$\lim f(x_n) = \lim \left(3 + \frac{4}{x_n}\right) = 3. \tag{9}$$

Если так, то и предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ равен 3:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+4}{x}\right) = 3. \tag{10}$$

Эта формула иллюстрируется рис. 62, где функция $y = \frac{3x+4}{x}$ представляется равносторонней гиперболой. Когда точка P «уходит в бесконечность», *будь то вправо или влево*, точка M, удаляясь в бесконечность, стремится к асимптоте uv ($y = 3$).

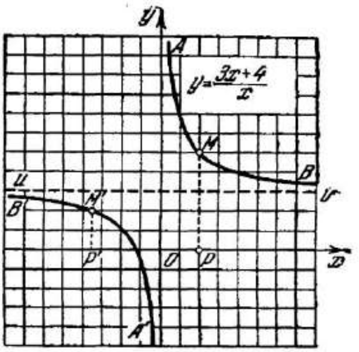


Рис. 62.

Замечание 2. Наряду с формулой (10) имеют место формулы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{x} = 3, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{x} = 3. \tag{11}$$

Первая выражает, что точка M (рис. 62), удаляясь *вправо* по ветви AB, стремится к асимптоте uv. Вторая выражает, что точка M', удаляясь *влево* по ветви $A'B'$, стремится к той же прямой uv.

Формулы (11) вытекают как следствие из формулы (10). И вообще из формулы

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \tag{12}$$

вытекает, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b. \tag{13}$$

Пример 7. Найти

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+4}{|x|}.$$

Решение. Искомый предел не существует. Однако существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{|x|} = 1 \tag{14}$$

и

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+4}{|x|} = -1. \qquad (15)$$

Действительно, при $x > 0$ имеем

$$\frac{x+4}{|x|} = \frac{x+4}{x} = 1 + \frac{4}{x}.$$

Рассуждая, как в примере 6, убедимся, что когда аргумент x стремится к $+\infty$, функция $\frac{x+4}{|x|}$ стремится к 1; значит, формула (14) верна.

При $x < 0$ имеем

$$\frac{x+4}{|x|} = -\frac{x+4}{x} = -1 - \frac{4}{x}.$$

Когда $x \to -\infty$ $\left(\text{величина } -\frac{4}{x} \text{ стремится при этом к нулю}\right)$, функция $\frac{x+4}{|x|}$ стремится к -1. Значит, формула (15) тоже верна.

Отсюда ясно, что если аргумент x будет стремиться к бесконечности, принимая поочередно положительные и отрицательные значения, то значения функции $\frac{x+4}{|x|}$ ни к какому пределу стремиться не будут.

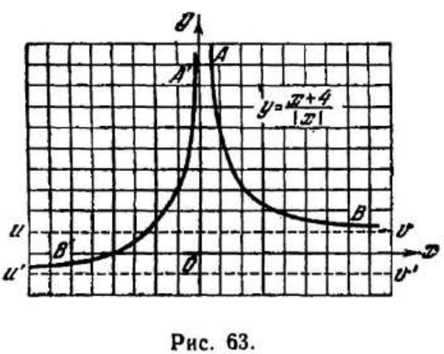


Рис. 63.

Формулы (14) и (15) иллюстрируются рис. 63. График функции состоит из двух ветвей AB и $A'B'$ двух разных равносторонних гипербол с асимптотами uv $(x = 1)$ и $u'v'$ $(x = -1)$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x$.

Решение. Аргумент x стремится к бесконечности, оставаясь отрицательным. Поэтому функция $f(x) = 10^x$ принимает значения, меньшие чем 1, и стремится к нулю. Так, если

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -3, \quad \ldots,$$

то $f(x_1) = 0{,}1$, $f(x_2) = 0{,}01$, $f(x_3) = 0{,}001$, ... Значит,

$$\lim_{x \to -\infty} 10^x = 0.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^x$.

Решение. Если x стремится к бесконечности, оставаясь положительным, то 10^x стремится к бесконечности (и при этом остается положительным). Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^x = \infty$ (или, уточняя, $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$).

Замечание 3. Сопоставляя результаты примеров 8 и 9, заключаем, что $\lim\limits_{x\to\infty} 10^x$ *не существует.*

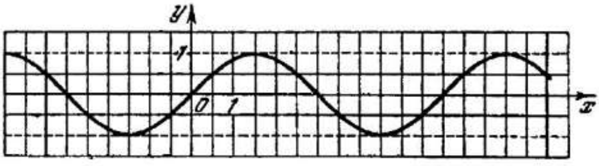


Рис. 64.

Пример 10. Для функции $f(x) = \sin x$ предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не существует.

Более того, не существует ни $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ни $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Когда аргумент x стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, функция $\sin x$ «колеблется» между $+1$ и -1 (рис. 64).

§ 38. Непрерывность функции в точке

Предварительное замечание. Чтобы найти $\lim\limits_{x\to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1}$ (§ 33, пример 1), достаточно вычислить значение функции $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ $[= f(x)]$ при $x = 6$:

$$\lim_{x\to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{4\cdot 6^2-1}{2\cdot 6-1} = 13.$$

Стало быть, *в данном случае* функция $f(x)$ обладает таким свойством: *предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x = a$.*

Однако это свойство имеет место не всегда, например оно неприменимо к разысканию предела $\lim\limits_{x\to 0,5} \frac{4x^2-1}{2x-1}$ (ср. § 33, пример 2).

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x=a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Пояснение. Это определение можно расчленить на следующие три требования:

1. Функция $f(x)$ должна быть определена в точке a (иначе не может быть речи о «значении функции при $x=a$») [1].

2. Требуется, чтобы предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *существовал.*

3. Этот предел должен равняться значению функции $f(x)$ при $x=a$.

Если хотя бы одно из трех вышеуказанных требований *не выполнено,* то точка a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Из нижеследующих примеров будет видно, что математические термины «непрерывность» и «разрыв» до известной степени соответствуют житейскому словоупотреблению.

Непрерывность элементарных функций. Выполнение одного только первого из трех вышеуказанных требований в общем случае не гарантирует выполнения двух остальных. Иными словами, функция, определенная в точке a (и в некоторой ее окрестности), может быть разрывной в точке a (см. ниже примеры 3, 4, 5). Но для всех элементарных функций второе и третье требования выполняются всякий раз, как выполняется первое требование. Иными словами, имеет место следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. *Если элементарная функция определена в точке a (и в некоторой ее окрестности), то она непрерывна в этой точке.*

Пример 1. Рассмотрим элементарную функцию $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$. Она определена во всякой точке a, отличной от 0,5 (а также в некоторой окрестности точки a). Теорема утверждает, что во всякой точке a, отличной от 0,5, функция $f(x)$ непрерывна.

Иными словами, все три требования, входящие в определение непрерывной функции, соблюдены. По отношению к требованию 1 это совершенно очевидно. Далее, рассуждая, как в § 33 (пример 1), легко докажем, что соблюдены также требование 2 $\left(\text{предел } \lim\limits_{x \to a} \frac{4x^2-1}{2x-1} \text{ существует}\right)$ и требование 3 $\left(\text{этот предел равен } \frac{4a^2-1}{2a-1}\right)$.

[1] Разумеется, функция $f(x)$ должна быть также определена в некотором промежутке (m, n), внутри или на границе которого находится точка a; иначе не может быть речи о «пределе функции при $x \to a$». Об этом требовании мы не упоминаем потому, что оно входит в понятие функции непрерывного аргумента.

В точке 0,5 функция $f(x)$ разрывна, так как не выполнено первое требование определения непрерывности.

График функции $f(x)$ есть прямая линия $y=2x+1$ (uv на рис. 65), лишенная точки $A(x=0{,}5,\ y=2)$.

Замечание 1. Разрыв функции $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ в точке 0,5 геометрически «незаметен», потому что в этой точке существует $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{4x^2-1}{2x-1}=$ $=2$; иначе говоря, функция $f(x)$ обладает как правосторонним пределом $\lim\limits_{x\to 0,5+0} f(x)$, так и левосторонним пределом $\lim\limits_{x\to 0,5-0} f(x)$, причем *оба предела равны между собой*. Геометрически это означает вот что: точка M графика uv (рис. 65) *стремится к одной и той же точке* $A\,(0{,}5;\ 2)$ как в том случае, когда точка $P(x,\ 0)$ стремится к точке $L\,(0{,}5;\ 0)$ справа, так и в том случае, когда P стремится к L слева. Таким образом, если дополнить график одной точкой A, то не останется ни малейшего следа разрыва.

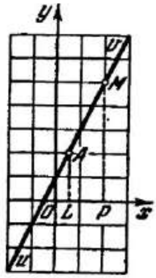


Рис. 65.

Пример 2. Элементарная функция $\varphi(x)=\frac{x+x^2}{|x|}$ (рис. 59 на стр. 97) определена всюду, кроме точки $x=0$. Стало быть, она непрерывна в любой точке, отличной от нуля, и разрывна в точке $x=0$.

В точке разрыва функция $\varphi(x)$ обладает (§ 35) правосторонним пределом $b_1=\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=1$ и левосторонним пределом $b_2=\lim\limits_{x\to-0}\varphi(x)=$ $=-1$. В отличие от примера 1, здесь два односторонних предела не равны друг другу (т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ не существует). Вследствие этого разрыв нагляден на графике: если точка, двигаясь вдоль графика, приближается к оси ординат справа, то она стремится к точке B, а если слева, то к точке A. Устранить разрыв графика добавлением одной точки невозможно.

Замечание 2. Пусть функция $f(x)$ (элементарная или не элементарная) обладает в точке a конечными пределами $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, *не равными* друг другу (как в примере 2 функция $\varphi(x)$ в точке $x=0$). Тогда a есть точка разрыва функции $f(x)$ (ибо нарушается требование 2 определения непрерывности). Такой разрыв называется *скачкообразным* (или разрывом *первого рода*[1])).

[1]) К точкам разрыва первого рода многие авторы относят также такие точки разрыва, где конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равны друг другу. При таком соглашении в точке $x=0{,}5$ функция $f(x)$ примера 1 тоже будет иметь разрыв первого рода.

Скачкообразными разрывами обладают многие функции, встречающиеся в физике и технике.

Пример 3. На рис. 66 изображен график функции

$$Q = f(t), \tag{2}$$

где Q есть количество тепла (в килокалориях), которое необходимо сообщить нагреваемому телу (льду, а затем воде), чтобы температура тела *достигла* $t°$. Лед взят в количестве 1 *кг* при начальной температуре $-40°$; сосуд подвергается нагреванию до $+40°$.

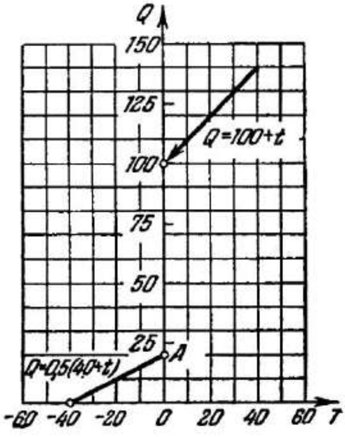


Рис. 66.

График обнаруживает скачкообразный разрыв в точке $t = 0$, причем

$$\lim_{t \to -0} f(t) = 20, \tag{3}$$

$$\lim_{t \to +0} f(t) = 100. \tag{4}$$

В промежутке между $t = -40$ и $t = 0$ разрывов не обнаруживается. Разрыв в точке $t = 0$ обусловлен тем, что сообщаемое телу тепло расходуется не на повышение температуры, а на плавление льда.

Определена ли функция $f(t)$ в самой точке $t = 0$, и если да, то каково ее значение,— этого график, разумеется, обнаружить не может. Из нижеследующих соображений выяснится, что функция $f(t)$ в точке $t = 0$ определена и что $f(0) = 20$.

Так как теплоемкость льда есть 0,50 *ккал/кг·град*, а воды 1,00 *ккал/кг·град*, то при $-40° \leqslant t < 0°$ функция $f(t)$ выражается формулой

$$f(t) = 0{,}50\,(40 + t), \tag{5}$$

а при $0° < t \leqslant 40°$ — формулой

$$f(t) = 100 + t. \tag{6}$$

Из формулы (5) получается формула (3), а из (6) — формула (4).

Так как, далее, $f(0)$ есть количество тепла, необходимое для того, чтобы нагреть лед *до температуры* $0°$, то затрату тепла, расходуемого на *плавление льда*, мы учитывать не должны. Значит, надо считать, что $f(0) = 20$[1]).

---

[1]) Значит, точка A (0; 20) принадлежит графику функции $f(t)$, а точка (0; 100) не принадлежит, хотя к ней можно подойти (справа) сколь угодно близко. Стрелка, поставленная возле точки (0; 100), подчеркивает это обстоятельство.

Стало быть, функция $f(t)$ *определена* в точке $t=0$ (и в ее окрестности), и все же разрывна в этой точке (первое требование непрерывности выполнено, но второе, а значит, и третье не выполнены). Такое положение дела для *элементарной* функции невозможно.

Замечание 3. В примере 3 значение $f(0)=20$ оказалось равным *одностороннему пределу* $\lim\limits_{t\to -0} f(t)$.

Вообще, если односторонний предел функции $f(x)$ в точке a равен значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ называется *односторонне-непрерывной* в этой точке. Стало быть, функция $f(t)$ примера 3 обладает в точке $t=0$ односторонней непрерывностью.

Пример 4. На рис. 67 изображен график функции

$$E=\varphi(r).$$

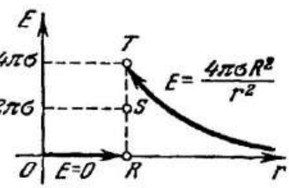


Рис. 67.

Здесь E — напряженность поля, которое создает в некоторой точке M электрический заряд, распределенный с плотностью σ на сферической поверхности радиуса R; r — расстояние точки M от центра сферы.

Функция $\varphi(r)$ определена во всех точках промежутка $(0, \infty)$. Она непрерывна во всех точках этого промежутка, кроме точки $r=R$. При $0\leqslant r<R$ функция $\varphi(r)$ выражается формулой

$$\varphi(r)=0. \tag{7}$$

При $r>R$ она выражается формулой

$$\varphi(r)=\frac{4\pi\sigma R^2}{r^2}. \tag{8}$$

При $r=R$ имеем

$$\varphi(r)=2\pi\sigma\,[1]. \tag{9}$$

Функция $\varphi(r)$ имеет в точке $r=R$ скачкообразный разрыв. Действительно, она обладает в этой точке конечными пределами

$$\lim_{r\to R-0}\varphi(r)=0,\quad \lim_{r\to R+0}\varphi(r)=4\pi\sigma,$$

не равными друг другу. Но, в отличие от предыдущего примера, значение функции в точке разрыва (это значение изображено на рис. 67

[1]) Напряженность в точке M, лежащей на сфере, определяется следующим образом. Проведем на сфере параллель небольшого радиуса ρ с полюсом в точке M и удалим из сферы сегмент, ограниченный этой параллелью. Поле, порожденное оставшейся частью сферы, создаст в точке M некоторую напряженность E', зависящую от ρ. При $\rho\to 0$ величина E' стремится к пределу $2\pi\sigma$.

отрезком RS) не равно ни правостороннему пределу в этой точке ($RT=4\pi\sigma$), ни левостороннему пределу (равному нулю). Стало быть, функция $\varphi(r)$ в точке $r=R$ не обладает даже и односторонней непрерывностью.

Пример 5. Рассмотрим последовательность

$$S_1=\alpha^2,\ S_2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2},\ S_3=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ S_n=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\ldots+\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{n-1}},\ \ldots \tag{10}$$

При $\alpha=0$ все члены этой последовательности равны нулю; значит, число нуль является также и пределом последовательности (10). При любом ненулевом значении α член S_n есть сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{1+\alpha^2}$, меньшим единицы. Значит, сумма S_n стремится к конечному пределу S («сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии»). По известной формуле элементарной алгебры находим, что $S=1+\alpha^2$.

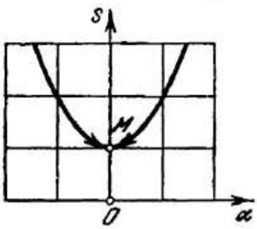


Рис. 68.

Таким образом, предел S последовательности (10) является функцией $f(\alpha)$ аргумента α. Эта функция определена при всех значениях α и выражается следующими формулами:

$$f(\alpha)=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0, \tag{11}$$
$$f(\alpha)=1+\alpha^2 \quad \text{при} \quad \alpha\neq 0. \tag{12}$$

График функции $f(\alpha)$ изображен на рис. 68. Он представляет собой параболу, лишенную точки $M(0;\ 1)$ и дополненную точкой $O(0;\ 0)$. Функция $f(\alpha)$ непрерывна во всех точках, за исключением точки $\alpha=0$.

В точке $\alpha=0$ функция $f(\alpha)$ определена и обладает пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(\alpha)$, так что требования 1 и 2 определения непрерывности соблюдены. Но требование 3 нарушено, так как $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(\alpha)=1$ и, значит, предел функции при $\alpha\to 0$ не равен значению функции при $\alpha=0$.

Замечание 4. Если в точке разрыва a функция $f(x)$ обладает пределом $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то разрыв называют *устранимым*. Функция $f(\alpha)$ примера 5 имеет в точке $\alpha=0$ устранимый разрыв. Функция $f(x)$ примера 1 имела устранимый разрыв в точке $x=0{,}5$, причем в точке разрыва функция $f(x)$ была неопределенной; в примере же 5 функция $f(\alpha)$ *определена* в точке разрыва (элементарная функция таким разрывом обладать не может).

Пример 6. Элементарная функция $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$ (рис. 69) определена (и, следовательно, непрерывна) всюду, кроме точки $x=3$. В этой точке функция $f(x)$ разрывна.

При $x\to3$ функция имеет бесконечный предел

$$\lim_{x\to3} f(x)=+\infty.$$

Пример 7. Элементарная функция $\varphi(x)=2^{\frac{1}{x}}$ (рис. 70) определена (и непрерывна) всюду, кроме точки $x=0$. В точке разрыва

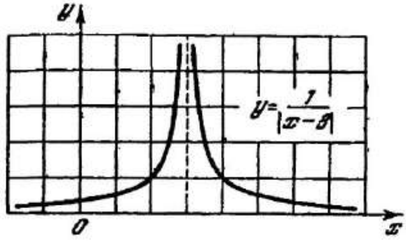


Рис. 69.

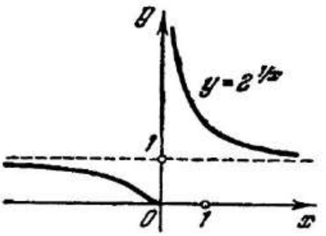


Рис. 70.

функция $\varphi(x)$ имеет бесконечный правосторонний предел

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty$$

и конечный левосторонний предел

$$\lim_{x\to-0}\varphi(x)=0.$$

Замечание 5. Если функция $f(x)$ в точке разрыва a обладает бесконечным пределом, хотя бы и односторонним, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a *бесконечный разрыв*. Функция $f(x)$ примера 6 имеет бесконечный разрыв в точке $x=3$; функция $\varphi(x)$ примера 7 имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$.

Пример 8. Элементарная функция $f(x)=\cos\frac{\pi}{2x}$ (рис. 58 на стр. 96) непрерывна всюду, кроме точки $x=0$, где эта функция не определена. В точке разрыва $x=0$ функция $\varphi(x)$ не обладает ни правосторонним, ни левосторонним пределом.

Замечание 6. Если в точке разрыва a функции $f(x)$ по меньшей мере один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка a называется точкой разрыва *второго рода*. В примере 6 точка $x=3$ есть точка разрыва второго рода (оба односторонних предела бесконечны); функция $f(x)$ примера 7 имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, так как правосторонний предел бесконечен. Функция $f(x)$ примера 8 имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, так как в этой точке функция не обладает ни правосторонним, ни левосторонним пределами.

§ 39. Непрерывность функции в промежутке

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в промежутке* (a, b), если она непрерывна в каждой точке c этого промежутка.

Пример 1. Функция $f(x)=\cos\frac{\pi}{2x}$ непрерывна всюду, кроме точки $x=0$, где она не определена и, следовательно, не обладает даже и односторонней непрерывностью. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна во всяком промежутке, не содержащем точки $x=0$; напротив, функция $f(x)$ не является непрерывной в промежутке (a, b), если этот промежуток содержит точку $x=0$ в качестве внутренней или граничной.

Приведем здесь без доказательства следующие свойства функций, непрерывных в *замкнутом* промежутке:

1. Ограниченность. Функция $f(x)$ непрерывная в замкнутом промежутке (a, b), *ограничена* в этом промежутке; это значит, что существует такое положительное число M, которого не превосходит по абсолютной величине ни одно из значений, принимаемых функцией $f(x)$ в данном промежутке:

$$|f(x)|\leqslant M.$$

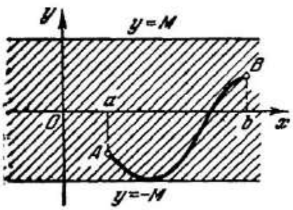


Рис. 71.

Геометрически: дугу AB (рис. 71) графика функции $f(x)$ можно заключить внутрь некоторой полосы, ограниченной двумя горизонтальными прямыми ($y=M$ и $y=-M$), равноотстоящими от оси Ox.

Замечание 1. Полосу, заштрихованную на рис. 71, нельзя сузить, но можно сколь угодно расширить, так что число M, обладающее указанным свойством, не единственное.

Замечание 2. Нижеследующий пример покажет, что функция, непрерывная в *незамкнутом* промежутке, может не обладать свойством ограниченности.

Пример 2. В незамкнутом промежутке $(0; 2)$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна, но *не ограничена.* Действительно, сколь бы велико ни было число M, в промежутке $(0; 2)$ всегда найдутся точки, столь близкие к нулю, что $|f(x)|>M$.

2. **Существование наибольшего и наименьшего значений.** Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке (a, b), то среди значений, принимаемых функцией в этом промежутке, есть наибольшее и наименьшее.

Замечание 3. Функция, непрерывная в незамкнутом промежутке, может этим свойством не обладать.

Пример 3. В промежутке $(-1; 2)$ (замкнутом или незамкнутом) функция $f(x)=3-x^2$ (рис. 72) непрерывна. Среди значений, принимаемых функцией в *замкнутом* промежутке $(-1; 2)$, есть наибольшее значение (равное 3); это значение функция $f(x)$ принимает при $x=0$ (точка C графика). Среди тех же значений есть и наименьшее (равное -1); это значение функция $f(x)$ принимает при $x=2$ (точка B графика).

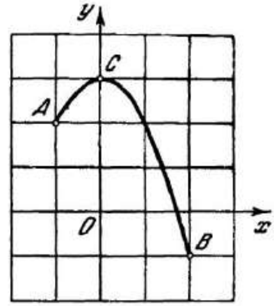


Рис. 72.

Среди значений, принимаемых функцией $f(x)$ в промежутке $(-1; 2)$, лишенном конца $x=2$, т. е. *незамкнутом*, есть наибольшее (равное 3 и принимаемое при $x=0$), но нет наименьшего (график функции лишен наинизшей точки B, а из остающихся точек ни одна не является наинизшей).

Замечание 4. Свое наибольшее (а также наименьшее) значение функция может принимать более одного раза. Так, функция,

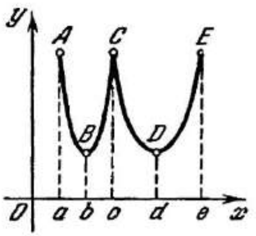


Рис. 73.

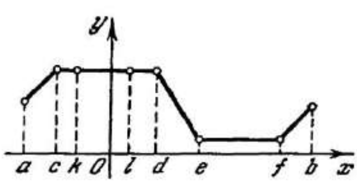


Рис. 74.

изображенная на рис. 73, принимает в замкнутом промежутке (a, e) наибольшее значение трижды (в точках a, c, e), а наименьшее значение — дважды (в точках b, d). Функция, изображенная на рис. 74, принимает в промежутке (a, b) наибольшее (и наименьшее) значение в бесчисленном множестве точек. А именно, наибольшее значение она принимает во всех точках замкнутого промежутка (c, d), а наименьшее — во всех точках замкнутого промежутка (e, f).

Замечание 5. Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого промежутка (k, l) (рис. 74) имеет *одно и то же значение* p, то мы считаем, что число p является наибольшим (и одновременно наименьшим) значением функции $f(x)$ в промежутке (k, l).

3. Существование промежуточных значений. Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке (a, b) и принимающая в точках a, b значения $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, принимает любое значение γ, заключенное между α и β, по меньшей мере в одной из точек промежутка (a, b)

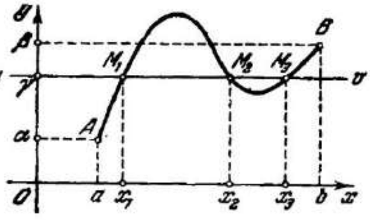


Рис. 75.

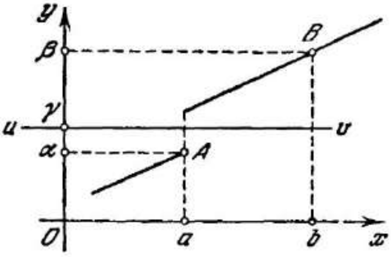


Рис. 76.

Геометрически: если горизонтальная прямая $y=\gamma$ (uv на рис. 75) расположена выше одного из концов A, B графика и ниже другого, то она пересекает график по меньшей мере в одной точке (на рис. 75 — в трех точках: M_1, M_2, M_3).

Замечание 6. Функция $f(x)$, непрерывная лишь в *незамкнутом* промежутке (a, b), но разрывная в одной из граничных точек (или в обеих), может не принимать значений, заключенных между $f(a)$ и $f(b)$, ни в одной из точек промежутка (a, b). Это видно из рис. 76, где график функции x имеет разрыв в точке A, соответствующей значению $x=a$. Прямая $y=\gamma$ (uv на рис. 76) не пересекает графика, хотя число γ заключено между $\alpha=f(a)=aA$ и $\beta=f(b)=bB$.

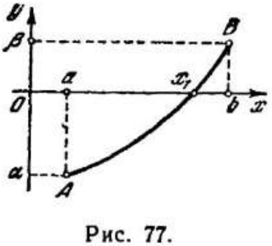


Рис. 77.

Замечание 7. Свойство 3 можно перефразировать еще так. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке (a, b). Тогда уравнение

$$f(x)=\gamma,$$

где γ — какое-либо число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, имеет по меньшей мере один корень, принадлежащий промежутку (a, b).

Замечание 8. Если значения $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ имеют противоположные знаки [скажем, $f(a)<0$, $f(b)>0$, как на рис. 77], то среди чисел, заключенных между α и β, имеется число нуль.

Поэтому в качестве частного случая свойства 3 получается следующее предложение.

Если функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке (a, b), *принимает в точках* a, b *значения, противоположные по знаку, то по меньшей мере в одной из точек промежутка* (a, b) *функция* $f(x)$ *обращается в нуль* [т. е. уравнение $f(x)=0$ имеет по меньшей мере один корень, принадлежащий промежутку (a, b)].

4. Равномерная непрерывность. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке (a, b), и пусть x_1, x_2—какие-то точки, принадлежащие этому промежутку. Зададим некоторое положительное число ε и потребуем, чтобы значения $f(x_1)$, $f(x_2)$ разнились друг от друга меньше чем на ε

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{A}$$

Оказывается, что требованию (A) могут удовлетворить *всякие* две точки отрезка (a, b), *лежащие достаточно близко друг к другу*. Точнее говоря, требование A удовлетворяется всякий раз, как

$$|x_2-x_1|<\delta,$$

где δ есть некоторое положительное число (зависящее от ε).

Это свойство кратко выражают следующей фразой: «функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке, *равномерно непрерывна* в нем».

Слово «равномерно» подчеркивает то обстоятельство, что на любом участке промежутка (a, b) выполнение требования (A) можно обеспечить *одним и тем же* числом δ (т. е. одной и той же степенью близости точек x_1, x_2).

Пример 4. Функция $f(x)=\sin 2x$ непрерывна в замкнутом промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ (равно как и во всяком другом замкнутом промежутке). По свойству 4 функция $\sin 2x$ обладает в этом промежутке также и равномерной непрерывностью. Это означает следующее.

Если задать положительное число ε и потребовать, чтобы выполнялось условие

$$|\sin 2x_2-\sin 2x_1|<\varepsilon, \tag{1}$$

то этому требованию удовлетворят всякие две точки x_1, x_2 промежутка $(-\pi; \pi)$, достаточно близкие друг к другу.

В данном случае оказывается, что неравенство (1) выполняется всякий раз, как расстояние $|x_2-x_1|$ меньше чем $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Действительно, мы имеем

$$\sin 2x_2-\sin 2x_1=2\cos(x_2+x_1)\sin(x_2-x_1).$$

А так как

$$|\sin(x_2-x_1)|<|x_2-x_1|,$$

то

$$|\sin 2x_2-\sin 2x_1|<2|\cos(x_2+x_1)|\,|x_2-x_1|\leqslant 2|x_2-x_1|.$$

Отсюда ясно, что требование (1) заведомо выполняется всякий раз, как расстояние $|x_2-x_1|$ меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, на каком бы участке промежутка $(-\pi, \pi)$ ни были взяты точки x_1, x_2.

Замечание 9. Функция, непрерывная в *незамкнутом* промежутке, может не обладать равномерной непрерывностью. Это видно из следующего примера.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f(x) = \lg x$, где аргумент x изменяется в промежутке (0; 10), лишенном конца $x = 0$ и, значит, незамкнутом. Зададим какое-нибудь положительное число ε, например $\varepsilon = 0{,}3$ и предъявим к двум неизвестным точкам x_1, x_2 промежутка (0; 10) требование (A). В данном случае оно принимает вид

$$|\lg x_2 - \lg x_1| < 0{,}3. \qquad (A')$$

Было бы желательно найти такое расстояние δ, чтобы требование (A′) удовлетворялось *всякий раз*, как точки x_1, x_2 отстоят друг от друга на расстояние, меньшее чем δ. Мы утверждаем, однако, что это желание неосуществимо: сколь бы малым ни было расстояние δ, всегда в промежутке (0; 10) найдутся такие две точки x_1, x_2, которые отстоят друг от друга на расстояние, меньшее чем δ, и все же не удовлетворяют требованию (A′).

Действительно, в данном промежутке всегда найдется бесконечное множество чисел, меньших δ. Пусть x_2 есть одно из таких чисел:

$$x_2 < \delta.$$

Положим $x_1 = \frac{1}{2} x_2$; точка x_1, очевидно, тоже лежит в промежутке (0, 10). При этом $|x_2 - x_1| = x_2 - \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2} x_2 < \delta$, так что точки x_1, x_2 отстоят друг от друга на расстояние, меньшее чем δ. Однако эти точки не удовлетворяют требованию (A′). Действительно,

$$|\lg x_2 - \lg x_1| = \left|\lg x_2 - \lg \frac{1}{2} x_2\right| = \lg 2 > 0{,}3.$$

Итак, мы доказали, что никакая степень близости точек x_1, x_2 не гарантирует выполнения требования (A′). Тем самым установлено, что функция $f(x) = \lg x$, которая, очевидно, непрерывна в незамкнутом промежутке $0 < x \leqslant 10$, не обладает *равномерной* непрерывностью в этом промежутке.

Действительно, допустим на минуту, что функция $f(x) = \lg x$ равномерно непрерывна в промежутке (0; 10). Это означало бы, что неравенство

$$|\lg x_2 - \lg x_1| < \varepsilon, \qquad (A)$$

где ε — *любое* положительное число, выполняется всякий раз, как точки x_1, x_2 достаточно близки друг к другу. Между тем мы показали, что при $\varepsilon = 0{,}3$ точки x_1 и x_2 могут быть сколь угодно близкими друг другу и все же не удовлетворять требованию (A).

Заключительное замечание. В замечаниях 2, 3, 6 и 9 было показано, что свойства 1—4 не имеют места для функции, непрерывной в ***незамкнутом промежутке***. Тем самым выясняется, что для функции, непрерывной в замкнутом промежутке, эти свойства нуждаются в доказательстве, а не являются самоочевидными.

С другой стороны, надо подчеркнуть, что геометрические истолкования свойств 1—3 ***не являются*** доказательствами и даже не могуть служить *доводами* в пользу этих свойств. Этим мы не хотим сказать, что геометрические рассуждения вообще не обладают должной строгостью. Но в данном случае нет никаких оснований отождествлять график непрерывной функции с непрерывной геометрической линией. Ведь функцию $f(x)$, для которой имеет место соотношение $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, мы могли бы назвать не «непрерывной в точке a», а, скажем, «благопредельной в точке a». Тогда никто не рискнул бы голословно утверждать, что график такой функции можно считать непрерывной геометрической линией.

Повторяем: свойства, изложенные в настоящем параграфе, *нуждаются в доказательстве.* Мы опустили эти доказательства лишь потому, что они очень трудны.

§ 40. Бесконечно малая величина

Определение. Утверждение «u есть бесконечно малая величина» равнозначно утверждению «u стремится к нулю».

Пример 1. Величина u, пробегающая последовательность

$$u_1=-1,\ u_2=+\frac{1}{2},\ u_3=-\frac{1}{3},\ u_4=+\frac{1}{4},\ \ldots,\ u_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n},\ \ldots \tag{1}$$

стремится к нулю. Иными словами, u есть бесконечно малая величина.

В этом примере число нуль, к которому стремится величина u, есть *предел последовательности* (1).

Пример 2. Функция $f(x)=x^2-4$ есть бесконечно малая величина при $x\to 2$.

В этом примере число нуль, к которому стремится $f(x)$, есть *предел функции* $f(x)$ при $x\to 2$.

Пример 3. Функция $\varphi(x)=\cos x$ стремится к единице, когда x есть бесконечно малая величина.

В этом примере бесконечно малая величина x пробегает *произвольную последовательность*, сходящуюся к нулю.

Пример 4. Функция $\frac{1}{x}$ есть бесконечно малая величина при $x\to\infty$. Эта фраза означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Пример 5. Функция $\operatorname{ctg} x$ при бесконечно малом x стремится к бесконечности. Эта фраза означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x=\infty$.

Пример 6. Функция $\sin x$ есть бесконечно малая величина при бесконечно малом x. Эта фраза означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

Пример 7. Так как пределом постоянной величины считается сама эта величина (§ 34), то можно сказать, что число нуль «стремится к нулю». Стало быть, можно сказать, что число нуль есть бесконечно малая величина. Никакая другая постоянная величина не является бесконечно малой (в математическом смысле этого слова).

Замечание. В физике и технике бесконечно малыми величинами нередко называют и такие величины, которые не стремятся к нулю в точном смысле слова, но столь малы, что ими можно пренебречь (в пределах данного исследования). К таким величинам применяют теоремы, доказываемые в математическом анализе для величин, стремящихся к нулю.

Это поведение столь же правомерно, как поведение геодезиста, именующего линией довольно широкую черту и применяющего к таким «линиям» теоремы геометрии.

§ 41. Бесконечно малая величина и предел

Предварительное пояснение. Пусть величина u стремится к 3, тогда разность $u-3$ стремится к нулю, т. е. является бесконечно малой величиной; обратно, если разность $u-3$ есть бесконечно малая величина, т. е. стремится к нулю, то u стремится к 3.

Теорема. Число b является пределом функции u (натурального или непрерывного аргумента) в том и только в том случае, когда разность $u-b$ есть бесконечно малая величина.

Доказательство. Пусть величина u есть функция натурального аргумента, т. е. пробегает последовательность

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{1}$$

Число b является пределом этой последовательности, если (§ 32, определение) требованию

$$|u_n-b|<\varepsilon, \tag{2}$$

где ε — произвольное положительное число, удовлетворяют все номера, превосходящие некоторое число. В противном же случае число b не является пределом последовательности (1).

С другой стороны, разность $u-b$ является бесконечно малой величиной, т. е. стремится к нулю, если требованию

$$|(u_n-b)-0|<\varepsilon \tag{3}$$

удовлетворяют все номера n, превосходящие некоторое число. В противном случае разность $(u-b)$ не является бесконечно малой.

Но требования (2) и (3) тождественны друг другу. Следовательно, число b является пределом функции u в том и только в том случае, когда разность $(u-b)$ есть бесконечно малая величина.

В случае, когда u есть функция непрерывного аргумента x (стремящегося к назначенному пределу — конечному или бесконечному), теорема доказывается аналогично. Различие состоит лишь в том, что величина u теперь пробегает последовательность вида

$$u_1=f_1(x_1), \quad u_2=f(x_2), \ \ldots, \quad u_n=f(x_n), \ \ldots, \tag{4}$$

где значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ образуют *произвольную* последовательность, сходящуюся к назначенному пределу.

Следствие. Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \longrightarrow a$ (или при $x \longrightarrow \infty$) в том и только в том случае, если

$$f(x)=b+\varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ есть некоторая функция от x, которая при $x \longrightarrow a$ (или при $x \to \infty$) является бесконечно малой величиной.

Для доказательства достаточно представить (5) в виде

$$f(x)-b=\varphi(x)$$

и применить только что доказанную теорему.

§ 42. Бесконечно большая величина

Определение. Утверждение «u есть бесконечно большая величина» равнозначно утверждению «u стремится к бесконечности».

Пример 1. Величина u, пробегающая последовательность

$$u_1=3, \quad u_2=3^2=9, \quad u_3=3^3=27, \ \ldots, \ u_n=3^n, \ \ldots \tag{1}$$

стремится к бесконечности; иными словами, u есть бесконечно большая величина $[\lim u_n=\infty]$.

Пример 2. Функция $f(x)=\frac{1}{x-5}$ есть бесконечно большая величина при $x \longrightarrow 5$ $[\lim\limits_{x \to 5} f(x)=\infty]$.

Пример 3. Функция $\varphi(x)=3+\frac{1}{x}$ стремится к 3, когда x есть бесконечно большая величина $[\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x)=3]$.

Пример 4. Функция x^2 есть бесконечно большая величина при бесконечно большом x $[\lim\limits_{x \to \infty} x^2=\infty]$.

Пример 5. Функция $0{,}000001\,x$ есть бесконечно большая величина при $x \longrightarrow \infty$.

Никакая постоянная величина не является бесконечно большой.

Теорема 1. Если u есть бесконечно большая величина, то обратная величина $\frac{1}{u}$ бесконечно малая.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда u является функцией натурального аргумента n, т. е. когда u пробегает некоторую последовательность

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{2}$$

По условию, эта последовательность имеет бесконечный предел $[\lim u_n = \infty]$. Обратная величина $\frac{1}{u}$ пробегает последовательность

$$\frac{1}{u_1},\ \frac{1}{u_2},\ \frac{1}{u_3},\ \ldots,\ \frac{1}{u_n},\ \ldots \tag{3}$$

Требуется доказать, что эта последовательность сходится к нулю, т. е. (§ 32), что требованию

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

где ε — произвольное положительное число, удовлетворяют все номера n, превосходящие некоторое число N.

Но требование (4) можно записать также в виде $|u_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. А этому неравенству заведомо удовлетворяют все номера n, превосходящие некоторое число N, так как $\lim u_n = \infty$ (ср. § 36, определение).

Итак, последовательность (3) сходится к нулю, т. е. $\frac{1}{u}$ есть бесконечно малая величина.

В случае, когда u есть функция непрерывного аргумента, доказательство ведется аналогично.

Теорема 2. Если u есть бесконечно малая величина, то обратная величина $\frac{1}{u}$ — бесконечно большая.

Замечание. Предполагается, что в последовательности, которую пробегает u, нет членов, равных нулю (в противном случае функция $\frac{1}{u}$ теряет смысл).

Доказательство (по образцу теоремы 1) предоставляется читателю в качестве полезного упражнения [1]).

§ 42а. Вопросы к §§ 40—42

Определить, являются ли бесконечно малыми следующие величины:

1. $\alpha^2 - \alpha$ при $\alpha \to 1$.
2. $\alpha^2 - \alpha$ при $\alpha \to 0{,}5$.
3. $\alpha^2 - \alpha$ при $\alpha \to 0$.
4. $\sqrt{1-\alpha}$ при бесконечно малом α.
5. $\sqrt{1-\alpha} - 1$ при бесконечно малом α.
6. $3^x - 1$ при $x \to 0$.

[1]) Предварительно ответьте на вопросы § 42 а.

7. 2^x при $x \to -\infty$.
8. 3^x при бесконечно большом x.
9. $\sin x$ при бесконечно малом x.
10. $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Определить, являются ли бесконечно большими следующие величины:

11. $\frac{2}{x-4}$ при $x \to 4$.
12. $\frac{2}{x^2-4}$ при $x \to 4$.
13. $\sqrt{1+x^2}$ при $x \to \infty$.
14. $\lg x$ при $x \to \infty$.
15. 10^x при $x \to -\infty$.
16. $2^{\frac{1}{x}}$ при $x \to -0$.
17. $2^{\frac{1}{x}}$ при $x \to +0$.
18. x^{-5} при бесконечно малом x.
19. x^{-3} при бесконечно большом x.
20. $\frac{1}{\sin x}$ при бесконечно малом x.

§ 43. Основные свойства бесконечно малых величин

Предварительные замечания. Некоторые свойства, о которых ниже идет речь, представляются очевидными. Но мы должны доказать также и эти свойства, чтобы дальнейшие рассуждения опирались на прочно положенный фундамент.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые величины являются функциями одного и того же аргумента. Доказательства даются только для случая, когда аргумент натуральный. Для функций непрерывного переменного доказательства проводятся аналогично (ср. доказательство теоремы § 41).

Свойство 1. *Сумма двух, трех и вообще неизменного количества бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.*

Доказательство. Пусть α и β — две бесконечно малые величины, т. е. обе последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{1}$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \ldots \tag{2}$$

сходятся к нулю. Сумма $\alpha+\beta$ пробегает последовательность

$$\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots \tag{3}$$

Зададим произвольное положительное число ε и потребуем, чтобы

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon. \tag{4}$$

Требование (4) будет заведомо удовлетворено, если *каждое из двух слагаемых* α_n, β_n будет по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. если один и тот же номер удовлетворит сразу двум требованиям:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

По условию α есть бесконечно малая величина; значит, требованию $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ удовлетворяют все номера, превосходящие некоторое число N_1; точно так же требованию $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ удовлетворяют все номера, превосходящие некоторое число N_2. Числа N_1, N_2 могут оказаться неравными, и тогда мы возьмем большее из них. Обозначим его через N. Ясно, что всякий номер, превосходящий число N, будет удовлетворять обоим требованиям (5), а следовательно, и требованию (4). А это значит, что $\alpha_n + \beta_n$ есть бесконечно малая величина.

В случае трех, четырех и т. д. слагаемых доказательство ведется аналогично.

Замечание 1. Если число слагаемых не остается неизменным, то свойство 1 может нарушиться.

Пример 1. Рассмотрим бесконечно малую величину $u_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и построим такую последовательность:

$$v_1 = 2u_1 = u_1 + u_1 = 1 + 1 = 2;\ v_2 = 3u_2 = u_2 + u_2 + u_2 = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ \ldots;\ v_n = (n+1)\,u_n = u_n + u_n + \ldots + u_n = \\ = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n};\ \ldots$$

Величина v_n есть сумма бесконечно малых величин, но сама она не является бесконечно малой, а имеет пределом единицу. Свойство 1 нарушено по той причине, что количество слагаемых не остается неизменным, а увеличивается по мере роста номера n.

Свойство 2. *Разность бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.*

Это свойство сводится к предыдущему, так как

$$\alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-\beta_n).$$

Свойство 3. *Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.*

Доказательство. Пусть C — постоянная величина, и α_n — бесконечно малая. Потребуем, чтобы

$$|C\alpha_n| < \varepsilon. \tag{6}$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|C|}. \qquad (7)$$

Так как по условию α_n — бесконечно малая величина, то неравенству (7), а значит и требованию (6), удовлетворяют все номера, превосходящие некоторое число. А это значит, что $C\alpha_n$ есть бесконечно малая величина.

Пример 2. Произведение $1\,000\,000 \cdot \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (где первый сомножитель есть величина постоянная, а второй — бесконечно малая) бесконечно мало. Можно, например, потребовать, чтобы $\left|1\,000\,000 \cdot \frac{1}{n}\right| < 0{,}001$. Тогда окажется, что этому требованию удовлетворяют все номера, большие 1 миллиарда.

Свойство 4. *Произведение ограниченной величины λ_n на бесконечно малую α_n есть бесконечно малая величина.*

Замечание 2. Утверждение, что величина λ_n ограничена, означает, что ни один член последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$ по абсолютной величине не больше, чем некоторое[1]) положительное число M:

$$|\lambda_n| \leqslant M. \qquad (8)$$

Доказательство. Из (8) следует, что

$$|\lambda_n \alpha_n| \leqslant |M\alpha_n|. \qquad (9)$$

По условию α_n — бесконечно малая величина; значит (свойство 3), произведение $M\alpha_n$ бесконечно мало. А из (9) следует, что произведение $\lambda_n \alpha_n$ и подавно бесконечно мало.

Пример 3. Произведение $\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{6}$ бесконечно мало. Действительно, второй сомножитель $\sin \frac{n\pi}{6}$ есть величина ограниченная, так как он не превосходит по абсолютной величине, скажем, числа 2 (или числа 1,5, или числа 1,01) *ни при каком значении n*[2]); первый же сомножитель бесконечно мал.

Свойство 4а. *Произведение любого числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

Доказательство. Всякая бесконечно малая величина является ограниченной. Поэтому произведение $\alpha_n \beta_n$ двух бесконечно малых α_n, β_n есть бесконечно малая величина. Произведение $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ трех бесконечно малых α_n, β_n, γ_n, т. е. произведение бесконечно

---

[1]) Но не всякое!

[2]) Но при некоторых значениях n величина $\left|\sin \frac{n\pi}{6}\right|$ превзойдет число 0,5, число 0,9, число 0,99 и т. д.

малой $(\alpha_n\beta_n)$ на бесконечно малую γ_n, очевидно, тоже бесконечно мало и т. д.

Замечание 3. Относительно частного $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ бесконечно малых α_n, β_n никакого общего суждения высказать нельзя; иногда оно бесконечно мало, а иногда — нет. Так, если $\alpha_n=\frac{1}{n^2}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$, то частное $\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{1}{n}$ бесконечно мало, а частное $\frac{\beta_n}{\alpha_n}=n$ бесконечно велико. Если же $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n+1}$, то частное $\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1+\frac{1}{n}$ стремится к единице и не является ни бесконечно большой, ни бесконечно малой величиной.

§ 44. Свойства конечных пределов

В этом параграфе, говоря о пределе *функции*, мы имеем в виду *конечный* предел. Аргумент же может стремиться либо к некоторому числу a, либо к ∞.

Свойство 1. *Предел суммы равен сумме пределов*[1])

$$\lim(u+v)=\lim u+\lim v.$$

Доказательство. Пусть $\lim u=b$, $\lim v=c$; тогда u и v можно представить (§ 41, следствие) в виде

$$u=b+\beta, \quad v=c+\gamma,$$

где β, γ — бесконечно малые величины. Следовательно,

$$u+v=(b+c)+(\beta+\gamma).$$

Здесь $\beta+\gamma$ является (§ 43, свойство 1) бесконечно малой величиной. Значит (§ 41, следствие), число $b+c$ есть предел функции $u+v$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти $\lim\frac{3n-1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Решение. Имеем $\frac{3n-1}{n}=3-\frac{1}{n}=3+\left(-\frac{1}{n}\right)$. В этой сумме первое слагаемое (постоянная величина 3) имеет пределом 3; второе слагаемое $-\frac{1}{n}$ имеет пределом 0. Значит, сумма имеет пределом $3+0=3$. Подробная запись выглядит так:

$$\lim\frac{3n-1}{n}=\lim\left(3-\frac{1}{n}\right)=\lim 3+\lim\left(-\frac{1}{n}\right)=3+0=3.$$

---

[1]) Предполагается, что пределы функций u, v существуют. В этом предположении доказывается, что сумма $u+v$ обладает пределом, равным $\lim u+\lim v$. Аналогичные предположения подразумеваются и в дальнейшем.

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2)x = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+2x) =$ $= \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 2x = 4 + 4 = 8.$

Замечание 1. Свойство 1 распространяется на случай любого *неизменного* количества слагаемых.

Свойство 2. *Предел разности равен разности пределов.*

Это свойство доказывается, как предыдущее.

Свойство 3. *Предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim uv = \lim u \lim v.$$

Доказательство. Пусть $\lim u = b$, $\lim v = c$, стало быть,

$$u = b + \beta, \quad v = c + \gamma,$$

где β, γ — бесконечно малые величины. Следовательно,

$$uv = bc + (c\beta + b\gamma + \beta\gamma).$$

Каждая из величин $c\beta$, $b\gamma$, $\beta\gamma$ бесконечно мала (§ 43, свойства 3 и 4а); значит, их сумма $c\beta + b\gamma + \beta\gamma$ тоже бесконечно мала (§ 43, свойство 1). Поэтому (§ 41, следствие) число bc есть предел функции uv.

Замечание 2. Свойство 3 распространяется на случай любого *неизменного* количества сомножителей.

Пример 3. Найти предел последовательности

$$u_1 = 3 \cdot 2, \quad u_2 = 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}, \; u_3 = 2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3}, \; \ldots,$$
$$u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right), \; \ldots$$

Решение. $\lim u_n = \lim \left[\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) \times$ $\times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 1 = 2.$

Свойство 3а. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim (Cu) = C \lim u \quad (C \text{ — постоянная}).$$

Это свойство непосредственно следует из предыдущего, если учесть, что $\lim C = C$.

Пример 4. $\lim\limits_{x \to a} (\pi x) = \lim\limits_{x \to a} \pi \lim\limits_{x \to a} x = \pi a.$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 7} [x(1+x)(2-x)]$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 7} [x(1+x)(2-x)] = \lim\limits_{x \to 7} x \lim\limits_{x \to 7} (1+x) \lim\limits_{x \to 7} (2-x) =$ $= 7 \cdot 8 \cdot (-5) = -280.$

Свойство 4. Если величина v стремится к пределу b, *отличному от нуля*, то обратная величина $\frac{1}{v}$ стремится к пределу $\frac{1}{b}$:

$$\lim \frac{1}{v} = \frac{1}{\lim v} = \frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Доказательство. Предположим сначала, что число b — положительное. Пусть величина v пробегает последовательность v_1, v_2, ..., v_n, ..., стремясь к пределу b. Потребуем, чтобы v_n разнилось от b меньше чем на $0{,}1\,b$[1]). Этому требованию удовлетворят все номера n, превосходящие некоторое число N (§ 32, определение). Значит, все соответствующие значения v_n будут заключены между $0{,}9\,b$ и $1{,}1\,b$:

$$0{,}9\,b < v_n < 1{,}1\,b.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{0{,}9\,b} > \frac{1}{v_n} > \frac{1}{1{,}1\,b}.$$

Отсюда ясно, что величина $\frac{1}{v}$ ограничена.

Совершенно аналогично доказывается ограниченность величины $\frac{1}{v}$ в случае, когда число b отрицательно.

Докажем теперь, что $\lim\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{b}$. Для этого представим разность $\frac{1}{v} - \frac{1}{b}$ в таком виде:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b}(b-v)\frac{1}{v}. \qquad (2)$$

Здесь величина $b-v$ бесконечно мала (так как $\lim v = b$); следовательно, величина $\frac{1}{b}(b-v)$ тоже бесконечно мала (§ 43, свойство 3). А величина $\frac{1}{v}$, по доказанному, ограничена. Следовательно (§ 43, свойство 4), произведение $\frac{1}{b}(b-v)\cdot\frac{1}{v}$ есть бесконечно малая величина. В силу (2) разность $\frac{1}{v} - \frac{1}{b}$ бесконечно мала, т. е.

$$\lim\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{b},$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Вместо $0{,}1\,b$ можно назначить любое другое положительное число, *меньшее*, чем b.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{5x+2}$.

Решение.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{5x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{5x+2}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(5+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Замечание 3. В случае, когда $\lim v = 0$, формула (1), понимаемая буквально, теряет смысл. Однако если вместо $\frac{1}{0}$ написать ∞, то полученное соотношение

$$\lim \frac{1}{v} = \infty, \tag{3}$$

выражающее, что величина $\frac{1}{v}$ бесконечно велика, будет справедливо (§ 42, теорема 2).

Пример 7.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Это означает, что величина $\frac{1}{\cos x}$ бесконечно велика.

Свойство 5. *Предел частного равен частному пределов, если предел делителя не равен нулю*:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}. \tag{4}$$

Доказательство. Основываясь на свойстве 3, а затем на свойстве 4, получаем

$$\lim \frac{u}{v} = \lim\left(u\frac{1}{v}\right) = \lim u \lim \frac{1}{v} = \lim u \frac{1}{\lim v} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

Пример 8. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{6x-1}{3x+4} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(6x-1)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x+4)} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$

Замечание 4. В случае, когда в частном $\frac{u}{v}$ предел делителя v равен нулю, но предел делимого u *отличен от нуля*, формула (4), понимаемая буквально, теряет смысл. Однако если вместо $\frac{\lim u}{0}$ написать ∞, то полученное соотношение

$$\lim \frac{u}{v} = \infty$$

будет справедливо (ср. выше замечание 3).

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}=\dfrac{6}{0}=\infty$. Это означает, что величина $\dfrac{x+4}{x-2}$ бесконечно велика.

Замечание 5. Если в частном $\dfrac{u}{v}$ и делитель v, и делимое u имеют пределом нуль (т. е. бесконечно малы), то никакого общего суждения о пределе частного высказать нельзя (ср. § 43, замечание 3). Если в формулу (4) подставить $\lim u=0$, $\lim v=0$, получим неопределенность

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{0}{0}. \tag{5}$$

Это соотношение не дает ничего нового; но оно и не приведет к ошибке, если мы будем помнить, что «сокращать» на нуль и писать 1 вместо $\dfrac{0}{0}$, разумеется, нельзя.

Польза от записи вида (5) состоит в том, что неопределенность выражения $\dfrac{0}{0}$ служит как бы сигналом, закрывающим прямую дорогу и заставляющим искать обходный путь.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

Решение. Применив формулу (4), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)}=\frac{0}{0}.$$

Неопределенность этого выражения заставляет искать обходный путь. С этой целью выполним следующее предварительное преобразование:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Теперь формула (4) дает

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}}{\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Это значит, что величина $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ бесконечно велика при $x\to 0$.

Заключительное замечание. Разыскание предела функции есть одна из важнейших задач математического анализа. В основе всех методов ее решения лежат свойства, изложенные в настоящем параграфе. Чтобы научиться правильно их применять, надо решить задачи § 44а. В указаниях и в пояснениях к задачам рекомендуются некоторые искусственные (ср. выше пример 10) вспомогательные приемы. Эти приемы невредно заметить, но основное внимание надо обратить на применение вышеизложенных свойств.

§ 44а. Задачи к § 44

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$. 2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$. 3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$.

4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3-a^3}{x-a}$. Указание. Разложить числитель на множители; упростить выражение и применить свойство 1.

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $(a > 0)$. 6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}}$. Указание. Ср. § 44, пример 10.

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$. 8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2-2x}$.

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x+1}{x}$. 10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+3}{3x-5}$.

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+2x+3}{2x^3+3x-5}$. 12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3+4x-7}{9x^3+25x^2-16}$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^5-3x^3}{2x^5+2x^4-11x^3+8x^2+4}$.

14. $\lim (\sqrt{n^2+n}-n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Пояснение. Условия свойства 2 не соблюдены (величины n и $\sqrt{n^2+n}$ имеют *бесконечные* пределы). Рекомендуется помножить и разделить данное выражение на $\sqrt{n^2+n}+n$ («уничтожить иррациональность в числителе»).

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. 16. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x})$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. 18. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x+b}-\sqrt{a+b}}{x^2-a^2}$.

19. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{x}$;

б) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{x}$ (ср. § 35, примеры 1 и 2).

20. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

§ 45. Операции над непрерывными функциями

Теорема 1. Сумма двух, трех и вообще неизменного количества функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в точке a.

Доказательство. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ непрерывны в точке $x=a$. Это значит, что

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=f_1(a); \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=f_2(a); \quad \lim_{x\to a} f_3(x)=f_3(a). \tag{1}$$

По свойству 1 § 44 имеем

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\lim_{x\to a} f_3(x)$$

или в силу (1)

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]=f_1(a)+f_2(a)+f_3(a), \tag{2}$$

а это равенство означает (§ 38, определение), что функция $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ непрерывна в точке a.

Таким же образом доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2. Произведение двух, трех и вообще неизменного количества функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в точке a.

Теорема 3. Частное функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в точке a при условии, что делитель не равен нулю в этой точке.

Теорема 4. Пусть некоторая функция $F(x)$ рассматривается как сложная функция $f[\varphi(x)]$, и пусть $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=a$; ее значение $\varphi(a)$ обозначим через b. Пусть, далее, функция $f(u)$ непрерывна в точке b. Тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x=a$.

Пример. Функция $F(x)=\lg\cos x$ составляется из функций $\varphi(x)=\cos x$, $f(u)=\lg u$ по формуле $F(x)=f[\varphi(x)]$. Функция $\varphi(x)=\cos x$ непрерывна в точке $x=0\ (=a)$; при этом $\varphi(a)=1$ $(=b)$. Далее, функция $f(u)=\lg u$ непрерывна в точке $u=1\ (=b)$. Теорема 4 утверждает, что функция $F(x)=\lg\cos x$ непрерывна в точке $x=0$.

Возьмем теперь точку $x=\frac{\pi}{2}\ (=a)$. Функция $\varphi(x)=\cos x$ непрерывна и в этой точке, причем $\varphi(a)=0\ (=b)$. Но функция $f(u)=\lg u$ не является непрерывной в точке $u=0\ (=b)$ (она не определена в этой точке). На основании теоремы 4 нельзя сделать никакого заключения, так как одно из условий теоремы не соблюдено. Но в данном примере ясно, что функция $F(x)$ тоже не является непрерывной в точке $x=0$.

Доказательство теоремы 4. Пусть x стремится к a, пробегая некоторую последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (произвольно выбранную). По условию функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=a$. Это значит (§ 38, определение), что функция $\varphi(x)$, пробегая значения $u_1=\varphi(x_1)$, $u_2=\varphi(x_2), \ldots$, стремится к числу $\varphi(a)$, которое мы обозначили буквой b. При этом функция $f(u)$ пробегает значения $f(u_1), f(u_2), \ldots$, которые стремятся к $f(b)$ (опять-таки в силу непрерывности функции $f(u)$ в точке b). Иными словами, последовательность значений $f[\varphi(u_1)], f[\varphi(u_2)], \ldots$ имеет пределом число $f[\varphi(a)]$:

$$\lim f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(a)]. \tag{3}$$

А так как формула (3) имеет место при любом выборе последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, лишь бы она сходилась к пределу a, то (§ 32, определение)

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)] = f[\varphi(a)]. \tag{4}$$

А формула (4) устанавливает, что функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x=a$ (§ 38, определение). Теорема 4 доказана.

§ 46. Леммы о пределах

Лемма 1. Пусть величина v, стремящаяся к пределу b, не превосходит числа M. Тогда ее предел тоже не превосходит M.

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что число b превосходит число M. Стало быть, точка b (рис. 78) лежит справа от точки M. Между тем точка v по условию *не*

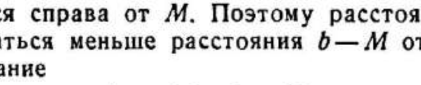


Рис. 78.

может оказаться справа от M. Поэтому расстояние между v и b *не может* оказаться меньше расстояния $b-M$ от M до b. Иными словами, требование

$$|v-b| < b-M,$$

является *невыполнимым*, а это значит, что число b *не является* пределом величины v. Мы пришли к противоречию с условием леммы. Значит, наше предположение несостоятельно.

Лемма 1а. Пусть величина v, стремящаяся к пределу b, не меньше числа m. Тогда ее предел тоже не меньше чем m.

Доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. Пусть значение функции $f(x)$ при любом из рассматриваемых значений аргумента заключено между соответствующими значениями функций $u(x)$ и $v(x)$, и пусть, кроме того, обе функции u, v стремятся к одному и тому же пределу при $x \to a$ (или при $x \to \infty$). Тогда функция $f(x)$ стремится к тому же пределу.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$, стремящихся к пределу a. Соответствующие значения функций $u(x)$ и $v(x)$ будут стремиться к одному и тому же числу b. Назначим произвольное положительное число ε и потребуем, чтобы значение $u(x_n)$ отстояло от b на расстояние, меньшее ε. Такое же требование предъявим к значению $v(x_n)$. Первому требованию удовлетворят все номера n, превышающие некоторое число N_1, второму — все номера n, превышающие некоторое число N_2. Числа N_1, N_2 могут оказаться неравными; тогда возьмем большее из них и обозначим его N. Все номера, превышающие N, удовлетворят обоим требованиям, т. е. для них оба значения $u(x_n)$ и $v(x_n)$ будут отстоять от b на расстояние, меньшее чем ε. А так как значение $f(x_n)$ по условию заключено между $u(x_n)$ и $v(x_n)$, то и оно будет отстоять от b меньше чем на ε. Стало быть, величина $f(x)$ стремится к пределу b, что и требовалось доказать.

Замечание. Для функций натурального аргумента лемма 2 перефразируется так: пусть каждый член y_n последовательности $y_1, y_2, y_3, \ldots$ заключен между членами u_n, v_n двух других последовательностей, и пусть обе последние сходятся к одному и тому же пределу b; тогда последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ сходится к тому же пределу.

Доказательство остается слово в слово тем же.

Пример. Найти предел последовательности

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}};$$

$$y_4 = \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{19}} + \frac{1}{\sqrt{20}}; \ \ldots;$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}; \ \ldots$$

Решение. Имеем

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}} > \frac{3}{\sqrt{12}};$$

и вообще

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Значит, каждый член y_n заключен между соответствующими членами двух последовательностей

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{и} \quad v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

При этом имеем

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1; \qquad \lim v_n = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Стало быть, обе последовательности u_n, v_n сходятся к пределу единица. В силу леммы 2 данная последовательность y_n сходится к тому же пределу: $\lim y_n = 1$.

§ 47. Признак существования предела

При разыскании предела часто бывает важно заранее удостовериться в том, что искомый предел действительно существует. Приведем здесь без доказательства один из признаков существования предела.

Всякая возрастающая последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *имеет предел — конечный или бесконечный.*

Если последовательность ограничена, т. е. все ее члены меньше некоторого числа M (рис. 79, *а* и 79, *б*), то она имеет конечный предел b, не превосходящий M:

$$\lim y_n = b \leqslant M.$$

Если последовательность не ограничена, то

$$\lim y_n = +\infty.$$

Аналогичный признак имеет место для убывающей последовательности: если все ее члены больше некоторого числа m, то $\lim y_n \geqslant m$; в противном случае $\lim y_n = -\infty$.

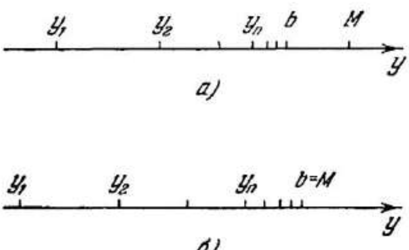


Рис. 79.

Замечание 1. Сформулированный выше признак допускает некоторое расширение, а именно: вместо возрастающей последовательности можно рассматривать так называемую *неубывающую* последовательность, т. е. такую последовательность, где член u_{n+1} не обязательно больше, чем

u_n, но может и равняться ему. Точно так же вместо убывающей последовательности можно рассматривать *невозрастающую* последовательность. В обобщенном виде признак формулируется так: *всякая неубывающая и всякая невозрастающая последовательность имеет предел — конечный или бесконечный.*

Замечание 2. Для функции непрерывного аргумента признак перефразируется так: всякая неубывающая функция $f(x)$ стремится (при $x \to a$ или при $x \to +\infty$) к пределу — конечному или бесконечному. Если при всех рассматриваемых значениях x имеем $f(x) < M$, то $\lim f(x) \leqslant M$; если функция $f(x)$ не ограничена, то $f(x) = +\infty$. Аналогично и в случае невозрастающей функции.

§ 48. Число e

Найдем предел последовательности

$$u_1 = (1+1)^1 = 2, \quad u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4},$$
$$u_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2\frac{10}{27}, \ \ldots, \ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ \ldots \qquad (1)$$

Для решения задачи придется предварительно доказать, что данная последовательность, действительно, обладает пределом, и при том конечным. С этой целью докажем: а) что последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — возрастающая, б) что она ограничена.

а) Последовательность возрастающая. По формуле бинома имеем

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[(n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

Если выписать аналогичное разложение для члена u_{n+1}, то увидим, что первые два слагаемых остаются теми же, третье слагаемое $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ больше, чем третье слагаемое $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ в разложении u_n, четвертое слагаемое больше четвертого и т. д. до $(n+1)$-го слагаемого включительно. Сверх того, в разложение u_{n+1} войдет одно лишнее слагаемое $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Значит, $u_{n+1} > u_n$, что и утверждалось.

б) Последовательность ограничена. Сохраним в (2) первое и второе слагаемые, и в каждом из следующих заменим множители $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ и т. д. единицами. От этой замены сумма (2) увеличится; поэтому (начиная с $n=2$) имеем

$$u_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{1!}=1;\ \frac{1}{2!}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3};\ \ldots;\ \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим, что

$$u_n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]. \tag{5}$$

Сумма геометрической прогрессии, заключенной в квадратных скобках, составляет $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, т. е. меньше чем 2. Следовательно, $u_n<3$, т. е. последовательность ограничена.

На основании признака существования предела (§ 47) последовательность (1) обладает конечным пределом, меньшим чем 3. Число, к которому стремится u_n, входит во многие математические формулы, и потому ему присвоено специальное обозначение e[1]). Число e иррационально, т. е. его нельзя точно выразить конечной дробью. Покажем, как вычислить его с любой требуемой степенью точности.

в) Вычисление e. Грубое приближение числа e мы уже имеем: так как последовательность u_n возрастающая, то ее предел, очевидно, больше любого члена, скажем члена $u_2=2{,}25$. С другой стороны, по доказанному $e<3$.

Чтобы найти более точные границы, сохраним неизменными в сумме (2) не два, как в пункте б), а большее число слагаемых, скажем 5 (предполагая, что $n>5$). Во всех следующих слагаемых заменим множители $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ единицами. От этого сумма (2) увеличится; поэтому

$$u_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{6}$$

---

[1]) Начальная буква слова exponentialis — показательный: число e часто принимается за основание показательной (и логарифмической) функции.

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!\,6}<\frac{1}{5!\,5};\ \frac{1}{7!}=\frac{1}{5!\,6\cdot 7}<\frac{1}{5!\,5^2};\ \ldots;\ \frac{1}{n!}<\frac{1}{5!\,5^{n-5}}. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$u_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{5!}\left[1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-5}\right]. \qquad (8)$$

Сумма геометрической прогрессии, заключенной в квадратных скобках, составляет $\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-4}\right]:\left(1-\frac{1}{5}\right)$, т. е. она меньше, чем $1:\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}$. Значит, последний член в формуле (8) меньше, чем $\frac{1}{5!}\cdot\frac{5}{4}=\frac{1}{4!\cdot 4}=\frac{1}{96}$:

$$\frac{1}{5!}\left[1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-5}\right]<\frac{1}{96}. \qquad (9)$$

Учитывая (9), перепишем (8) в виде

$$u_n-\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\right]<\frac{1}{96}. \qquad (10)$$

Пока мы шли тем же путем, что в пункте б). Теперь, применив к неравенству (10) лемму 1 § 46, заключаем, что левая часть (10) стремится к пределу, не превышающему $\frac{1}{96}$ (это заключение было бы неправомерным, если бы мы *предварительно* не доказали *существование* предела $\lim u_n=e$). Вычислив предел вычитаемого, стоящего в квадратных скобках по общим правилам § 44, мы получаем, что

$$e-\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right]<\frac{1}{96}. \qquad (11)$$

С другой стороны, u_n больше, чем вычитаемое в формуле (10) (так как последнее получается из выражения (2) путем отбрасывания *положительных* слагаемых); значит,

$$u_n-\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\right]>0.$$

Применив к этому неравенству лемму 1а § 46, находим, что

$$e-\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right]>0. \qquad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12), находим, что число e заключено в следующих границах:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}<e<\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right]+\frac{1}{4!4}. \qquad (13)$$

Отсюда ясно, что можно положить

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} \approx 2,71, \qquad (14)$$

причем погрешность приближенного равенства не привысит

$$\frac{1}{4!4}=\frac{1}{96}.$$

Вообще, взяв произвольное натуральное число k, мы, так же как выше, докажем, что число e заключено в границах

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}<e<\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right]+\frac{1}{k!k}. \qquad (15)$$

Если, например, положить $k=10$, то получится приближенное равенство

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}, \qquad (16)$$

погрешность которого не превысит $\frac{1}{10!10} \approx 0,000\,000\,03$, и по формуле (16) без особого труда найдем, что

$$e \approx 2,7182818,$$

где все цифры верные.

Заметим еще, что

$$\lg e \approx 0,4342945.$$

Замечание. Число e является не только пределом функции $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ натурального аргумента n, но также пределом функции $v_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Действительно, заменив в (15) букву k буквой n, мы получим неравенство

$$\left|\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)-e\right|<\frac{1}{n!n} \qquad (17)$$

или, короче, $\left|v_n-e\right|<\frac{1}{n!n}$. А так как величина $\frac{1}{n!n}$ бесконечно малая, то величина v_n-e и подавно бесконечно мала, т. е.

$$\lim\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

§ 49. Предел $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ при бесконечно малом α

В этом параграфе мы докажем формулу

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{1/\alpha}=e. \tag{1}$$

Введем обозначение $\frac{1}{\alpha}=x$. При $\alpha\to 0$ величина x бесконечно велика; и формула (1) принимает вид

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{2}$$

Эта формула будет доказана, если мы установим, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{3}$$

и что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{4}$$

а) Доказательство формулы (3). Если величина x пробегает последовательность $x_1, x_2, x_3,\ldots$, состоящую из натуральных чисел, то функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, по доказанному в § 48, стремится к пределу e. При этом несущественно, чтобы натуральные числа x_1, x_2, $x_3,\ldots$ следовали друг за другом в порядке их возрастания; некоторые натуральные числа могут и не входить в последовательность x_1, x_2, $x_3,\ldots$, другие могут повторяться. Существенно лишь, чтобы $\lim x_n=+\infty$.

Пусть теперь x пробегает последовательность произвольных (не обязательно натуральных) чисел, стремящихся к $+\infty$. Можно считать, что все эти числа больше единицы[1]). Тогда целая часть величины x есть некоторое натуральное число m. Значит, x заключено между натуральными числами m, $m+1$:

$$m\leqslant x<m+1. \tag{5}$$

Докажем, что величина $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ заключена между следующими границами:

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}. \tag{6}$$

Сопоставим выражения $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}$ и $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. У первого основание $1+\frac{1}{m+1}$ меньше, чем у второго, ибо в силу (5) $\frac{1}{m+1}<\frac{1}{x}$. Показа-

---

[1]) Ведь требованию $x_n>1$ безусловно удовлетворяют все номера, превосходящие некоторое число N (§ 36, определение). Значит, если первые N членов отбросить (что никакого влияния на результат не окажет), то останутся только члены, большие единицы.

тель же m во всяком случае не превосходит показателя x. Значит, первая величина меньше второй. Таким же образом доказывается и второе неравенство (6).

Заметим теперь, что при $x \to +\infty$ величины m и $m+1$ тоже стремятся к $+\infty$. Докажем, что при этом обе границы $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ и $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}$ стремятся к числу e. Действительно,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right] = \\ = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\lim\left(1+\frac{1}{m}\right) = e\cdot 1 = e; \qquad (7)$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)} = \frac{e}{1} = e. \qquad (8)$$

Теперь применим к неравенству (6) лемму 2 § 46 (ср. замечание к этой лемме); учитывая (7) и (8), получим, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

б) Доказательство формулы (4). С целью свести дело к формуле (3) введем вспомогательную величину $y = -x-1$, которая, очевидно, стремится к $+\infty$ при $x \to -\infty$. Имеем

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right).$$

В силу (3) первый сомножитель равен e, так что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\cdot 1 = e.$$

§ 50. Предел $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$. Натуральные логарифмы

Найдем $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}$, где логарифм берется при произвольном основании $a > 0$. Имеем

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}.$$

Так как величина $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ при $\alpha \to 0$ стремится к e (§ 49), то ее логарифм стремится к $\log_a e$ (вследствие непрерывности логарифмической функции). Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e. \tag{1}$$

К формуле (1) сводится ряд задач математического анализа. Поэтому выгодно принять за основание логарифмов такое число, при котором эта формула имеет наиболее простой вид. Таким числом является, очевидно, e.

Логарифм числа x по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$[1]).

Положив в формуле (1) $a=e$, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1. \tag{2}$$

Таблица логарифмической функции $\ln x$ и таблица обратной функции e^x помещены в конце книги (стр. 577—582).

Нередко требуется вычислить десятичный логарифм некоторого числа, зная его натуральный логарифм, или, наоборот, вычислить натуральный логарифм по десятичному. Полезно запомнить следующие правила.

Правило 1. Десятичный логарифм любого числа получается из его натурального логарифма умножением на «модуль перехода» $M=\lg e\approx 0{,}43429$:

$$\lg x=M\ln x. \tag{3}$$

Действительно, согласно определению логарифма имеет место соотношение

$$e^{\ln x}=x. \tag{4}$$

Если прологарифмировать его по основанию 10, получим формулу (3). Из (3) вытекает второе правило.

Правило 2. Натуральный логарифм любого числа получается из его десятичного логарифма умножением на $\frac{1}{M}\approx 2{,}30259$:

$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x. \tag{5}$$

Замечание 1. Число $\frac{1}{M}$ есть не что иное, как $\ln 10$, в чем можно убедиться, если прологарифмировать соотношение $x=10^{\lg x}$ по основанию e и полученную формулу сопоставить с (5).

---

[1]) l и n — начальные буквы латинских слов logarithmus (логарифм) naturalis (натуральный). Натуральные логарифмы иногда называют *неперовыми* по имени шотландца Джона Непера (1550—1617) — составителя впервые опубликованных таблиц логарифмов. Однако если можно говорить об основании этих логарифмов (у Непера логарифм не определялся как показатель степени), то таким основанием в таблицах Непера служит число, очень близкое к $1/e$, а не число e.

Для умножения на M и на $\frac{1}{M}$ можно пользоваться специальными таблицами (стр. 581).

Пример 1. Найти $\ln 100$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\ln 100 \approx 2{,}3026 \cdot 2 \approx 4{,}605.$$

Пример 2. Вычислить e^3 с помощью таблицы десятичных логарифмов.

Решение.

$$\lg(e^3) = 3\lg e = 3M \approx 1{,}3029; \quad e^3 \approx 20{,}09.$$

Пример 3. Десятичный логарифм некоторого числа равен 0,5041. Найти его натуральный логарифм.

Решение.

$$\ln x = \frac{1}{M}\lg x \approx 2{,}3026 \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161.$$

Это произведение удобно вычислить с помощью таблицы на стр. 581, расположив материал так:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{M} \cdot 0{,}50 \quad\ \approx 1{,}1513 \\
\frac{1}{M} \cdot 0{,}0041 \approx 0{,}0094 \\
\hline
\frac{1}{M} \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}1607
\end{array}$$

Пример 4. Натуральный логарифм некоторого числа равен 2,7080. Найти его десятичный логарифм.

Решение.

$$\lg x = M \ln x \approx 0{,}43429 \cdot 2{,}708 \approx 1{,}176.$$

Это произведение удобно вычислить с помощью таблицы (стр. 581), расположив материал так:

$$\begin{array}{lr}
M \cdot 2{,}7 \quad\ \approx & 1{,}1726 \\
M \cdot 0{,}0080 \approx & 35 \\
\cline{2-2}
 & 1{,}1761
\end{array}$$

Замечание 2. Чтобы по ошибке не умножить на M вместо $\frac{1}{M}$ (или наоборот), полезно иметь в виду, что натуральный логарифм всякого числа *больше* его десятичного логарифма $\left(\text{например, } \lg 10 = 1, \text{ а } \ln 10 = \frac{1}{M} \approx 2{,}30259 > 1\right)$.

§ 50а. Задачи к §§ 48—50

Без помощи таблиц найти:

1. $\ln 1000$. **2.** $\ln 0{,}01$. **3.** $\ln\sqrt[3]{10}$.

Пользуясь таблицей *десятичных* логарифмов, найти следующие натуральные логарифмы (результаты проверить по таблице натуральных логарифмов):

4. $\ln 2$. **7.** $\ln 87{,}4$.
5. $\ln 15$. **8.** $\ln 8{,}74$.
6. $\ln 874$. **9.** $\ln 0{,}874$.

Логарифмируя по основанию 10 и пользуясь таблицами десятичных логарифмов, найти следующие числа (результаты проверить по таблице натуральных антилогарифмов):

10. e^3. **11.** $e^{0{,}23}$.

Найти следующие пределы:

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$. **15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. **17.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}$.

§ 51. Предел $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при бесконечно малом α

В этом параграфе мы докажем, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

При этом мы будем опираться на следующие геометрические факты:

1. Дуга $\breve{BB'}$, меньшая полуокружности (рис. 80), короче ломаной BCB', составленной касательными BC, $B'C$, т. е. $2\breve{AB}<2BC$; значит,

$$\breve{AB}<BC. \tag{1}$$

2. Дуга $\breve{BB'}$ больше хорды BB'; значит,

$$\breve{AB}>DB. \tag{2}$$

Соединим центр O с точкой C и обозначим через α положительный угол $\angle COB$ (измеренный в радианах). Примем радиус окружности за единицу длины; тогда

$$AB=\alpha,\quad BC=\operatorname{tg}\alpha,\quad DB=\sin\alpha,$$

а неравенства (1) и (2) примут вид

$$\alpha<\operatorname{tg}\alpha, \qquad (1')$$

$$\alpha>\sin\alpha. \qquad (2')$$

Заметив это, перейдем к разысканию предела частного $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Если заменить делитель α большей величиной $\operatorname{tg}\alpha$, то частное уменьшится; следовательно,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\cos\alpha.$$

Если же заменить α меньшей величиной $\sin\alpha$, то частное увеличится; следовательно,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Стало быть, отношение $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ заключено между $\cos\alpha$ и 1:

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1. \qquad (3)$$

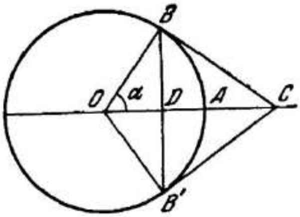


Рис. 80.

Это неравенство доказано пока только для положительных значений α. Но оно справедливо и для отрицательных α.

Действительно, при отрицательном α величина $\alpha'=-\alpha$ положительна. Следовательно,

$$\cos\alpha'<\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}<1$$

или

$$\cos(-\alpha)<\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}<1.$$

А отсюда снова получается неравенство (3).

Итак, значение функции $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при любом значении α, меньшем $\frac{\pi}{2}$ по абсолютной величине, заключено между $\cos\alpha$ и единицей. Но обе эти величины при $\alpha\to 0$ имеют пределом единицу; поэтому (§ 46, лемма 2)

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (4)$$

Замечание. Выше (§ 25, пояснение) мы обратили внимание читателя на то, что выбор радиана в качестве единицы измерения угла обусловлен практическими соображениями. Теперь видно, какие преимущества при этом достигаются: если за единицу измерения угла принять, скажем, градус, то вместо формулы (4) получится формула

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$$

и многие дальнейшие формулы значительно усложнятся. Аналогичные соображения привели к выбору числа e в качестве основания логарифмов (см. § 50).

§ 52. Эквивалентные бесконечно малые величины

Определение. Функции α, β аргумента x называются *эквивалентными*[1]) при $x \longrightarrow a$ (или при $x \longrightarrow \infty$), если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к единице при $x \longrightarrow a$ (или при $x \longrightarrow \infty$):

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

При этом отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ тоже стремится к единице $\left(\text{ибо } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(1 : \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 : \lim \frac{\beta}{\alpha}\right)$.

На практике особенно часто имеют дело с эквивалентными *бесконечно малыми* величинами.

Пример 1. Величины x и $\sin x$, бесконечно малые при $x \longrightarrow 0$, эквивалентны друг другу, так как (§ 51) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Бесконечно малые $3x$ и $\sin 3x$ тоже эквивалентны; точно так же эквивалентны друг другу бесконечно малые $\sin^2 x$ и x^2.

Эквивалентность мы будем обозначать тем же символом $\approx$, что и приближенное равенство. Дело в том, что эквивалентные величины и в самом деле приближенно равны друг другу, причем степень точности повышается по мере их приближения к своему общему пределу. Таким образом,

$$\sin x \approx x, \quad \sin 2x \approx 2x, \quad \sin^2 x \approx x^2. \tag{1}$$

Пример 2. Величина $\ln(1+\alpha)$, бесконечно малая при $\alpha \longrightarrow 0$, эквивалентна α:

$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha. \tag{2}$$

Действительно, по доказанному в § 50, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

---

[1]) Латинский термин «эквивалентный» означает «равноценный».

Соотношение (2) можно рассматривать также как приближенное равенство; по мере приближения величин α, $\ln(1+\alpha)$ к их общему пределу (к нулю) степень точности повышается, т. е. относительная погрешность приближенного равенства (2) уменьшается. Так, при $\alpha=0,1$ соотношение (2) дает

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1. \qquad (3)$$

Более точное значение $\ln 1{,}1$ есть 0,0953. Как видим, относительная погрешность приближенного равенства (3) составляет примерно 5%. Положим теперь $\alpha=0{,}01$. Тогда получим приближенное равенство

$$\ln 1{,}01 \approx 0{,}01.$$

Более точное значение $\ln 1{,}01$ есть 0,00995, так что теперь относительная погрешность составляет только 0,5%.

Пример 3. Величина e^x-1, бесконечно малая при $x \to 0$, эквивалентна x:

$$e^x - 1 \approx x. \qquad (4)$$

Это соотношение получается из (2), если положить $\ln(1+\alpha)=x$. Тогда $1+\alpha=e^x$, откуда $\alpha=e^x-1$.

Из (4) получаем приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + x. \qquad (5)$$

Величины e^x и $1+x$ при $x \to 0$ не являются бесконечно малыми; тем не менее они эквивалентны, ибо

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1+x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} e^x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Если в приближенном равенстве (5) положить $x=0{,}25$, то получаем

$$e^{0,25}\left(=\sqrt[4]{e}\right) \approx 1{,}25.$$

Более точное значение $e^{0,25} \approx 1{,}2840$; относительная погрешность составляет 2,7%. Если же положить $x=0{,}05$, то получим

$$e^{0,05}\left(=\sqrt[20]{e}\right) \approx 1{,}05.$$

Более точное значение $e^{0,05} \approx 1{,}0513$, так что относительная погрешность составляет 0,13%, т. е. теперь она примерно в 20 раз меньше.

Замечание 1. Из соотношений $\alpha \approx \beta$, $\beta \approx \gamma$ вытекает соотношение $\alpha \approx \gamma$.

Действительно, $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$. По условию $\lim \frac{\gamma}{\beta} = 1$, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. Следовательно, $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\gamma}{\beta} \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 \cdot 1 = 1$, т. е. $\alpha \approx \gamma$.

Теорема. Если $\alpha\approx\alpha'$ и $\beta\approx\beta'$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$, т. е. *предел частного не изменится, если делимое и делитель заменить соответственно эквивалентными величинами.*

Доказательство. $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\alpha'}{\beta'}\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\beta}=$ $=1.\ \lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot 1=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Так как $\sin 3x\approx 3x$ (при $x\to 0$), то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=0{,}6$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$.

Решение. Так как $\alpha\approx\sin\alpha$, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1. \tag{6}$$

Из (6) следует соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha \qquad (\text{при } \alpha\to 0). \tag{7}$$

Пример 7. Найти без таблиц приближенное значение $\operatorname{tg} 9°$.

Решение. Рассматривая формулу (7) как приближенное равенство, получаем

$$\operatorname{tg} 9°=\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}\cdot 9=\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}\approx\frac{\pi}{20}\approx\frac{3,14}{20}=0,157.$$

Сопоставляя с табличным значением $\operatorname{tg} 9°\approx 0,1584$, видим, что относительная погрешность составляет около 1%.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}$.

Решение.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Замечание 2. Из (8) вытекает, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[\frac{1-\cos\alpha}{\frac{1}{2}\alpha^2}\right]=1$, т. е. что

$$1-\cos\alpha\approx\frac{1}{2}\alpha^2 \ (\text{при } \alpha\to 0), \tag{9}$$

откуда получается приближенное равенство

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2. \tag{10}$$

Пример 9. Найти без таблиц приближенное значение $\cos 18°$.

Решение. $\cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{100} \approx 1 - \frac{3{,}14^2}{2\cdot 100} \approx 0{,}9507$.

Сопоставляя с табличным значением $\cos 18° \approx 0{,}9511$, видим, что погрешность составляет 0,04%.

Замечание 3. Формула (10), равно как (2), (5) и (7), будет по-настоящему полезна лишь тогда, когда можно будет судить о степени ее точности, *не прибегая к сравнению с табличным значением*. Как это делается, мы узнаем позднее.

§ 52а. Задачи к §§ 51—52

Определить, эквивалентны ли при $\alpha \to 0$ следующие величины:

1. $\sin 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$.
2. $2\alpha - 3\alpha^2$ и $2\alpha + 5\alpha^2$.
3. $2\alpha^2 - 3\alpha$ и $2\alpha^2 + 5\alpha$.
4. $\ln(1+\alpha^2)$ и $\operatorname{tg}^2\alpha$.
5. $\ln(1-\alpha^3)$ и α^3.
6. $1 - \cos\alpha$ и $\frac{1}{2}\alpha$.
7. Найти без таблиц приближенные значения

$$\ln 1{,}02, \quad \ln 0{,}97, \quad \ln 0{,}986,$$
$$\lg 1{,}02, \quad \lg 0{,}97, \quad \lg 0{,}986.$$

Результаты проверить по таблицам.

Указание. Ср. § 50, пример 4.

8. Найти без таблиц приближенные значения

$$\sin 10°, \quad \sin 4°30', \ \cos 27°, \ \cos 10°.$$

Результаты проверить по таблицам.

9. Найти без таблиц приближенные значения

$$e^{0,5}, \quad e^{0,1}, \quad e^{0,01}.$$

Результаты проверить по таблицам.

В задачах 10—16 требуется найти пределы:

10. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.
11. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^3}{1-\cos\alpha}$.
12. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-\cos\alpha}$.
13. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}$.
14. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\frac{\alpha}{2}}$.
15. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}$.
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

§ 53. Сравнение бесконечно малых величин

Определение 1. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало $\left(\text{т. е. если } \lim\frac{\beta}{\alpha}=0, \text{ а значит, } \lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty\right)$, то говорят, что β *имеет высший порядок малости относительно* α или что α *имеет низший порядок малости относительно* β.

Определение 2. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ бесконечно малых величин α, β стремится к конечному пределу c, отличному от нуля и, значит, отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ стремится к конечному пределу $\frac{1}{c}$, отличному от нуля, то говорят, что *величины* α *и* β *имеют одинаковый порядок малости.*

Если же отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ не стремится ни к какому пределу, то говорят, что α и β *несравнимы.*

Замечание 1. Эквивалентные бесконечно малые величины, в силу определения 2, имеют одинаковый порядок малости.

Пример 1. Величина $1-\cos\alpha$, бесконечно малая при $\alpha\to 0$, имеет высший порядок малости относительно бесконечно малой величины $\sin\alpha$. Наоборот, $\sin\alpha$ имеет низший порядок относительно $1-\cos\alpha$. Действительно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\infty.$$

Пример 2. Величины $1-\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\alpha$, бесконечно малые при $\alpha\to 0$ имеют одинаковый порядок малости. Действительно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2.$$

Теорема 1. Если бесконечно малые α, β эквивалентны, то разность $\alpha-\beta$ имеет высший порядок малости относительно α, а также относительно β.

Доказательство. По условию $\alpha\approx\beta$, т. е. $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$. Значит,

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=0,$$

т. е. $\alpha-\beta$ имеет высший порядок относительно α. Таким же образом докажем, что $\alpha-\beta$ имеет высший порядок относительно β.

Пример 3. Так как $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$ при $\alpha \to 0$, то $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$ имеет высший порядок относительно $\operatorname{tg}\alpha$, а также относительно $\sin\alpha$.

Теорема 2 (обратная). Если разность $\alpha - \beta$ бесконечно малых величин α, β имеет высший порядок относительно одной из них (тогда она имеет высший порядок также относительно другой), то $\alpha \approx \beta$.

Доказательство. Пусть $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$; тогда $\lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$; следовательно, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, т. е. $\alpha \approx \beta$.

Пример 4. Бесконечно малая величина $20\alpha^3$ имеет высший порядок относительно α^2. Поэтому бесконечно малая $\alpha^2 + 20\alpha^3$, разнящаяся от α^2 на $20\alpha^3$, эквивалентна бесконечно малой α^2, т. е. $\alpha^2 + 20\alpha^3 \approx \alpha^2$.

Численное выражение порядка малости. При $\alpha \to 0$ каждая из бесконечно малых величин

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots$$

(начиная со второй) имеет высший порядок относительно любой предшествующей величины. И вообще из двух бесконечно малых α^m, α^n (где m, n — произвольные положительные числа) высший порядок имеет та, у которой показатель больше. Так, $\alpha^{3/4}$ имеет высший порядок относительно $\alpha^{2/3}$. Поэтому естественно приписать «второй порядок малости» величине α^2 (а также всякой величине, имеющей с величиной α^2 одинаковый порядок малости) «полуторный порядок» — величине $\alpha^{3/2}$ (и всякой величине, имеющей с $\alpha^{3/2}$ одинаковый порядок) и т. д. Так возникает следующее определение.

Определение 3. Говорят, что *бесконечно малая величина β имеет порядок m относительно бесконечно малой α*, если отношение $\frac{\beta}{\alpha^m}$ имеет конечный предел, отличный от нуля.

Пример 5. Величина $5\alpha^3$, бесконечно малая при $\alpha \to 0$, имеет третий порядок малости относительно α; величина $0{,}5\sqrt{\alpha}$ — порядок $\frac{1}{2}$; величина $12\alpha\sqrt{\alpha}$ — порядок $\frac{3}{2}$.

Пример 6. Величина $0{,}001 \sin\frac{\alpha}{2}$ имеет при $\alpha \to 0$ первый порядок малости относительно α, так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{0{,}001 \sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = 0{,}0005 \neq 0;$$

величина $1 - \cos\alpha$ — второй порядок, так как $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$; величина $(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)$ — третий порядок (§ 52а, задача 15).

При разыскании порядка малости данного выражения полезно иметь в виду следующие правила, доказательство которых предоставляется читателю.

Правило 1. Порядок малости произведения бесконечно малых величин равен сумме порядков сомножителей.

Пример 7. Величина $\sin\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)$, бесконечно малая при $\alpha\to 0$, имеет третий порядок относительно α, так как $\sin\frac{\alpha}{2}$ имеет первый порядок малости, а $(1-\cos\alpha)$ — второй.

Правило 2. Произведение бесконечно малой величины β на величину, стремящуюся к ненулевому конечному пределу, имеет тот же порядок, что β.

Пример 8. Величина $\cos^2\alpha\sin^2\alpha$, бесконечно малая при $\alpha\to 0$, есть произведение величины $\sin^2\alpha$, имеющей второй порядок (относительно α), на величину $\cos^2\alpha$, стремящуюся к пределу единица. Правило 2 утверждает, что величина $\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ имеет второй порядок малости.

Правило 3. Если порядок *одного* из членов суммы (*главная часть суммы*) ниже порядка каждого из остальных членов, то вся сумма эквивалентна главной своей части и, значит, имеет тот же порядок малости.

Пример 9. В сумме $3\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha+20\alpha^4$ первый член при $\alpha\to 0$ имеет второй порядок (относительно α), второй член — третий порядок и третий член — четвертый порядок. Первый член $3\sin^2\alpha$ есть главная часть суммы; вся сумма имеет второй порядок малости относительно α.

Замечание 2. Если два (или три, четыре и т. д.) члена суммы имеют один и тот же порядок малости m, а остальные — более высокий порядок, то порядок суммы не ниже чем m, *но может быть и выше чем m.*

Пример 10. В сумме $\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\alpha^2$ первый и второй члены имеют первый порядок относительно α, а последний член — второй порядок. Однако вся сумма имеет не первый, а второй порядок, так как *сумма* двух первых членов имеет третий порядок малости (§ 52а, задача 15); так что в сумме $(\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\alpha^2)$ главной частью является член α^2.

Правило 3а. Многочлен, расположенный по возрастающим степеням *бесконечно малой величины* α, эквивалентен своему *первому члену*.

Пример 11. $0{,}3\alpha^2-2{,}7\alpha^4+3\alpha^5\approx 0{,}3\alpha^2$.

Замечание 3. Многочлен, расположенный по возрастающим степеням *бесконечно большой величины* x, эквивалентен своему *последнему члену*.

Пример 12. При $x \to \infty$ величина $6+0,3x^2-2,7x^4+3x^5$ эквивалентна величине $3x^5$. В самом деле,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6+0,3x^2-2,7x^4+3x^5}{3x^5}=\lim_{x\to\infty}\left(2\frac{1}{x^5}+0,1\frac{1}{x^3}-0,9\frac{1}{x}+1\right)=1.$$

Принимая во внимание замечание 3, лучше записывать многочлен, аргументом которого служит бесконечно большая величина, не по возрастающим, а по убывающим степеням аргумента.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-0,8x+1}{8x^2+12x-5}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-0,8x+1}{8x^2+12x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{8x^2}=0,5.$

Пример 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{x^2}=\infty.$

Пример 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

§ 53a. Задачи к § 53

Определить порядок малости нижеследующих величин относительно бесконечно малой α:

1. $12\sqrt{\alpha}$.
2. $3\alpha^3+7\alpha^2$.
3. $(1-\alpha)^2-(1+2\alpha)^2$.
4. $\sin^2\alpha\,(1-\cos\alpha)$.
5. $(\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha)(1-\cos\alpha)$.
6. $\alpha^2(e^\alpha-1)$.
7. α^2e^α.
8. $\alpha\ln(1-\alpha)$.
9. $\ln\left(1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
10. $\sin 2\alpha-2\sin\alpha$.
11. $\alpha^3+2\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

12. Определить порядок малости (при $\alpha\to 0$): а) α^6 относительно α^2; б) $2\alpha^3$ относительно $5\alpha^2$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha$ относительно $\sin^3\alpha$; г) $1-e^{-\alpha}$ относительно α^3.

13. Определить порядок малости хорды бесконечно малой дуги окружности относительно стрелки той же дуги.

14. Определить порядок малости разности периметров вписанного и описанного правильных n-угольников относительно бесконечно малой стороны вписанного многоугольника.

В задачах 15—20 требуется найти пределы:

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-2x^2+x^3}{\sin 2x}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sqrt[3]{x}+2x^2}{\sin 3x}$.
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3+1}{2x^2+3x^3}$.
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+6x-11}{6x^3-12x^2-4x+5}$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{1-\cos x}$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{x}$.

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 54. Вводные замечания

Материал, изложенный в главах I и II, составляет логический фундамент дифференциального исчисления и других разделов математического анализа. Но исторически этот фундамент был подведен под здание анализа примерно полтора века спустя после того, как это здание было в основном построено (ср. § 1, стр. 14).

Источником дифференциального исчисления были два вопроса, выдвинутые во всю ширь запросами науки и техники в 17-м веке:

1) Вопрос о разыскании скорости при произвольно заданном законе движения. Этот вопрос приобрел особую важность в связи с изучением траектории артиллерийского снаряда, с изучением движения небесных тел, с применением некоторых механизмов и т. д.

2) Вопрос о разыскании (с помощью вычисления) касательной к произвольно заданной линии. Этот вопрос приобрел особую важность в связи с созданием аналитической геометрии (ср. I, § 1).

Оказалось, что оба вопроса приводят к одной и той же задаче: по данной функции $f(t)$ отыскать некоторую другую функцию $f'(t)$, которая позднее получила название *производной*, а по сути дела выражает скорость тела, которое за время t проходит путь $f(t)$. Точное математическое определение производной функции дано ниже (§ 59).

В общей форме эта задача была поставлена и решена Ньютоном в промежутке между 1670 и 1680 гг. и несколько позднее (независимо от Ньютона) Лейбницем. Впрочем, Лейбниц первым опубликовал (в 1684 г.) основные положения дифференциального исчисления.

Но еще в предыдущее полустолетие Ферма, Паскаль и ряд других ученых фактически дали правила для разыскания производных для многих функций.

Ньютон и Лейбниц завершили это развитие. Они впервые ввели общие понятия функции[1]), производной функции[2]) и дифференциала[3]). Они же ввели специальные обозначения, очень облегчавшие вычисления. Они развили аппарат дифференциального исчисления до таких пределов, что последующее развитие не внесло почти ничего существенно нового. Наконец, они применили дифференциальное (и интегральное) исчисление к решению многочисленных и разнообразных задач механики и геометрии.

§ 55. Приращение переменной величины

Определение. Если величина z принимает *сначала* значение z_0, а *затем* значение z_1, то разность $z_1 - z_0$ называется *приращением* величины z.

Приращение может быть и положительным, и отрицательным, и равным нулю.

Приращение постоянной величины всегда равно нулю.

Пример 1. В нижеследующей таблице даны значения функции $z = n^2 - 7n + 10$ натурального аргумента n; в нижней строке даны приращения величины z при переходе от каждого номера n к следующему номеру.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	4	0	-2	-2	0	4	10	18	28
Δz	-4	-2	0	2	4	6	8	10	

Обозначения. Слово «приращение» сокращенно записывается греческой буквой Δ («дельта»)[4]); вслед за ней пишется обозначение той величины, приращение которой мы рассматриваем. Так, запись Δz (читается «дельта зет») обозначает приращение

[1]) По Ньютону «флюента».

[2]) По Ньютону «флюксия». Термин «производная функция» предложен Арбогастом и закреплен Лагранжем в конце 18-го века.

[3]) Термин «дифференциал» введен Лейбницем. По Ньютону «момент».

[4]) Происхождение этого обозначения таково. Первоначально приращение обозначалось буквой d, с которой начинается латинское слово differentia (разность). Это обозначение и поныне сохраняется во многих таблицах («табличная разность»). Но со времени Лейбница буквой d стали обозначать дифференциал, поэтому для обозначения приращения используется греческая буква Δ, которая в произношении звучит так же, как латинское d (и русское д).

величины z:

$$\Delta z = z_1 - z_0;$$

запись Δy обозначает приращение величины y:

$$\Delta y = y_1 - y_0;$$

запись $\Delta f(x)$ обозначает приращение функции $f(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$$

и т. д.

Из определения приращения непосредственно следует, что «новое» значение величины z равно «старому» ее значению, сложенному с приращением:

$$z_1 = z_0 + \Delta z. \qquad (1)$$

Пример 2. Начальное значение аргумента x равно 3; приращение аргумента равно -2:

$$x_0 = 3; \quad \Delta x = -2. \qquad (2)$$

Найти соответствующее приращение функции $y = x^2$.

Решение. Из (2) следует, что

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 3 - 2 = 1.$$

Функция $y = x^2$ принимает сначала значение $y_0 = 3^2 = 9$, а затем значение $y_1 = 1^2 = 1$.

Приращение функции есть

$$\Delta y = 1 - 9 = -8.$$

Геометрическое истолкование. Пусть линия AB (рис. 81) есть график функции $y = f(x)$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принята за начальную. При переходе в точку $M_1(x_1, y_1)$ абсцисса x получает приращение

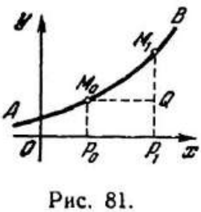


Рис. 81.

$$\Delta x = x_1 - x_0 = OP_1 - OP_0 = P_0P_1 = M_0Q$$

(прямая M_0Q параллельна Ox); ордината y получает приращение

$$\Delta y = y_1 - y_0 = P_1M_1 - P_0M_0 = P_1M_1 - P_1Q = QM_1.$$

Таким образом, приращение аргумента изображается горизонтальным катетом M_0Q треугольника M_0QM_1, а приращение функции — вертикальным его катетом QM_1.

§ 56. Приращение непрерывной функции

Согласно определению § 38 функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

Будем рассматривать постоянную величину x_0 как начальное значение аргумента, а переменную величину x — как новое его значение. Тогда разность $x - x_0$ будет приращением аргумента x, а разность $f(x) - f(x_0)$ — соответствующим приращением функции $f(x)$:

$$x - x_0 = \Delta x, \tag{3}$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x). \tag{4}$$

Из (3) следует, что стремление аргумента x к x_0 сопровождается стремлением Δx к нулю и наоборот. Поэтому соотношение (2) с учетом формулы (4) можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0 \tag{5}$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{5a}$$

Каждое из этих соотношений равносильно соотношению (1). Стало быть, определение непрерывной функции можно высказать также и в следующей форме.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если ее приращение Δy бесконечно мало при бесконечно малом приращении Δx аргумента (при начальном значении x_0).

§ 57. Скорость

Чтобы численно характеризовать скорость движения поезда, мы отмечаем, на каком километре пути он находится в некоторый момент t_0 и таким образом узнаем расстояние s_0, пройденное поездом от начальной станции. Таким же образом мы узнаем расстояние s_1, пройденное поездом к моменту t_1. Приращение расстояния $\Delta s = s_1 - s_0$ мы делим на приращение времени $\Delta t = t_1 - t_0$. Частное

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

дает среднюю скорость поезда за промежуток времени (t_0, t_1).

Предположим, что в любом промежутке (t_0', t_1'), составляющем некоторую часть промежутка времени (t_0, t_1), средняя скорость $\frac{s_1' - s_0'}{t_1' - t_0'}$ имеет одно и то же значение. Тогда частное $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$

характеризует быстроту движения не только на всем участке пути, но также и в любой точке этого участка, т. е. в любой момент промежутка времени (t_0, t_1) (случай равномерного движения).

Если же значения частного $\frac{s_1' - s_0'}{t_1' - t_0'}$ значительно разнятся друг от друга, то частное $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ непригодно для характеристики быстроты движения *в данный момент* времени (случай неравномерного движения).

В этом случае на практике поступают так: промежуток (t_0, t_1) стараются взять столь малым, чтобы значения частного $\frac{s_1' - s_0'}{t_1' - t_0'}$ разнились друг от друга *незначительно*; тогда частное $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет *приблизительно* характеризовать быстроту движения в любой из моментов промежутка (t_0, t_1), в частности в начальный момент t_0. Обычно наблюдается, что различие между значениями $\frac{s_1' - s_0'}{t_1' - t_0'}$ тем меньше, чем ближе к нулю величина Δt.

В соответствии с этим в теории скорость v_0 в момент t_0 определяется как предел, к которому стремится частное $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, когда величина Δt стремится к нулю:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1}$$

Пример. Путь, пройденный телом, свободно падающим в пустоте за время t (отсчитываемое с момента начала падения), выражается формулой

$$s = \frac{1}{2} gt^2. \tag{2}$$

Значит, в момент t_0 тело находится на расстоянии

$$s_0 = \frac{1}{2} gt_0^2 \tag{3}$$

от начальной точки пути.

В момент $t_1 = t_0 + \Delta t$ расстояние s_1 тела от начала пути, в силу той же формулы (2), будет равняться

$$s_1 = \frac{1}{2} g (t_0 + \Delta t)^2. \tag{4}$$

Вычитая (3) из (4), находим, что приращение $\Delta s = s_1 - s_0$ пути равняется

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} gt_0^2. \tag{5}$$

По формуле (1)

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}.$$

Вычисляя предел, находим

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0. \quad (6)$$

Такова скорость падения в момент t_0. При вычислении предела величина t_0 является *постоянной*, что и подчеркивается индексом 0 при букве t. Однако эту постоянную величину можно задать произвольно. Поэтому, *после того* как скорость v_0 найдена, мы вправе считать величину t_0 переменной; разумеется, величина v_0 будет тогда тоже переменной. В соответствии с этим лучше будет опустить индексы и переписать формулу (6) в виде

$$v=gt. \quad (7)$$

Эта запись, если ее сопоставить с формулой (2), подчеркивает, что скорость тела v, как и расстояние s, пройденное телом, есть функция времени t, протекшего от начала падения.

§ 58. Скорость изменения функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором промежутке (a, b), и пусть x_0 — какая-либо точка этого промежутка. Принимая эту точку за начальную, дадим аргументу (положительное или отрицательное) приращение Δx с таким расчетом, чтобы новое значение $x_1=x_0+\Delta x$ не выходило за пределы промежутка (a, b). Тогда функция $f(x)$ получит приращение

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

По аналогии со скоростью движения (§ 57) предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при бесконечно малом Δx мы назовем ***скоростью изменения функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0:

$$p_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (1)$$

или, что то же,

$$p_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1a)$$

(ср. § 57, формула (1)).

Разумеется, мы предполагаем, что упомянутый предел существует (если он не существует, то в рассматриваемой точке понятие скорости изменения функции $f(x_0)$ теряет смысл).

Пример 1. Найти скорость изменения функции $y=x^2$ в точке $x=7$.

Решение. При $x=7\,(=x_0)$ имеем $y=7^2=49\,(=y_0)$. Дадим аргументу x положительное или отрицательное (но не равное нулю!) приращение Δx. Новое значение аргумента будет $7+\Delta x\,(=x_1)$. Соответствующее новое значение функции y будет $(7+\Delta x)^2\,(=y_1)$. Приращение Δy функции равно

$$\Delta y=(7+\Delta x)^2-7^2=14\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Отношение этого приращения к приращению аргумента, т. е. к Δx, есть [1])

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=14+\Delta x. \tag{2}$$

Скорость изменения функции в рассматриваемой точке $x=7$ есть предел отношения (2) при $\Delta x\to 0$

$$p_0=\lim_{\Delta x\to 0}(14+\Delta x)=14.$$

Искомое число равно 14.

Пример 2. Найти скорость изменения функции $y=x^2$ в произвольно выбранной точке x_0.

Решение. Рассуждая, как в примере 1, дадим аргументу некоторое приращение Δx (положительное или отрицательное). Новому значению $x_0+\Delta x$ аргумента соответствует новое значение $(x_0+\Delta x)^2$ функции y. Приращение Δy есть

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

Отсюда находим, что

$$p_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0. \tag{3}$$

Число $2x_0$ выражает искомую скорость изменения функции $y=x^2$ в точке x_0.

Замечание 1. При вычислении предела $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ аргумент рассматривается как постоянная величина, что и подчеркивается обо-

---

[1]) В этом пункте рассуждения существенно, что $\Delta x\neq 0$. Если положить $\Delta x=0$, то для отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ получается неопределенное выражение $\frac{0}{0}$.

значением x_0, содержащим индекс 0. Но *после того*, как предел найден, это обозначение становится не только ненужным, но и стеснительным; ведь точка x_0 выбирается произвольно, так что аргумент мы вправе считать переменной величиной. В соответствии с этим лучше будет опустить индексы и записать формулу (3) в виде

$$p = 2x. \tag{4}$$

Эта запись подчеркивает, что скорость p изменения величины y, так же, как и сама эта величина, является функцией аргумента x.

В дальнейшем для экономии времени мы будем опускать индекс 0 с самого начала выкладки. Надо, однако, твердо усвоить, что *при вычислении предела отношения* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *аргумент считается постоянной величиной*, а *после того* как этот предел найден, его можно считать переменной или постоянной величиной, смотря по условию вопроса.

Пример 3. Найти скорость изменения функции $y = \sin x$.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx. Новому значению $x + \Delta x$ аргумента соответствует значение $\sin(x + \Delta x)$ функции y. Приращение функции есть

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} : \Delta x = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Отсюда получаем

$$p = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Чтобы вычислить первый из этих пределов, достаточно в выражении $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ положить $\Delta x = 0$ (ввиду непрерывности функции $\cos x$); чтобы вычислить второй предел, заменяем $\sin\frac{\Delta x}{2}$ эквивалентной ей (§ 52) величиной $\frac{\Delta x}{2}$. Получаем

$$p = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 = \cos x. \tag{5}$$

Замечание 2. Формула (5) выражает скорость изменения данной функции $y = \sin x$ как некоторую *функцию* ($p = \cos x$) от того же аргумента. Зная эту последнюю функцию, легко вычислить скорость изменения функции $y=\sin x$ *в данной точке* x_0. Так, в точке $x=0$, где сама функция $y=\sin x$ имеет значение $y=0$, скорость ее изменения есть $\cos 0=1$.

§ 59. Производная

Предварительные замечания. В примере 2 § 58 было установлено, что скорость p изменения функции x^2 в свою очередь является функцией от x и представляется формулой $p=2x$.

В примере 3 § 58 мы установили, что скорость p изменения функции $\sin x$ тоже является функцией от x и представляется формулой $p=\cos x$.

Вообще скорость изменения функции $f(x)$ сама является функцией от x, и вид этой последней функции зависит от вида функции $f(x)$, так что функция $f(x)$ как бы «производит» новую функцию. Вот почему эта новая функция получила наименование *производной функции* или, короче, *производной*. Таким образом, производная функция от функции x^2 есть функция $2x$, а производная функция от функции $\sin x$ есть функция $\cos x$.

Когда термин «производная функция» получил всеобщее распространение, слово «производная» стали употреблять не только в качестве прилагательного при подразумеваемом существительном «функция», но также и для обозначения *числа*, выражающего скорость изменения функции $f(x)$ в *отдельно взятой* точке x_0. А в тех случаях, когда такое словоупотребление могло бы вызвать недоразумения, стали пользоваться выражением «производная в точке x_0».

Пользуясь этими новыми терминами, мы можем подытожить сказанное в § 58 в виде следующего определения.

Определение. *Производная от функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 есть число p_0, равное пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$p_0=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или

$$p_0=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если производная существует в каждой точке некоторого промежутка (a, b), то она является новой функцией от x — *производной функцией*.

Обозначения. Если исходная функция обозначена буквой y, то ее производная функция обозначается y' (читается «игрек штрих»); если исходная функция обозначена $f(x)$, то производная обозначается $f'(x)$ (читается «эф штрих от икс») и т. п.

Иногда, во избежание недоразумений, при обозначении производной функции проставляется также (под штрихом) обозначение аргумента. Например, вместо y' пишут y'_x.

В соответствии с этими обозначениями производной *функции* производная *в точке* x_0 от функции $y=f(x)$ обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$, или $y'_{x=x_0}$ и т. п.

Пример 1. Производная функция от функции $f(x)=x^2$ есть $2x$:

$$f'(x)=2x, \quad \text{или} \quad (x^2)'=2x.$$

Производная в точке 3 от той же функции есть число 6:

$$f'(3)=6.$$

Пример 2. Производная от функции $\varphi(x)=\sin x$ в точке $x=0$ есть число 1 (см. § 58, пример 3, замечание 2):

$$\varphi'(0)=1.$$

Производная функция от функции $\sin x$ есть функция $\cos x$:

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$. Она определена во всем промежутке $(-\infty, \infty)$. Будем искать ее производную в произвольно взятой точке x.

Дадим аргументу x некоторое приращение (положительное или отрицательное). Новому значению $x+\Delta x$ аргумента соответствует новое значение $\cos(x+\Delta x)$ функции $y=f(x)$. Приращение Δy есть

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$. Заметив, что

$$2\sin\frac{\Delta x}{2}\approx 2\,\frac{\Delta x}{2}=\Delta x,$$

получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$
$$=-\sin x\cdot 1=-\sin x.$$

Полученный результат можно записать так:

$$y'=(\cos x)'=-\sin x,$$

или

$$f'(x) = -\sin x.$$

Так как точка x была взята произвольно, то каждая из этих формул, если рассматривать x как переменную величину, выражает производную *функцию*. Зная эту функцию, легко вычислить производную в отдельно взятой точке x_0. Например, производная в точке $\frac{\pi}{6}$ есть значение функции $f'(x)$ при $x = \frac{\pi}{6}$, т. е. число $-0,5$:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,5.$$

Бесконечная производная. Если отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ имеет бесконечный предел, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *бесконечную производную*, и употребляют (условную) запись $f'(x_0) = \infty$.

Пример 4. Найти производную от функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$.

Решение. Имеем:

$$f(x_0) = f(0) = \sqrt[3]{0} = 0,$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x},$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt[3]{\Delta x} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2}.$$

При бесконечно малом Δx величина $\frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2}$ бесконечно велика, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2} = \infty.$$

Искомая производная бесконечна.

Замечание 1. Если отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет конечный предел, то, желая подчеркнуть это обстоятельство, говорят, что в рассматриваемой точке функция $f(x)$ имеет *конечную* производную.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ в точке x_0 обладает конечной производной $f'(x_0)$, то функция $f(x)$ *обязательно* непрерывна в этой точке.

Действительно, из тождества

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

и из условия

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

заключаем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0.$$

Значит (§ 56), функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

§ 60. Касательная

Предварительное замечание. В элементарной геометрии касательная к окружности определяется как прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Это определение хорошо согласуется с тем смыслом, который имеет слово «касаться» в обычной речи. Но ко многим линиям, отличным от окружности, упомянутое определение не подходит. Так, прямая $T'T$ (рис. 82), «касающаяся» линии AB в точке M_0, имеет с этой линией еще одну общую точку N.

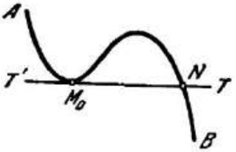


Рис. 82.

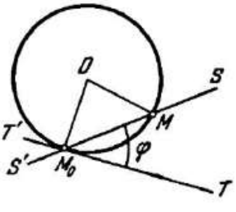


Рис. 83

Чтобы установить общее определение касательной, обратимся снова к окружности. Пусть прямая TT' (рис. 83) имеет с окружностью O единственную общую точку M_0 (т. е. является касательной). Пусть, далее, точка M, отличная от M_0, оставаясь на окружности, стремится к точке M_0, так что $MM_0 \to 0$. Тогда секущая SS', проведенная через точки M_0 и M, вращается около точки M_0, причем острый угол $\varphi = \angle TM_0S$ между секущей и касательной стремится к нулю:

$$\angle TM_0S \to 0.$$

Это свойство для случая окружности легко доказать. Для произвольной же линии оно принимается за *определение* касательной.

Определение. Прямая $T'M_0T$ (рис. 84) называется *касательной* к линии AB в точке M_0, если острый угол φ между прямой TT' и секущей M_0M стремится к нулю, когда точка M, оставаясь на линии AB, стремится к точке M_0 (будь то справа или слева).

Замечание 1. Может случиться, что в некоторой точке M_0 линия AB не обладает касательной. Подобный случай изображен на рис. 85, где секущая M_0M_1 при $M_1 \to M_0$ будет составлять

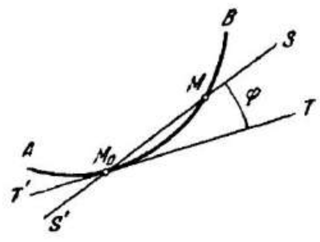


Рис. 84.

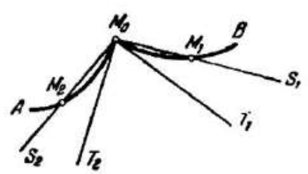


Рис. 85.

бесконечно малый угол с прямой T_1M_0, если M_1 стремится к M_0 справа; если же M_2 стремится к M_0 слева, то секущая составляет бесконечно малый угол с прямой T_2M_0. Значит, в точке M_0 линия AB не имеет касательной.

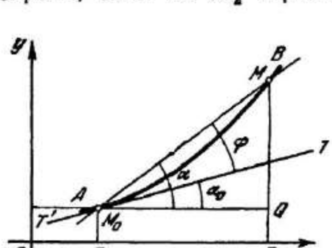


Рис. 86.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ конечную производную $f'(x)$. Тогда линия $y = f(x)$ (рис. 86) имеет в соответствующей точке M_0 касательную, не параллельную оси Oy. Острый угол α_0, образуемый этой касательной с осью Ox, определяется из соотношения

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0 . \tag{1}$$

Доказательство. Проведем через точку M_0 прямую M_0T под углом α_0 к оси Ox и докажем, что эта прямая есть касательная к линии $y = f(x)$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0QM. Пусть катет $M_0Q = \Delta x$ стремится к нулю. Так как по условию функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x_0)$, то приращение Δy тоже стремится к нулю (§ 59, замечание 2). Следовательно, и гипотенуза $M_0M \to 0$, т. е. точка M стремится к M_0. Обратно, если $M_0M \to 0$, то также и $\Delta x \to 0$.

Из треугольника M_0QM (с учетом направлений отрезков M_0Q, QM) получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{QM}{M_0Q}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Когда Δx, а значит и M_0M, стремится к нулю, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к пределу $f'(x_0)$. Учитывая соотношение (1), получаем $\lim\limits_{M_0M\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha_0$, а отсюда следует, что $\lim\limits_{M_0M\to 0}\alpha=\alpha_0$, или, что то же,

$$\lim_{M_0M\to 0}(\alpha-\alpha_0)=0.$$

Но разность $\alpha-\alpha_0$ есть не что иное, как угол $\varphi=TM_0M$, образуемый секущей M_0M с прямой M_0T. Стало быть, угол между прямой M_0T и секущей M_0M стремится к нулю при $M_0M\to 0$. Значит, прямая M_0T есть касательная (согласно определению касательной). Теорема 1 доказана.

Справедлива также и обратная теорема: если линия $y=f(x)$ обладает в точке M_0 касательной, не параллельной оси Oy, то функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_0$, где α_0 — угол, который касательная образует с осью Ox.

Теорема 2. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ бесконечную производную

$$f'(x_0)=\infty, \tag{2}$$

то линия $y=f(x)$ (рис. 87) имеет в соответствующей точке M_0 касательную, параллельную оси Oy.

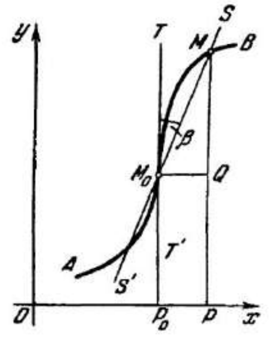


Рис. 87.

Замечание 2. Учитывая соотношение (2), можно сказать, что угол $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$ между касательной и осью Ox по-прежнему удовлетворяет соотношению (1).

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению $\Delta x=M_0Q$ соответствует бесконечно малое приращение $\Delta y=QM$; следовательно, $M_0M\to 0$. Обратно, бесконечно малому расстоянию M_0M соответствует бесконечно малое приращение Δx.

Проведем через точку M_0 прямую $T'T\parallel Oy$ и обозначим через β острый угол, образуемый секущей M_0M с прямой $T'T$.

Имеем

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\angle QM_0M=\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

По условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, что равносильно соотношению

$$\lim_{M_0 M \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

или

$$\lim_{M_0 M \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{M_0 M \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{M_0 M \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim \beta = 0.$$

А это означает, что прямая $T'T$ есть касательная к линии $y = f(x)$. Теорема 2 доказана.

Справедлива также и обратная теорема: если линия $y = f(x)$ обладает в точке M_0 касательной, параллельной оси Oy, то функция $f(x)$ непрерывна в соответствующей точке x_0 и имеет в ней бесконечную производную.

Выводы. Задача о разыскании касательной к линии $y = f(x)$ и задача разыскания производной функции $f(x)$ равнозначны. Если мы умеем найти производную $f'(x_0)$, то можно найти и касательную в точке M_0. Для этого достаточно провести через нее прямую $T'T$, которая составляет с Ox угол α_0, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

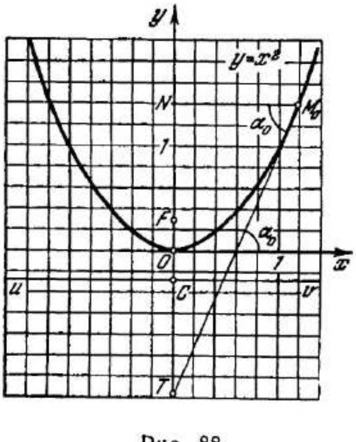


Рис. 88.

Если, наоборот, нам дан график функции $f(x)$, то по наклону касательной $T'T$ (если эта касательная существует) можно наглядно судить о значении производной $f'(x_0)$.

Пример 1. Найти касательную в произвольной точке параболы.

Решение. Отнесем параболу к системе координат xOy (рис. 88), где начало O совпадает с вершиной, а ось Oy — с осью параболы. Тогда парабола представляется уравнением $2py = x^2$ (I, § 65), где параметр $p = CF$ есть расстояние от фокуса F до директрисы uv. Ничто не мешает принять $2CF$ за единицу масштаба, и уравнение примет простейший вид

$$y = x^2.$$

Теперь берем производную $f'(x_0) = 2x_0$ (§ 58, пример 2) и по формуле (1) находим угловой коэффициент касательной M_0T

$$a = \operatorname{tg} \alpha_0 = 2x_0.$$

Теперь можно составить уравнение прямой M_0T, определить из него начальную ординату $b = OT$ и затем построить касательную по точкам M_0, T. Однако проще поступить так: из треугольника M_0NT, где $NM_0 = x_0$, находим

$$TN = NM_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = x_0 \cdot 2x_0 = 2x_0^2 = 2y_0.$$

Значит, чтобы построить касательную M_0T, достаточно найти проекцию N точки M_0 на ось параболы, продолжить отрезок NO за точку O на расстояние $OT = ON$ и соединить точку T с M_0.

Пример 2. Найти касательную к линии $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $O(0; 0)$ (рис. 89).

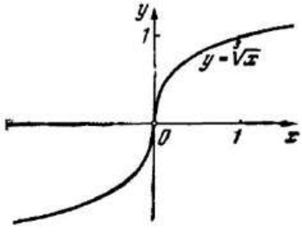


Рис. 89.

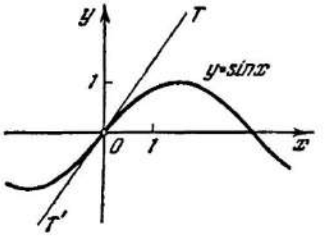


Рис. 90.

Решение. Ищем производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$. Находим (§ 59, пример 4), что

$$f'(0) = \infty.$$

Из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \infty$$

находим, что $\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2}$. Следовательно, искомая касательная перпендикулярна к оси Ox, т. е. совпадает с осью Oy.

Пример 3. Составить уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ (рис. 90) в точке $O(0; 0)$.

Решение. Имеем $y' = \cos x$ (§ 58, пример 3). При $x = O$ получаем $y' = 1$. Это — угловой коэффициент искомой касательной $T'T$ в точке $(0; 0)$, уравнение касательной есть $y = x$.

Замечание 3. В примерах 2 и 3 кривая линия вблизи точки касания располагается не по одну сторону от касательной (как это имеет место для окружности и параболы), а по обе ее стороны.

§ 61. Односторонняя производная; односторонняя касательная

Видоизменим определение § 59 и вместо предела, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ будем рассматривать *односторонний* предел (§ 35) этого отношения при $\Delta x \to +0$ или при $\Delta x \to -0$.

Такой предел (если он существует) называется *односторонней* производной (*правосторонней*, если $\Delta x \to +0$, и *левосторонней*, если $\Delta x \to -0$).

Правосторонняя производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0+0)$, левосторонняя $f'(x_0-0)$.

Ясно, что если существует производная $f'(x_0)$, то обязательно существуют обе односторонние производные $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ и что

$$f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0). \tag{1}$$

С другой стороны, если известно, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *равные между собой* односторонние производные $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$, то можно утверждать, что в точке x_0 существует также производная $f'(x_0)$ и что имеет место равенство (1).

Если же правосторонняя и левосторонняя производные $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ не равны друг другу или если хотя бы одна из них не существует, то не существует и производная $f'(x_0)$, а график функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ не имеет касательной.

Пример 1. Найти односторонние производные от функции

$$f(x) = 2|x| - x^2 \tag{2}$$

в точке $x_0 = 0$.

Решение. Новое значение x_1 аргумента будет

$$x_1 = x_0 + \Delta x = \Delta x.$$

Согласно (2) старое значение функции есть

$$f(x_0) = f(0) = 0, \tag{3}$$

а новое значение функции есть

$$f(x_1) = f(x_0 + \Delta x) = f(\Delta x) = 2|\Delta x| - (\Delta x)^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 2|\Delta x| - (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\frac{|\Delta x|}{\Delta x} - \Delta x.$$

Здесь $|\Delta x| = \Delta x$, если $\Delta x > 0$, и $|\Delta x| = -\Delta x$, если $\Delta x < 0$; учитывая это, находим, что в точке $x_0 = 0$ правосторонняя производная

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \left(2\frac{\Delta x}{\Delta x} - \Delta x\right) = 2,$$

а левосторонняя производная

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \left[2\frac{(-\Delta x)}{\Delta x} - \Delta x\right] = -2.$$

На графике (рис. 91) видно, что линия $y = f(x)$ в точке M_0 не имеет касательной в смысле определения § 60.

Но теперь мы несколько видоизменим это определение и назовем ***правосторонней касательной*** в точке M_0 (рис. 91) прямую M_0T_1, с которой стремится совпасть секущая M_0M_1, когда точка M_1, оставаясь на AB, стремится к точке M_0 справа. Аналогично определяется ***левосторонняя касательная***.

Рассуждая как в § 60, мы установим, что правосторонняя касательная в точке M_0 линии $y = f(x)$ существует или не существует, смотря по тому, существует ли или нет правосторонняя производная $f'(x_0+0)$, и что угол α_1, который эта касательная образует с осью Ox, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0 + 0).$$

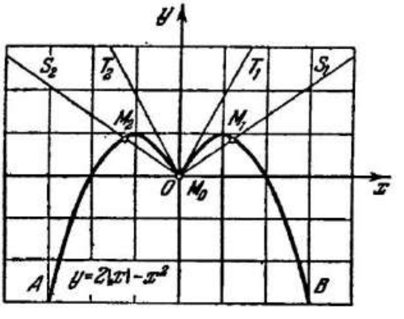


Рис. 91.

Аналогично для левосторонней касательной: $\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0 - 0)$.

Так, линия (2) в точке $M_0(0, 0)$ имеет обе односторонние касательные, причем угловой коэффициент a_1 правосторонней касательной OT_1 равен

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0 + 0) = 2,$$

а угловой коэффициент a_2 левосторонней касательной OT_2 равен

$$a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0 - 0) = -2.$$

Пример 2. Функция $f(x)$, определенная формулой

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0) \tag{5}$$

при дополнительном задании[1])

$$f(0)=0$$

(рис. 92) не имеет в точке $x=0$ ни правосторонней, ни левосторонней производной, а график этой функции в точке $O(0;0)$ не имеет ни правосторонней, ни левосторонней касательной. Действительно, этот график «колеблется» между прямыми $y=\pm x$ (прямые uv, $u'v'$ на рис. 92), касаясь каждой из них в бесчисленном множестве точек. Поэтому, когда точка M стремится вдоль графика к точке O, будь то справа или слева, секущая OM

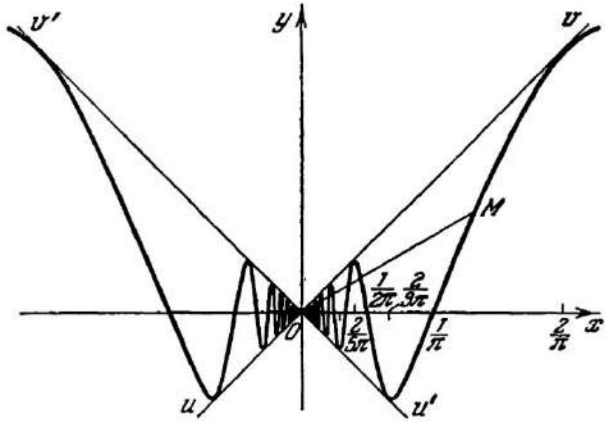


Рис. 92.

колеблется между прямыми uv, $u'v'$ и, значит, не стремится к совпадению ни с какой неподвижной прямой.

К тому же выводу мы придем и с помощью вычисления. Рассуждая, как в предыдущем примере, мы найдем, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (как при $\Delta x>0$, так и при $\Delta x<0$) равно $\sin\frac{1}{\Delta x}$, а эта величина не стремится при $\Delta x\to 0$ ни к какому пределу.

Замечание. Обратим внимание на то, что функция $f(x)$, рассмотренная в примере 2, непрерывна в точке $x_0=0$. Действительно, приращению Δx соответствует приращение $\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$, которое

[1]) Выражение $\sin\frac{1}{x}$, входящее в формулу (5), не имеет смысла при $x=0$.

бесконечно мало при бесконечно малом Δx (в силу свойства 4 § 43). Таким образом, пример 2 показывает, что непрерывность функции в точке x_0 *не гарантирует* существования производной в этой точке (ср. замечание 2, § 59).

§ 62. Производные некоторых простейших функций

1. Производная постоянной. *Производная постоянной величины a равна нулю:*

$$(a)' = 0. \tag{1}$$

Точнее: если функция $y = f(x)$ сохраняет одно и то же значение a в некотором промежутке (c, d), то во всякой внутренней точке x_0 этого промежутка имеем $f'(x_0) = 0$.

Действительно, приращение Δx можно взять столь малым, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ тоже лежала внутри промежутка (c, d). Таким образом, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) = a$. Следовательно,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0.$$

Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и, значит,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

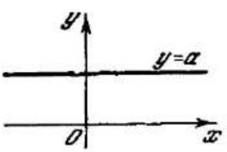


Рис. 93.

Геометрический смысл: угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha_0$ прямой $y = a$ (рис. 93) равен нулю.

Механический смысл (аргумент — время): скорость неподвижной точки равна нулю.

2. Производная линейной функции. *Производная линейной функции $y = ax + b$ есть постоянная величина a:*

$$(ax + b)' = a. \tag{2}$$

Действительно, если «старое» значение аргумента есть x, а «новое» — $x + \Delta x$, то старое значение функции y есть $ax + b$, а новое $a(x + \Delta x) + b$. Поэтому

$$\Delta y = [a(x + \Delta x) + b] - (ax + b) = a\,\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Геометрический смысл: угол α_0, который прямая $y = ax + b$ образует с осью Ox, определяется из соотношения $\operatorname{tg} \alpha_0 = a$.

Механический смысл: если тело проходит за время t расстояние $s=at+b$, то оно движется с постоянной скоростью a.

Пример 1. $(5x-2)'=5$.

Пример 2. $(2\pi x)'=2\pi$.

2а. **Производная независимой переменной.** В частном случае, когда $a=1$, $b=0$, формула (2) принимает вид

$$(x)'=1. \tag{3}$$

Поэтому *производная независимой переменной считается равной единице.*

3. **Производная степенной функции.** Если $f(x)=x^n$, то

$$f'(x)=nx^{n-1}. \tag{4}$$

Для случаев $n=0$ и $n=1$ формула (4) уже доказана в пунктах 1 и 2а настоящего параграфа; для случая $n=2$ она доказана в § 58 (пример 2).

Рассмотрим еще случай $n=3$, т. е. положим

$$y=x^3. \tag{5}$$

Новое значение аргумента x будет $x+\Delta x$, новое значение функции y будет $(x+\Delta x)^3$; значит,

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\,\Delta x+3x\,(\Delta x)^2+(\Delta x)^3. \tag{6}$$

При бесконечно малом Δx правая часть равенства (6) эквивалентна главной своей части $3x^2\Delta x$ (§ 53, правило 3):

$$\Delta y\approx 3x^2\,\Delta x.$$

Следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\,\Delta x}{\Delta x}=3x^2.$$

Таким образом, для $n=3$ формула (4) тоже верна. Таким же образом можно доказать справедливость формулы (4) для любого натурального значения n. А именно, мы имеем

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=(x^n+nx^{n-1}\,\Delta x+\ldots)-x^n. \tag{7}$$

Многоточием в скобках обозначены члены, содержащие Δx во второй, третьей и т. д. степенях.

Из (7) получаем

$$\Delta y=nx^{n-1}\,\Delta x+\ldots,$$

где каждый из опущенных членов имеет высший порядок относительно Δx. Значит, $\Delta y\approx nx^{n-1}\,\Delta x$, и мы получаем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

Итак, для любого натурального показателя n формула (4) доказана. Словесно эта формула выражается так:

Производная степенной функции равна произведению показателя степени на степенную функцию, у которой показатель на единицу меньше.

Ниже будет доказано, что формула (4) верна при любом значении показателя (положительном или отрицательном, целом или дробном, рациональном или иррациональном).

Пример 3. $(x^4)' = 4x^3$.

Пример 4. $(x^8)' = 8x^7$.

§ 63. Свойства производной

Свойство 1. Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой точке x производную $f'(x)$. Тогда функция $y = af(x)$ (a — постоянная) имеет в этой точке производную

$$[af(x)]' = af'(x). \tag{1}$$

Пример 1. Функция $f(x) = x^3$ имеет (§ 62) в точке $x = 2$ производную $f'(2) = 12$. Свойство 1 позволяет утверждать, что функция $5x^3$ имеет в точке $x = 2$ производную $5 \cdot 12 = 60$ и что вообще $(5x^3)' = 5(x^3)' = 15x^2$.

Доказательство свойства 1. Приращение Δy функции $af(x)$ есть разность между «новым» значением этой функции $af(x + \Delta x)$ и «старым» значением $af(x)$:

$$\Delta y = af(x + \Delta x) - af(x) = a[f(x + \Delta x) - f(x)].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, есть приращение $\Delta f(x)$ функции $f(x)$; таким образом,

$$\Delta y = a[\Delta f(x)].$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = af'(x).$$

Свойство 1 доказано. Оно кратко формулируется в виде следующего правила.

Правило 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Свойство 2. Если функции $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ имеют в некоторой точке производные y_1', y_2', то функция $y = y_1 \pm y_2$ имеет в этой точке производную $y' = y_1' \pm y_2'$:

$$[f_1(x) \pm f_2(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x). \tag{2}$$

Пример 2. В точке $x=4$ функция $y_1=x^2$ имеет производную $y_1'=8$, а функция $y_2=x^3$ — производную $y_2'=48$. Свойство 2 позволяет утверждать, что функция x^2+x^3 имеет в точке $x=4$ производную $(x^2)'+(x^3)'=8+48=56$, а функция x^2-x^3 имеет в той же точке производную $8-48=-40$. И вообще функция $x^2\pm x^3$ имеет производную $2x\pm 3x^2$.

Доказательство свойства 2. Приращения функций y_1, y_2 можно представить в виде

$$\Delta y_1=f_1(x+\Delta x)-f_1(x), \tag{3}$$
$$\Delta y_2=f_2(x+\Delta x)-f_2(x), \tag{4}$$

а приращение функции $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ — в виде

$$\Delta y=[f_1(x+\Delta x)\pm f_2(x+\Delta x)]-[f_1(x)\pm f_2(x)]. \tag{5}$$

Сопоставляя (3), (4), (5), получаем

$$\Delta y=\Delta y_1\pm\Delta y_2,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\pm\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$$

и

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=y_1'\pm y_2'.$$

Свойство 2 доказано. Ясно, что оно распространяется на случай трех, четырех и т. д. слагаемых и тогда формулируется в виде следующего правила.

Правило 2. *Производная от алгебраической суммы двух, трех и вообще любого неизменного количества функций равна алгебраической сумме их производных.*

Пример 3. Найти производную функции $y=0{,}3x^3-2x^2+0{,}8$.

Решение. Применяя сначала свойство 2, а затем свойство 1, получаем

$$(0{,}3x^3-2x^2+0{,}8)'=(0{,}3x^3)'-(2x^2)'+(0{,}8)'=$$
$$=0{,}3(x^3)'-2(x^2)'+(0{,}8)'=0{,}3\cdot 3x^2-2\cdot 2x+0=0{,}9x^2-4x.$$

§ 63а. Задачи к §§ 57—63

Найти производные от следующих функций:

1. $f(x)=2x^2-3x^4$.
2. $f(x)=2x^2-6x+4$.
3. $f(x)=12x(4x+5)$.
4. $f(x)=3+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$.
5. $f(x)=(x-5)^2$.
6. $f(t)=(t^2-2)^3$.
7. $f(x)=a(t+a)-at$.
8. $f(t)=a(t+a)+at$.
9. $f(t)=t^3(t^2-1)^2$.
10. $f(t)=3{,}4\sin t$.

11. Найти производную функции $f(x)=(2x-3)^3$ в точке $x=1$.
12. Дано $f(t)=3\sin t$; найти $f'(-\pi)$.
13. Дано $f(t)=at^2-3a^2t+5a^3$; найти $f'(2a)$.
14. Дано $f(x)=\frac{1}{3}x^3-bx^2$; найти $f'(2b)$.
15. К параболе $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках (0; 0), (2; 1), (4; 0). Найти углы, которые эти касательные образуют с осью Ox. Проверить на чертеже.
16. Какие углы образует линия $y=\sin x$ с осью абсцисс при пересечении с этой осью?

Пояснение. Под углом, образуемым кривой линией L с некоторой прямой uv, понимается угол, образуемый касательной к кривой L с прямой uv.

17. Составить уравнение касательной к параболе $2py=x^2$ в точке $M_0\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{8}\right)$. Проверить на чертеже.
18. Составить уравнение касательной к линии $y=2\sin x$ в точке $(2\pi, 0)$. Проверить на чертеже.

§ 64. Производная степенной функции

Рассмотрим функцию $y=x^n$, где n — любое (постоянное) число. Докажем, что

$$y'=(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (x\neq 0). \tag{1}$$

Эта формула была уже доказана в § 62, но там предполагалось, что n — натуральное число.

Доказательство формулы (1). Как в § 62, получаем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}. \tag{2}$$

Теперь введем вспомогательную величину $\beta=\frac{\Delta x}{x}$; она бесконечно мала при $\Delta x\to 0$ (напоминаем, что величина x в процессе разыскания производной рассматривается как постоянная). Подставляя в (2) вместо Δx выражение βx, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\beta x)^n-x^n}{\beta x}=x^{n-1}\frac{(1+\beta)^n-1}{\beta}.$$

Следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{n-1}\lim_{\beta\to 0}\frac{(1+\beta)^n-1}{\beta}. \tag{3}$$

Чтобы найти $\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{(1+\beta)^n-1}{\beta}$, учтем, что любая бесконечно малая величина α эквивалентна $\ln(1+\alpha)$ (см. § 52, пример 2):

$$\alpha\approx\ln(1+\alpha).$$

В частности, полагая $\alpha=\beta$, а затем $\alpha=(1+\beta)^n-1$, мы получим

$$\beta\approx\ln(1+\beta) \quad \text{и} \quad (1+\beta)^n-1\approx\ln(1+\beta)^n.$$

Следовательно,

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{(1+\beta)^n-1}{\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln(1+\beta)^n}{\ln(1+\beta)}=\lim_{\beta\to 0}\frac{n\ln(1+\beta)}{\ln(1+\beta)}=n.$$

Подставляя в (3), получаем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$.

Решение. Представив $\sqrt{x}$ в виде степенной функции $x^{1/2}$, получаем

$$y'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Эту формулу полезно запомнить.

Замечание 1. Функция $y=\sqrt{x}$ не определена при $x<0$. Поэтому нет смысла говорить об ее производной при $x<0$. При $x=0$ функция $y=\sqrt{x}$ определена, но производной (двусторонней) не обладает, так как x не может стремиться к нулю слева. Правосторонняя же производная в точке $x=0$ равна бесконечности (чтобы доказать это, рассуждаем, как в примере 4 § 59).

Пример 2. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}. \tag{4}$$

Замечание 2. Формула (4) справедлива при любом x, отличном от нуля $\left(\text{при } x=0 \text{ функция } \frac{1}{x} \text{ не определена}\right)$.

Пример 3. $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Пример 4. $\left(\frac{1}{x^m}\right)'=(x^{-m})'=-mx^{-m-1}=-\frac{m}{x^{m+1}}$.

Эту формулу полезно запомнить.

Пример 5. $(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

§ 64а. Задачи к § 64

Найти производные следующих функций:

1. $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{3}x-x^2$.

2. $\frac{1}{3}x-\frac{2}{x^2}$.

3. $3x^2-\frac{3}{x^2}-16$.

4. $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

5. $\frac{1}{4u^2}-\frac{3}{u}+1$.

6. $(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$.

7. $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

8. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; вычислить $f'(8)$.

9. Дана функция $x^3-\frac{1}{2x^3}$; вычислить $f'(-2)$.

10. Дана функция $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$; вычислить $f'(0{,}01)$.

§ 65. Главная линейная часть приращения

Пусть при нагревании куба с ребром $x\approx 10{,}00$ *см* ребро его удлинилось на $\Delta x\approx 0{,}01$ *см*. Спрашивается, насколько возрастет при этом объем куба.

Задача сводится к разысканию приращения Δy функции $y=x^3$ при $x=10{,}00$ и $\Delta x=0{,}01$. Имеем [1])

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\,\Delta x^2+\Delta x^3. \qquad (1)$$

Три члена, составляющие правую часть этой формулы, далеко не равноценны. Действительно,

$$\begin{aligned} 3x^2\,\Delta x&=300\cdot 0{,}01=3,\\ 3x\,\Delta x^2&=30\cdot 0{,}01^2=0{,}003,\\ \Delta x^3&=0{,}01^3=0{,}000001. \end{aligned}$$

Важнейшим членом является, конечно, первый. А если еще учесть, что значения x и Δx не точные, а приближенные, то окажется, что даже второй член много меньше, чем предельная погрешность первого члена, и потому учитывать второй, а тем более третий член не имеет никакого смысла. Поэтому вместо формулы (1) мы воспользуемся более простой (приближенной) формулой

$$\Delta y\approx 3x^2\,\Delta x=3\ (см^3). \qquad (2)$$

---

[1]) Запись Δx^2 обозначает то же, что $(\Delta x)^2$ (скобки опускаются). Если же нужно обозначить приращение функции x^2, то пишут $\Delta(x^2)$. Аналогично запись Δx^3 означает $(\Delta x)^3$ и т. д.

Таким образом, приращение Δy оказалось разбитым на две части: одну составляет член $3x^2\,\Delta x$; другую — выражение $3x\,\Delta x^2+\Delta x^3$. Первая часть, практически равная приращению Δy, *пропорциональна* Δx; вторая мала по отношению к Δx. Поэтому говорят, что величина $3x^2\Delta x$ есть *главная линейная часть* приращения.

Если теперь мы предположим, что Δx стремится к нулю (при неизменном значении $x=10$), то главная линейная часть $3x^2\Delta x$ будет бесконечно малой первого порядка (относительно Δx), а вторая часть $3x\,\Delta x^2+\Delta x^3$ — бесконечно малой *высшего порядка*.

Выделить из приращения Δy его главную линейную часть не всегда так просто, как в вышеприведенном частном примере. Однако в большинстве практически важных случаев это удается. При этом оказывается, что задача разыскания главной части приращения равнозначна задаче о разыскании производной.

§ 66. Дифференциал

Определение. Пусть приращение Δy функции $y=f(x)$ (при фиксированном начальном значении аргумента и переменном приращении Δx) разбивается на два слагаемых:

$$\Delta y=A\,\Delta x+\alpha, \tag{1}$$

из которых одно ($A\,\Delta x$) пропорционально Δx, а другое (α) имеет при $\Delta x\to 0$ высший порядок относительно Δx.

Тогда величина $A\,\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$ (читается: «дэ игрек» или «дэ эф от икс»):

$$dy=df(x)=A\,\Delta x. \tag{2}$$

Пример 1. Пусть $f(x)=x^3$. Тогда (ср. § 65)

$$\Delta y=3x^2\Delta x+(3x\,\Delta x^2+\Delta x^3). \tag{3}$$

Приращение Δy разбито здесь на два слагаемых: первое ($3x^2\Delta x$) пропорционально Δx (коэффициент пропорциональности $3x^2$), а второе ($3x\,\Delta x^2+\Delta x^3$) имеет при $\Delta x\to 0$ высший (второй) порядок относительно Δx. Согласно определению величина $3x^2\Delta x$ есть дифференциал функции x^3:

$$dy=d\,(x^3)=3x^2\Delta x. \tag{4}$$

Если, в частности, начальное значение аргумента есть $x=10$, то $dy=300\Delta x$; если начальное значение $x=6$, то $dy=108\Delta x$, а если $x=0$, то $dy=0$.

В формуле (4) коэффициент пропорциональности $A=3x^2$ оказался равным производной $f'(x)=(x^3)'=3x^2$. Это совпадение не случайно, так как имеет место следующая теорема.

Теорема. Коэффициент пропорциональности A в формуле (1) равен производной $f'(x)$:

$$A = f'(x). \tag{5}$$

Иными словами, *дифференциал функции есть произведение производной на приращение аргумента:*

$$dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x \tag{6}$$

(ср. формулу (2)).

Замечание 1. В этой сжатой формулировке содержатся следующие два утверждения: 1) если функция $f(x)$ имеет в данной точке x дифференциал $A\,\Delta x$, то число A есть производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в данной точке; 2) если функция $f(x)$ имеет в данной точке x (конечную) производную $f'(x)$, то произведение $f'(x)\,\Delta x$ есть дифференциал функции $f(x)$ в данной точке.

Доказательство. 1) Пусть функция $y = f(x)$ имеет в данной точке x дифференциал $A\,\Delta x$. Это значит, что приращение Δy можно представить в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha, \tag{7}$$

где α имеет при $\Delta x \to 0$ высший порядок относительно Δx, т. е. (§ 53, определение 1)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0. \tag{8}$$

Из (7) получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\alpha}{\Delta x}.$$

Отсюда, учитывая (8), находим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A, \tag{9}$$

т. е. (§ 59, определение) число A есть производная $f'(x)$.

2) Пусть функция $f(x)$ имеет в данной точке x конечную производную $f'(x)$; это значит, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0,$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = 0. \tag{11}$$

Введем обозначение

$$\Delta y - f'(x)\,\Delta x = \alpha. \tag{12}$$

Величина α имеет при $\Delta x \to 0$ высший порядок малости относительно Δx (это следует из формулы (11) и из определения 1 § 53). Перепишем (12) в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha. \tag{13}$$

Эта формула показывает, что приращение Δy разбивается на два слагаемых, из которых одно $[f'(x)\,\Delta x]$ пропорционально Δx, а другое (α) имеет при $\Delta x \to 0$ высший порядок относительно Δx. Стало быть, слагаемое $f'(x)\,\Delta x$ есть дифференциал функции $f(x)$:

$$dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 3$.

Решение. Производная функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 3$ есть число $y' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{9}$ (§ 64, пример 2). По формуле (6) находим $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\Delta x}{x^2} = -\frac{\Delta x}{9}$.

Проверка. Приращение Δy функции $y = \frac{1}{x}$ при начальном значении $x = 3$ есть

$$\Delta y = \frac{1}{3+\Delta x} - \frac{1}{3} = \frac{-\Delta x}{3(3+\Delta x)}.$$

Чтобы убедиться в том, что величина $-\frac{\Delta x}{9}$ (она пропорциональна приращению Δx) в самом деле является дифференциалом функции $\frac{1}{x}$, остается доказать, что величина $\alpha = \Delta y - \left(\frac{-\Delta x}{9}\right)$ является бесконечно малой высшего порядка относительно Δx. Находим

$$\Delta y - \left(-\frac{\Delta x}{9}\right) = -\frac{\Delta x}{3(3+\Delta x)} + \frac{\Delta x}{9} = \frac{\Delta x^2}{9(3+\Delta x)}.$$

Здесь знаменатель стремится при $\Delta x \to 0$ к конечному пределу (27), а числитель есть бесконечно малая второго порядка. Стало быть (§ 53, правило 2), вся дробь имеет второй порядок малости относительно Δx.

Замечание 2. В формуле $dy = f'(x)\,\Delta x$ *вовсе не обязательно рассматривать Δx как величину, стремящуюся к пределу нуль.*

Ничто не мешает считать, что Δx стремится к иному пределу и, в частности, что Δx есть величина постоянная (скажем, $\Delta x = 800$ или $\Delta x = 10^8$). Но тогда и величину α в формуле (1), разумеется, нельзя считать бесконечно малой.

§ 67. Эквивалентность дифференциала и приращения

Теорема. Если функция $y = f(x)$ в данной точке x имеет конечную производную, отличную от нуля, то при $\Delta x \to 0$ приращение Δy функции $f(x)$ эквивалентно ее дифференциалу $f'(x)\,\Delta x$:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть Δx есть бесконечно малая величина. Тогда разность

$$\Delta y - f'(x)\,\Delta x \tag{2}$$

между приращением Δy функции y и ее дифференциалом $f'(x)\,\Delta x$ имеет (§ 66, определение) высший порядок *относительно* Δx.

Но по условию $f'(x) \neq 0$; значит (§ 53, правило 2), величина $f'(x)\,\Delta x$ *имеет тот же порядок* малости, что Δx. Следовательно, разность (2) имеет высший порядок также и относительно $f'(x)\,\Delta x$. А отсюда следует (§ 53, теорема 2), что

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $f'(x) = 0$, то дифференциал $dy = f'(x)\,\Delta x$ тоже равен нулю, между тем как приращение Δy, как правило, отлично от нуля. Значит, при $f'(x) = 0$ эквивалентность (3) нарушается.

Пример. Функция $y = x^3$ в точке $x = 10$ имеет производную $y' = 3x^2 = 300$. Приращение Δy функции $f(x)$ при $\Delta x \to 0$ эквивалентно ее дифференциалу $dy = 300\,\Delta x$:

$$\Delta y \approx 300\,\Delta x. \tag{4}$$

Применительно к достаточно малым значениям Δx формула (4) дает приближенное значение приращения Δy (ср. § 65).

Та же функция x^3 в точке $x = 0$ имеет производную $y' = 3x^2 = 0$. Теперь приращение функции $\Delta y = (\Delta x)^3$ при $\Delta x \to 0$ *не эквивалентно дифференциалу* $dy = 0 \cdot \Delta x = 0$; сколь бы мало ни было приращение Δy, оно все же неизмеримо велико по отношению к нулю.

§ 68. Механическое истолкование дифференциала

Пусть функция $s=f(t)$ представляет зависимость расстояния s, пройденного телом, от времени t, в течение которого тело находится в пути. Тогда приращение Δs функции $f(t)$ представляет путь, который тело пройдет за промежуток времени Δt, засеченный в некоторый момент t.

Производная $f'(t)$ функции $f(t)$ выражает скорость v движения тела в момент t. Значит, дифференциал $ds=f'(t)\Delta t$ равен произведению скорости v в момент t на промежуток времени Δt, отсчитываемый от этого момента:

$$ds=v\,\Delta t. \tag{1}$$

Стало быть, дифференциал $ds=f'(t)\Delta t$ выражает путь, который тело *прошло бы* за промежуток времени Δt, *если бы* оно сохраняло в течение этого промежутка скорость, достигнутую в момент t. Иными словами, ds выражает путь, который тело прошло бы за время Δt *по инерции*.

Разумеется, этот воображаемый путь ds, как правило, не равен истинному пути Δs. Однако разность $\Delta s - ds = \Delta s - v\,\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка *относительно* Δt, а при $v \neq 0$ эта разность имеет высший порядок также и относительно $v\,\Delta t$, т. е.

$$\Delta s \approx v\,\Delta t. \tag{2}$$

Применительно к достаточно малым промежуткам формула (2) дает приближенную величину смещения тела за время Δt; мы видим, что путь Δs *приблизительно пропорционален времени* Δt.

Пример. Расстояние s, пройденное телом, свободно падающим в пустоте, выражается через время t формулой

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

Дифференциал этого расстояния есть

$$ds=v\,\Delta t=gt\,\Delta t.$$

Эта величина представляет путь, который тело пройдет за время Δt, если с момента t оно будет переведено на горизонтальную траекторию и станет двигаться по инерции со скоростью, приобретенной за время падения.

Путь Δs, который тело фактически проходит в течение достаточно малого промежутка времени Δt, *приблизительно* равен $gt\,\Delta t$:

$$\Delta s \approx gt\,\Delta t.$$

§ 69. Геометрическое истолкование дифференциала

Пусть линия AB (рис. 94) есть график функции $y=f(x)$, и пусть прямая MT есть касательная к линии AB в точке $M(x, y)$. Приняв точку M за начальную, возьмем на линии AB еще одну точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ справа или слева от M. При обозначениях рис. 94 имеем

$$\Delta x = PP_1 = MQ;\ \Delta y = QM_1.$$

Пусть касательная MT не параллельна оси Oy. Тогда (§ 60) функция $f(x)$ имеет в точке x конечную производную $f'(x)$, равную угловому коэффициенту касательной:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \angle QMT.$$

Значит, дифференциал dy функции $f(x)$ есть

$$dy = f'(x)\,\Delta x = \Delta x \operatorname{tg} \angle QMT = MQ \operatorname{tg} \angle QMT = QN.$$

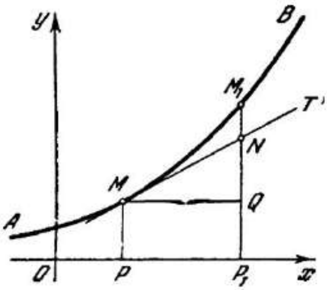


Рис. 94.

Здесь отрезок $QN = P_1N - P_1Q = P_1N - PM$ есть приращение *ординаты касательной* MT. Стало быть, *дифференциал функции*

$$y = f(x)$$

графически изображается приращением ординаты касательной.

Если касательная MT не параллельна не только оси Oy, но также и оси Ox, то производная $f'(x)$ не равна нулю. В этом случае (§ 67) приращение $\Delta y = QM_1$ эквивалентно дифференциалу $dy = QN$:

$$QM_1 \approx QN,$$

и разность $\Delta y - dy = QM_1 - QN$, т. е. отрезок NM_1 имеет малость высшего порядка не только относительно $\Delta x = MQ$, но также относительно $dy = QN$ и относительно $\Delta y = QM_1$. Это с большой наглядностью видно на рис. 94, где отношения $NM_1 : QM$ и $NM_1 : QN$ явно стремятся к нулю, когда точка M_1 стремится к совпадению с точкой M.

§ 70. Дифференцируемые функции

Дифференцирование. Вычисление дифференциала (или производной) данной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Дифференцируемость функции в точке. Как мы знаем (§ 66, замечание 1), функция $f(x)$ обладает дифференциалом

в данной точке x в том и только в том случае, когда она имеет в этой точке *конечную* производную.

В этом случае функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x.*

Если же функция $f(x)$ в точке x имеет бесконечную производную или совсем не имеет производной, то функция $f(x)$ *недифференцируема* в точке x.

Функция $f(x)$, дифференцируемая в точке x, обязательно непрерывна в этой точке (см. § 59, замечание 2). Однако непрерывность функции $f(x)$ в точке x не гарантирует ее дифференцируемости в этой точке (см. ниже примеры 1—3).

Пример 1. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ во всякой точке, отличной от нуля, дифференцируема (и, значит, непрерывна). Действительно, при $x\neq 0$ имеем $y'=(x^{1/3})'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (§ 64).

При $x=0$ данная функция непрерывна, но недифференцируема, так как $f'(0)=\infty$ (см. § 59, пример 4).

Пример 2. Рассмотрим функцию $y=2|x|-x^2$. Ее график (см. рис. 91 на стр. 169) имеет касательную, не параллельную оси Oy, во всякой точке, кроме точки $x=0$ (в этой точке имеются две односторонние касательные). Значит, данная функция дифференцируема всюду, кроме точки $x=0$; здесь она хотя и непрерывна, но не имеет (двусторонней) производной, и потому недифференцируема.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную формулой $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при дополнительном задании $f(0)=0$ (рис. 92 на стр. 170). Эта функция непрерывна в точке $x=0$ (§ 61, замечание), но не имеет здесь производной (ни правосторонней, ни левосторонней). Стало быть, функция $f(x)$ недифференцируема в точке $x=0$. Во всякой другой точке данная функция дифференцируема.

Дифференцируемость функции в промежутке. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в промежутке* (a, b), если она обладает конечной производной во всякой точке этого промежутка.

При этом допускается, чтобы в левой граничной точке $x=a$ (если она не исключена из данного промежутка) функция $f(x)$ обладала *только правосторонней* (конечной) производной $f'(a+0)$, а в правой граничной точке $x=b$ — *только левосторонней* производной. В каждой же внутренней точке промежутка (a, b) функция $f(x)$ должна обладать двусторонней производной[1]).

---

[1]) «Послабление», делаемое для граничных точек, объясняется тем, что функция $f(x)$ за пределами данного промежутка может оказаться вовсе не определенной.

Пример 4. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ (см. пример 1) дифференцируема в промежутке (0; 1), из которого исключен левый конец $x=0$. Но в *замкнутом* промежутке (0; 1) функция $\sqrt[3]{x}$ недифференцируема, так как в точке $x=0$ она не имеет *конечной* производной (ни двусторонней, ни односторонней). В промежутке $(-1;\ 1)$ (замкнутом или незамкнутом) функция $y=\sqrt[3]{x}$ и подавно недифференцируема.

Пример 5. Функция $y=2|x|-x^2$ (см. пример 2) дифференцируема в промежутке (0; 3) (замкнутом или незамкнутом), так как она имеет конечную производную во всякой точке, отличной от $x=0$, а в граничной точке $x=0$ имеет правостороннюю производную $y'(0)=2$. В промежутке $(-3;\ 3)$ (замкнутом или незамкнутом) функция $2|x|-x^2$ недифференцируема, так как точка $x=0$, где данная функция не имеет (двусторонней) производной, теперь является внутренней точкой.

§ 71. Дифференциалы некоторых простейших функций

Предварительное замечание. Нижеприведенные формулы непосредственно вытекают из соотношения

$$df(x)=f'(x)\,\Delta x \tag{A}$$

(§ 66) между дифференциалом функции $f(x)$ и ее производной и из формул, выведенных в § 62.

1. Дифференциал постоянной. ***Дифференциал постоянной величины равен нулю:***

$$da=0. \tag{1}$$

Эта формула вытекает из формулы (1) § 62 и из формулы (А), куда надо подставить $f(x)=a$.

2. Дифференциал линейной функции. *Дифференциал линейной функции $y=ax+b$ равен произведению $a\Delta x$,* т. е. *приращению функции $ax+b$:*

$$d(ax+b)=a\Delta x. \tag{2}$$

Эта формула вытекает из (А) и из формулы (2) § 62. С другой стороны, имеем

$$\Delta(ax+b)=[a(x+\Delta x)+b]-(ax+b)=a\Delta x.$$

Сопоставляя эту формулу с (2), получаем

$$d(ax+b)=\Delta(ax+b).$$

2а. Дифференциал независимой переменной. В частном случае, когда $a=1,\ b=0$, формула (2) принимает вид

$$dx=\Delta x, \tag{3}$$

поэтому *дифференциал независимой переменной считается равным ее приращению.*

3. Дифференциал степенной функции x^n. Дифференциал функции $y=x^n$ (где n — любое постоянное число) в точке x, отличной от нуля, выражается формулой

$$dx^n = nx^{n-1}\,\Delta x \qquad (x \neq 0). \tag{4}$$

Это вытекает из (A) и формулы (1) § 64.

Пример 1. $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\Delta x}{x^2}$. Ср. § 64, пример 2.

Пример 2. $d\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{m\Delta x}{x^{m+1}}$.

Ср. § 64, пример 4.

Пример 3. $d(\sqrt{x}) = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$.

Ср. § 64, пример 1.

4. Дифференциал функции $\sin x$. Дифференциал функции $y=\sin x$ выражается формулой (см. пример 2, § 59)

$$d\sin x = \cos x\ \Delta x. \tag{5}$$

5. Дифференциал функции $\cos x$

$$d\cos x = -\sin x\ \Delta x \tag{6}$$

(см. пример 3, § 59).

§ 72. Свойства дифференциала

Нижеприведенные правила непосредственно следуют из соответствующих свойств производной (§ 63) и из соотношения

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \tag{A}$$

Правило 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала:*

$$d\,[af(x)] = a\,df(x).$$

Пример 1. $d(5x^3) = 5d(x^3) = 5\cdot 3x^2\Delta x = 15x^2\Delta x$.

Правило 2. *Дифференциал алгебраической суммы двух, трех и вообще любого неизменного количества функций равен алгебраической сумме их дифференциалов.*

Пример 2. Продифференцировать функцию $y=0{,}3x^3-2x^2+0{,}8$.

Решение. Применяя сначала правило 2, а затем правило 1, получаем

$$dy = d(0{,}3x^3-2x^2+0{,}8) = d(0{,}3x^3) - d(2x^2) + d(0{,}8) =$$
$$= 0{,}3\,d(x^3) - 2d(x^2) = 0{,}9x^2\Delta x - 4x\Delta x = (0{,}9x^2-4x)\,\Delta x.$$

§ 72а. Задачи к §§ 65—72

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $3x^2$.
2. $3x^2-0{,}6$.
3. $16x^4-3x^3+\sqrt{2}x-\pi$.
4. $ax^2+\frac{b}{x^3}$.
5. $\sqrt[3]{x}$.
6. $a\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}$.
7. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{3}-x^2$.
8. $a(x+b)$.
9. $(x-a)^2$.
10. $mx^2(ax+b)$.
11. $b(a+x)-bx$.

12. При нагревании куба с ребром $x=10{,}00$ *см* ребро его удлинилось на $\Delta x=0{,}01$ *см*. Спрашивается, насколько возросла при этом поверхность S куба.

Решить эту задачу: а) непосредственным вычислением, б) с помощью дифференцирования. Ср. §§ 65—66.

13. На сколько процентов надо удлинить ребро куба, чтобы объем его увеличился на $0{,}3\%$?

14. На сколько процентов надо удлинить радиус круга, чтобы площадь его увеличилась на $0{,}3\%$?

§ 73. Инвариантная форма дифференциала

Выражение $f'(x)\,\Delta x$ представляет дифференциал функции $y=f(x)$, если переменная x является независимой. Если же сама переменная x рассматривается как функция некоторого аргумента t (так что переменная y оказывается «сложной» функцией от t), то выражение $f'(x)\,\Delta x$, как правило, ***не представляет*** дифференциала dy.

П р и м е р. Рассмотрим функцию

$$y=x^3. \tag{1}$$

Если x есть независимая переменная, то

$$dy=3x^2\,\Delta x. \tag{2}$$

В частности, при $x=4$ будем иметь

$$dy=48\,\Delta x. \tag{3}$$

Теперь предположим, что сама переменная x есть функция некоторого аргумента t и представляется, скажем, формулой

$$x=t^2.$$

Тогда приращение Δx выразится через Δt следующим образом:

$$\Delta x=(t+\Delta t)^2-t^2=2t\,\Delta t+\Delta t^2. \tag{4}$$

Переменная же $y=x^3$ окажется функцией от t (через посредство вспомогательной функции $x=t^2$) и представится формулой

$$y=(t^2)^3=t^6. \tag{5}$$

При $t=2$ вспомогательная функция $x=t^2$ принимает прежнее значение $x=4$, а выражение (4) принимает вид

$$\Delta x=4\Delta t+\Delta t^2.$$

Отсюда следует, что выражение $48\Delta x$, которое прежде представляло дифференциал dy при $x=4$, теперь, когда за аргумент принята величина t, не представляет этого дифференциала. В самом деле, мы имеем

$$48\Delta x=48\,(4\Delta t+\Delta t^2)=192\Delta t+48\Delta t^2,$$

тогда как по формуле (5) находим

$$dy=6t^5\Delta t=6\cdot 2^5\Delta t=192\Delta t.$$

Замечание 1. Как мы знаем (§ 71), дифференциал независимой переменной равен ее приращению. Значит, если переменная x считается независимой, то вместо формулы (2) можно написать

$$dy=3x^2dx. \tag{2a}$$

Эта формула, в отличие от (2), ***останется верной и в том случае, если положить $x=t^2$ и считать y функцией от t.***

Действительно, в этом случае имеем

$$dx=d\,(t^2)=2t\Delta t,$$

и выражение (2а) принимает вид

$$dy=3x^2dx=3\,(t^2)^2\,d\,(t^2)=3\cdot t^4\cdot 2t\Delta t=6t^5\Delta t,$$

а это выражение совпадает с выражением дифференциала функции $y=(t^2)^3=t^6$.

Вообще имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $y=f(x)$ есть дифференцируемая функция переменной x, то имеет место равенство

$$dy=f'\,(x)\,dx, \tag{6}$$

которое справедливо как в том случае, когда x есть независимая переменная, так и в том случае, когда переменная x сама является дифференцируемой функцией некоторого аргумента t[1]).

Доказательство. 1) Пусть x — независимая переменная; тогда $dx=\Delta x$ (§ 71, п. 2а) и, следовательно, $dy=f'(x)\,\Delta x=$ $=f'(x)\,dx$.

---

[1]) Предполагается, что при изменении аргумента t значения переменной x не выходят за пределы промежутка изменения аргумента функции $f(x)$.

2) Пусть теперь

$$x = \varphi(t). \tag{7}$$

Так как по условию функция $\varphi(t)$ дифференцируема, то приращение Δx, порождаемое приращением Δt, можно представить в виде

$$\Delta x = \varphi'(t)\,\Delta t + \alpha_1, \tag{8}$$

где величина α_1 имеет при $\Delta t \to 0$ высший порядок относительно Δt.

Точно так же приращение Δy, порождаемое приращением Δx, можно представить в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha_2, \tag{9}$$

где α_2 имеет при $\Delta x \to 0$ высший порядок относительно Δx. Но из (8) видно, что при $\Delta t \to 0$ обязательно стремится к нулю также и Δx, причем Δx имеет либо тот же порядок малости, что Δt [если $\varphi'(t) \neq 0$], либо высший [если $\varphi'(t) = 0$]. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ величина α_2 имеет высший порядок не только относительно Δx, но также и относительно Δt.

Заметив это, подставим выражение (8) в равенство (9). Получим

$$\Delta y = f'(x)\,\varphi'(t)\,\Delta t + [\alpha_1 f'(x) + \alpha_2]. \tag{10}$$

Приращение Δy, как видим, оказалось разбитым на два слагаемых, из которых первое пропорционально приращению Δt аргумента t, а второе имеет высший порядок относительно Δt (так как каждая из величин $\alpha_1 f'(x)$, α_2 имеет высший порядок относительно Δt). Значит, слагаемое $f'(x)\,\varphi'(t)\,\Delta t$ есть дифференциал переменной y (рассматриваемой как функция от t):

$$dy = f'(x)\,\varphi'(t)\,\Delta t. \tag{11}$$

С другой стороны, в силу (7) имеем

$$dx = \varphi'(t)\,\Delta t. \tag{12}$$

Теперь справедливость формулы (6) проверяется непосредственно: после подстановки выражений (11) и (12) равенство (6) удовлетворяется тождественно.

Замечание 2. Как явствует из доказательства теоремы, дифференцируемость функций $f(x)$ и $\varphi(t)$ влечет за собой дифференцируемость сложной функции $y = f[\varphi(t)]$.

Заключительные выводы. Дифференциал функции $y = f(x)$ можно выразить либо в виде

$$dy = f'(x)\,\Delta x, \tag{A}$$

либо в виде

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{B}$$

Однако формула (A) верна лишь в том случае, когда x есть независимое переменное, а формула (B) неизменно остается в силе и в том случае, когда y рассматривается как сложная функция аргумента t, составленная из функций

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t).$$

Вот почему выражение $f'(x)\,dx$ называют *инвариантной* (т. е. неизменной) формой дифференциала.

В дальнейшем мы будем пользоваться именно этой формой дифференциала.

§ 74. Выражение производной через дифференциалы

Из формулы

$$dy = f'(x)\,dx \tag{1}$$

следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Словами: ***производная функция $y = f(x)$ равна отношению дифференциала dy к дифференциалу dx.***

По доказанному в § 73 формула (1) сохраняет силу при любом выборе независимого переменного. Значит, тем же свойством обладает и формула (2).

Выражение $\frac{dy}{dx}$ $\Bigl($и ему подобные, как-то: $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$, $\frac{d(3x^2+2x+1)}{dx}$ и т. д.$\Bigr)$ можно рассматривать как *обозначение* производной. Оно обладает рядом преимуществ перед другими обозначениями. А именно: 1) здесь отчетливо видно, что функция y дифференцируется по аргументу x, а не по какому-либо другому; 2) переменные y и x входят в это обозначение в единообразной форме (обе стоят под знаком дифференциала); 3) выражение $\frac{dy}{dx}$ по своему виду напоминает отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, пределом которого является производная.

Рассматривая $\frac{dy}{dx}$ как *обозначение* производной $f'(x)$, можно пользоваться также записью вида $\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}f(x)$ и т. п. Здесь символ $\frac{d}{dx}$ надо рассматривать как знак *действия* (разыскания производной); взятый в отдельности, он смысла не имеет.

Пример. Запись $\frac{d}{dx}(3x^2+2x+1)=6x+2$ равнозначна записи $(3x^2+2x+1)'_x=6x+2$, так что буква d в символе $\frac{d}{dx}$ играет ту же роль, что штрих в записи $(3x^2+2x+1)'_x$.

Выражение $\frac{dy}{dx}$ читается *«дэ игрек по дэ икс»*.

§ 75. Дифференцирование сложной функции

Инвариантность (неизменность) выражения $f'(x)\,dx$ широко используется для дифференцирования разнообразных функций. А именно, данная функция $y=f(x)$ представляется в виде сложной функции, составленной из таких двух функций:

$$y=F(u), \quad u=\varphi(x),$$

каждую из которых мы умеем дифференцировать.

а) Дифференциал сложной функции. Разыскание дифференциала сложной функции не требует особых правил, как видно из следующих примеров.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y=(1+x^2)^4$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде

$$y=u^4, \tag{1}$$

где

$$u=1+x^2; \tag{2}$$

функцию $y=u^4$ мы умеем дифференцировать:

$$dy=4u^3\,du. \tag{3}$$

Эта формула верна также и в том случае, когда переменная u сама является функцией от x (§ 73). Следовательно, можно подставить в (3) выражение (2). Получаем

$$d(1+x^2)^4=4(1+x^2)^3d(1+x^2). \tag{4}$$

Но функцию $(1+x^2)$ мы тоже умеем дифференцировать:

$$d(1+x^2)=2x\,dx. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$d(1+x^2)^4=4(1+x^2)^3\cdot 2x\,dx=8x(1+x^2)^3dx.$$

При небольшом навыке все вычисление укладывается в одну строку

$$d(1+x^2)^4=4(1+x^2)^3d(1+x^2)=4(1+x^2)^3 2x\,dx=8x(1+x^2)^3\,dx.$$

Замечание 1. Тот же результат получится непосредственно, если представить $(1+x^2)^4$ в виде $1+4x^2+6x^4+4x^6+x^8$.

Замечание 2. В решении примера 1 мы рассматривали данную функцию как сложную функцию, составленную из двух функций:

$$y=u^4, \quad u=1+x^2.$$

В общем случае, когда

$$y=F(u), \quad u=\varphi(x),$$

мы получаем

$$dy=dF(u)=F'(u)\,du=F'[\varphi(x)]\,du,$$
$$du=d\varphi(x)=\varphi'(x)\,dx,$$

откуда

$$dy=F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx. \tag{6}$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=\frac{1}{(x+4x^2)^2}$.

Решение. Будем рассматривать данную функцию как сложную $\left(y=\frac{1}{u^2};\ u=x+4x^2\right)$. Получим

$$dy=d(x+4x^2)^{-2}=-2(x+4x^2)^{-3}d(x+4x^2)=$$
$$=-2(x+4x^2)^{-3}(1+8x)\,dx=-\frac{2(1+8x)}{(x+4x^2)^3}\,dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Решение. $dy=d\sqrt{a^2-x^2}=d(a^2-x^2)^{1/2}=$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}d(a^2-x^2)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x\,dx)=\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $y=\sin^2 3x$.

Решение. Здесь придется вводить вспомогательную функцию дважды. Первый раз вводим вспомогательную функцию $u=\sin 3x$ ($y=u^2$, $u=\sin 3x$):

$$dy=d\sin^2 3x=2\sin 3x\,d\sin 3x.$$

Второй раз вводим вспомогательную функцию $v=3x$ ($u=\sin v$, $v=3x$):

$$d\sin 3x=\cos 3x\,d(3x)=\cos 3x\cdot 3dx=3\cos 3x\,dx.$$

Выкладка ведется так:

$$dy=d\sin^2 3x=2\sin 3x\,d\sin 3x=2\sin 3x\cos 3x\,d(3x)=$$
$$=2\sin 3x\cos 3x\cdot 3dx=3\sin 6x\,dx.$$

б) Производная сложной функции.

Первый способ. *Чтобы найти производную сложной функции, достаточно разделить ее дифференциал на дифференциал аргумента.*

Пример 5. Найти производную от функции $y=\sin^2 3x$.

Решение. В примере 4 мы нашли, что

$$dy = 3\sin 6x\,dx.$$

По доказанному в § 74 производная y'_x выражается отношением $\frac{dy}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin 6x\,dx}{dx}=3\sin 6x.$$

Второй способ. Если желательно найти производную сложной функции, составленной из функций

$$y=F(u),\quad u=\varphi(x), \tag{7}$$

не прибегая к посредничеству дифференциала, то можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Производная y'_x сложной функции* (7) *по ее аргументу x равна производной переменной y по вспомогательной переменной u, умноженной на производную от вспомогательной переменной u по аргументу x:*

$$y'_x=F'(u)\,\varphi'(x). \tag{8}$$

Доказательство. По доказанному в § 74 производная y'_x выражается отношением $\frac{dy}{dx}$, производная от y по u — отношением $\frac{dy}{du}$, а производная от u по x — отношением $\frac{du}{dx}$. Эти три отношения, очевидно, связаны равенством

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \tag{9}$$

что и утверждается в теореме.

Пример 6. Найти производную функции $y=(1+x^2)^4$.

Решение. Введем вспомогательную величину $u=1+x^2$ (ср. пример 1). Тогда имеем $y=u^4$. Находим

$$\frac{dy}{du}=4u^3=4(1+x^2)^3,\qquad \frac{du}{dx}=2x.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4(1+x^2)^3\cdot 2x=8x(1+x^2)^3.$$

При некотором навыке отпадает необходимость в специальном обозначении для вспомогательной переменной, и выкладка ведется так:

$$y'=[(1+x^2)^4]'=4\ (1+x^2)^3\ (1+x^2)'=4\ (1+x^2)^3\cdot 2x=8x\ (1+x^2)^3.$$

Замечание 3. При пользовании обозначением типа $[(1+x^2)^4]'$ начинающие часто допускают следующую ошибку. Зная, что $(u^4)'=4u^3$, они пишут результат в виде $4(1+x^2)^3$, упуская из виду, что это выражение $\frac{dy}{du}$ надо еще помножить на $(1+x^2)'\left(=\frac{du}{dx}\right)$. Помимо невнимательности (или нетвердого знания правила), эта ошибка имеет источником несовершенство обозначения типа $[(1+x^2)^4]'$: не видно, по какой переменной берется производная. Поэтому на первых порах можно вести запись так:

$$y'_x=[(1+x^2)^4]'_x=4\ (1+x^2)^3\ (1+x^2)'_x=4\ (1+x^2)^3\cdot 2x$$

или, еще лучше, так:

$$\frac{d}{dx}(1+x^2)^4=4\ (1+x^2)^3\ \frac{d}{dx}(1+x^2)=4\ (1+x^2)^3\cdot 2x.$$

Наилучшую же гарантию от ошибок упомянутого типа дает первый способ (предварительное вычисление дифференциала). Действительно, дифференциал (записанный в инвариантной форме) выражается одной и той же формулой вне зависимости от того, какая переменная принимается за аргумент. Производная же этим свойством не обладает.

Пример 7. Найти производную функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Решение. Вводим вспомогательную функцию $u=a^2-x^2$ (ср. пример 3) и ведем вычисление так:

$$y'=\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Пример 8. Найти производную функцию $y=\cos^2(3x+\alpha)$.

Решение. $y'=\frac{d}{dx}\cos^2(3x+\alpha)=2\cos(3x+\alpha)\frac{d}{dx}\cos(3x+\alpha)=$

$$=2\cos(3x+\alpha)\,[-\sin(3x+\alpha)]\,\frac{d}{dx}(3x+\alpha)=$$
$$=-2\cos(3x+\alpha)\sin(3x+\alpha)\cdot 3=-3\sin(6x+2\alpha).$$

§ 75а. Задачи к §§ 73—75

Найти дифференциалы и производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{1}{(13x^2+8x)^2}$.
2. $y=x^3(4x^2-0{,}6)^3$.
3. $y=(a^2-x^2)^2$.
4. $s=\sqrt{6t}$.
5. $z=\sqrt{u^2+12u}$.
6. $x=\sqrt{t^4-1}$.
7. $x=a\sin\dfrac{t}{b}$.
8. $x=a\cos^2\dfrac{t}{b}$.

Найти дифференциалы следующих функций:

9. $\sqrt[4]{a^4-t^4}$.
10. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$.
11. $\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}$.
12. $\cos^3\dfrac{x}{a}-\sin^3\dfrac{x}{a}$.
13. $\dfrac{1}{(1+\cos 2\varphi)^3}$.
14. $3\cos\left(\dfrac{\varphi}{a}\right)^2$.
15. $\dfrac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$.

Найти производные следующих функций:

16. $f(x)=\sqrt{x^2+2ax+b^2}$.
17. $f(x)=x\sqrt{2px}$.
18. $\varphi(x)=\dfrac{3}{(a^2+x^2)^3}$.
19. $F(t)=\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}\right)^2$.
20. $f(x)=\sin^4 2x+\cos^4 2x$.
21. $s=\sqrt{\dfrac{t}{2}-\sin^2\dfrac{t}{2}}$.
22. $r=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)$.
23. $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.
24. Дана функция $f(t)=\sqrt{1+\sin^2 3t}$. Найти $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
25. Дана функция $f(t)=\sqrt{1+\sin^2 t^2}$. Найти $f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

§ 76. Дифференцирование произведения

Дифференциал произведения двух функций. Пусть переменная y есть произведение двух функций $u=f(x)$, $v=\varphi(x)$, дифференцируемых в точке x:

$$y=uv.$$

Тогда

$$dy = d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

т. е. *дифференциал произведения двух функций равен первой функции, помноженной на дифференциал второй, плюс вторая функция, помноженная на дифференциал первой.*

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция u получит приращение Δu, а функция v — приращение Δv. Новое значение функции y выражается произведением

$$(u + \Delta u) \quad (v + \Delta v);$$

значит,

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta v \cdot \Delta u. \tag{1}$$

Но приращения Δu, Δv связаны с дифференциалами du, dv формулами

$$\Delta u = du + \varepsilon_1, \quad \Delta v = dv + \varepsilon_2,$$

где ε_1, ε_2 имеют (при $\Delta x \to 0$) высший порядок малости относительно Δx (§ 66, определение). Отсюда следует (см. § 53), что каждое из приращений Δu, Δv имеет либо тот же порядок малости, что Δx, либо более высокий. Значит, произведение $\Delta u\,\Delta v$ заведомо имеет высший порядок малости относительно Δx.

Заметив это, перепишем формулу (1) следующим образом:

$$\Delta y = u(dv + \varepsilon_2) + v(du + \varepsilon_1) + \Delta u\,\Delta v = \\ = (u\,dv + v\,du) + (u\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 + \Delta u\,\Delta v).$$

Как видим, приращение Δy оказалось разбитым на два слагаемых; одно из них $(u\,dv + v\,du)$ пропорционально приращению Δx (ибо каждый из членов $u\,dv$, $v\,du$ пропорционален Δx), а другое $(u\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 + \Delta u\,\Delta v)$ имеет высший порядок малости относительно Δx. Значит (§ 66, определение), слагаемое $u\,dv + v\,du$ есть дифференциал функции $y = uv$:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{2}$$

что и требовалось доказать.

Производная произведения двух функций. Из формулы (2) тотчас же следует, что

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \tag{3}$$

т. е. *производная произведения двух функций равна первой функции, помноженной на производную второй, плюс вторая функция, помноженная на производную первой.*

Пример 1. Найти дифференциал и производную функции

$$y = (2x^2 + 3x)(x^3 - 2).$$

Решение. Данная функция есть произведение функций $2x^2+3x\ (=u)$ и $x^3-2\ (=v)$. По формуле (2) имеем

$$dy=(2x^2+3x)d(x^3-2)+(x^3-2)\,d(2x^2+3x)=$$
$$=(2x^2+3x)\,3x^2\,dx+(x^3-2)(4x+3)\,dx=(10x^4+12x^3-8x-6)\,dx.$$

Отсюда находим производную

$$\frac{dy}{dx}=10x^4+12x^3-8x-6.$$

Замечание. Если требуется найти только производную, то можно применить непосредственно формулу (3):

$$\frac{dy}{dx}=(2x^2+3x)\frac{d}{dx}(x^3-2)+(x^3-2)\frac{d}{dx}(2x^2+3x)=$$
$$=(2x^2+3x)\,3x^2+(x^3-2)(4x+3)=10x^4+12x^3-8x-6.$$

В данном случае этот способ проще. Но когда дифференцируемое выражение более громоздко (см. пример 2), лучше, пожалуй, сначала вычислить дифференциал. Впрочем, это дело вкуса.

Пример 2. Найти производную функции $y=\frac{x+1}{x^2+1}$.

Решение. Данную функции можно представить в виде произведения функций $x+1\ (=u)$ и $(x^2+1)^{-1}\ (=v)$.

По формуле (2) находим

$$dy=d\,[(x+1)(x^2+1)^{-1}]=(x+1)\,d\,(x^2+1)^{-1}+(x^2+1)^{-1}\,d\,(x+1)=$$
$$=(x+1)(-1)(x^2+1)^{-2}\,d\,(x^2+1)+(x^2+1)^{-1}\,dx=$$
$$=-\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x\,dx+\frac{1}{x^2+1}\,dx,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x+\frac{1}{x^2+1}=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Если вместо формулы (2) применить формулу (3), то весь ход вычисления останется прежним, только вместо символа d появится более громоздкий символ $\frac{d}{dx}$ или «штрих», который при всей его краткости может оказаться неудобным, скажем, в записи $[(x^2+1)^{-1}]'$.

Читателю рекомендуется применить оба эти способа и выбрать для дальнейшего употребления тот, который ему больше подходит.

Пример 3. Найти дифференциал функции $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ [1]).

---

[1]) При $x=0$ функция $\sin\frac{1}{x}$ разрывна и, стало быть, недифференцируема; поэтому формула (2) неприменима. Из этого еще не следует, что

Решение. $d\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=xd\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}dx=x\cos\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)+$ $+\sin\frac{1}{x}dx=x\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right)+\sin\frac{1}{x}dx=\left(-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx.$

Дифференциал произведения нескольких функций. Формулы (1) и (2) можно распространить на случай любого (неизменного) числа сомножителей. Так, в случае трех сомножителей u_1, u_2, u_3 мы представляем функцию $y=u_1u_2u_3$ в виде произведения двух сомножителей: $y=(u_3u_2)u_1$ и получаем

$$dy=u_3u_2\,du_1+u_1d(u_3u_2)=u_3u_2\,du_1+u_1(u_3\,du_2+u_2\,du_3)=$$
$$=u_3u_2\,du_1+u_3u_1\,du_2+u_1u_2\,du_3.$$

Таким же образом найдем, что

$$d(u_1u_2u_3u_4)=u_2u_3u_4\,du_1+u_1u_3u_4\,du_2+u_1u_2u_4\,du_3+u_1u_2u_3\,du_4$$

и т. д.

Стало быть, *чтобы найти дифференциал произведения нескольких функций, надо дифференциал каждой функции помножить на произведение всех остальных функций и полученные произведения сложить.*

Аналогичное правило для производной произведения нескольких функций (слово «дифференциал» оба раза заменяется словом «производная»).

Пример 4. $d(x\cos^2 x\sin x)=\cos^2 x\sin x\,dx+x\sin x\,d\cos^2 x+$ $+x\cos^2 x d\sin x=\cos^2 x\sin x\,dx+2x\sin x\cos x\,d\cos x+$ $+x\cos^2 x d\sin x=(\cos^2 x\sin x-2x\sin^2 x\cos x+x\cos^3 x)\,dx.$

§ 77. Дифференцирование частного (дроби)

Пусть переменная y есть частное $\frac{u}{v}$, где функции $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$ дифференцируемы в точке x, причем в этой точке знаменатель v не обращается в нуль. Тогда

$$dy=d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}, \tag{1}$$

т. е. *дифференциал дроби равен произведению знаменателя на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, все деленное на квадрат знаменателя.*

функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (при добавочном условии $f(0)=0$ она непрерывна) тоже недифференцируема. Однако недифференцируемость функции $f(x)$ при $x=0$ можно установить из других соображений (см. § 61, замечание).

То же правило — для производной от дроби (слово «дифференциал» все три раза заменяется словом производная):

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Представим дробь $\frac{u}{v}$ в виде произведения uv^{-1} (ср. § 76, пример 2) и применим формулу (2) § 76. Получим

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=d\,(v^{-1}u)=v^{-1}du+u\,d\,(v^{-1})=v^{-1}du-uv^{-2}\,dv,$$

или

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du}{v}-\frac{u\,dv}{v^2}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную функции $y=\frac{2x+1}{x^2+1}$.

Решение. По формуле (2) находим

$$y'=\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)(2x+1)'-(2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(x^2+1)\cdot 2-(2x+1)\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Решение. Сначала рассматриваем данное выражение как сложную функцию $\left(y=\sqrt{u};\ u=\frac{1+x}{1-x}\right)$. При этом удобнее иметь дело с дифференциалами:

$$dy=d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=d\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{(1-x)\,dx+(1+x)\,dx}{(1-x)^2}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 77а. Задачи к §§ 76—77

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $(2x+3)(x^2+3x-1)$. 2. $(x^2+4x-3)(x^2+4x+4)$.
3. $(3t-1)^2(t-1)^3$. 4. $y\sqrt{y^2+1}$. 5. $(u-1)\sqrt{u^2+1}$.
6. $\frac{\sqrt{y+a}}{y}$. 7. $\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$. 8. $\frac{\sin^3 2t}{t}$. 9. $x\sin 2x\cos^2\frac{x}{2}$.

Найти производные следующих функций:

10. $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$. 11. $\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3}$.

12. $\dfrac{x+a}{x-a}$. 13. $\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$.

14. $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$. 15. $\dfrac{a^2t^2}{\sqrt{a^4+t^4}}$.

16. $(a+x)\sqrt{a-x}$. 17. $\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}$.

18. Дана функция $f(t)=\dfrac{at}{(b+t)^2}$; найти $f'(b)$.

19. Дана функция $f(x)=\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$; найти $f'\left(\dfrac{a}{3}\right)$.

§ 78. Формулы дифференцирования тригонометрических функций

Дифференциалы	Производные
I. $d\sin x=\cos x\,dx$;	$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$.
II. $d\cos x=-\sin x\,dx$;	$\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$.
III. $d\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\,(=\sec^2 x\,dx)$;	$\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,(=\sec^2 x)$.
IV. $d\,\mathrm{ctg}\,x=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}=$ $=-\mathrm{cosec}^2 x\,dx$;	$\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{ctg}\,x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=$ $=-\mathrm{cosec}^2 x$.

Формула I была установлена в § 58 (пример 3); формула II — в § 59 (пример 3); формула III выводится так:

$$d\,\mathrm{tg}\,x=d\,\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\,d\sin x-\sin x\,d\cos x}{\cos^2 x}$$

[по формуле (1) § 77]. Подставляя сюда выражения I и II, получаем

$$d\,\mathrm{tg}\,x=\frac{\cos^2 x\,dx+\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x}=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Аналогично выводится формула IV. Формулы I—IV надо знать на память. Следующие две нет надобности специально запоминать.

Дифференциалы	Производные
V. $d \sec x = \operatorname{tg} x \sec x\, dx$;	$\frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$,
VI. $d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x\, dx$;	$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$.

Формула V выводится так:

$$d \sec x = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x \sec x\, dx.$$

Формула VI выводится аналогично.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

Решение. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x - \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x + 1 = \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x - \sec^2 x +$

$$+ 1 = \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) - (\operatorname{tg}^2 x + 1) + 1 = \operatorname{tg}^4 x.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $x \sec^2 x - \operatorname{tg} x$.

Решение. $d(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x) = \sec^2 x\, dx + x\, d \sec^2 x - d \operatorname{tg} x =$
$= \sec^2 x\, dx + x\, 2 \sec x\, d \sec x - d \operatorname{tg} x = \sec^2 x\, dx + 2x \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx -$
$- \sec^2 x\, dx = 2x \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx = \frac{2x \sin x}{\cos^3 x}\, dx.$

§ 78а. Задачи к § 78

Найти дифференциал или производную от каждой из следующих функций:

1. $\operatorname{tg}(2x + 3)$.
2. $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$.
3. $\sqrt{\sec 2\varphi}$.
4. $\operatorname{tg} \frac{2t + 1}{3}$.
5. $\operatorname{tg} 2x - 2x$.
6. $t - \sin t$.
7. $\varphi \operatorname{cosec} \varphi$.
8. $\frac{\sec 2x}{x}$.
9. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$.
10. $\sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.
11. $\operatorname{tg}^3 x^3$.
12. $\operatorname{ctg}(1 + x^2)^{1/2}$.
13. $-\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + \frac{4}{3} \operatorname{ctg} x$.
14. $\frac{2 \operatorname{ctg} 3x}{1 - \operatorname{ctg}^2 3x}$.

§ 79. Дифференцирование логарифмической функции

Рассмотрим функцию $y=\ln x$ (она определена в промежутке $0<x<\infty$). Дадим аргументу x приращение Δx; тогда функция y получит приращение

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Величина x в процессе дифференцирования сохраняет постоянное (положительное) значение. Поэтому при $\Delta x\to 0$ величина $\frac{\Delta x}{x}$ бесконечно мала и имеет тот же порядок малости, что Δx.

Значит, $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\approx\frac{\Delta x}{x}$ (§ 52, пример 2); следовательно,

$$\Delta y\approx\frac{\Delta x}{x}.$$

Обозначим разность $\Delta y-\frac{\Delta x}{x}$ буквой ε: $\Delta y-\frac{\Delta x}{x}=\varepsilon$.

Эта разность имеет высший порядок малости относительно $\frac{\Delta x}{x}$ (§ 53, теорема 1), а, следовательно, также и относительно Δx. Таким образом, приращение Δy есть сумма двух слагаемых

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{x}+\varepsilon,$$

из которых первое пропорционально Δx, а второе имеет высший порядок относительно Δx. Значит, $\frac{\Delta x}{x}$ есть дифференциал функции $y=\ln x$:

$$dy=d\ln x=\frac{\Delta x}{x}$$

или, в инвариантной форме,

$$d\ln x=\frac{dx}{x}. \tag{1}$$

Производная функции $y=\ln x$ выражается формулой

$$y'=\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}. \tag{2}$$

Найдем теперь формулы дифференцирования функции $\log_a x$ (a — произвольное положительное число, отличное от 1). Применив формулу

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(§ 24) к случаю $b=e$, получаем

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a},$$

откуда

$$d \log_a x = \frac{dx}{x \ln a}; \quad \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a}. \tag{3}$$

В частности, для десятичных логарифмов ($a = 10$) получаем

$$d \lg x = \frac{dx}{x \ln 10} = \frac{M\,dx}{x} \approx \frac{0,43429dx}{x}; \quad \frac{d \lg x}{dx} = \frac{M}{x}, \tag{3a}$$

Пример 1. Найти производную функции $\ln(ax+b)$.

Решение. $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b}\frac{d}{dx}(ax+b) = \frac{a}{ax+b}$.

Пример 2. Найти дифференциал функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. $d\ln\frac{1+x}{1-x} = d\ln(1+x) - d\ln(1-x) =$

$$= \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = \lg x$ в точке $x = 100$.

Решение. $y' = \frac{M}{x}$; $y'(100) = \frac{M}{100} \approx 0,0043$.

Пример 4. Найти без таблиц $\lg 101$.

Решение. При начальном значении $x = 100$ функция $y = \lg x$ имеет значение $y = 2$. Приращение Δy функции $y = \lg x$ при $\Delta x = 1$ приближенно равно дифференциалу $dy = \frac{M\,dx}{x} = \frac{M\,\Delta x}{x} \approx \frac{0,4343 \cdot 1}{100} \approx$ $\approx 0,0043$. Следовательно,

$$\lg 101 = \lg 100 + \Delta \lg 100 \approx 2 + 0,0043 = 2,0043,$$

что совпадает со значением $\lg 101$ в четырехзначной таблице десятичных логарифмов.

Пример 5. Найти дифференциал функции $\ln|x|$.

Решение. Если x есть положительное число, то $|x| = x$ и, значит, $\ln|x| = \ln x$. Поэтому при $x > 0$ имеем

$$d\ln|x| = \frac{dx}{x}.$$

Если x есть отрицательное число, то $|x| = -x$ и, значит, $\ln|x| = \ln(-x)$ (здесь величина $-x$ положительна!). Следовательно,

$$d\ln|x| = d\ln(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Таким образом, при любом x, отличном от нуля [1]), имеет место одна и та же формула

$$d\ln|x| = \frac{dx}{x}. \tag{4}$$

---

[1]) При $x = 0$ функция $\ln|x|$ не определена.

§ 79а. Задачи к § 79

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $\lg 2x$. 2. $\lg(\pi x)$.
3. $\ln 2x$. 4. $\ln 3x$.
5. $\ln(ax+b)$. 6. $\log_3(4x-2)$.
7. $\ln\sin x$. 8. $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Найти производные следующих функций:

9. $\ln(x^3)$. 10. $(\ln x)^3$.
11. $\dfrac{1}{\ln x}$. 12. $\sqrt{\ln x}$.
13. $\lg(3x^2+4x-7)$. 14. $\ln\cos x$.
15. $\ln\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$. 16. $\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})$.
17. $\ln(\ln x)$. 18. $x\ln x - x$.

19. $x^2\log_3 x$. Замечание. Желательно, чтобы в ответе все логарифмы брались по одному и тому же основанию. С этой целью выгодно еще *до дифференцирования* перевести $\log_3 x$ в натуральный логарифм по формуле (3) § 24 (стр. 66).

20. $\dfrac{x-1}{\log_2 x}$. См. замечание к задаче 19.

21. $x^3\ln x - \dfrac{x^3}{3}$.

22. Зная, что $\lg 425{,}0 \approx 2{,}62839$ (с точностью до 10^{-5}), найти без таблиц $\lg 425{,}1$.

§ 80. Логарифмическое дифференцирование

Если функция $y=f(x)$ представляется выражением, удобным для логарифмирования, то при дифференцировании этой функции бывает полезно сначала прологарифмировать равенство $y=f(x)$ (по любому основанию) и лишь потом продифференцировать.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y=x^x$.

Решение. 1) Логарифмируя по основанию e, находим

$$\ln y = x\ln x. \tag{1}$$

2) Теперь дифференцируем обе части равенства (1):

$$\frac{dy}{y} = x\,d\ln x + \ln x\,dx = (1+\ln x)\,dx.$$

3) Подставляя вместо y выражение x^x, находим

$$dy = y(1+\ln x)\,dx = x^x(1+\ln x)\,dx.$$

Пример 2. Найти производную от функции

$$y=\frac{(x+1)^3}{(x+2)^2(x+3)^4} \qquad (x>-1). \tag{2}$$

Решение. 1) Так как при $x > -1$ значения функции y положительны, то равенство (2) можно логарифмировать. Получаем

$$\ln y = 3\ln(x+1) - 2\ln(x+2) - 4\ln(x+3). \tag{3}$$

2) Дифференцируем равенство (3)

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x+1} - \frac{2dx}{x+2} - \frac{4dx}{x+3}. \tag{4}$$

3) Подставим вместо переменной y ее выражение через x; находим

$$dy = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2(x+3)^4}\left(\frac{3dx}{x+1} - \frac{2dx}{x+2} - \frac{4dx}{x+3}\right) = \frac{(x+1)^2(-3x^2-5x+4)}{(x+2)^3(x+3)^5}\,dx$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+1)^2(3x^2+5x-4)}{(x+2)^3(x+3)^5}. \tag{5}$$

Замечание 1. В пункте 2 мы могли бы сразу брать не дифференциалы, а производные. Тогда левая часть равенства (4) будет иметь вид $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ или $\frac{y'}{y}$.

Изложенный здесь способ называется *логарифмическим дифференцированием*, а производная от логарифма функции

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется *логарифмической производной* от функции $f(x)$.

Замечание 2. При $x \leqslant 1$ формула (3) лишается смысла (так как значения y неположительны). Однако формула (5) остается верной (разумеется, при x, отличном от -2 и от -3). Это можно проверить непосредственным дифференцированием. Более того, мы могли бы применить логарифмическое дифференцирование и при любом значении x (отличном от -1, от -2 и от -3); для этого достаточно заменить формулу (2) формулой

$$|y| = \left|\frac{(x+1)^3}{(x+2)^3(x+3)^4}\right|$$

(см. § 79, пример 5). Ввиду того, что весь ход выкладки остается тем же, на практике можно пользоваться равенством (2), не вводя в него обозначений абсолютной величины.

§ 80a. Задачи к § 80

Найти дифференциал или производную каждой из следующих функций:

1. $\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

2. $x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$.

3. $x\sqrt{1-x}\,(1+x)$.

4. $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

5. $x^{\sin x}$.

6. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

§ 81. Дифференцирование показательной функции

Чтобы найти дифференциал функции

$$y = a^x \tag{1}$$

(a — произвольное положительное число, отличное от единицы), поступим следующим образом. Равенство (1) запишем в виде

$$x = \log_a y. \tag{2}$$

Формула (2), если в ней рассматривать переменную y как аргумент, представляет функцию, обратную по отношению к функции a^x. Дифференцируя эту функцию, получаем

$$dx = \frac{dy}{y \ln a}. \tag{3}$$

Эта формула сохраняет силу и в том случае, когда за аргумент принимается x (§ 73). Если ее переписать в виде

$$dy = y \ln a \, dx$$

и подставить сюда вместо переменной y ее выражение (1), то получим

$$dy = da^x = a^x \ln a \, dx. \tag{4}$$

Это и есть искомая формула для дифференциала показательной функции a^x. Из нее находим формулу для производной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) принимают особенно простой вид, когда основанием показательной функции является число e; а именно:

$$de^x = e^x \, dx; \tag{4a}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \tag{5a}$$

т. е. *производная функции e^x равна ей самой.*

Пример 1. Найти производную функции e^{3x}.

Решение. $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x} \frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$.

Пример 2. Найти дифференциал функции xe^{-x^2}.

Решение. $d(xe^{-x^2}) = x\,de^{-x^2} + e^{-x^2}\,dx =$
$= xe^{-x^2} d(-x^2) + e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}(1 - 2x^2)\,dx$.

Пример 3. Найти дифференциал функции 7^{t^2}.

Решение. $d7^{t^2} = 7^{t^2} \ln 7 \, d(t^2) = 2t \cdot 7^{t^2} \ln 7 \, dt$.

§ 81а. Задачи к § 81

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $e^{(3x+5)^2}$.
2. $(e^{2x}-1)^2$.
3. $\ln\frac{e^x}{1+e^x}$.
4. $\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$.
5. $e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$.
6. $e^{-x}(\cos x+\sin x)$.
7. $\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

Найти производные следующих функций:

8. $e^{0,4x}$.
9. 3^x.
10. $\frac{1}{2^x}$.
11. $x10^x$.
12. $\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$.
13. $\frac{e^x+1}{e^x-1}$.
14. $e^{\sin x}$.
15. e^{3x^2+5}.
16. $(e^{ax}-e^{-ax})^2$.
17. Найти угол, под которым линия $y=e^x$ пересекает ось Oy.
18. Найти производную функции $\ln(1+e^{-2t})$ в точке $t=0$.

§ 82. Производная обратной функции

В §§ 79 и 81 мы рассмотрели две взаимно обратные функции

$$y=f(x)=\log_a x \quad \text{и} \quad x=\varphi(y)=a^y \tag{1}$$

и нашли для их производных следующие выражения:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{x\ln a}; \qquad \frac{dx}{dy}=\varphi'(y)=a^y\ln a. \tag{2}$$

Если сопоставить производные $f'(x)$, $\varphi'(y)$ в соответственных точках x_0, y_0, то окажется, что они связаны соотношением

$$f'(x_0)\,\varphi'(y_0)=1. \tag{3}$$

Оно обнаруживается непосредственно при перемножении левых частей равенств (2).

Пример 1. Положим $x_0=a$; тогда $y_0=\log_a a=1$. Формулы (2) дают

$$f'(x_0)=f'(a)=\frac{1}{a\ln a}; \quad \varphi'(y_0)=\varphi'(1)=a\ln a.$$

Как видим, равенство (3) соблюдено.

Свойство, выражаемое равенством (3), имеет силу и в общем случае. Точная его формулировка выражается следующей теоремой.

Теорема. Пусть непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, и пусть $x=\varphi(y)$ есть непрерывная функция, обратная по отношению к $f(x)$. Тогда функция $\varphi(y)$ имеет в соответствующей точке y_0 производную $\varphi'(y_0)$, причем

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Пояснение. Если $f'(x_0)=0$, то формула (4) (понимаемая в условном смысле) означает, что $\varphi'(y_0)=\infty$; если же $f'(x_0)=\infty$, то $\varphi'(y_0)=0$.

Доказательство. По условию функция $x=\varphi(y)$ принимает при $y=y_0$ значение $x=x_0$. Дадим теперь аргументу y приращение Δy, отличное от нуля. Тогда переменная x получит значение $x_1=\varphi(y_0+\Delta y)$. Это значение *отлично* от x_0. Действительно, равным значениям x_0, x_1 отвечали бы равные значения функции $f(x)$, т. е. равные значения переменной y. Но тогда приращение Δy равнялось бы нулю.

Таким образом, при $\Delta y \neq 0$ имеем также $\Delta x \neq 0$, и мы вправе написать тождество

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{5}$$

По условию функция $x=\varphi(y)$ непрерывна; значит, при $\Delta y \to 0$ имеем также $\Delta x \to 0$ (§ 56). Следовательно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к пределу $f'(x_0)$:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

А отсюда следует, что величина $1:\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к пределу $\frac{1}{f'(x_0)}$ (см. § 44, свойство 4 и замечание 3):

$$\lim_{\Delta y\to 0}\left(1:\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7}$$

Это равенство означает, что функция $\varphi(y)$ в точке y_0 имеет производную $\varphi'(y_0)$, причем

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Теорема доказана.

Геометрическое доказательство. Теорему можно доказать геометрически следующим образом. На основании теорем 1 и 2 § 60 заключаем, что график AB (рис. 95) функции $y=f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ касательную M_0T. Но та же линия AB является графиком обратной функции $x=\varphi(y)$. Следовательно (на основании обратных теорем § 60), функция $\varphi(y)$ имеет в точке y_0 производную $\varphi'(y_0)$.

При этом имеют место равенства

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_0, \tag{8}$$
$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta_0. \tag{9}$$

Здесь угол α_0 считается положительным, как обычно, в том случае, когда направление кратчайшего поворота от прямой Ox к прямой M_0T совпадает с направлением кратчайшего поворота от Ox к Oy. Что же касается угла β_0, то положительным его направлением надо считать *противоположное направление* (от Oy к Ox), так как оси координат теперь меняются ролями. Поэтому углы $\alpha_0=\angle x'M_0T$, $\beta_0=\angle y'M_0T$ связаны соотношением

$$\alpha_0+\beta_0=\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

$\left(\text{а не } \alpha_0-\beta_0=\frac{\pi}{2}\right)$.

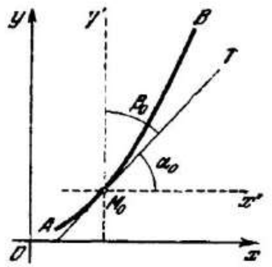


Рис. 95.

Из равенств (8), (9), (10) получаем

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_0\right)=\operatorname{ctg}\alpha_0=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 2. Возьмем функцию $y=f(x)=x^2$, рассматриваемую в промежутке $0<x<\infty$. В точке $x=\frac{3}{4}\ (=x_0)$ эта функция непрерывна и имеет производную $f'\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$. По отношению к функции $f(x)$ функция $\varphi(y)=\sqrt{y}$ будет обратной. В соответствующей точке $y=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}\ (=y_0)$ функция $\varphi(y)$ непрерывна. По доказанному функция $\varphi(y)$ должна иметь в точке $y=\frac{9}{16}$ производную $\varphi'\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{2}{3}$. Так оно и есть:

$$\varphi'\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{16}}}=\frac{2}{3}.$$

§ 83. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

1. Функция $y=\arcsin x$ (рис. 47, стр. 71). Эта функция определена (см. § 26) лишь в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Рассмотрим обратную функцию; она выражается формулой

$$x=\sin y \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Пусть x есть *внутренняя* точка промежутка $(-1; 1)$. Тогда y есть *внутренняя* точка промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Из (1) находим

$$dx = \cos y\, dy. \tag{2}$$

Переменная $\cos y$ имеет *внутри* промежутка $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ *только положительные* значения; в частности, она отлична от нуля. Поэтому равенство (2) можно записать в виде

$$dy = \frac{dx}{\cos y}, \tag{3}$$

и остается выразить $\cos y$ через переменную x. Для этого воспользуемся известной формулой $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. В ней надо отбросить знак минус перед радикалом, так как величина $\cos y$, как мы установили, положительна. Теперь с помощью (1) находим

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

Замечание 1. Мы предполагали, что x есть внутренняя точка промежутка $(-1; 1)$. Предположим теперь, что x есть одна из граничных точек, скажем $x = -1$. Тогда речь может идти только о правосторонней производной. Формула (4) (понимаемая в условном смысле) показывает, что производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = -1$ бесконечна. Так и должно быть, поскольку обратная функция $x = \sin y$ в соответствующей точке $y = -\frac{\pi}{2}$ имеет производную $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (ср. § 82, пояснение).

2. Функция $y = \arccos x$ (рис. 49, стр. 71). Эта функция, как и функция $\arcsin x$, определена лишь в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и связана с функцией $\arcsin x$ соотношением

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя, получаем

$$d \arccos x + d \arcsin x = 0.$$

А так как $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то

$$dy = d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

На концах промежутка $(-1;\ 1)$ производная $\frac{dy}{dx}$ бесконечна.

Замечание 2. Формулы (5) можно вывести также с помощью дифференцирования обратной функции $x=\cos y$. Рекомендуем читателю это полезное упражнение.

3. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ (рис. 48, стр. 71). Она определена при любом значении x. Имеем

$$x=\operatorname{tg} y, \tag{6}$$

$$dx=\sec^2 y\, dy,$$

$$dy=\frac{dx}{\sec^2 y}. \tag{7}$$

С помощью (6) выражаем $\sec^2 y$ через x:

$$\sec^2 y=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2.$$

В результате получаем

$$dy=\frac{dx}{1+x^2};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}. \tag{8}$$

4. Функция $y=\operatorname{arcctg} x$ (рис. 50, стр. 71). Для нее имеют место формулы

$$dy=-\frac{dx}{1+x^2};\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

Их можно вывести либо из соотношения

$$\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$$

[как выше получены формулы (5)], либо с помощью обратной функции $x=\operatorname{ctg} y$ [как выше получены формулы (8)].

Сводка формул:

$$d\arcsin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\arccos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\operatorname{arctg} x=\frac{dx}{1+x^2},\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x=\frac{1}{1+x^2},$$

$$d\operatorname{arcctg} x=-\frac{dx}{1+x^2},\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} x=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции

$$\arcsin\frac{x}{a}\qquad (a>0).$$

Решение.

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

Решение. $d \operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \dfrac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \dfrac{a\,dx}{a^2+x^2}$.

Пример 3. Найти производную функции $\operatorname{arctg}\frac{3x+5}{2}$.

Решение. $$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{3x+5}{2} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2}\right)}{1+\left(\frac{3x+5}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9x^2+30x+29} =$$

$$= \frac{6}{9x^2+30x+29}.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $\arccos\frac{3}{4x-1}$.

Решение. $$d\arccos\frac{3}{4x-1} = \frac{d\left(\frac{3}{4x-1}\right)}{-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4x-1}\right)^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{3\cdot 4\cdot dx}{(4x-1)^2}}{-\frac{\sqrt{(4x-1)^2-9}}{|4x-1|}} = \frac{6dx}{|4x-1|\cdot\sqrt{4x^2-2x-2}}.$$

Замечание 3. Функция $\arccos\frac{3}{4x-1}$ определена только при $\left|\frac{3}{4x-1}\right| \leqslant 1$, т. е. либо при $x \geqslant 1$, либо при $x \leqslant -\frac{1}{2}$. В промежутке $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ она не определена. Если формально подставить какое-либо неподходящее значение (например, $x=0$) в выражение дифференциала, то последнее окажется мнимым.

§ 83а. Задачи к § 83

Найти производные следующих функций:

1. $\arcsin(3x-1)$.
2. $\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)$.
3. $\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}$.
4. $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$.

5. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)$.

6. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

7. $a\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}$.

8. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}$.

9. $\operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

10. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

11. $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$.

12. $\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$.

13. $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{ctg}x\right)$.

14. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$.

15. Вывести формулу для дифференциала функции $y=\operatorname{arcsec}x$, обратной по отношению к функции $x=\sec y$ (где y изменяется в пределах первой и второй четвертей).

16. Вывести формулу для дифференциала функции $y=\operatorname{arccosec}x$, обратной по отношению к функции $x=\operatorname{cosec}y$ (где y изменяется в пределах четвертой и первой четвертей).

§ 84. Параметрическое задание линии

Представим себе, что точка движется по некоторой линии AB (рис. 96). Это значит, что каждому моменту времени t соответствует определенная точка M линии AB. Если отнести линию AB к какой-либо системе координат, то координаты $OP=x$, $OQ=y$ точки M будут (однозначными) функциями от t:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t). \tag{1}$$

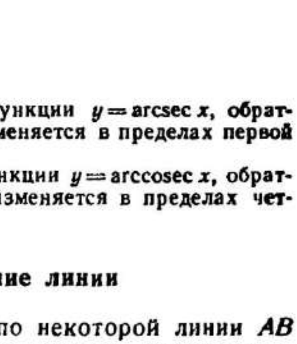


Рис. 96.

Функция $x=f(t)$ выражает закон движения точки P по оси Ox, функция $y=\varphi(t)$ — закон движения точки Q по оси Oy. Так как в каждый момент времени t движущиеся точки P и Q должны иметь некоторые скорости, то функции $f(t)$, $\varphi(t)$ надо считать дифференцируемыми.

Уравнения (1), взятые в совокупности, полностью характеризуют линию AB.

Переменная t (*параметр*), входящая в эти уравнения, может выражать не время, а любую другую физическую или геометрическую величину — все равно уравнения вида (1) представляют некоторую линию.

Систему уравнений, выражающих координаты произвольной точки линии AB в функции некоторого параметра t, называют ***параметрическими уравнениями*** линии AB.

С параметрическими уравнениями прямой линии мы уже встречались в аналитической геометрии (I, § 146).

Если из системы (1) удается исключить параметр t, то мы получаем уравнение, связывающее текущие координаты x, y. Ему будут обязательно удовлетворять координаты всех точек линии AB; однако ему могут удовлетворять и координаты точек, не лежащих на этой линии.

Параметрические уравнения линии AB не только задают совокупность точек, принадлежащих этой линии, но и устанавливают порядок, в котором эти точки следуют друг за другом. При этом не исключено, что с одной и той же точкой K (рис. 96) движущаяся точка M совместится дважды (или многократно): сначала в некоторый момент $t=t_0$, а затем в момент $t=t_1$. В этом случае надо считать точку K не за одну, а за *две* совместившиеся друг с другом точки линии AB (или за большее число совместившихся точек).

Данному значению $t=t_1$ уравнения (1) ставят в соответствие определенное значение $x=x_1$ и определенное значение $y=y_1$. Тем самым значения $x=x_1$, $y=y_1$ ставятся в соответствие друг с другом, так что одну из этих величин можно рассматривать как функцию от другой.

Эта функция может быть и многозначной. Так, на рис. 96 значению $x=OP$ соответствуют три значения величины y, а именно PM, PM' и PM''; значению же $y=OQ$ соответствуют два значения величины x, а именно QM и QC.

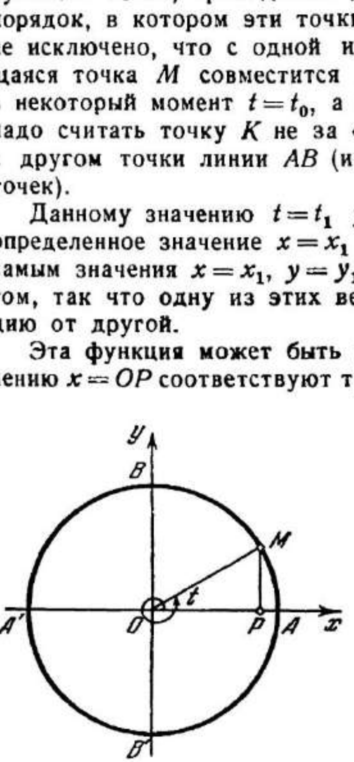


Рис. 97.

Однако упомянутую многозначность обычно удается устранить; для этого надо из линии AB выделить такую дугу, которую каждая прямая, параллельная оси Oy (или оси Ox), пересекала бы не более одного раза. (Такова, например, на рис. 96 дуга AC). Тем самым из всего промежутка, в котором изменяется параметр t, выделяется некоторый участок $(t_A \leqslant t \leqslant t_C)$, и теперь уравнения (1) задают однозначную зависимость y от x (или x от y).

Пример 1. Пусть точка M (рис. 97) вращается около точки O, описывая окружность радиуса a. Тогда за параметр естественно принять угол поворота радиуса из некоторого начального положения OA в положение OM. Параметр t может изменяться в промежутке $(-\infty, \infty)$. Если расположить оси Ox, Oy, как показано на рис. 97, то координаты x, y точки M выразятся через t следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=a\sin t\end{aligned}\right\}(-\infty<t<\infty). \tag{2}$$

Это параметрические уравнения данной окружности. Из них можно исключить параметр t (возвести их в квадрат и сложить почленно). Получим уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$. Это уравнение задает совокупность всех точек окружности; параметрические же уравнения задают, кроме того, и порядок, в котором следуют друг за другом различные положения точки M; так, при возрастании параметра в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ точка M пробегает дугу $B'AB$, занимая положение A позже, чем положение B', но раньше, чем положение B. При этом через каждое свое положение точка M проходит по одному разу. Но если t изменяется, скажем, в промежутке $(0; 6\pi)$, то с каждой точкой окружности движущаяся точка M совпадает трижды, так что любую точку окружности теперь надо считать за три точки.

Уравнения (2) устанавливают двузначную зависимость y от x:

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

а также двузначную зависимость x от y $(x=\pm\sqrt{a^2-y^2})$.

Но если из всего промежутка $(-\infty, \infty)$, в котором изменяется параметр t, выделить, скажем, участок $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$, то точка M опишет дугу, которую каждая прямая, параллельная оси Oy или оси Ox, пересечет не более одного раза. Величина y будет однозначной функцией от x; эта функция представится формулой

$$y=-\sqrt{a^2-x^2} \qquad \left(\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Равным образом величина x будет однозначной функцией от y:

$$x=\sqrt{a^2-y^2} \qquad \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant-\frac{a}{2}\right).$$

П р и м е р 2. Пусть точка M (рис. 98) вращается около точки O, описывая эллипс с центром в точке O и с полуосями $OA=a$ и $OB=b$.

Составим параметрические уравнения этого эллипса, направив ось Ox по оси OA, а ось Oy по оси OB.

Данный эллипс можно получить из окружности $A'D'AD$ радиуса a путем ее равномерного сжатия к оси абсцисс (I, § 53). Пусть

$N(x', y')$ — та точка окружности, которая преобразуется в точку $M(x, y)$. Тогда

$$x = x', \qquad y = \frac{b}{a} y'. \tag{3}$$

Когда точка M совершает полный оборот по эллипсу, точка N совершает полный оборот по окружности. Поэтому в качестве параметра для эллипса удобно принять ту же величину t, которую мы в примере 1 приняли за параметр для окружности, т. е. угол $\angle AON = t$. Тогда координаты x', y' точки N выразятся формулами

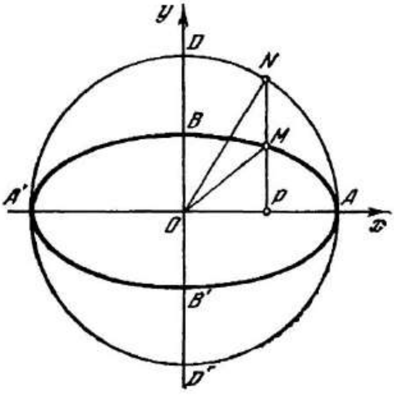


Рис. 98.

$$x' = a \cos t, \qquad y' = a \sin t.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3), получаем

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t. \tag{4}$$

Это — параметрические уравнения эллипса. Из них можно получить каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (уравнения $\frac{x}{a} = \cos t$; $\frac{y}{b} = \sin t$ возводим в квадрат и складываем).

Пример 3. Циклоида. Пусть (рис. 99) по прямой Ox (*направляющая*) катится без скольжения круг радиуса a (*производящий круг*). Линия, которую при этом описывает какая-либо точка окружности, называется *циклоидой*.

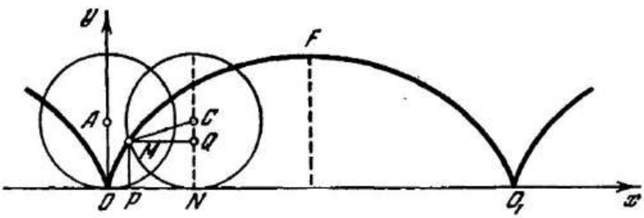


Рис. 99.

Замечание. Выражение «катится без скольжения» означает следующее: пусть точка, описывающая циклоиду, в начальном своем положении O была точкой касания производящего круга с направляющей, а в некоторый последующий момент заняла новое положение M, пусть N — новое положение точки касания. Тогда $ON = \overset{\frown}{NM}$.

Составим параметрические уравнения циклоиды, расположив оси Ox, Oy, как показано на рис. 99.

За параметр естественно принять угол $NCM = t$, на который повернулся радиус, занимавший в начальный момент положение AO. Тогда

$$
\begin{aligned}
x &= OP = ON - PN = ON - MQ = \overset{\frown}{NM} - MQ = at - a\sin t,\\
y &= PM = NC - QC = a - a\cos t.
\end{aligned}
$$

Стало быть, циклоида представляется следующими параметрическими уравнениями:

$$x = a(t - \sin t); \qquad y = a(1 - \cos t). \tag{5}$$

Когда t изменяется в промежутке $(0; 2\pi)$, точка M описывает линию OFO_1 (*арка* или *ветвь* циклоиды). Отрезок OO_1 называется ***основанием циклоиды***. Точка F, наиболее удаленная от основания, называется ***вершиной*** циклоиды; ей соответствует значение $t = \pi$. Когда t изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, уравнения (5) представляют совокупность всех ветвей циклоиды. Порядок прохождения этих ветвей точкой M соответствует порядку возрастания параметра t.

Всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает циклоиду в одной точке [т. е. при любом значении $x = x_0$ уравнение $a(t - \sin t) = x_0$ имеет одно и только одно решение; ввиду трудности доказательства ограничиваемся ссылкой на чертеж]. Значит, величина y есть однозначная функция от x. Но найти формулу, выражающую эту функцию, не удается [для этого надо было бы разрешить уравнение $x = a(t - \sin t)$ относительно t].

Очевидно, что всякая прямая, параллельная оси Ox и лежащая в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 2a$, имеет с циклоидой бесчисленное множество общих точек. Значит, величина x является многозначной функцией от y. Формулу, выражающую эту функцию, получить можно, но она громоздка и для вычислений мало пригодна.

Пример 4. Улитка Паскаля. Пусть дана окружность (рис. 100, пунктирная линия), построенная на отрезке $OA = a$, как на диаметре (*основная окружность*). Пусть луч OP совершает полный оборот около точки O. От точки M, где прямая OP вторично пересекает окружность, откладываем по направлению луча OP отрезок MN постоянной длины l. Линия, описываемая точкой N при вращении луча OP, называется ***улиткой Паскаля***[1]).

---

[1]) В честь Этьена Паскаля (1588—1651) — отца знаменитого французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662).

Пояснение. Для луча, перпендикулярного к диаметру OA (луч OP_2 на рис. 100), точка «вторичной» встречи с окружностью совпадает с точкой O. Для луча, образующего тупой угол с диаметром OA (лучи OP_3, OP_4, OP_5), точка вторичной встречи (M_3, M_4, M_5) лежит на *продолжении* луча[1]).

Внешний вид и свойства улитки Паскаля зависят от того, будет ли отрезок l меньше, больше или равен диаметру a. Рис. 100 $\left(\text{где } l=\frac{1}{2}a\right.$ и вследствие этого улитка проходит через центр C

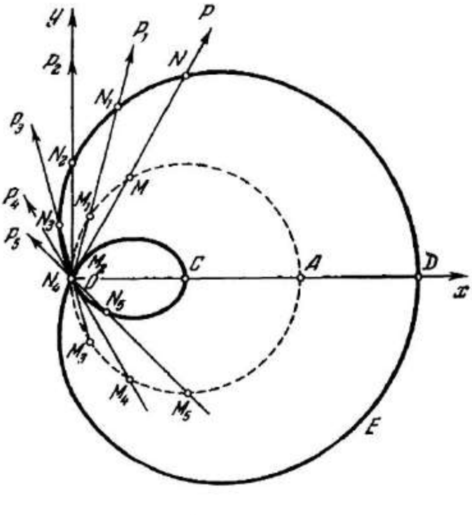


Рис. 100.

окружности$\left.\right)$ типичен для случая $l<a$. Но уравнения улитки для всех трех случаев — одни и те же.

Найдем сначала уравнение улитки в обобщенных полярных координатах (полюс O; полярная ось OA). Уравнение основной окружности есть $\rho=a\cos\varphi$ (I, § 48, пример 1). Здесь φ — угол, образуемый лучом OP с лучом OA. А так как отрезок $MN=l$ откладывается именно по направлению луча OP, то линия, описываемая точкой N, представляется уравнением

$$\rho=a\cos\varphi+l. \tag{6}$$

---

[1]) Чтобы хорошо представить себе образование улитки, надо самостоятельно выполнить построение ее по точкам.

Отсюда получаем параметрические уравнения улитки

$$x = \rho\cos\varphi = (a\cos\varphi + l)\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi = (a\cos\varphi + l)\sin\varphi. \tag{7}$$

Из них можно исключить параметр φ следующим образом. Сначала находим

$$\sqrt{x^2+y^2} = \pm(a\cos\varphi + l) = \pm a\cos\varphi \pm l. \tag{8}$$

Затем из (7) и (8) (предполагая, что x и y не равны нулю одновременно) получаем

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\cos\varphi. \tag{9}$$

Наконец, подставляя в (8) вместо $\pm\cos\varphi$ выражение (9), находим

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm l. \tag{10}$$

При втором члене надо *обязательно* сохранить оба знака: плюс и минус.

Мы предположили, что величины x и y не равны нулю одновременно. Из равенства (8) следует, что эти величины и не могут одновременно равняться нулю, если $l > a$. Если же $l \leqslant a$, то из (7) следует, что при $\cos\varphi = -\frac{l}{a}$ имеем $x = 0$, $y = 0$. Значит, в случае $l > a$ точка O не принадлежит улитке $\left(\text{см. рис. 101, где } l = \frac{4}{3}a\right)$, а при $l \leqslant a$ принадлежит.

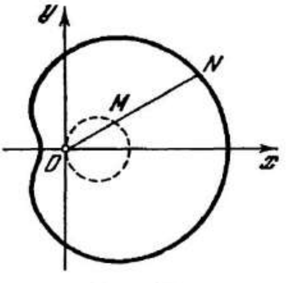


Рис. 101.

При этом, если $l < a$, то равенство $\cos\varphi = -\frac{l}{a}$ имеет место при двух положениях луча OP, симметричных относительно Ox; на рис. 100 изображено одно из них (OP_4). Значит, точка N, описывающая улитку Паскаля, проходит через положение O дважды, и здесь улитка пересекает сама себя, образуя две петли.

Уравнение (10) легко освободить от радикалов; получится уравнение

$$(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2). \tag{11}$$

При этом преобразовании опять предполагается, что x и y не равны нулю одновременно. В этом предположении уравнения (10) и (11) равносильны. Но уравнение (10) не имеет смысла при $x=y=0$, а уравнению (11) эти значения удовлетворяют. Поэтому уравнение (11) представляет улитку Паскаля, строго говоря, лишь в том случае, когда $l \leqslant a$. Если же $l > a$, то уравнение (11) представляет фигуру, состоящую из улитки Паскаля и отдельно лежащей точки O. Ввиду этого часто считают, что точка O принадлежит улитке Паскаля (даже и в том случае, когда точка N, описывая улитку сплошным движением, не проходит через положение O).

Из уравнения (11) видно, что улитка Паскаля есть алгебраическая кривая четвертого порядка. Уравнение (11) (оно биквадратное) можно разрешить относительно y; получим

$$y=\pm\sqrt{x(a-x)\pm\sqrt{x^2(a-x)^2-l^2(x^2+a^2)}}.$$

§ 85. Касательная к параметризованной линии

Теорема. Пусть линия AB задана параметрическими уравнениями

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \tag{1}$$

и пусть в точке $t=t_0$ функции $f(t)$, $\varphi(t)$ обладают конечными производными $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, из которых по меньшей мере одна отлична от нуля. Тогда линия AB имеет в точке t_0 касательную; угол α_0, образуемый этой касательной с осью Ox, определяется из соотношения

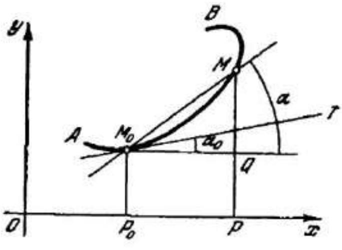


Рис. 102.

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{\varphi'(t_0)}{f'(t_0)}. \tag{2}$$

Доказательство. Для определенности предположим, что $f'(t_0)\neq 0$, и обозначим через α угол, который секущая M_0M (рис. 102) образует с осью Ox [если $f'(t_0)=0$, то по условию $\varphi'(t_0)\neq 0$, и тогда поменяем ролями оси координат]. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{QM}{M_0Q}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{3}$$

Здесь величину Δx можно считать не равной нулю, так как, по предположению, $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\neq 0$. Из (3) находим

$$\lim_{t\to t_0}\operatorname{tg}\alpha=\frac{\lim\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\varphi'(t_0)}{f'(t_0)}. \tag{4}$$

Проведем теперь через точку M_0 прямую M_0T, наклоненную к оси Ox под углом α_0, определяемым соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\varphi'(t_0)}{f'(t_0)}. \tag{5}$$

Сопоставляя (4) и (5), получаем, что $\lim\limits_{t\to t_0}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_0$. Значит, $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha = \alpha_0$ или, что то же, $\lim\limits_{t\to t_0}(\alpha-\alpha_0)=0$.

Таким образом, угол между секущей M_0M и прямой M_0T бесконечно мал при $t\to t_0$. Следовательно, прямая M_0T есть касательная к линии AB в точке $t=t_0$.

Замечание 1. Если обе производные $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ равны нулю одновременно, то линия AB может иметь касательную в точке t_0, а может и не иметь.

Замечание 2. Точка M, описывающая линию (1), может проходить через какую-либо точку K дважды, как на рис. 96. Но тогда мы считаем точку K за две точки, и в каждой из них будет своя касательная. См. ниже пример 3.

Пример 1. Дан эллипс с полуосями a, $b\,(a>b)$. Найти угол между большой осью эллипса и касательной, проведенной через один из концов фокальной хорды MN (рис. 103).

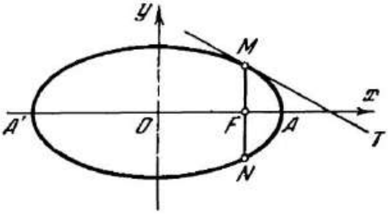


Рис. 103.

Решение. Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса

$$x = a\cos t,\qquad y = b\sin t \tag{6}$$

(§ 84, пример 2). Общая абсцисса x точек M и N равна $OF=c=\sqrt{a^2-b^2}$. Следовательно, обеим точкам M и N соответствует значение $\cos t=\frac{c}{a}$.

Из (6) находим

$$x'_t = -a\sin t = \pm a\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm b;\ \ y'_t = b\cos t = \frac{bc}{a}.$$

Угол α_0 между касательной, проведенной через точку M (или точку N), и осью $A'A$ определится из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{y'_t}{x'_t} = \pm\frac{c}{a}.$$

Пример 2. Найти касательную в произвольной точке M циклоиды (рис. 104).

Решение. Из уравнений

$$x=a\,(t-\sin t),\qquad y=a\,(1-\cos t) \tag{7}$$

(§ 84, пример 3) находим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\,(1-\cos t)'}{a\,(t-\sin t)'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}. \tag{8}$$

Докажем, что касательная MT перпендикулярна к прямой MN, соединяющей точку касания M с точкой опоры N производящего круга. Действительно, имеем

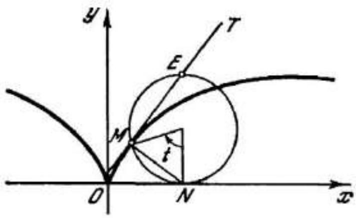


Рис. 104.

$$x_N=at,\qquad y_N=0.$$

Обозначив через α' угол, образуемый прямой MN с осью Ox, получим

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{y-y_N}{x-x_N}=\frac{a\,(1-\cos t)}{a\,(t-\sin t)-at}=$$
$$=-\frac{1-\cos t}{\sin t}. \tag{9}$$

Сопоставив (8) и (9), видим, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha'=-1$, значит, $MT\perp MN$.

Из перпендикулярности прямых MN, MT тотчас же следует, что касательная MT проходит через точку E, диаметрально противоположную точке опоры N.

Эти свойства дают простые способы построения касательной к циклоиде.

Пример 3. Найти угол γ между двумя касательными в узловой точке O улитки Паскаля:

$$x=\left(a\cos\varphi+\frac{a}{2}\right)\cos\varphi,\qquad y=\left(a\cos\varphi+\frac{a}{2}\right)\sin\varphi \tag{10}$$

(рис. 100, стр. 218).

Решение. Узловой точке отвечают два значения φ_1, φ_2 параметра, для которых (§ 84, пример 4)

$$\cos\varphi_{1,2}=-\frac{1}{2},\qquad \sin\varphi_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем углы α_1, α_2, которые образуют касательные в точках φ_1 и φ_2 с осью Ox. Из (10) находим

$$x'=-2a\sin\varphi\cos\varphi-\frac{1}{2}a\sin\varphi=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$y'=a\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\frac{a}{2}\cos\varphi=-\frac{3}{4}a.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{y'}{x'}=\frac{-\frac{3}{4}a}{\pm\frac{\sqrt{3}}{4}a}=\pm\sqrt{3},$$

$$\alpha_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}.$$

Искомый угол

$$\gamma=\frac{2}{3}\pi.$$

§ 86. О параметрическом представлении функции

Всякую (однозначную) функцию $y=F(x)$ можно многими способами представить параметрическими уравнениями вида

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t). \tag{1}$$

Для этого достаточно задать совершенно произвольно функцию $x=f(t)$ параметра t. Тем самым данная функция $y=F(x)$ тоже становится функцией того же параметра

$$y=F[f(t)].$$

Если данная функция $y=F(x)$ дифференцируема и если при выборе функции $x=f(t)$ мы позаботимся, чтобы она тоже была дифференцируемой, то и функция $y=F[f(t)]$ будет дифференцируемой (§ 75).

П р и м е р. Пусть дана функция $y=x^2$. Если положить $x=\sin t$, то величина y тоже выразится через t, и мы получим параметрические уравнения

$$x=\sin t,\quad y=\sin^2 t.$$

З а м е ч а н и е 1. Непосредственное задание функции $y=f(x)$ можно рассматривать как частный способ параметрического ее представления: $x=t$, $y=f(t)$. Так, если задана функция $y=x^2$, то можно представить ее в виде

$$x=t,\quad y=t^2. \tag{2}$$

Т е о р е м а. Предположим, что функция $y=F(x)$ представлена параметрическими уравнениями (1), где функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t. Если при этом хотя бы одна из производных $f'(t)$, $\varphi'(t)$ отлична от нуля, то в соответствующей точке x функция $y=F(x)$ имеет (конечную или бесконечную) производную

$$F'(x)=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}. \tag{3}$$

Доказательство. $F'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{f'(t)\,dt}=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$.

Замечание 2. Если $f'(t)=0$, то равенство (3) надо понимать в условном смысле: $F'(x)=\infty$.

Напомним, что по условию обе производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ не могут одновременно равняться нулю. Поэтому в рассматриваемом случае, когда $f'(t)=0$, производная $\varphi'(t)$ *отлична от нуля*.

Если же, вопреки условию теоремы, обе производные $\varphi'(t)$, $f'(t)$ равны нулю, то выражение (3) неопределенно. При этом производная $F'(x)$ может не существовать, но может и существовать. Так, функция $y=x^2$ в точке $x=1$ имеет производную $y'(1)=2$. Но если ту же функцию представить параметрически в виде

$$x=f(t)=1+t^2, \quad y=\varphi(t)=(1+t^2)^2,$$

то в соответствующей точке $t=0$ выражение $\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$ окажется неопределенным, так как обе производные $f'(0)$, $\varphi'(0)$ равны нулю.

§ 86а. Задачи к §§ 84—86

1. Построить по точкам линию, заданную уравнениями

$$x=2t-1; \qquad y=1-4t^2 \qquad (-3<t<3).$$

Найти точки пересечения этой линии с осями координат. Написать уравнение данной линии, не содержащее параметра t.

2. Найти угол между касательной к линии

$$x=a\sin t, \qquad y=b\cos t \tag{1}$$

в точке $t=\frac{\pi}{4}$ и осью Ox. Исключить параметр t из уравнений (1).

3. Определить, какую линию представляют параметрические уравнения $x=a\sec t$, $y=b\operatorname{tg} t$.

4. Определить, какую линию представляют параметрические уравнения

$$x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t}), \quad y=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t}), \tag{2}$$

и найти угол между осью Ox и касательной к линии (2) в точке $t=0$.

5. Определить, какую линию представляют параметрические уравнения $x=a\cos^2 t$, $y=a\cos t\sin t$, и найти углы между осью Ox и касательными в точках $t=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{4\pi}{3}$, $t=\frac{\pi}{2}$

6. Рассматривается улитка Паскаля

$$x=(a\cos\varphi+l)\cos\varphi, \qquad y=(a\cos\varphi+l)\sin\varphi, \tag{3}$$

для которой $l<a$. Требуется найти угловые коэффициенты касательных в узловой точке.

7. Улитка Паскаля, для которой $l=a$, называется *кардиоидой* (т. е. «сердцеобразной»). Построить эту линию и найти из уравнений (3) угловой

коэффициент касательной в точках $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Существует ли касательная в точке $\varphi=\pi$?

8. Составить параметрические уравнения архимедовой спирали, приняв за параметр угол поворота полярного радиуса. Какой угол образуют между собой касательные в концах первого и второго завитков?

Указание. Архимедова спираль представляется в полярной системе координат уравнением вида $\rho=a\varphi$, где a — постоянная (I, § 48а, задача 10).

9. Функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t.$$

Найти производную $f'\left(\frac{a}{2}\right)$, если известно, что $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

10. Функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$x=a\sec t, \qquad y=a\operatorname{tg} t.$$

Найти производную $f'\left(\frac{5a}{3}\right)$, если известно, что $f\left(\frac{5a}{3}\right)=-\frac{4}{3}a$.

§ 87. Производная неявной функции

Если функция $y=f(x)$ задана неявно, т. е. с помощью некоторого уравнения, связывающего переменные x, y, то для разыскания производной $\frac{dy}{dx}$ нет нужды разрешать данное уравнение относительно y. Лучше воспользоваться приемом, который уяснится из нижеследующих примеров.

Пример 1. Функция $y=f(x)$ задана уравнением $x^2=25-y^2$; требуется найти производную $\frac{dy}{dx}$ в точке $x_0=4$, $y_0=-3$.

Решение. Предположим, что функция $y=f(x)$, заданная неявно уравнением $x^2=25-y^2$, представляется *какими-либо* параметрическими уравнениями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t). \tag{1}$$

Каковы именно эти уравнения, совершенно безразлично (можно, например, положить $x=5\cos t$, $y=5\sin t$). Существенно только то, чтобы выражения (1) тождественно удовлетворяли уравнению $x^2=25-y^2$. Тогда будем иметь

$$d(x^2)=d(25-y^2),$$

откуда

$$2x\,dx=-2y\,dy.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\frac{4}{(-3)}=\frac{4}{3}.$$

Проверка. Разрешив данное уравнение относительно y, находим

$$y = -\sqrt{25-x^2}$$

(перед радикалом берется только один знак минус, так как по условию при $x=4$ мы должны иметь $y=-3$). Теперь находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{4}{3}.$$

Мы нашли угловой коэффициент касательной M_0T (рис. 105) к окружности $x^2+y^2=25$ в точке $M_0(4;\ -3)$.

Замечание 1. При неявном представлении функции недостаточно задать только значение аргумента; надо также указать и соответствующее значение функции. В самом деле, данному значению аргумента x может соответствовать не одно значение функции, а большее их число. Так, в примере 1 значению $x=4$ в силу уравнения $x^2 = 25-y^2$ соответствует не только значение $y=-3$ (точка M_0 на рис. 105), но также и значение $y=3$ (точка M_0').

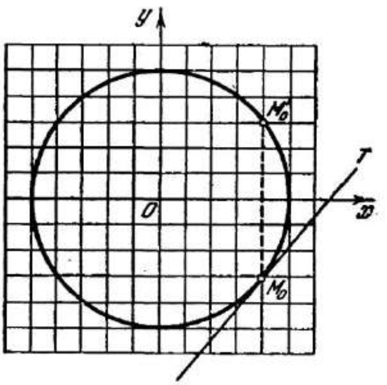


Рис. 105.

Пример 2. Функция $y=f(x)$ задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (a>b) \qquad (2)$$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ в точке $x=\sqrt{a^2-b^2}$, $y=\frac{b^2}{a}$.

Решение. Дифференцируем уравнение (2), т. е. приравниваем друг другу дифференциалы правой и левой его частей. Получаем

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Подставляя данные значения x, y, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Мы нашли угловой коэффициент касательной к эллипсу (2) в точке $M\left(\sqrt{a^2-b^2},\ \frac{b^2}{a}\right)$. Ср. § 85, пример 1.

Замечание 2. В примере 2, как и в примере 1, мы могли бы разрешить данное уравнение относительно y, и потом найти производную обычным способом. Уравнение, рассматриваемое в следующем примере, решить относительно y (а также и относительно x) не удается.

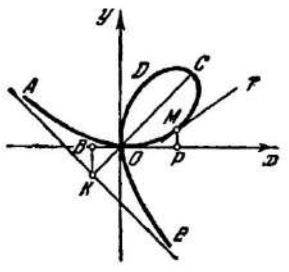


Рис. 106.

Пример 3. Неявная функция $y=f(x)$ задана уравнением

$$x^3+y^3=3axy. \tag{3}$$

Требуется найти производную $\frac{dy}{dx}$ в точке $x=\frac{4}{3}a,\ y=\frac{2}{3}a.$

Замечание 3. Уравнение (3) представляет (рис. 106) линию $AOMCDOE$. Эта линия называется *декартовым листом.* Искомая производная есть угловой коэффициент касательной MT.

Решение. Дифференцируя уравнение (3), получаем

$$3x^2\,dx+3y^2\,dy=3a\,(x\,dy+y\,dx). \tag{4}$$

Сокращая на 3 и подставляя значения $x=\frac{4}{3}a,\ y=\frac{2}{3}a,$ находим

$$\frac{16}{9}a^2\,dx+\frac{4}{9}a^2\,dy=a\left(\frac{4}{3}a\,dy+\frac{2}{3}a\,dx\right).$$

Сократив на a^2 и приведя подобные члены, получим

$$\frac{8}{9}dy=\frac{10}{9}dx,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}.$$

Замечание 4. В уравнении, связывающем переменные x, y, обе эти величины входят на равных правах. Поэтому соотношение (4), полученное дифференцированием уравнения (3), удобно представить в виде

$$(x^2-ay)\,dx+(y^2-ax)\,dy=0. \tag{5}$$

Из этого уравнения можно будет найти как производную

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$, так и производную обратной функции: $\frac{dx}{dy} = -\frac{y^2 - ax}{x^2 - ay}$. Величина $-\frac{y^2 - ax}{x^2 - ay}$ есть тангенс угла, который ось Oy образует с касательной MT линии (3) в точке $M(x, y)$.

§ 87а. Задачи к § 87

1. Найти угловой коэффициент касательной к гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 2304a^2$ в точке $(20a, 9a)$.

2. Функция $y = f(x)$ задана уравнением

$$x^2 - 3xy + y^2 + m^2 = 0. \tag{1}$$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = 2m$, $y = 5m$.

3. Функция $x = \varphi(y)$ задана уравнением (1). Найти производную $\varphi'(y)$ в точке $x = 2m$, $y = 5m$.

4. Найти соотношение между дифференциалами переменных x и y, связанных уравнением (1). Из найденного соотношения получить производную $\varphi'(y)$.

Продифференцировать уравнения, данные в задачах 5—9.

5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. 6. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

7. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 8. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

9. $x^y = y^x$.

10. Переменные x, y связаны уравнением $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$. Найти производную y'_x в точке $x = 1$, $y = 1$.

§ 88. Вторая производная

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ обладает конечной производной $y'_x = f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка (a, b). Тогда величина y'_x сама является функцией от x и может иметь производную $\frac{dy'_x}{dx}$. Эта производная называется *второй производной* или *производной второго порядка* от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или y''_{xx}, или, короче, y'' («игрек два штриха»). В отличие от второй производной $f''(x)$, величину $f'(x)$ называют *первой производной* функции $f(x)$ (или производной первого порядка).

Если функция $f(x)$ обладает в точке x_0 не только конечной первой производной, но также и конечной второй производной, то говорят, что функция $f(x)$ *дважды дифференцируема* в точке x_0.

Пример 1. Найти вторую производную от функции $f(x) = x^4$ в точке $x = \frac{3}{2}$.

Решение. Имеем $f'(x)=4x^3$. Согласно определению имеем $f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}=\frac{d(4x^3)}{dx}=12x^2$. Следовательно, $f''\left(\frac{3}{2}\right)=12\left(\frac{3}{2}\right)^2=27$.

Пример 2. Найти вторую производную от функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$.

Решение. Имеем $f'(0)=\infty$, т. е. функция $f(x)$ в точке $x=0$ не обладает конечной производной. Значит, в точке $x=0$ функция $f(x)$ не обладает второй производной. Во всех остальных точках функция $f(x)$ дважды дифференцируема:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

Механическое истолкование второй производной. Пусть точка M движется прямолинейно и за время t приобретает скорость v.

Тогда частное $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ дает изменение скорости, приходящееся (в среднем) на единицу времени и называется *средним ускорением*.

В § 57 были изложены те соображения, по которым скорость (*в данный момент* t_0) определяется как предел частного $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$. По аналогичным соображениям ускорением *в данный момент* t_0 называют предел частного $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$, т. е. производную $\frac{dv}{dt}$. Но сама скорость v есть производная $\frac{ds}{dt}$. Поэтому ускорение (в данный момент t_0) есть вторая производная пути s по времени t.

Пример 3. Движение незатухающего колебания мембраны представляется уравнением

$$s=a\sin\frac{2\pi t}{T}\tag{1}$$

(T — период колебания, a — амплитуда колебания, s — отклонение точки мембраны от положения покоя).

Скорость движения равна

$$v=s'=\frac{2\pi a}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}.\tag{2}$$

Ускорение равно

$$v'=s''=\frac{-4\pi^2 a}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T}.\tag{3}$$

Сравнивая (1) и (3), видим, что

$$s''=-\frac{4\pi^2}{T^2}s.\tag{4}$$

Значит, упругая сила колебания (она пропорциональна ускорению по второму закону Ньютона) пропорциональна отклонению и имеет противоположное направление.

Замечание. Имея график функции $y=f(x)$ (в прямоугольной системе координат), мы можем геометрически истолковать первую производную $f'(x)$ как угловой коэффициент касательной к графику (§ 60). Таким образом, первая производная изображается в прямоугольной системе координат *отношением двух отрезков* (катетов соответствующего прямоугольного треугольника). Аналогичное истолкование второй производной $f''(x)$ *невозможно*.

Действительно, отношение длин двух отрезков не зависит от выбора единицы масштаба; между тем вторая производная есть предел частного $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$, где делитель Δx есть длина некоторого отрезка, а делимое $\Delta y'$ есть разность *отношений* отрезков. Стало быть, при изменении масштаба изменилось бы только значение делителя, а делимое сохранило бы прежнее значение. Отсюда ясно, что, исходя из графика функции $y=f(x)$ (сделанного в прямоугольной системе координат), *нельзя* представить величину $f''(x)$ отношением двух отрезков.

Точно так же *в прямоугольной системе* координат нельзя представить величину $f''(x)$ одним отрезком [наподобие того, как мы представили в § 69 дифференциал $df(x)$]. Действительно, длина отрезка должна *увеличиваться* при измельчении масштаба, тогда как частное $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ при измельчении масштаба пропорционально *уменьшается*[1]).

Подчеркнем еще раз, что выше шла речь о прямоугольной системе координат. Если же исходить из графика функции в иной системе координат, то дело будет обстоять иначе. Так, исходя из графика функции $\rho=f(\varphi)$ в полярной системе координат, можно представить *отрезком* как первую, так и вторую производную.

§ 89. Вторая производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y=F(x)$ представляется параметрическими уравнениями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \tag{1}$$

где $f(t)$, $\varphi(t)$ — дважды дифференцируемые функции параметра t. Предположим, кроме того, что $f'(t)\neq 0$. Тогда (§ 86) функция $y=F(x)$ имеет конечную производную

$$F'(x)=y'_x=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$\varphi_1(t)=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \tag{3}$$

---

[1]) Вследствие этого величину $\frac{1}{f''(x)}$, обратно пропорциональную второй производной, можно представить отрезком, который строится по данному графику функции $f(x)$.

и рассмотрим систему уравнений

$$x = f(t); \quad y'_x = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} = \varphi_1(t). \tag{4}$$

Применяя снова теорему § 86, заключаем, что функция y'_x имеет производную $\frac{dy'_x}{dx}$, т. е. функция $y = F(x)$ имеет вторую производную

$$y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\varphi'_1(t)}{f'(t)}. \tag{5}$$

Величину $\varphi'_1(t)$ можно найти из формулы (3):

$$\varphi'_1(t) = \frac{f'(t)\,\varphi''(t) - \varphi'(t)\,f''(t)}{[f'(t)]^2}.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$y''_{xx} = \frac{f'(t)\,\varphi''(t) - \varphi'(t)\,f''(t)}{[f'(t)]^3} \tag{6}$$

или, короче,

$$y''_{xx} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}. \tag{6a}$$

Здесь штрихи в правой части означают дифференцирование по параметру t.

Пример. Функция $y = F(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \frac{t^2}{a}; \quad y = \frac{t^3}{a^2} \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{7}$$

Найти вторую производную $F''(4a)$.

Решение. Из (7) находим

$$x' = \frac{2t}{a}, \quad x'' = \frac{2}{a}, \quad y' = \frac{3t^2}{a^2}, \quad y'' = \frac{6t}{a^2}.$$

Подставляя в (6a), получаем

$$F''(x) = \frac{\frac{2t}{a}\cdot\frac{6t}{a^2} - \frac{3t^2}{a^2}\cdot\frac{2}{a}}{\left(\frac{2t}{a}\right)^3} = \frac{3}{4t}.$$

Значению $x = 4a$ соответствует в силу (7) значение $t = \sqrt{ax} = 2a$. Следовательно,

$$F''(4a) = \frac{3}{8a}.$$

Проверка. Исключив t из уравнений (7), находим $y = a^{-1/2} x^{3/2}$. Отсюда $y' = \frac{3}{2} a^{-1/2} x^{1/2}$; $y'' = \frac{3}{4} a^{-1/2} x^{-1/2}$. Следовательно,

$$y''(4a) = \frac{3}{4} a^{-1/2} (4a)^{-1/2} = \frac{3}{8a}.$$

§ 90. Второй дифференциал

Предварительные замечания. Рассмотрим функцию $y = x^3$, где x есть *независимая* переменная. Тогда в соотношении $dy = 3x^2 dx$ величина dx равна приращению Δx, а это последнее может принимать *произвольное* значение даже при условии, что аргументу x дано фиксированное значение. Так, давая аргументу значения $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, мы получаем соотношения

$$dy = 12\Delta x, \quad dy = 27\Delta x, \quad dy = 48\Delta x. \tag{1}$$

В каждом из них величина Δx может принимать любое значение и в этом смысле является переменной.

Поставим теперь вопрос о разыскании *дифференциала* от величины dy, т. е. от $3x^2\Delta x$. В условиях данного вопроса величину Δx считаем *постоянной*. Это значит, что если в равенстве $dy = 12\Delta x$ мы дадим величине Δx некоторое значение, скажем $\Delta x = 0{,}02$, то в равенствах $dy = 27\Delta x$, $dy = 48\Delta x$ и т. д. величине Δx надо будет дать *то же самое значение* 0,02. В первом из этих равенств приращению Δx можно дать *любое другое значение*, скажем $\Delta x = 0{,}001$. Но тогда и в остальных равенствах вида (1) надо дать величине Δx значение 0,001.

Итак, дифференцируя выражение $3x^2\Delta x$, мы рассматриваем Δx как постоянную величину. Значит, $d(3x^2\Delta x) = d(3x^2)\,\Delta x$. Для вычисления $d(3x^2)$ нам опять надо задать не только значение x, но также и значение Δx. Условимся считать, что это значение совпадает с тем, которое было ранее зафиксировано. Тогда мы получим

$$d(dy) = d(3x^2\Delta x) = d(3x^2)\,\Delta x = 6x(\Delta x)^2. \tag{2}$$

Все вышесказанное *относится только к случаю, когда переменная x является независимой.*

Определение. Дифференциал, взятый от дифференциала dy функции y, называется *вторым дифференциалом* функции y и обозначается d^2y (читается «дэ два игрек»):

$$d^2y = d(dy). \tag{3}$$

При разыскании второго дифференциала функции y считается, что приращение Δx *независимой переменной* x сохраняет одно и то же значение при любом значении x и при обоих последовательных дифференцированиях.

Поэтому имеем

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')\,dx = y''dx^2\ ^{1)}. \tag{4}$$

Разумеется, мы предполагаем, что функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема.

В отличие от второго дифференциала d^2y, величину dy называют *первым дифференциалом функции* $f(x)$.

Важно заметить, что выражение $f''(x)\,dx^2$ второго дифференциала d^2y, в противоположность выражению $f'(x)\,dx$ первого дифференциала, *не является инвариантным* при замене независимой переменной. Это значит, что если сама переменная x будет рассматриваться как функция $\varphi(u)$ некоторого аргумента u, то выражение $y''dx^2$, как правило, уже *не будет вторым дифференциалом* функции $y = f[\varphi(u)]$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^3$ и будем сначала считать, что x есть независимая переменная. Тогда в силу формулы (4) имеем

$$d_x^2y = 6x\,dx^2. \tag{5}$$

Индекс при знаке второго дифференциала указывает, какая величина принята за независимую переменную.

Теперь положим, что в формуле $y = x^3$ величина x сама является функцией аргумента u и выражается формулой $x = u^2$:

$$y = f(x) = x^3, \quad x = \varphi(u) = u^2. \tag{6}$$

Если выражения $x = u^2$, $dx = 2u\,du$ подставить в формулу (5), то последняя примет вид

$$d_x^2y = 24u^4du^2. \tag{7}$$

Но величина $24u^4du^2$ в новых условиях уже *не является* вторым дифференциалом функции y. Действительно, из (6) вытекает, что

$$y = u^6. \tag{8}$$

Так как теперь независимой переменной является величина u, то вместо (4) надо применить формулу

$$d_u^2y = y''_{uu}du^2$$

и в силу (8) получаем

$$d_u^2y = 30u^4du^2. \tag{9}$$

---

[1]) Здесь в выражении $(dx)^2$ скобки опущены. Выражение dx^2 нельзя принять за обозначение дифференциала $d(x)^2$, так как в выражении $d(x^2)$ скобки опускать не разрешается.

Сопоставляя этот результат с (7), мы видим, что выражение $24u^4du^2$ (или, что то же, $6x\,dx^2$), которое представляло второй дифференциал при аргументе x, уже *не представляет* второго дифференциала, когда за аргумент принята переменная u.

Замечание. Инвариантную форму второго дифференциала можно получить следующим образом. Как мы знаем (§ 73), выражение $y'_x dx$ есть *инвариантная* форма первого дифференциала. Поэтому соотношение

$$dy = y'_x dx \tag{10}$$

можно дифференцировать безотносительно к тому, какую переменную мы примем за независимую. Получаем

$$d^2y = d\,(y'_x dx) = d(y'_x)\,dx + y'_x d\,(dx). \tag{11}$$

Пользуясь соотношением

$$d\,(y'_x) = y''_{xx} dx, \tag{12}$$

которое тоже инвариантно по отношению к выбору независимого переменного, получаем

$$d^2y = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2x. \tag{13}$$

Это выражение второго дифференциала инвариантно, т. е. оно представляет не только второй дифференциал $d^2_x y$, но также и $d^2_u y$, где u — аргумент, от которого переменная x может находиться в какой угодно зависимости.

Читателю рекомендуется проверить это на примерах.

В том случае, когда x принимается за независимую, т. е. когда $d^2x = 0$, формула (13) принимает вид (4).

§ 91. Выражение второй производной через дифференциалы

Из формулы (4) § 90 получается следующее выражение второй производной от функции $y = f(x)$

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

т. е. *вторая производная некоторой функции равна отношению второго дифференциала к квадрату дифференциала независимой переменной* x (который считается величиной постоянной по отношению к x).

Формула (1) дает основание обозначать вторую производную $f''(x)$ функции $y = f(x)$ символом $\frac{d^2y}{dx^2}$ («дэ два игрек по дэ икс квадрат») или $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$; употребляется также запись $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ и т. п. Такие обозначения часто оказываются более удобными, чем обозначение y''_{xx}. Обозначением $\frac{d^2y}{dx^2}$ пользуются и тогда, когда величина x сама является функцией некоторого аргумента u; но в таких случаях (это надо твердо помнить) запись $\frac{d^2y}{dx^2}$ является *только* символом второй производной, и подставлять в нее выражение величины x через аргумент u мы *не имеем права*.

Пример. Рассмотрим функцию $y=x^3$. Вторая ее производная y''_{xx} равна $6x$. Этот факт можно выразить формулой

$$\frac{d^2(x^3)}{dx^2}=6x. \tag{2}$$

Эта формула верна безотносительно к тому, какая переменная считается независимой, если на выражение $\frac{d^2(x^3)}{dx^2}$ смотреть *просто как на обозначение* второй производной y''_{xx}.

Но формула (2) окажется неверной, если принять, что $x=u^2$ и считать, что величина u является независимой переменной (т. е. что du есть величина постоянная). Действительно, левая часть формулы (2) примет вид $\frac{d^2(u^6)}{[d(u^2)]^2}$; по формуле (4) § 90 найдем, что $d^2(u^6)=30u^4du^2$. Значит, в левой части получится $\frac{30u^4du^2}{4u^2du^2}=\frac{15}{2}u^2$. В правой же части будем иметь $6x=6u^2$.

Таким образом, подставив в выражение $\frac{d(x^3)}{dx^2}$ вместо переменной x ее выражение через аргумент u, мы получили неверный результат.

Замечание. Инвариантное выражение второй производной y''_{xx} через дифференциалы можно получить следующим образом. Как мы знаем (§ 74), выражение $\frac{dy}{dx}$ является инвариантной формой первой производной y'_x. Поэтому равенство

$$y'_x=\frac{dy}{dx}$$

можно дифференцировать безотносительно к тому, какую переменную принять за независимую. Получаем

$$dy'_x=d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}.$$

Следовательно [1]),

$$y''_{xx}=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}. \tag{3}$$

В случае, когда переменная x принимается за независимую, т. е. когда величина dx считается постоянной, величина $d^2x=d(dx)$ равна нулю, и формула (3) превращается в формулу (1).

---

[1]) Формулу (3) можно также получить из формулы (6) § 89, если помножить числитель и знаменатель правой части на dt^3 и принять во внимание, что $\varphi''(t)\,dt^2=d^2y$ и $f''(t)\,dt^2=d^2x$.

§ 92. Примеры применения второго дифференциала

В ряде случаев разыскание второй производной значительно облегчается, если в промежуточных вычислениях использовать вторые дифференциалы.

Пример 1. Из уравнения

$$x^2+y^2=25$$

найти значения вторых производных y''_{xx} и x''_{yy} в точке $x=3$, $y=4$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$x\,dx+y\,dy=0. \tag{1}$$

Оставляя пока открытым вопрос о выборе независимого переменного, дифференцируем уравнение (1); получаем $(dx\,dx+x\,d^2x)+$ $+(dy\,dy+y\,d^2y)=0$ или

$$dx^2+dy^2+x\,d^2x+y\,d^2y=0. \tag{2}$$

При данных значениях $x=3$, $y=4$ уравнения (1) и (2) принимают вид

$$3dx+4dy=0, \tag{1a}$$
$$dx^2+dy^2+3d^2x+4d^2y=0. \tag{2a}$$

Найдем вторую производную y''_{xx}. Примем x за независимую переменную. Тогда в формуле (2а) надо положить $d^2x=0$, и мы получаем систему уравнений

$$3dx+4dy=0; \quad dx^2+dy^2+4d^2y=0. \tag{3}$$

Из первого уравнения находим $dy=-\frac{3}{4}dx$; подставляя во второе, получаем $\frac{25}{16}dx^2+4d^2y=0$. Отсюда по формуле (1) § 91 находим, что

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{25}{64}.$$

Чтобы найти вторую производную x''_{yy}, полагаем $d^2y=0$ и получаем систему

$$3dx+4dy=0; \quad dx^2+dy^2+3d^2x=0.$$

Исключив dx, будем иметь уравнение $\frac{25}{9}dy^2+3d^2x=0$, откуда находим, что

$$x''_{yy}=\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{25}{27}.$$

Проверка. Из уравнения $x^2+y^2=25$ находим y как явную функцию от x:

$$y=\sqrt{25-x^2} \tag{4}$$

(знак минус перед радикалом отброшен, так как по условию при $x=3$ имеем $y=4$). Из (4) последовательно получаем

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}; \quad y''_{xx}=-\frac{25}{(\sqrt{25-x^2})^3}.$$

Подставляя значение $x=3$, находим, что $y''_{xx}=-\frac{25}{64}$.

Аналогично найдем

$$x=\sqrt{25-y^2}, \quad x'_y=-\frac{y}{\sqrt{25-y^2}}, \quad x''_{yy}=-\frac{25}{(\sqrt{25-y^2})^3},$$

подставляя $y=4$, получаем $x''_{yy}=-\frac{25}{27}$.

Замечание 1. Использованный здесь способ применим к разысканию производной от любой неявно заданной функции. Он незаменим в тех случаях, когда данное уравнение не удается разрешить относительно зависимой переменной.

Пример 2. Из уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ в произвольной точке (x, y).

Решение. Последовательно дифференцируем данное уравнение два раза. Получаем систему

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0, \quad \frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{y d^2y}{b^2}=0.$$

Здесь мы сразу положили $d^2x=0$, так как требуется найти только производную y''_{xx}.

Исключая dy, получаем

$$\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^4y^2}\,dx^2+\frac{y}{b^2}\,d^2y=0,$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}. \tag{5}$$

Формула (5) дает ответ на вопрос задачи. Однако эту формулу можно упростить, если учесть, что в силу данного уравнения имеем $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2a^2b^2}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Замечание 2. Тот же прием, который мы использовали в примерах 1 и 2, применим к разысканию второй производной от обратной функции. См. ниже пример 3.

Пример 3. Дана функция $y = x - \sin x$. Найти вторую производную от обратной функции $x = \varphi(y)$.

Решение. Обратная функция $x = \varphi(y)$ не является элементарной, и через аргумент y не удается выразить формулой ни функцию $\varphi(y)$, ни ее производные $\varphi'_y(y)$, $\varphi''_{yy}(y)$. Но через переменную x функции $\varphi'_y(y)$, $\varphi''_{yy}(y)$ можно выразить следующим образом.

Дифференцируя уравнение $y = x - \sin x$ последовательно два раза, получаем систему

$$dy = (1 - \cos x)\, dx, \qquad 0 = \sin x\, dx^2 + (1 - \cos x)\, d^2x. \tag{6}$$

В левой части второго уравнения мы вместо d^2y написали нуль, потому что в условиях предложенной задачи переменная y является независимой. Исключив из уравнений (6) величину dx, получаем

$$0 = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}\, dy^2 + (1 - \cos x)\, d^2x.$$

Так как теперь независимой переменной является величина y, то вторая производная $\varphi''_{yy}(y)$ равняется частному $d^2x : dy^2$. Следовательно,

$$\varphi''_{yy} = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3}.$$

Пример 4. Даны значения первой и второй производных от неизвестной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) = p, \quad f''(x_0) = r. \tag{7}$$

Требуется найти значения первой и второй производных от обратной функции $x = \varphi(y)$ в соответствующей точке y_0.

Решение. Дифференцируя соотношение $y = f(x)$ последовательно два раза и учитывая, что $d^2y = 0$ (так как y в условиях предложенной задачи является независимой переменной), получаем (ср. § 90, замечание):

$$dy = f'(x)\, dx, \quad 0 = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2x. \tag{8}$$

В силу (7) имеем

$$dy = p\, dx; \quad 0 = r\, dx^2 + p\, d^2x. \tag{9}$$

Из (9) находим

$$\varphi'(y_0) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\,; \ \varphi''(y_0) = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{r}{p^3}.$$

§ 93. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная n-го порядка. Производная от второй производной $f''(x)$ называется третьей производной от функции $y=f(x)$ (или *производной третьего порядка*). Третья производная обозначается y''' или $f'''(x)$.

Таким же образом определяются последовательно производная четвертого порядка $y^{\mathrm{IV}}=f^{\mathrm{IV}}(x)$, производная пятого порядка $y^{\mathrm{V}}=f^{\mathrm{V}}(x)$ и т. д. Цифровые обозначения употребляются вместо штрихов для краткости и для большей четкости. Римские цифры употребляются вместо арабских для отличия от показателей степени.

Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$ (для отличия от показателя степени буква n заключена в скобки).

Пример 1. Найти последовательные производные от функции $f(x)=x^4$.

Решение. $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$, $f'''(x)=$ $=(12x^2)'=24x$, $f^{\mathrm{IV}}(x)=24$, $f^{\mathrm{V}}(x)=0$. Все последующие производные тоже равны нулю.

Пример 2. Найти последовательные производные от функции $f(x)=\ln(1+x)$ в точке $x=0$.

Решение. Имеем $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=$ $=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$, $f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots$

Закон образования производных выражается формулой [1]

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

в справедливости которой можно удостовериться с помощью математической индукции. При $x=0$ имеем

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!,$$

т. е.

$f'(0)=1, f''(0)=-1$, $f'''(0)=2$, $f^{\mathrm{IV}}(0)=-(1\cdot 2\cdot 3)=-6$ и т. д.

Дифференциал n-го порядка. Дифференциал от второго дифференциала d^2y называется третьим дифференциалом функции y (или *дифференциалом третьего порядка*). Третий дифференциал обозначается d^3y.

Таким же образом определяются последовательно дифференциал четвертого порядка d^4y, дифференциал пятого порядка d^5y и т. д.

Дифференциал n-го порядка обозначается d^ny («дэ эн игрек»).

При разыскании дифференциала n-го порядка функции $y=f(x)$ считается, что приращение Δx независимой переменной x сохраняет

[1]) Символ $(n-1)!$ обозначает $1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)$, причем считается, что $0!=1$.

одно и то же значение при любом значении x и при всех последовательных дифференцированиях. Тогда имеем последовательно

$$d^3y = d\,(d^2y) = d\,(y''dx^2) = d\,(y'')\,dx^2 = y'''dx^3,$$
$$d^4y = d\,(d^3y) = d\,(y'''dx^3) = d\,(y''')\,dx^3 = y^{\mathrm{IV}}dx^4$$

и т. д. Общая формула имеет вид

$$d^ny = y^{(n)}dx^n = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{1}$$

Пример 3. Дифференциал n-го порядка функции $y = \ln(1+x)$ выражается (ср. пример 2) формулой

$$d^n \ln(1+x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,dx^n.$$

Замечание 1. Выражение $f^{(n)}(x)\,dx^n$ не является инвариантным при изменении независимой переменной (ср. пример § 90). Инвариантную форму третьего дифференциала можно получить из формулы

$$d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$$

[§ 90, формула (13)] следующим образом:

$$d^3y = d\,(d^2y) = (y'''dx^3 + y''2dx\cdot d^2x) + (y''dx\cdot d^2x + y'd^3x) =$$
$$= y'''dx^3 + 3y''dx\cdot d^2x + y'd^3x.$$

Отсюда можно последовательно получить инвариантные выражения дифференциалов четвертого, пятого и т. д. порядков.

Выражения производных высших порядков через дифференциалы. Из формулы (1) находим, что

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{2}$$

Это выражение не является инвариантным, и мы не имеем права пользоваться им в тех случаях, когда переменная x не является независимой (ср. пример § 91). Однако в качестве *обозначения* производной n-го порядка символ $\frac{d^ny}{dx^n}$ употребляется *безотносительно* к тому, какая переменная принята за независимую.

Замечание 2. Инвариантное выражение третьей производной через дифференциалы можно получить из формулы

$$y'' = \frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3}$$

[§ 91, формула (3)]. Дифференцируя эту формулу, получаем

$$dy'' = \frac{dx^3 d\,(dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x) - (dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x)\,d\,(dx^3)}{dx^6} =$$
$$= \frac{dx^3\,(dx\cdot d^3y - dy\cdot d^3x) - (dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x)\cdot 3dx^2d^2x}{dx^6}.$$

Следовательно,

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} dx - 3 \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} d^2x}{dx^5}. \tag{3}$$

Отсюда можно последовательно получить инвариантные выражения производных четвертого, пятого и т. д. порядков.

В случае, когда переменная x принимается за независимую, т. е. когда величина dx считается постоянной, мы имеем $d^2x = d^3x = 0$ и формула (3) принимает вид $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

§ 93а. Задачи к §§ 88—93

Найти вторую производную следующих функций:

1. $y = x^8 - 3x^5 + 2x^3 - 3x$.
2. $y = \sin^2 x$.
3. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.
4. $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.
5. $y = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2})$.
6. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
7. $y = \arcsin (a \sin x)$.
8. $y = x^x$.

Указание. С помощью логарифмического дифференцирования находим $\dfrac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$; следовательно, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx}(1 + \ln x) + \dfrac{y}{x}$; сюда подставляем выражение производной.

9. Из соотношения $f(x) = x\sqrt{x^2 - 16}$ найти $f''(5)$.

10. Из соотношения $f(u) = e^{2u-1}$ найти $f''(0)$.

11. Из соотношения $f(x) = x^{\cos x}$ найти $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. Из соотношения $f(x) = (\cos x)^x$ найти $f''(0)$.

13. Из соотношения $\rho = a \sin 2\varphi$ найти $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4}$.

14. Из соотношения $y = \dfrac{1}{1-x}$ найти $\dfrac{d^5y}{dx^5}$.

15. Из уравнений $x = \ln t$, $y = t^3$ найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ по формуле (6) § 89 и проверить результат, исключив t из данных уравнений.

16. Из уравнений задачи 15 найти $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

17. Из уравнений $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ найти значения $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ при $t = \dfrac{\pi}{6}$.

18. Функция $y = F(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Найти значение $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, зная, что $y = \dfrac{a}{2}$.

19. Из уравнений $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$ найти $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

20. Из уравнений $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ найти $\frac{d^2x}{dy^2}$.

21. Из уравнения $x^3+y^3=3axy$ найти значения $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2x}{dy^2}$ в точке $x=\frac{4}{3}a$, $y=\frac{2}{3}a$.

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ в произвольно взятой точке (x, y):

22. $x^2+xy+y^2=12$. **23.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

24. $x^m y^n=a^{m+n}$.

25. $x+\operatorname{arctg} y-y=0$. Указание. Соотношение $dx+\frac{dy}{1+y^2}-dy=0$ выгодно представить в виде $dy=\left(\frac{1}{y^2}+1\right)dx$.

26. $y=1+xe^y$.

27. $y=\operatorname{tg}(x+y)$.

Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$ из следующих уравнений:

28. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

29. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (см. § 92, пример 2).

30. $y=\operatorname{tg}(x+y)$ (ср. задачу 27).

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 94. Вводные замечания

Пусть требуется вырыть канал с прямоугольным сечением, имеющим данную площадь S (она определяет пропускную способность канала). Для того чтобы по возможности ослабить влияние трения, надо сделать возможно меньшим периметр сечения $2x+y$ (x — глубина канала; y — его ширина). Спрашивается, какова должна быть глубина x. Это — одна из многочисленных практически важных задач, где требуется найти наименьшее (или наибольшее) значение данной величины. В этом случае надо найти такое (положительное) значение x, при котором функция $2x+y=2x+\frac{S}{x}$ имела бы наименьшее значение.

Эту частную задачу можно решить средствами элементарной математики. Но тогда, чтобы найти метод решения, надо проявить изобретательность, а, главное, *метод* решения придется искать заново, если вместо функции $2x+\frac{S}{x}$ мы встретимся с какой-либо другой функцией.

Дифференциальное исчисление дает общий метод решения задач такого рода, а также общие методы решения других задач, требующих исследования различных свойств данной функции. Этим вопросам и посвящена настоящая глава.

§ 95. Теорема о наименьшем и наибольшем значениях функции

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$, непрерывная в промежутке (a, b), принимает в нем наименьшее или наибольшее значение во *внутренней* точке x_0. Тогда либо $f'(x_0)=0$, либо функция $f(x)$ в точке x_0 недифференцируема (т. е. производная $f'(x_0)$ бесконечна или вовсе не существует).

Геометрически. Если точка M_0, занимающая наинизшее или наивысшее положение на графике функции $f(x)$, не совпадает ни с одним из его концов A, B, то касательная в точке M_0 либо горизонтальна (рис. 107, *а*), либо вертикальна (рис. 107, *б*), либо не существует (рис. 107, *в*).

Доказательство. Пусть $f(x_0)$ есть наименьшее значение функции в промежутке (a, b). Так как по условию точка x_0 лежит

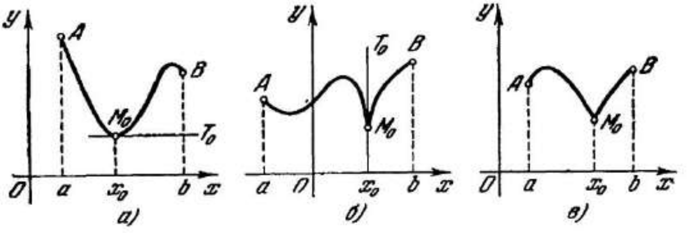


Рис. 107.

внутри промежутка (a, b), то одни точки промежутка лежат справа от x_0, а другие слева. В первом случае приращение Δx аргумента x положительно, во втором — отрицательно.

Но в обоих случаях $f(x_0)$ не превосходит $f(x+\Delta x)$:

$$f(x_0) \leqslant f(x_0+\Delta x).$$

Следовательно, в обоих случаях имеем

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \geqslant 0,$$

или, что то же,

$$\Delta y \geqslant 0. \tag{1}$$

Предположим, что точка x стремится к x_0 справа, т. е. что Δx стремится к нулю, оставаясь положительным. Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в силу (1) заведомо не будет принимать отрицательных значений.

Значит, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то число $f'(x_0)$ — предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — не может быть отрицательным.

Предположим теперь, что Δx стремится к нулю, оставаясь отрицательным. Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, опять-таки в силу (1), не будет принимать положительных значений. Значит, число $f'(x_0)$ не может быть положительным.

Итак, число $f'(x_0)$ неположительно и неотрицательно. Следовательно, оно равно нулю.

Рассуждая аналогично, докажем, что если во внутренней точке x_0 промежутка (a, b) функция $f(x)$ принимает свое *наибольшее* значение, то число $f'(x_0)$ тоже равно нулю. При этом опять предполагается, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Стало быть, если во внутренней точке x_0 промежутка (a, b) функция $f(x)$ принимает свое наименьшее или наибольшее значение, без того чтобы $f'(x_0)=0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ *недифференцируема*.

§ 96. Правило для разыскания наибольших и наименьших значений

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в *замкнутом* промежутке (a, b). Тогда она должна принимать в этом промежутке как наибольшее, так и наименьшее значения. Найти эти значения можно по следующему способу.

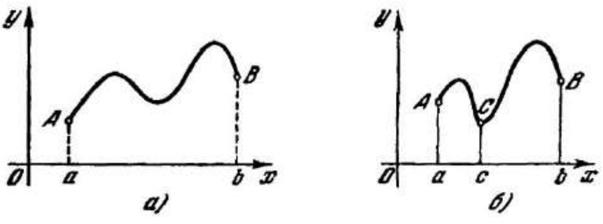


Рис. 108.

Для определенности положим, что мы ищем наименьшее значение функции $f(x)$. Это значение функция может принимать в одном из концов данного промежутка, скажем в точке a (рис. 108,a) или в некоторой точке c, лежащей между a и b (рис. 108, $б$).

В последнем случае точка c в силу теоремы § 289 находится либо среди точек, где функция $f(x)$ имеет нулевую производную, либо среди точек, где функция $f(x)$ недифференцируема. Точки того и другого рода будем называть *критическими*.

Часто оказывается, что число критических точек невелико, и тогда наименьшее значение функции в промежутке (a, b) находится следующим образом:

1) *В промежутке* (a, b) *находим все критические точки.*

2) *Вычисляем значение функции* $f(x)$ *в каждой из критических точек, а также значения* $f(a)$, $f(b)$.

3) *Из найденных значений выбираем наименьшее.*

Аналогично находится наибольшее значение функции $f(x)$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1} \tag{1}$$

в замкнутом промежутке $(-0{,}5;\ 2)$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна и имеет конечную производную

$$f'(x)=\frac{d}{dx}[x^{2/3}-(x^2-1)^{1/3}]=\frac{2}{3}[x^{-1/3}-x(x^2-1)^{-2/3}] \tag{2}$$

во всех точках промежутка $(-0{,}5;\ 2)$, за исключением точек $x=0$ и $x=1$, где функция $f(x)$ непрерывна, но недифференцируема [производные $f'(0)$, $f'(1)$ бесконечны].

1) Ищем точки, где производная равна нулю. Для этого надо решить уравнение

$$f'(x)=\frac{2}{3}[x^{-1/3}-x(x^2-1)^{-2/3}]=0$$

или

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}. \tag{3}$$

Так как значения $x=0$ и $x=1$ исключены из рассмотрения, то обе части уравнения (3) можно помножить на $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$. Получаем

$$\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=x\sqrt[3]{x}$$

или

$$(x^2-1)^2=x^4.$$

Корни этого уравнения суть $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Но второй корень не принадлежит промежутку $(-0{,}5;\ 2)$.

Итак, в промежутке $(-0{,}5;\ 2)$ имеется одна точка $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где производная $f'(x)$ равна нулю и две точки $x=0$, $x=1$, где функция $f(x)$ недифференцируема.

2) Вычисляем значения функции $f(x)$ в каждой из трех точек: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=0$, $x=1$, а также значения $f(-0{,}5)$, $f(2)$. Находим:

$$f(-0{,}5)=\sqrt[3]{0{,}25}+\sqrt[3]{0{,}75}\approx 1{,}539,$$

$$f(0)=1,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}587,$$

$$f(1)=1,$$

$$f(2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\approx 0{,}145.$$

3) Из найденных пяти значений наибольшее есть $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}587.$ Оно и является наибольшим значением функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке.

Наименьшее же значение функции $f(x)$ в промежутке $(-0{,}5;\ 2)$ есть $f(2) = 0{,}145$.

Обратим внимание на то, что наибольшее значение функция $f(x)$ принимает во внутренней точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а наименьшее — в граничной точке $x = 2$. График функции дан на рис. 109.

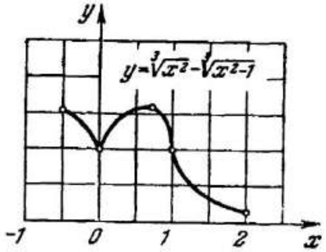


Рис. 109.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна в *незамкнутом* промежутке (конечном или бесконечном), то среди ее значений в этом промежутке может не оказаться наименьшего (наибольшего); ср. § 39, пример 3. Но вышеприведенное правило можно обобщить таким образом, чтобы оно стало пригодным и для незамкнутого промежутка.

По-прежнему будем предполагать, что число критических точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в промежутке (a, b) конечно. Можно доказать, что при этом условии в промежутках (a, x_1), (x_k, b), как и в промежутках (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{k-1}, x_k) функция $f(x)$ монотонна и, значит, существуют (односторонние) пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ (они могут быть и бесконечными). Если конец a (или b) входит в состав данного промежутка, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [или $\lim\limits_{x\to b} f(x)$] совпадает со значением $f(a)$ [или $f(b)$]. Эти пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ мы и введем вместо значений $f(a)$, $f(b)$.

Чтобы в общем случае решить вопрос о наименьшем значении функции, поступаем так:

1) В промежутке (a, b) находим все критические точки $x_1, \ldots, x_k$.

2) Вычисляем значения функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$, а также односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

3) Из найденных чисел выбираем наименьшее.

Если это число является одним из значений $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ или тем значением, которое функция $f(x)$ принимает в граничной точке, *принадлежащей* данному промежутку, то оно же является наименьшим значением функции в данном промежутке. В противном случае среди значений функции в промежутке (a, b) нет наименьшего.

Аналогично решается вопрос о наибольшем значении функции.

Пример 2. Функция $f(x)$, заданная формулой

$$f(x) = \frac{4x^2 + 15x + 9}{(x+3)(x^2+1)},$$

дифференцируема в промежутках $-\infty < x < -3$ и $-3 < x < +\infty$ [в точке $x = -3$ функция $f(x)$ не определена]. Требуется найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ в каждом из этих промежутков.

Решение. Начнем с промежутка $-\infty < x < -3$.

1) Для разыскания критических точек достаточно решить уравнение $f'(x)=0$. Дифференцирование упростится, если заметить, что при $x \neq -3$ имеет место равенство

$$f(x)=\frac{(x+3)(4x+3)}{(x+3)(x^2+1)}=\frac{4x+3}{x^2+1}.$$

Решив уравнение

$$f'(x)=\frac{-4x^2-6x+4}{(1+x^2)^2}=0,$$

находим корни $x_1=-2$, $x_2=0{,}5$. Ни один из них не принадлежит промежутку $(-\infty;\ -3)$. Значит, критических точек нет.

2) Можно вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-3-0} f(x)=-0{,}9$, но заранее ясно, что ни одно из этих чисел не является ни наименьшим, ни наибольшим значением функции $f(x)$ в данном промежутке, так как последний *не имеет граничных точек*. Впрочем, в результате этого вычисления мы узнали, что в

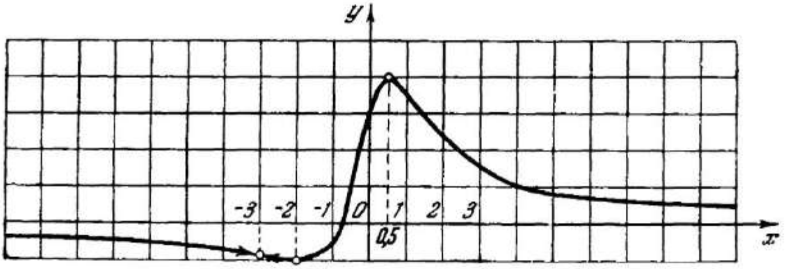


Рис. 110.

промежутке $(-\infty;\ -3)$ функция $f(x)$ убывает, изменяясь в границах от 0 до $-0{,}9$, но ни значения 0, ни значения $-0{,}9$ она не принимает (рис. 110).

Рассмотрим теперь промежуток $(-3;\ +\infty)$.

1) Критические точки $x_1=-2$, $x_2=0{,}5$ мы уже нашли.

2) Вычисляем значения $f(x_1)=-1$; $f(x_2)=4$ и пределы $\lim\limits_{x\to-3+0} f(x)=$ $=-0{,}9$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) Из найденных значений выбираем наименьшее -1. Это число является значением функции в критической точке x_1. Значит, оно же является наименьшим значением функции в промежутке $(-3;\ +\infty)$.

Наибольшим из найденных значений является число 4; оно является значением функции в критической точке x_2. Значит, оно же является наибольшим значением функции в промежутке $(-3;\ +\infty)$.

Вместе с тем в результате вычисления мы узнали, что в промежутке $(-3;\ -2)$ функция $f(x)$ убывает, в промежутке $(-2;\ 0{,}5)$ возрастает, и, наконец, в промежутке $(0{,}5;\ +\infty)$ убывает.

§ 97. Наибольшее и наименьшее значения физических и геометрических величин

В математике, физике, технике, а также в повседневной жизни часто возникает вопрос о разыскании наибольшего или наименьшего значения некоторой величины при определенных условиях, которым эта величина должна удовлетворять (ср. § 94). Общая схема решения подобных задач состоит в следующем.

Устанавливается зависимость рассматриваемой величины y от какой-либо «независимой» (т. е. находящейся в нашем распоряжении) величины x (или от нескольких независимых величин). Из условия задачи определяется, в частности, и тот промежуток, в котором способна изменяться величина x. Когда величина y представлена как функция аргумента x, задачу можно решить по способу, изложенному в предыдущем параграфе.

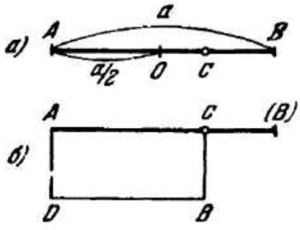


Рис. 111.

Пример 1. Отрезок $AB=a$ (рис. 111, *а*) делится на две части точкой C; на отрезках AC, CB, как на сторонах, строится прямоугольник $ACBD$ (рис. 111, *б*). Найти наибольшее значение его площади.

Решение. Примем за аргумент x длину отрезка AC; тогда $CB=a-x$, и площадь S прямоугольника $ACBD$ выражается формулой

$$S=x(a-x).$$

Здесь x по смыслу задачи меняется в промежутке $(0, a)$. Если условиться считать отрезок AB прямоугольником со сторонами a и 0, то промежуток $(0, a)$ будет замкнутым; если рассматривать только «настоящие» прямоугольники, то незамкнутым. Но в обоих случаях из условия ясно, что среди значений функции S есть наибольшее и что оно соответствует некоторому значению x, лежащему между 0 и a.

Решив уравнение

$$\frac{dS}{dx}=a-2x=0,$$

находим единственную критическую точку $x=\frac{a}{2}$. Соответствующее значение

$$S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$$

есть искомое наибольшее значение площади прямоугольника. Последний является, очевидно, квадратом.

Заметив, что периметр прямоугольника $ACBD$ сохраняет неизменную величину $2a$, заключаем, что *из всех прямоугольников данного периметра квадрат имеет наибольшую площадь.*

Замечание. Часто можно по-разному выбирать аргумент; удачный выбор может упростить вычисления. И вообще учет особенностей задачи может облегчить вычислительную работу. Так в примере 1 отрезки AC, CB входят в условие задачи на равных правах. Поэтому можно ожидать, что вычисления облегчатся, если за аргумент принять расстояние z точки C от *середины* отрезка AB (а не от конца A, без всяких оснований предпочтенного концу B). Действительно, мы получим

$$AC = AO + OC = \frac{a}{2} + z, \qquad CB = OB - OC = \frac{a}{2} - z,$$

$$S = \left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2.$$

Теперь и без дифференцирования ясно, что величина S имеет наибольшее значение при $z = 0$.

Пример 2. Требуется соорудить водоканал с прямоугольным поперечным сечением $ABCD$ (рис. 112) площадью $S = 2\,м^2$. Каковы должны быть размеры сечения для того, чтобы его периметр был наименьшим?

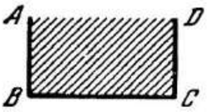


Рис. 112.

Решение. Введем обозначения

$$AB = x, \qquad BC = y.$$

По условию

$$xy = S = 2.$$

Требуется найти наименьшее значение величины $p = 2x + y$. Примем за аргумент величину x; тогда

$$p = 2x + \frac{2}{x}.$$

По смыслу задачи аргумент x способен принимать (теоретически) любое положительное значение, т. е. он изменяется в промежутке $0 < x < \infty$.

Критические точки находим из уравнения

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{2}{x^2} = 0.$$

Из двух корней этого уравнения только один ($x_1 = 1$) принадлежит промежутку $(0, \infty)$.

Сравнив значение $p(x_1) = 2 \cdot 1 + \frac{2}{1} = 4$ с пределами $\lim\limits_{x \to +0} p(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, мы видим, что значение $f(x_1)$ меньше, чем каждый из этих пределов. Следовательно, значение $p(x_1)$ является наименьшим также и во всем промежутке $(0, \infty)$.

Итак, глубина x канала должна составлять 1 *м*, а ширина $y = \frac{2}{1} = 2$ (*м*).

Рассуждая аналогично, мы найдем, что в общем случае

$$x = \sqrt{\frac{S}{2}}, \qquad y = 2\sqrt{\frac{S}{2}},$$

т. е. ширина канала должна быть вдвое больше его глубины.

Пример 3. Прямоугольный лист жести имеет длину 48 *см* и ширину 30 *см*. По углам его вырезают квадраты равной величины; в остающемся куске загибают края и получают открытую сверху коробку. Какова наибольшая вместимость такой коробки?

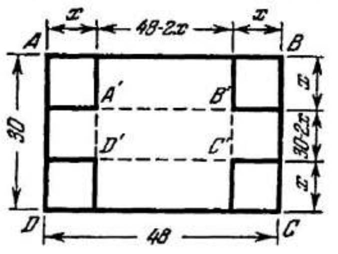


Рис. 113

Решение. Будем рассматривать объем V коробки как функцию стороны x вырезаемых квадратов (рис. 113). Величина x есть высота изготовляемой коробки. Основанием коробки будет служить прямоугольник $A'B'C'D'$ со сторонами $A'B' = 48 - 2x$ и $B'C' = 30 - 2x$. Следовательно,

$$V = x(30 - 2x)(48 - 2x).$$

Аргумент x изменяется в промежутке $(0;\ 15)$ (ибо ширина листа $BC = 30$ *см*).

Критические точки находим из уравнения

$$\frac{dV}{dx} = 1440 - 312x + 12x^2 = 0.$$

Из двух корней этого уравнения $x_1 = 20$, $x_2 = 6$ лишь второй находится внутри промежутка $(0;\ 15)$. Значение $V(6) = 3888$ (*см*^{3}) является наибольшим значением величины V, так как каждое из чисел $V(0)$ и $V(15)$, очевидно, равно нулю.

Пример 4. Каковы должны быть размеры цилиндрической консервной банки вместимости $V = 2$ *л*, чтобы на ее изготовление расходовалось наименьшее количество материала (запас на швы не учитывать).

Решение. Обозначим поверхность банки через S, радиус основания через r, высоту через h. В задаче требуется найти наименьшее значение величины

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{1}$$

при условии, что

$$\pi r^2 h = V. \qquad (2)$$

За аргумент удобно принять r. Из (1) и (2) находим

$$S = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right).$$

Аргумент изменяется (теоретически) в промежутке $(0, +\infty)$. Так как $\lim\limits_{r\to+0} S(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} S(r) = +\infty$, то для разыскания наименьшего значения функции $S(r)$ достаточно рассмотреть критические точки. Уравнение

$$\frac{dS}{dx} = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right) = 0$$

имеет единственный корень

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 6{,}8\ (см). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) находим, что

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r \approx 13{,}6\ (см).$$

Таким образом, наибольшая экономия материала достигается в том случае, когда высота банки равна диаметру основания.

Количество затраченного материала составит в этом случае

$$S_{наим} = 2\pi(rh + r^2) = 6\pi r^2 = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \approx 879\ (см^2).$$

§ 97а. Задачи к §§ 96—97

Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанных промежутках.

1. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 15 \qquad (1 \leqslant x \leqslant 10)$.
2. $f(x) = x^3 - 12x + 1 \qquad (-4 \leqslant x \leqslant 5)$.
3. $f(x) = x^2(x-4)^2 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 4)$.
4. $f(x) = (x+3)(x-1)^3 \qquad (-3 \leqslant x \leqslant 2)$.
5. $f(x) = \dfrac{10x}{4+x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 3)$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.
7. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2+1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2)$.
8. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2+1} \qquad (0 \leqslant x < 2)$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3} \qquad (-7 \leqslant x < -1)$.

10. $f(x) = \sin x + \cos x \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

11. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \left(\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}\pi\right).$

12. $f(x) = 3x^{2/3} - x^2 \qquad (-2 \leqslant x \leqslant 2).$

13. $f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} \qquad (-2a \leqslant x < 2a).$

14. Каковы должны быть размеры литровой металлической кастрюли, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество металла (при данной толщине стенок и дна)?

15. Каковы наиболее экономные пропорции открытого цилиндрического бака, дно которого в полтора раза толще стенок?

Указание. Количество материала, идущего на стенки, ввиду малой их толщины можно считать пропорциональным произведению боковой поверхности на толщину стенок. Вместимость бака надо считать величиной постоянной (значение ее безразлично).

16. Над центром круглого стола радиуса R висит электрическая лампа, которую можно подымать и опускать на блоке. На какой высоте над столом должна быть лампа, чтобы освещенность на краях стола была наибольшей?

Пояснение. Освещенность в некоторой точке M на поверхности стола пропорциональна синусу угла, под которым лучи света наклонены к плоскости стола, и обратно пропорциональна квадрату расстояния точки M от источника света.

17. Картина высотой h *см* помещена на стене так, что ее нижний край находится на a *см* выше уровня глаз. На какое расстояние надо отойти от стены, чтобы видеть картину под наибольшим углом?

18. Из бумажного круга вырезается сектор; из остающегося сектора делается коническая воронка. При каком угле вырезаемого сектора воронка имеет наибольшую вместимость?

19. Гальванический элемент с внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ *ом* нужно включить в цепь так, чтобы во внешней цепи выделялось возможно большее количество тепла. Каково должно быть внешнее сопротивление R цепи?

Указание. Количество Q тепла, выделяющегося во внешней цепи, выражается (в ваттах) формулой $Q = i^2R$ (i — сила тока в амперах); сила тока выражается через э. д. с. элемента и сопротивление цепи по закону Ома.

20. Колода имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого составляют $D_1 = 2$ *м*, $D_2 = 1$ *м*, а высота $H = 9$ *м*. Из нее требуется вырезать прямоугольную балку с квадратным сечением. При какой длине балки она будет иметь наибольший объем?

§ 98. Теорема Ролля

Теорема. Предположим, что функция $f(x)$ (рис. 114) дифференцируема в замкнутом промежутке (a, b) и обращается в нуль на концах этого промежутка:

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Тогда производная $f'(x)$ обращается в нуль ***внутри промежутка*** (a, b) по меньшей мере один раз. [У функции, изображенной на рис. 114, производная обращается в нуль внутри промежутка (a, b) четыре раза, в точках k, l, n, q.]

Доказательство. Предположим сначала, что среди значений, принимаемых функцией $f(x)$ в промежутке (a, b), есть положительные.

Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке (a, b) (иначе она не была бы дифференцируемой). Значит, $f(x)$ принимает в промежутке (a, b) как наибольшее значение M, так и наименьшее значение m (§ 39, свойство 2). А так как среди значений $f(x)$ есть положительные, то наибольшее значение M непременно *положительно*. Следовательно, это значение функция $f(x)$ принимает не в точке a и не в точке b [где $f(x)=0$], а в некоторой внутренней точке x_0 промежутка (a, b). Но тогда, по доказанному в § 95, производная $f'(x_0)$ равна нулю, что и утверждалось в теореме.

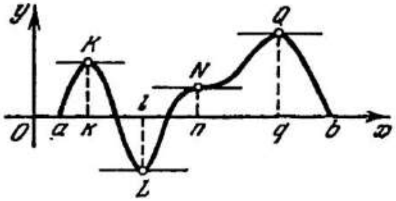


Рис. 114.

Предположим теперь, что среди значений, принимаемых функцией $f(x)$ в промежутке (a, b), есть отрицательные.

В этом случае отрицательным будет также и наименьшее значение m функции $f(x)$. Следовательно, это значение функция $f(x)$ принимает опять-таки в некоторой *внутренней* точке x_1 промежутка (a, b). Но тогда $f'(x_1)=0$; значит, и в этом случае теорема верна.

Остается рассмотреть случай, когда среди значений, принимаемых функцией $f(x)$ в промежутке (a, b), нет ни положительных, ни отрицательных. Тогда $f(x)$ есть постоянная величина (равная нулю). Следовательно, производная $f'(x)$ обращается в нуль в *каждой* внутренней точке промежутка (a, b).

Доказанное предложение называется *теоремой Ролля*[1]).

Пример 1. Функция $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, дифференцируемая в любой точке x, обращается в нуль в точках $x=1$, $x=2$, $x=3$.

Теорема Ролля утверждает, что производная $f'(x)$ обращается в нуль по меньшей мере один раз между точками $x=1$ и $x=2$ и по меньшей мере один раз между точками $x=2$ и $x=3$. Справедливость этого утверждения легко проверить непосредственно: уравнение

$$f'(x)=3x^2-12x+11=0$$

имеет два корня: $x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 2{,}6$, $x_2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}4$. Первый лежит между 2 и 3; второй — между 1 и 2.

[1]) М. Ролль (1652—1719), современник Ньютона и Лейбница, считал дифференциальное исчисление логически противоречивым и, естественно, не мог высказать «теоремы Ролля». Роллю принадлежит одна алгебраическая теорема, из которой вытекает такое следствие: если a и b — корни уравнения $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, то между a и b лежит корень уравнения $nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}=0$. Это предложение есть частный случай «теоремы Ролля» (левая часть второго уравнения есть производная левой части первого уравнения). Отсюда название (исторически неточное) «теорема Ролля».

Пример 2. Функция $f(x)=1-x^{2/3}$ (рис. 115) обращается в нуль на концах промежутка $(-1;\ 1)$. Однако между точками -1 и 1 нет ни одной точки, где производная $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ обращалась бы в нуль. Теорема Ролля здесь *неприменима*, так как в точке $x=0$ промежутка $(-1;\ 1)$ функция $f(x)$ недифференцируема [производная $f'(0)$ бесконечна].

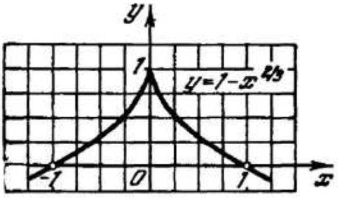


Рис. 115.

Замечание. Как видно из примера 2, условие, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в промежутке $(a,\ b)$, является существенной предпосылкой теоремы Ролля. Однако упомянутое условие можно несколько ослабить. А именно, теорема Ролля остается в силе и в том случае, если потребовать, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в любой точке x, лежащей *между* a и b. В самих же точках a и b функция $f(x)$ может быть и недифференцируемой; *но взамен этого надо все же потребовать, чтобы в точках* a *и* b *функция* $f(x)$ *была непрерывной.* Доказательство остается прежним.

§ 99. Теорема Лагранжа[1]) (о среднем значении)

Формулировка теоремы. Если функция $f(x)$ дифференцируема в замкнутом промежутке $(a,\ b)$, то отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно производной, взятой в некоторой внутренней точке ξ[2]) промежутка $(a,\ b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{1}$$

Геометрическое истолкование. Отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{KB}{AK}$$

(рис. 116) есть угловой коэффициент хорды AB; производная $f'(\xi)$ есть угловой коэффициент касательной NT в некоторой точке N.

Теорема Лагранжа утверждает, что на дуге AB между ее концами имеется по меньшей мере одна точка N, где касательная NT

---

[1]) Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — великий французский ученый, создатель аналитической механики, один из творцов вариационного исчисления.

[2]) Греческая буква ξ (кси) — стандартное обозначение для «среднего значения» аргумента x (т. е. значения, содержащегося внутри данного промежутка).

параллельна хорде AB при условии, что линия AB всюду обладает касательной, не параллельной оси Oy.

На дуге AB рис. 116 указанным свойством обладает только одна точка N; на рис. 117 есть три таких точки (N_1, N_2, N_3).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $S(x)$, заданную формулой

$$S(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(x) & f(b)-f(a) \\ b-x & b-a \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Эта функция выражает удвоенную площадь ориентированного треугольника ABM (рис. 116), у которого вершина $M[x, f(x)]$ описывает дугу AB.

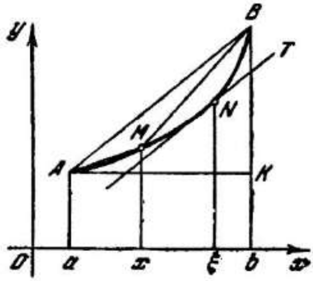


Рис. 116.

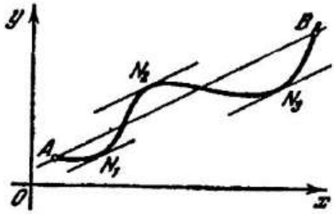


Рис. 117.

Ясно, что функция $S(x)$ обращается в нуль на концах промежутка (a, b); кроме того, эта функция дифференцируема в замкнутом промежутке (a, b), причем производная $S'(x)$ выражается формулой

$$S'(x)=-(b-a)f'(x)+[f(b)-f(a)]. \tag{3}$$

Чтобы получить эту формулу, достаточно раскрыть определитель (2) и применить простейшие правила дифференцирования.

Таким образом, функция $S(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а значит, в некоторой *внутренней* точке $x=\xi$ промежутка (a, b) производная $S'(x)$ должна обратиться в нуль.

Из (3) следует, что точка $x=\xi$ удовлетворяет уравнению

$$-(b-a)f'(\xi)+[f(b)-f(a)]=0, \tag{4}$$

откуда

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Чтобы производная $S'(x)$ обратилась в нуль в некоторой внутренней точке $x=\xi$ промежутка (a, b), достаточно выбрать эту внутреннюю точку так, чтобы функция $|S(x)|$, т. е. площадь *неориентированного* треугольника ABN, получила свое наибольшее значение M_0. Поэтому теорему Лагранжа в ее геометрической форме можно сформулировать следующим образом: *если на графике AB функции $f(x)$ взять точку N таким образом, чтобы треугольник ABN имел наибольшую площадь, то касательная NT в точке N будет параллельна хорде AB* (при условии, что дуга AB всюду обладает касательной, не параллельной оси Oy).

Но так как основание AB треугольника ABN неизменно, то наибольшую площадь треугольник ABN будет иметь тогда, когда вершина N наиболее удалена от прямой AB. Значит, *в точке N, наиболее удаленной от прямой AB, касательная NT параллельна AB* (при условии, что дуга AB всюду обладает касательной, не параллельной оси Oy).

Пример 1. Функция $f(x)=x^2$ дифференцируема в любом промежутке (a, b). Поэтому теорема Лагранжа позволяет утверждать, что при любых (не равных друг другу) значениях a, b отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$ равно производной $f'(\xi)=2\xi$, взятой в некоторой внутренней точке ξ промежутка (a, b).

Проверим это утверждение. Уравнение

$$2\xi=b+a$$

имеет единственное решение

$$\xi=\frac{b+a}{2}. \tag{6}$$

Из (6) видно, что точка ξ есть середина отрезка ab и, значит, является внутренней точкой промежутка (a, b).

Геометрически: касательная NT (рис. 118) во внутренней точке $N\left[\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$ дуги AB параболы $y=x^2$ параллельна хорде AB. Других точек, обладающих тем же свойством, на дуге AB нет. Поэтому (ср. замечание 1) N есть та точка дуги AB, которая наиболее удалена от прямой AB; треугольник ABN имеет наибольшую площадь по сравнению со всеми треугольниками с основанием AB, вписанными в параболический сегмент ABN.

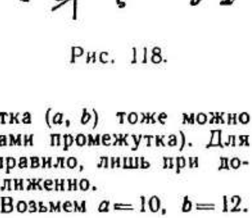


Рис. 118.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ квадратичная, то точка ξ является единственной и лежит (как в примере 1) в точности посредине отрезка ab; для линейной функции середину промежутка (a, b) тоже можно принять за точку ξ (наряду со всеми другими точками промежутка). Для остальных функций это свойство соблюдается, как правило, лишь при достаточной малости промежутка (a, b) и притом приближенно.

Пример 2. Пусть $f(x)=x^3$, тогда $f'(x)=3x^2$. Возьмем $a=10$, $b=12$. Имеем

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=364.$$

Согласно теореме Лагранжа уравнение $3x^2=364$ должно иметь корень, лежащий между 10 и 12. Действительно, его положительный корень $x=\sqrt{121\frac{1}{3}}\approx 11{,}015$ лежит на отрезке (10; 12), и притом близко к середине.

Замечание 3. Как и теорема Ролля [которая является частным случаем теоремы Лагранжа при $f(a)=f(b)=0$], теорема может оказаться неверной, если в некоторой точке промежутка (a, b) функция $f(x)$ не дифференцируема. Подобный случай изображен на рис. 119; здесь на дуге ACB нет ни одной точки, где касательная была бы параллельна хорде AB. Условия теоремы нарушены в точке C, где линия ACB не имеет касательной.

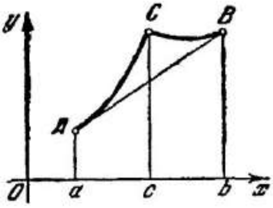


Рис. 119.

Замечание 4. Условие теоремы Лагранжа можно несколько ослабить. А именно, эта теорема остается в силе, если потребовать, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в любой точке x, лежащей между a и b. В самих же точках a, b функция $f(x)$ может быть и недифференцируемой, а только непрерывной (ср. § 98, замечание). Вышеприведенное доказательство сохраняет силу также и при ослабленном условии.

§ 100. Формула конечных приращений

Формулу (1) § 99 можно переписать в виде

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{1}$$

Это — *формула конечных приращений*[1]; словесно она выражается так: *приращение функции равно произведению ее производной, взятой при некотором «среднем» значении аргумента, на приращение аргумента.*

Формулу конечных приращений пишут также в виде

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a). \tag{2}$$

Хотя число ξ, как правило, остается неизвестным, но, зная, в каких границах оно заключено, мы часто можем извлечь из формулы (2) важные сведения.

Пример. Вычислить без таблиц десятичный логарифм числа 101.

Решение. Нам надо найти значение функции $f(x)=\lg x$ при $x=101\,(=b)$. Значение этой функции при $x=100\,(=a)$ нам из-

[1]) Разность $b-a$ есть приращение Δx аргумента x; разность $f(b)-f(a)$ — соответствующее приращение Δy функции $y=f(x)$. В теореме Лагранжа приращения Δx, Δy считаются постоянными и потому названы конечными, в отличие от бесконечно малых приращений. Для последних, как мы знаем, имеет место соотношение $\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x$ («формула бесконечно малых приращений»); записав формулу (1) в виде $\Delta y = f'(\xi)\,\Delta x$, мы отчетливо выразим взаимоотношение этих двух формул.

вестно. Известно также, что производная $f'(x)$ выражается формулой

$$f'(x)=\frac{M}{x} \qquad (M\approx 0{,}43429).$$

Полагая в формуле (2)

$$f(x)=\lg x,\ a=100,\ b=101,$$

получаем

$$\lg 101=\lg 100+\frac{M}{\xi}(101-100)$$

или

$$\lg 101=2+\frac{M}{\xi}. \tag{3}$$

Число ξ неизвестно, но мы знаем, что оно содержится между 100 и 101. Следовательно, $\lg 101$ содержится между $2+\frac{M}{101}$ и $2+\frac{M}{100}$:

$$2{,}0042999<\lg 101<2{,}0043429. \tag{4}$$

Следовательно, если положить

$$\lg 101\approx 2{,}0043, \tag{5}$$

то все цифры будут верными.

Замечание. Если в формуле (3) заменить неизвестное число ξ средним арифметическим между числами $a=100$ и $b=101$, т. е. если положить $\xi=100{,}5$, то получим приближенную формулу

$$\lg 101\approx 2+\frac{M}{100{,}5}\approx 2{,}0043213, \tag{6}$$

которая оказывается более точной, чем формула (5). Но оценить степень точности формулы (6) мы пока не умеем. Впоследствии можно будет убедиться, что здесь неверна лишь последняя цифра (истинное ее значение на единицу больше).

Ту же степень точности можно получить, если взять среднее арифметическое между недостаточным и избыточным приближениями (4).

§ 100a. Вопросы и задачи к §§ 98—100

1. Написать формулу, выражающую теорему Лагранжа для функции $f(x)=x^4$ в промежутке (a, b) и выразить соответствующее среднее значение ξ через a и b.

2. Написать формулу конечных приращений для функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ в промежутке (0; 1) и найти соответствующее среднее значение ξ.

3. Та же задача для функции $f(x)=\arcsin x$ в промежутке (0; 1).

4. Та же задача для функции $f(x)=\ln x$ в промежутке $(1;\ 2)$.

5. Через точки $A(0,\ 0)$ и $B(b,\ b^2)$ параболы $y=x^2$ проведена хорда AB. Есть ли на дуге AB такая точка C, где касательная к параболе была бы параллельна хорде AB? Если да, то в каком отношении вертикаль, проведенная через точку C, делит хорду AB?

6. Тот же вопрос для точек $A(0,\ 0)$, $B(b,\ b^3)$ на кубической параболе $y=x^3$.

7. Тот же вопрос для произвольных двух точек $A\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b,\ \frac{1}{b}\right)$ гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

8. Сколько раз обращается в нуль производная $f'(x)$ от функции $f(x)=x(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)$ внутри промежутка $(0;\ 8)$?

9. Зная $\lg 2=0{,}3010$ и пользуясь формулой конечных приращений, найти без таблиц $\lg 201$ и оценить степень точности результата. Проверить ответ по таблице логарифмов.

Указание. Сравнить пример § 100.

10. Зная $\lg 3=0{,}4771$, найти без таблиц $\lg 27{,}5$ и оценить степень точности результата. Проверить по таблице.

§ 101. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Как мы знаем, производная постоянной величины равна нулю. Спрашивается, не может ли какая-либо функция $f(x)$, не сохраняющая в промежутке $(a,\ b)$ постоянного значения, иметь нулевую производную *во всех точках* этого промежутка. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Если во всех точках промежутка $a<x<b$ производная $f'(x)$ равна нулю, то функция $f(x)$ сохраняет в этом промежутке постоянное значение.

Геометрически: если на участке AB линия $y=f(x)$ всюду имеет горизонтальную касательную, то AB есть отрезок горизонтальной прямой.

При всей очевидности этого свойства оно требует строгого доказательства.

Доказательство. Выберем в промежутке $(a,\ b)$ две произвольные точки x_1, x_2. В силу формулы конечных приращений (§ 100) можно утверждать, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1). \tag{1}$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между точками x_1, x_2 и, значит, расположенная в промежутке $(a,\ b)$. Но по условию производная $f'(x)$ равна нулю *во всех точках* промежутка $(a,\ b)$, в том числе и в точке ξ. Полагая в формуле (1) $f'(\xi)=0$, получаем равенство

$$f(x_2)=f(x_1). \tag{2}$$

Напомним, что x_1 и x_2 — это совершенно произвольные точки промежутка (a, b). Представим себе, что одна из них, скажем точка x_1, остается неизменной, а точка x_2 пробегает весь промежуток (a, b). Из (2) видно, что при этом значение $f(x_2)$ остается неизменным. Иными словами, функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение во всем промежутке (a, b).

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} - \operatorname{arctg} x, \tag{3}$$

представляющую разность $f_1(x) - f_2(x)$ функций

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Функция $f_1(x)$ дифференцируема во всех точках промежутка $(-\infty, \infty)$, кроме точек $x=-1$, $x=1$, где она вовсе не определена. Функция $f_2(x)$ дифференцируема во всех без исключения точках. Поэтому функция $f(x)$ дифференцируема в каждом из трех промежутков

$$-\infty < x < -1; \quad -1 < x < 1; \quad 1 < x < \infty. \tag{4}$$

В любом из этих промежутков имеют место равенства

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

и, следовательно,

$$f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = 0.$$

На основании теоремы 1 заключаем, что в каждом из промежутков (4) функция $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ сохраняет одно и то же значение. Рассмотрим сначала средний промежуток $-1 < x < 1$. Он содержит точку $x=0$, для которой

$$f(0) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Значит, и во всем промежутке $-1 < x < 1$ функция $f(x)$ имеет значение нуль:

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} - \operatorname{arctg} x = 0 \quad (-1 < x < 1); \tag{5}$$

для проверки вычислим $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Получим

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = 0.$$

Но за пределами среднего промежутка функция $f(x)$ *не обращается в нуль.* Положим, например, $x=\sqrt{3}$ (эта точка принадлежит промежутку $1<x<\infty$). Тогда имеем

$$f(\sqrt{3})=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{1-3}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

На основании теоремы 1 во всем правом промежутке имеет место равенство

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}-\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}\qquad(1<x<\infty).\tag{6}$$

Точно так же, положив $x=-\sqrt{3}$ (эта точка лежит в левом промежутке), придем к выводу, что

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}-\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}\qquad(-\infty<x<-1).\tag{7}$$

Замечание 1. Из формул (5), (6), (7) следует, что функции

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\quad\text{и}\quad f_2(x)=\operatorname{arctg}x$$

связаны следующими соотношениями:

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\qquad(-\infty<x<-1),$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg}x\qquad(-1<x<1),$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\qquad(1<x<\infty).$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$. Если во всех внутренних его точках производная $f'(x)$ положительна, то функция $f(x)$ в данном промежутке возрастает.

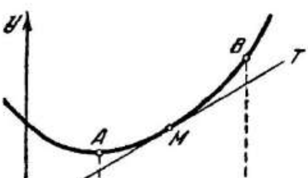


Рис. 120.

Геометрически: точка M, описывая дугу AB линии $y=f(x)$ (рис. 120), подымается вверх, если касательная MT, проходящая через любую внутреннюю точку M дуги AB, образует положительный острый угол с осью Ox.

Доказательство. Возьмем две произвольные (отличные друг от друга) точки промежутка (a, b) (каждая из них может быть как внутренней, так и граничной). Ту, которая лежит слева от другой, обозначим через x_1, ту, что справа — через x_2.

При таком обозначении имеем

$$x_2 - x_1 > 0. \tag{8}$$

По формуле конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \tag{9}$$

где ξ лежит между x_1 и x_2, а, значит, также между a и b. Но по условию во всех внутренних точках промежутка (a, b) производная $f'(x)$ положительна. Следовательно,

$$f'(\xi) > 0. \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует, что $f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$, а в силу (9) имеем

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

то есть

$$f(x_2) > f(x_1). \tag{11}$$

Но x_1, x_2 — это совершенно произвольная пара точек промежутка (a, b). Поэтому формула (11) устанавливает, что в пределах этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции. А это и значит (§ 18, определение 1), что функция $f(x)$ в промежутке (a, b) возрастает.

Аналогично доказывается нижеследующая теорема.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Если во всех внутренних его точках производная $f'(x)$ отрицательна, то функция $f(x)$ в данном промежутке убывает.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ в промежутке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Во всех внутренних точках этого промежутка производная $f'(x) = \cos x$ положительна [в граничных точках $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ производная $f'(x)$ равна нулю]. Теорема 2 утверждает, что функция $\sin x$ возрастает во всем промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (включая и граничные точки). Справедливость этого утверждения очевидна и непосредственно.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$.

Решение. В произведении xe^{-x} первый множитель бесконечно велик, а второй бесконечно мал. После нескольких испытаний возникает предположение, что произведение xe^{-x} стремится к нулю. Справедливость этого предположения можно доказать следующим образом. Производная функции $f(x) = xe^{-x}$, т. е.

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x),$$

очевидно, отрицательна при $x>1$. Следовательно, функция $f(x)$ *убывает* в промежутке $1 \leqslant x < \infty$. А так как при $x>1$ имеем $f(x)>0$, то на основании признака § 47 можно утверждать, что при $x \to +\infty$ функция xe^{-x} имеет некоторый (неотрицательный) предел. Для разыскания его достаточно составить произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, имеющую пределом $+\infty$. Проще всего взять какую-либо арифметическую прогрессию, например

$$x_1=1,\ x_2=2,\ \ldots,\ x_n=n,\ \ldots$$

Соответствующая последовательность значений функции $f(x)$ будет

$$y_1=f(x_1)=e^{-1},\ y_2=f(x_2)=2e^{-2},\ \ldots,\ y_n=f(x_n)=ne^{-n},\ \ldots$$

В этой последовательности каждый член, начиная с y_4, меньше, чем половина предыдущего, ибо при $n \geqslant 3$ имеем

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(n+1)\,e^{-(n+1)}}{ne^{-n}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2{,}7}\cdot\frac{4}{3}<\frac{1}{2}.$$

Значит, $y_4<\frac{1}{2}y_3,\ y_5<\frac{1}{2}y_4<\frac{1}{4}y_3,\ \ldots,\ y_n<\frac{1}{2}y_{n-1}<\frac{1}{2^{n-3}}y_3,\ \ldots$

Следовательно, $\lim y_n=0$. Стало быть,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0.$$

Пример 4. Функция $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$, рассматриваемая в промежутке $2 \leqslant x \leqslant 4$, убывает. Действительно, производная $f'(x)=1-x$ во всех точках данного промежутка отрицательна [ибо промежуток (2; 4) целиком лежит справа от точки $x=1$]. Та же функция в промежутке $(-3;\ -1)$ возрастает, так как во всех точках этого промежутка производная $f'(x)$ положительна.

Рис. 121.

В промежутке (0; 2) функция $f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей, так как в этом промежутке производная $f'(x)$ принимает как положительные значения, так и отрицательные.

Все это видно на рис. 121.

Замечание 2. Условие

$$f'(x)=0 \qquad (a<x<b) \tag{12}$$

обеспечивает в силу теоремы 1 постоянство функции $f(x)$ в данном промежутке; точно так же условие

$$f'(x)>0 \qquad (a<x<b) \tag{13}$$

обеспечивает возрастание функции в промежутке $(a,\ b)$ (теорема 2), а условие

$$f'(x) < 0 \quad (a < x < b) \tag{14}$$

— убывание (теорема 3).

Поэтому говорят, что теоремы 1—3 устанавливают *достаточные признаки* постоянства, возрастания и убывания функции.

Замечание 3. Условие (12) является не только достаточным, но и *необходимым* признаком постоянства функции. Это значит, что наряду с теоремой 1 верна и обратная теорема: если функция $f(x)$ сохраняет в промежутке (a, b) постоянное значение, то $f'(x)=0$ во всех точках этого промежутка.

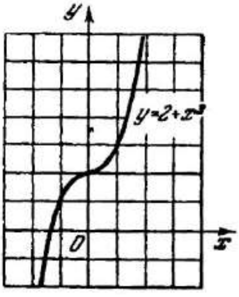


Рис. 122.

Что касается условий (13) и (14), то они не являются *необходимыми* признаками возрастания (убывания) функции. Иными словами, теоремы, обратные теоремам 2 и 3, неверны. Так, например, функция $f(x)=2+x^3$ (рис. 122), очевидно, возрастает во всем промежутке $(-\infty, \infty)$; но ее производная в точке $x=0$ равна нулю, так что условие (13) не соблюдено. [Касательная в точке (0; 2) параллельна оси Ox.]

§ 102. Экстремум функции

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке c (рис. 123), если значение $f(c)$ меньше значений $f(x)$ во всех точках, лежащих по обе стороны от точки c *в достаточной близости от нее.*

Говорят, что $f(x)$ имеет *максимум* в точке e, если $f(e)$ больше значений $f(x)$ во всех точках, лежащих по обе стороны от точки e *в достаточной близости от нее.*

Максимум и минимум объединяются наименованием *экстремум*[1]).

Замечание 1. Как видно из рис. 123, максимум eE функции $f(x)$ может не быть наибольшим ее значением в промежутке (a, b), где функция $f(x)$ задана. Ясно также, что функция может иметь максимум не в одной точке, а в двух (e и e' на рис. 123) или в большем числе точек. Аналогичное замечание относится к минимуму; на рис. 123 имеем два минимума cC и $c'C'$, и ни один из них не является наименьшим значением функции в данном промежутке (a, b). Но в *достаточно малом* промежутке, охватывающем точку c, например в промежутке (m, n), значение cC является *наименьшим.* Точно так же в достаточно малом промежутке, охватывающем точку e, значение eE является *наибольшим.*

[1]) Латинское слово «экстремум» означает «крайнее».

Замечание 2. Определение минимума (максимума) требует, чтобы неравенство $f(c) < f(x)$ $[f(e) > f(x)]$ имело место для точек x, лежащих *по обе стороны* от точки c (от точки e). Стало быть, определение применимо ко *внутренним* точкам данного промежутка (a, b), но не к граничным его точкам. Даже в том случае, когда в граничной точке a функция $f(x)$ имеет наибольшее значение (как на рис. 123), мы не вправе сказать, что функция $f(x)$ имеет в этой точке максимум. Ведь функция $f(x)$ известна лишь справа от точки a. Точно так же мы не вправе сказать, что $f(x)$ имеет минимум в точке b, хотя значение $f(b)$ является наименьшим в промежутке (a, b). Таким образом, математическая терминология здесь отступает от житейского словоупотребления.

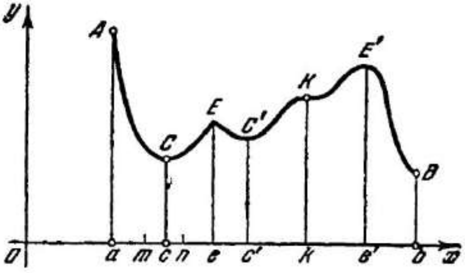


Рис. 123.

Необходимый признак экстремума. Предположим, что функция $f(x)$ имеет минимум (или максимум) в точке c. Тогда $f(c)$ является наименьшим (наибольшим) значением функции $f(x)$ в некотором, достаточно малом, промежутке (m, n) (рис. 123), охватывающем точку c. Следовательно (§ 95), производная $f'(c)$ или равна нулю, или бесконечна, или не существует (т. е. точка c является критической).

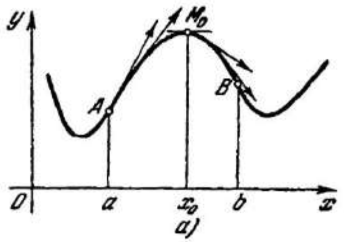
Иначе говоря, *для того чтобы функция $f(x)$ имела экстремум в точке c, необходимо, чтобы производная $f'(c)$ обращалась в нуль или была бесконечной, или вовсе не существовала.*

Этот признак, разумеется, *не является достаточным.* Так, на рис. 123 видно, что $f'(k) = 0$, однако в точке k функция $f(x)$ не имеет экстремума.

§ 103. Достаточные признаки наличия и отсутствия экстремума

Предположим, что точка x_0, *в которой функция $f(x)$ непрерывна*, является критической, т. е. что производная $f'(x_0)$ или равна нулю, или бесконечна, или не существует. Во многих практически важных случаях оказывается, что в некоторой окрестности (a, b) точки x_0 других критических точек нет, и производная $f'(x)$ сохраняет неизменный знак слева от x_0 и неизменный знак справа от x_0. Тогда нижеследующие признаки позволяют судить, имеет ли функция $f(x)$ в точке x_0 экстремум, и если да, то минимум или максимум.

Теорема 1. Если в некоторой окрестности (a, b) точки x_0 (рис. 124, *а*, *б*, *в*) производная $f'(x)$ положительна слева от x_0 и отрицательна справа от x_0, то в самой точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.



Доказательство. Во всех внутренних точках промежутка (a, x_0) производная $f'(x)$ по условию положительна. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает во всем промежутке (a, x_0), включая

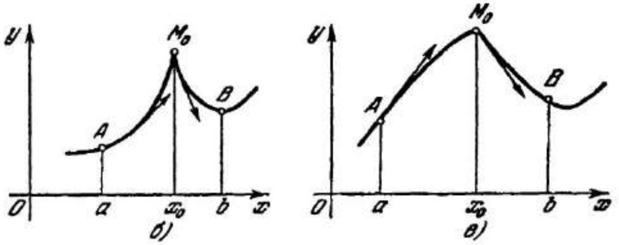


Рис. 124.

точку x_0 (§ 101, теорема 2). Значит, $f(x_0)$ больше значения $f(x)$ в любой точке x, лежащей вблизи точки x_0 слева от нее.

Таким же образом, основываясь на теореме 3 § 101, мы докажем, что $f(x_0)$ больше значения $f(x)$ в любой точке x, лежащей вблизи точки x_0 справа от нее. Следовательно, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (§ 102, определение).

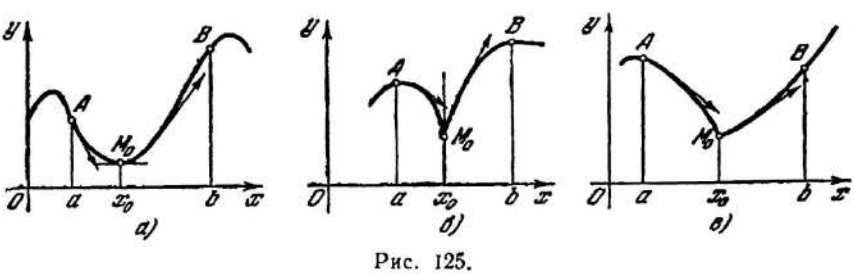


Рис. 125.

Теорема 2. Если в некоторой окрестности (a, b) точки x_0 (рис. 125, *а*, *б*, *в*) производная $f'(x)$ отрицательна слева от x_0 и положительна справа от x_0, то в самой точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.

Доказательство аналогично предыдущему.

Таким образом, *для того чтобы функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, имела в этой точке экстремум, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ имела противоположные знаки по разные стороны от точки x_0.*

В самой же точке x_0 она может равняться нулю (рис. 124, *а*, 125, *а*), может быть бесконечной (рис. 124, *б*, 125, *б*), а может и не существовать (рис. 124, *в*, 125, *в*).

Теорема 3. Если в некоторой окрестности (a, b) точки x_0 (рис. 126, *а, б, в*) производная $f(x)$ имеет один и тот же знак по обе стороны от точки x_0, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.

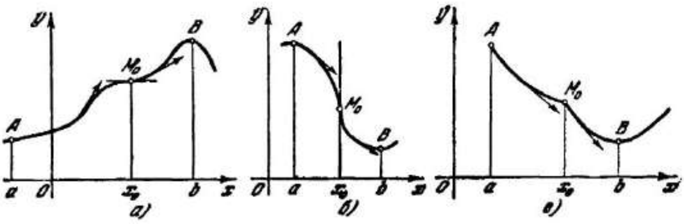


Рис. 126.

Она возрастает (убывает) во всем промежутке (a, b), если производная $f'(x)$ положительна (отрицательна).

Доказательство. Рассуждая, как в теореме 1, мы докажем, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в каждом из промежутков $a \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 \leqslant x \leqslant b$. Значит, она возрастает (убывает) во всем промежутке (a, b).

На рис. 126, *а* изображен случай, когда производная $f'(x)$ по обе стороны от точки x_0 положительна в промежутке (a, b). В самой точке x_0 производная равна нулю. Однако здесь функция $f(x)$ не имеет экстремума, так как она возрастает во всем промежутке (a, b).

На рис. 126, *б*, *в* изображены случаи, когда производная $f'(x)$ по обе стороны от точки x_0 отрицательна в промежутке (a, b). В самой точке x_0 производная бесконечна (рис. 126, *б*) или не существует (рис. 126, *в*). Экстремума здесь тоже нет: функция убывает во всем промежутке (a, b).

§ 104. Правило для разыскания экстремумов

Основываясь на теоремах §§ 101, 102 и 103, можно высказать практическое правило для разыскания всех экстремумов функции $f(x)$ в данном промежутке (a, b) — конечном или бесконечном.

Это правило применимо при наличии следующих двух условий:

1) функция $f(x)$ должна быть непрерывной в промежутке (a, b);

2) число критических точек, лежащих в промежутке (a, b), должно быть ограниченным.

На практике эти условия обычно выполняются.

Правило. Для разыскания всех максимумов и минимумов функции $f(x)$ в промежутке (a, b) поступаем следующим образом:

1) Находим все критические точки, т. е. те внутренние точки промежутка (a, b), где производная $f'(x)$ равна нулю или бесконечна, или вовсе не существует. Если их нет, то нет и экстремумов функции $f(x)$ (§ 102). Если они есть, нумеруем их в порядке их возрастания:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

2) Во всех прочих точках промежутка (a, b) существует конечная производная $f'(x)$, отличная от нуля. При этом, если в каких-либо двух точках k, l производные $f'(k)$, $f'(l)$ имеют противоположные знаки, то между точками k, l должна лежать по меньшей мере одна критическая точка (на доказательстве этого факта, представляющегося геометрически очевидным, мы не останавливаемся). Значит, внутри каждого из участков

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{n-1}, x_n),\ (x_n, b)$$

производная $f'(x)$ сохраняет неизменный знак. Если он оказывается положительным, то функция $f(x)$ на соответствующем участке возрастает; если отрицательным, то убывает (§ 101, теоремы 2 и 3).

Чтобы определить, какой из этих двух случаев имеет место, достаточно вычислить $f'(x)$ в какой-либо одной внутренней точке участка [1]).

3) Теперь устанавливаем наличие или отсутствие экстремума в каждой из критических точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на основании теорем 1—3 § 103. Если при переходе через точку x_i (слева направо) положительный знак производной сменяется отрицательным, то $f(x_i)$ есть максимум функции $f(x)$; если, наоборот, отрицательный знак сменяется положительным, то $f(x_i)$ есть минимум.

Если же знак производной $f'(x)$ при переходе через точку x_i не меняется, то здесь нет экстремума, и функция $f(x)$ возрастает или убывает (в зависимости от знака производной) на всем протяжении обоих соседних участков (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}).

В результате этого исследования мы найдем все точки экстремума (или установим, что их нет).

---

[1]) Часто знак производной усматривается непосредственно из ее выражения (см. ниже примеры 1 и 2). Можно также сравнить значения $f(x)$ на границах участка. Если на правом конце значение $f(x)$ больше, чем на левом, то функция $f(x)$ на этом участке возрастает; если меньше, то убывает.

Замечание 1. Из вышесказанного заключаем, что точки максимума и точки минимума чередуются друг с другом и что они разбивают промежуток (a, b) на такие частичные промежутки, в каждом из которых функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает, причем возрастание чередуется с убыванием.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ монотонна в некотором промежутке (m, n), но при любом удлинении этого промежутка лишается монотонности (или вовсе теряет смысл), то говорят, что (m, n) есть *промежуток монотонности* функции $f(x)$. Таким образом, точки экстремума функции $f(x)$, заданной в промежутке (a, b), разбивают последний на промежутки монотонности функции $f(x)$.

Замечание 3. В процессе разыскания экстремумов полезно заносить результаты исследования в табличку, как объяснено ниже на примере 1.

Пример 1. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = (x-1)^2 (x+1)^3 \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{1}$$

Решение. 1) Находим все критические точки. Так как данная функция всюду дифференцируема, дело сводится к решению уравнения

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2 (x+1)^2 = \\ = (x-1)(x+1)^2 (5x-1) = 0.$$

Критические точки, расположенные в порядке их возрастания, суть

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0{,}2, \quad x_3 = 1.$$

Заготовляем таблицу (стр. 271). В первом ее столбце проставляем границы промежутка и последовательные критические точки; во втором столбце — знаки производной (или пометку о том, что производная не существует); в третьем — соответствующие значения функции $f(x)$.

2) Критические точки разбивают данный промежуток $(-\infty, \infty)$ на четыре участка:

$$(-\infty;\ -1), \quad (-1;\ 0{,}2), \quad (0{,}2;\ 1), \quad (1;\ \infty). \tag{2}$$

Для исследования знака производной в каждом из этих участков удобно представить $f'(x)$ в виде

$$f'(x) = 5(x+1)^2 (x-0{,}2)(x-1). \tag{3}$$

а) Внутри первого из промежутков (2) все три двучлена выражения (3) отрицательны:

$$x+1 < 0, \quad x-0{,}2 < 0, \quad x-1 < 0.$$

Поэтому

$$f'(x) = 5(x+1)^2 (x-0{,}2)(x-1) > 0 \qquad (-\infty < x < -1).$$

x	$f'(x)$	$f(x)$	Свойства функции	Обозначения точек
$-\infty$		$-\infty$		
	$+$		Возрастает	
-1	0	0	Нет экстремума	A
	$+$		Возрастает	
0,2	0	1,11	Максимум	B
	$-$		Убывает	
1	0	0	Минимум	C
	$+$		Возрастает	
∞		∞		
$-1,4$		$-0,37$		D
$-0,5$		0,28		E
0		1		F
0,5		0,84		G
0,7		0,44		H
1,2		0,43		K

Схематически

$$f'(x)=5(-)^2\ (-)\ (-)=+ \qquad (-\infty<x<-1).$$

Заносим этот результат во второй столбец таблицы.

б) В следующем промежутке двучлен $x+1$ имеет положительное значение, а оба остальных — отрицательное. Значит, производная снова положительна:

$$f'(x)=5(+)^2(-)(-)=+ \qquad (-1<x<0,2)$$

и функция $f(x)$ продолжает возрастать.

в) В третьем промежутке имеем

$$f'(x)=5(+)^2(+)(-)=- \qquad (0,2<x<1).$$

Следовательно, функция $f(x)$ убывает.

г) В четвертом промежутке

$$f'(x)=5(+)^2(+)(+)=+ \qquad (1<x<\infty).$$

Функция $f(x)$ возрастает.

3) При переходе через критическую точку $x_1=-1$ (из первого промежутка во второй) производная $f'(x)$ не меняет знака; значит, в точке x_1 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

При переходе через критическую точку $x_2=0{,}2$ (из второго промежутка в третий) производная $f'(x)$ меняет положительный знак на отрицательный, то есть возрастание функции $f(x)$ сменяется убыванием. Следовательно, значение $f(0{,}2)\approx 1{,}11$ есть максимум.

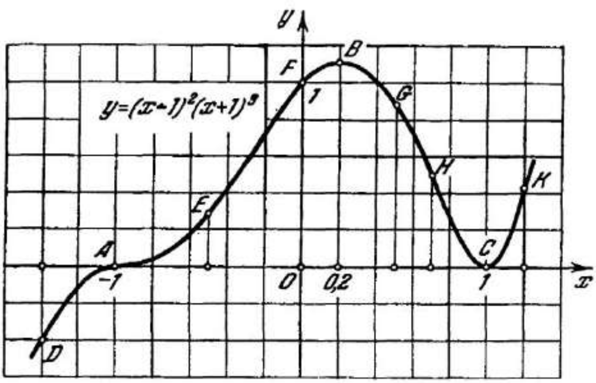


Рис. 127.

При переходе через критическую точку $x_3=1$ производная меняет отрицательный знак на положительный [убывание функции $f(x)$ сменяется возрастанием]. Следовательно, значение $f(1)=0$ есть минимум.

Результаты этого исследования зафиксированы в четвертом столбце верхней части таблицы. Эти данные можно с успехом использовать для построения графика (рис. 127). А именно, построив точки A, B, C, соответствующие критическим значениям $x_1=-1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=1$, мы заранее знаем, что касательные в этих точках горизонтальны, причем вблизи точки B график имеет вид холма, а вблизи C — вид оврага. На всем протяжении графика (слева направо) вплоть до вершины B должен происходить подъем, но вблизи от точки A подъем должен быть пологим. Вдоль участка BC (от вершины холма до дна оврага) должен идти спуск, а затем — снова подъем.

Эти сведения дают хорошее представление об общем виде графика, и теперь остается добавить небольшое число точек, чтобы построить график с достаточной точностью. В нижней части таблицы даны результаты соответствующих вычислений.

Пример 2. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Решение. 1) Находим все критические точки. Для этого:

а) решаем уравнение

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\,\frac{x-0,4}{\sqrt[3]{x}}=0,$$

получаем критическую точку $x=0,4$;

б) ищем точки, где функция $f(x)$ недифференцируема; единственной такой точкой оказывается точка $x=0$, где производная $f'(x)$ бесконечна.

Итак, всего имеются две критические точки, а именно (располагаем их в порядке возрастания):

$$x_1=0, \quad x_2=0,4.$$

2) Промежуток $(-\infty, \infty)$ разбивается критическими точками на три промежутка:

$$(-\infty;\ 0), \quad (0;\ 0,4), \quad (0,4;\ \infty).$$

В первом из них $f'(x)=\frac{5}{3}\,\frac{(-)}{\sqrt[3]{-}}=+$; функция $f(x)$ возрастает.

Во втором $f'(x)=\frac{5}{3}\,\frac{(-)}{\sqrt[3]{+}}=-$; функция $f(x)$ убывает.

В третьем $f'(x)=\frac{5}{3}\,\frac{(+)}{\sqrt[3]{+}}=+$; функция $f(x)$ возрастает.

3) При переходе через критическую точку $x_1=0$ производная $f'(x)$ меняет знак $+$ на знак $-$ (возрастание сменяется убыванием), следовательно, значение $f(0)=0$ есть максимум; при переходе через критическую точку $x_2=0,4$ производная $f'(x)$ меняет знак $-$ на $+$; значит, $f(0,4)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\approx-0,33$ есть минимум.

Результаты этого исследования зафиксированы в верхней части нижеследующей таблицы.

x	$f'(x)$	$f(x)$	Свойства функции	Обозначения точек
$-\infty$		$-\infty$		
	$+$		Возрастает	
0	∞	0	Максимум	O
	$-$		Убывает	
0,4	0	$-0{,}33$	Минимум	A
	$+$		Возрастает	
∞		∞		
$-0{,}5$		$-0{,}94$		B
$-0{,}2$		$-0{,}41$		C
1,0		0		D
1,3		0,36		E

Построение графика (рис. 128) начинаем с точек O, A. В точке O, где производная $f'(x)$ бесконечна, а подъем должен смениться спуском, образуется острие, обращенное вверх («шпиль»); в точке A — впадина с горизонтальной касательной.

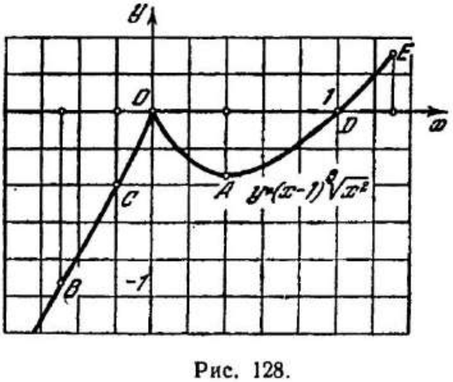


Рис. 128.

Эти соображения помогают выбрать добавочные точки B, C, D, E (зарегистрированные в нижней части таблицы).

§ 104а. Вопросы и задачи к §§ 101—104

1. Доказать, что функция

$$f(x) = x^2 + 3x$$

убывает в промежутке $(-5; -2)$ и возрастает в промежутке $(2; 5)$.

2. Монотонна ли функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ в промежутке $(-\infty, \infty)$? Если да, то возрастает она или убывает? Если нет, то каковы промежутки монотонности?

3. Тот же вопрос для функции $f(x)=2x^3+3x$.

4. Тот же вопрос для функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{2x^3+3x}$.

5. Функция $f(x)$ задана в промежутке $(-2;\ 4)$ формулой $f(x)=x^3-3x^2-9x+14$. Указать промежутки монотонности, на которые разбивается данный промежуток. Начертить график функции.

6. Тот же вопрос для функции $\varphi(x)$, заданной в промежутке $(-2;\ 2)$ формулой $f(x)=x^4-2x^2-5$.

В задачах 7—20 требуется найти промежутки монотонности данной функции во всей области ее существования; указать, возрастает или убывает функция в каждом из этих промежутков.

7. $f(x)=x^4-4x^2$.

8. $f(x)=x^4+4x^2$.

9. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

10. $f(x)=3x^4-16x^3-30x^2$.

11. $f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}x^3-12x^2$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

13. $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

14. $f(x)=x-\cos x$.

15. $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

16. $f(x)=|x|$.

17. $f(x)=x\,|x|$.

18. $f(x)=\ln|x|$.

19. $f(x)=\ln x$.

20. $f(x)=\ln|x^2-1|$.

В задачах 21—35 требуется найти максимумы и минимумы заданных функций.

21. $f(x)=x^4-4x^3$.

22. $f(x)=x^4-4x^2$.

23. $f(x)=x^4+4x^2$.

24. $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.

26. $f(x)=x^4(x-1)^3$.

27. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

28. $f(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}$.

29. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$.

30. $f(x)=x^{2/3}(x-5)$.

31. $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

32. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$.

33. $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

34. $f(x)=|x|(x-4)$.

35. $f(x)=2e^x+e^{-x}$.

§ 105. Второй достаточный признак экстремума

Если функция $f(x)$ в критической точке c дифференцируема *дважды*, то вместо признака § 103 можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Пусть в точке c первая производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль:

$$f'(c)=0. \tag{1}$$

Если при этом $f''(c)>0$, то в точке c функция $f(x)$ имеет минимум; если же $f''(c)<0$, то — максимум.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f''(c)>0$.

Вторая производная $f''(c)$ есть (§ 88) предел отношения $\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}$ при $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}=f''(c).$$

Учитывая равенство (1), получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}=f''(c). \tag{2}$$

Равенство (2) означает, что при достаточно малом h отношение $\frac{f'(c+h)}{h}$ будет сколь угодно мало отличаться от ***положительного*** числа $f''(c)$; следовательно, можно взять величину h столь малой, чтобы само отношение $\frac{f'(c+h)}{h}$ тоже было положительным:

$$\frac{f'(c+h)}{h}>0. \tag{3}$$

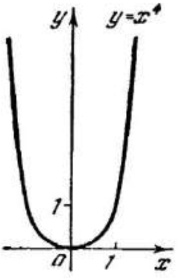


Рис. 129.

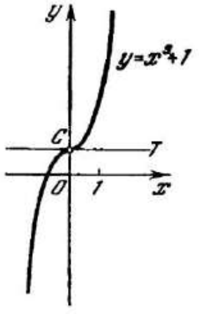


Рис. 130.

Из (3) следует, что при $h<0$ производная $f'(c+h)$ отрицательна а при $h>0$ — положительна. Иными словами, производная $f'(x)$ отрицательна слева от точки c и положительна справа от c. Следовательно (§ 103, теорема 2), в точке c функция $f(x)$ имеет минимум.

Мы доказали первую половину теоремы. Вторая половина [случай $f''(c)<0$] доказывается аналогично: вместо неравенства (3) получаем неравенство

$$\frac{f'(c+h)}{h}<0, \tag{3a}$$

откуда следует, что при $h<0$ производная $f'(c+h)$ положительна, а при $h>0$ — отрицательна. Значит (§ 103, теорема 1), в точке c функция $f(x)$ имеет максимум.

Замечание. Если в точке c обращается в нуль не только $f'(c)$, но также и $f''(c)$, то второй признак не позволяет высказать никакого суждения о наличии или отсутствии экстремума функции $f(x)$. В одних случаях экстремум (максимум или минимум) будет, в других его не будет. Так, функция $f(x)=x^4$ (рис. 129), у которой обе производные $f'(x)=4x^3$ и $f''(x)=12x^2$ обращаются в нуль в точке $x=0$, имеет в этой точке минимум. Но у функции $f(x)=1+x^3$ (рис. 130) производные $f'(x)$, $f''(x)$ тоже обращаются в нуль в точке $x=0$; однако здесь экстремума нет, и вблизи соответствующей точки C график пересекает горизонтальную касательную CT.

В подобных сомнительных случаях надо пользоваться первым способом разыскания экстремума (§ 103).

Пример 1. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$$

в промежутке $(-0,5;\ 2,5)$.

Решение. 1) Вычисляем производные $f'(x)$, $f''(x)$:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2),$$
$$f''(x)=12x^2-24x+8=4(3x^2-6x+2).$$

2) Находим все критические точки; так как функция всюду дифференцируема, то достаточно решить уравнение

$$x(x^2-3x+2)=0.$$

Его корни, расположенные в порядке возрастания, суть

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=2.$$

Все эти точки принадлежат данному промежутку.

Заносим найденные числа в таблицу (стр. 278).

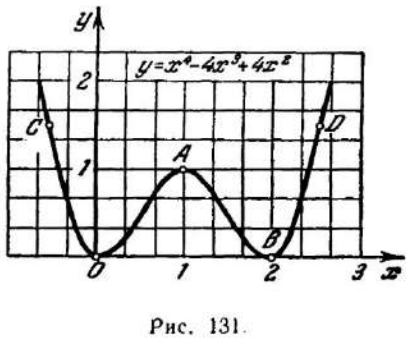


Рис. 131.

3) Определяем знак второй производной в критических точках.

а) $f''(0)=8>0$; значит, $x=0$ есть точка минимума;

б) $f''(1)=-4<0$; значит, $x=1$ — точка максимума;

в) $f''(2)=8>0$; значит, $x=2$ — точка минимума.

Эти результаты заносим в таблицу.

4) Вычисляем соответствующие значения функции $f(x)$:

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad f(2)=0;$$

заносим их в таблицу и строим точки $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 0)$.

Учитывая особенности этих точек, обнаруженные в предыдущем исследовании, можно ожидать, что график (рис. 131), построенный по этим трем точкам и точкам $C(-0,5;\ 1,56)$, $D(2,5;\ 1,56)$, соответствующим концам данного промежутка, будет довольно точным.

x	$f''(x)$	$f(x)$	Свойства функции	Обозначения точек
0	+	0	Минимум	O
1	—	1	Максимум	A
2	+	0	Минимум	B
—0,5		1,56		C
2,5		1,56		D

Пример 2. Найти все максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Решение. Данная функция периодическая (§ 25) с периодом 2π. Поэтому достаточно найти все максимумы и минимумы в промежутке $(0; 2\pi)$.

1) Вычисляем производные $f'(x)$, $f''(x)$:

$$f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x),$$
$$f''(x) = 3 (\sin x + \cos x)(3 \sin x \cos x - 1).$$

2) Для разыскания критических точек решаем уравнение $f'(x) = 0$; оно распадается на уравнения

$$\sin x = 0, \ \cos x = 0, \ \operatorname{tg} x = 1$$

и дает в промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$ следующие критические точки (располагаем их в порядке возрастания):

$$x_1 = 0, \ x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \pi, \quad x_5 = \frac{5\pi}{4}, \quad x_6 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Определяем знак второй производной в критических точках:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 < 0,$$
$$f''(x_2) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} > 0$$

и т. д.

В соответствии с этим устанавливаем, что в точках x_1, x_3, x_5 функция $f(x)$ имеет максимумы, а в точках x_2, x_4, x_6 — минимумы.

Определим еще точки x_1', x_2', где данная линия пересекается с осью Ox, т. е. решим уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0.$$

Из него находим

$$\sin x = -\cos x.$$

Следовательно,

$$x_1' = \frac{3}{4}\pi, \quad x_2' = \frac{7}{4}\pi.$$

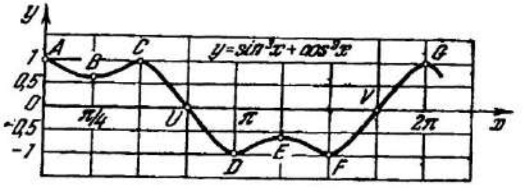


Рис. 132.

Присоединив эти точки к точкам экстремума, строим график (рис. 132).

x	$f''(x)$	$f(x)$	Свойства функции	Обозначение точек
0	—	1	Максимум	A
$\frac{\pi}{4} \approx 0,79$	+	$\approx 0,71$	Минимум	B
$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$	—	1	Максимум	C
$\pi \approx 3,14$	+	-1	Минимум	D
$\frac{5\pi}{4} \approx 3,93$	—	$\approx -0,71$	Максимум	E
$\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$	+	-1	Минимум	F
$2\pi \approx 6,28$	—	1	Максимум	G
$\frac{3\pi}{4} \approx 2,36$		0		U
$\frac{7\pi}{4} \approx 5,50$		0		V

§ 105а. Задачи к § 105

Найти максимумы и минимумы данных функций, пользуясь вторым достаточным признаком (желательно сравнить этот способ со способом § 104).

1. $f(x)=x+\frac{9}{x}$.
2. $f(x)=\frac{9}{x}+\frac{4}{3-x}$.
3. $f(x)=x-\ln(1+x)$.
4. $f(x)=\ln(1+x)^2-2\operatorname{arctg} x$.
5. $f(x)=x\lg x$.
6. $f(x)=x(\ln x)^2$.
7. $f(x)=x^2e^{-x}$.
8. $f(x)=xe^x$.
9. $f(x)=\frac{e^x}{x}$.
10. $f(x)=\sin x+\cos x$.
11. $f(x)=2\sin x+2\cos^2 x$.
12. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

§ 106. Характер вогнутости

Определение. Говорят, что дуга AB (рис. 133, *а*) линии $y=f(x)$ *вогнута вверх*, если все точки этой дуги лежат выше любой ее касательной MT; говорят, что дуга AB (рис. 133, *б*) *вогнута вниз*, если все ее точки лежат ниже любой касательной.

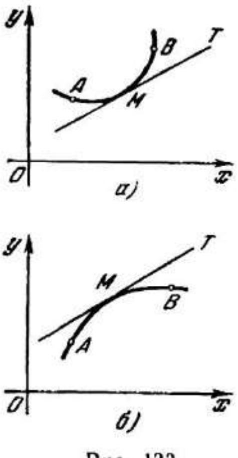


Рис. 133.

Путем наблюдения можно подметить, что на тех участках линии $y=f(x)$, где эта линия вогнута вверх, уклон касательной возрастает (т. е. касательная MT вращается в положительном направлении, когда точка M движется вправо), а на тех участках, где линия $y=f(x)$ вогнута вниз, уклон касательной убывает (т. е. касательная вращается в отрицательном направлении).

В переводе на язык математического анализа получается следующий признак, характеризующий направление вогнутости.

Теорема. Для того чтобы дуга AB линии $y=f(x)$ была вогнута вверх (вниз), необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ в соответствующем промежутке (a, b) возрастала (убывала).

Доказательство. 1) Необходимость признака. Пусть дуга AB (рис. 134) вогнута вверх. Возьмем в промежутке (a, b) две произвольные точки x_1, x_2; (каждая из них может быть как внутренней, так и граничной). Через точку $M_1(x_1, y_1)$ дуги AB проведем касательную M_1T_1. Обозначим через N точку ее пересечения с прямой x_2M_2. Проведем через M_1 также горизонтальную прямую и обозначим через Q ее пересечение с x_2M_2. По условию дуга AB вогнута вверх. Значит, точка M_2 лежит выше касательной M_1T_1 (в силу определения настоящего параграфа), т. е.

$$QM_2 > QN. \qquad (1)$$

Но

$$QM_2 = f(x_2) - f(x_1) \qquad (2)$$

и

$$QN = M_1Q \operatorname{tg} \alpha = (x_2 - x_1) f'(x_1). \qquad (3)$$

Следовательно, неравенство (1) можно переписать в виде

$$f(x_2) - f(x_1) > (x_2 - x_1) f'(x_1). \qquad (4)$$

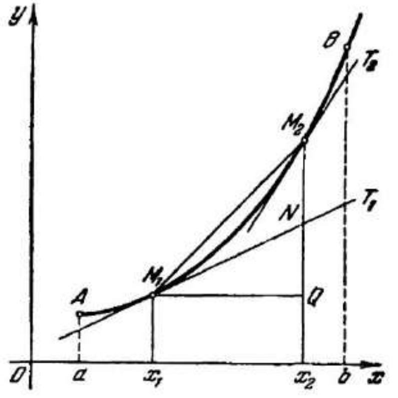


Рис. 134.

Так как точки x_1, x_2 взяты произвольно, то их можно поменять ролями; тогда получим неравенство[1])

$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2) f'(x_2). \qquad (5)$$

Для определенности предположим, что

$$x_2 > x_1 \qquad (6)$$

(как на рис. 134). Тогда, разделив обе части неравенства (4) на $x_2 - x_1$ (это число положительно), получим неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1). \qquad (7)$$

Оно означает, что угловой коэффициент секущей M_1M_2 больше углового коэффициента касательной M_1T_1.

Теперь разделим обе части неравенства (5) на $x_1 - x_2$. Так как это число отрицательно, то неравенство получает противоположный смысл и принимает вид

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2)$$

или

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2). \qquad (8)$$

[1]) Читателю рекомендуется выполнить соответствующее построение.

Неравенство (8) означает, что угловой коэффициент секущей M_1M_2 меньше углового коэффициента касательной M_2T_2.

Из неравенств (7) и (8) вытекает, что

$$f'(x_2) > f'(x_1). \tag{9}$$

Так как точки x_1, x_2 были взяты совершенно произвольно, то неравенство (9) [с учетом неравенства (6)] означает, что производная $f'(x)$ возрастает в промежутке (a, b).

Аналогично докажем, что если дуга AB вогнута вниз, то производная $f'(x)$ убывает в промежутке (a, b).

2) Достаточность признака. Пусть производная $f'(x)$ возрастает в промежутке (a, b), и пусть x_1, x_2 — две произвольно взятые точки этого промежутка. Требуется доказать, что точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит выше касательной M_1T_1 (рис. 134). Иначе говоря, надо доказать неравенство

$$QM_2 > QN, \tag{1}$$

которое мы запишем в виде

$$QM_2 - QN > 0. \tag{10}$$

Для доказательства воспользуемся формулами (2) и (3). С их помощью получаем равенство

$$QM_2 - QN = f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) f'(x_1). \tag{11}$$

Применим к разности $f(x_2) - f(x_1)$ формулу конечных приращений (§ 100)

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Здесь ξ есть некоторая точка, лежащая между x_1 и x_2.

Теперь формула (11) принимает вид

$$QM_2 - QN = (x_2 - x_1)[f'(\xi) - f'(x_1)]. \tag{12}$$

Функция $f'(x)$ по условию возрастает. Значит, разность $f'(\xi) - f(x_1)$ имеет тот же знак, что разность $\xi - x_1$. Но точка ξ лежит между x_1 и x_2; поэтому разность $\xi - x_1$ имеет тот же знак, что разность $x_2 - x_1$. Таким образом, оба сомножителя в правой части (12) имеют одинаковые знаки. Следовательно, правая часть (12) положительна; значит,

$$QM_2 - QN > 0.$$

Мы доказали, что когда производная $f'(x)$ возрастает в промежутке (a, b), дуга AB вогнута вверх. Аналогично докажем, что когда производная $f'(x)$ убывает, дуга AB вогнута вниз.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Ее производная $f'(x) = 3x^2$ убывает в промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ и возрастает в промежутке $0 \leqslant x < \infty$. Значит, линия $y = x^3$ должна быть вогнута вниз слева от точки $O(0, 0)$ и вверх справа от O (рис. 135).

Замечание. Об убывании или возрастании функции можно судить на основании признака § 101. А именно, функция $f'(x)$ возрастает (убывает) в некотором промежутке (a, b), если во всех внутренних точках этого промежутка вторая производная $f''(x)$ положительна (отрицательна).

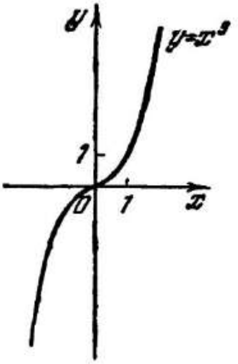


Рис. 135.

Значит, о направлении вогнутости можно судить по следующему признаку.

Если во всех внутренних точках промежутка (a, b) вторая производная $f''(x)$ положительна

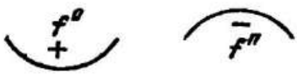
$$f''(x) > 0,$$

то соответствующая дуга AB линии $y = f(x)$ вогнута вверх; если

$$f'(x) < 0,$$

то дуга AB вогнута вниз.

Наглядной иллюстрацией может служить такая картинка:



В рассмотренном примере мы имеем $f''(x) = 6x$. Во всех внутренних точках промежутка $(-\infty, 0)$ вторая производная отрицательна. Значит, левая ветвь линии $y = x^3$ вогнута вниз. Аналогично заключаем, что правая ветвь вогнута вверх.

§ 107. Точка перегиба

Определение. Если точка C линии AB, где эта линия обладает касательной (CT на рис. 136), служит границей двух дуг (AC, CB), обращенных вогнутостью в противоположные стороны, то C называется ***точкой перегиба*** линии AB.

Замечание 1. Точка B (рис. 136), где линия ABD не обладает (двусторонней) касательной, не считается точкой перегиба, хотя она и служит границей дуг CB, BD, вогнутых в противоположные стороны.

Замечание 2. Касательная CT, проведенная через точку перегиба, пересекает линию AB. Действительно, поскольку дуги AC, CB обращены вогнутостью в противоположные стороны, одна из них должна лежать, согласно определению § 106, выше касательной CT, а другая ниже.

В § 106 мы установили, что вопрос о направлении вогнутости линии $y=f(x)$ на отдельных ее участках равнозначен вопросу о возрастании или убывании производной $f'(x)$ на соответствующих участках промежутка (a, b). Значит, разыскание точек перегиба сводится к разысканию тех точек промежутка (a, b), которые отделяют промежутки возрастания производной $f'(x)$ от промежутков ее убывания. А в таких точках производная $f'(x)$ имеет экстремум (§ 103, теоремы 1 и 2). Значит, на основании признака § 102 мы можем высказать следующий необходимый признак точки перегиба.

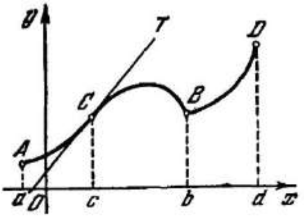


Рис. 136.

Для того чтобы в точке C линия $y=f(x)$ имела перегиб, необходимо, чтобы в соответствующей точке $x=c$ вторая производная $f''(x)$ равнялась нулю или была бесконечной, или вовсе не существовала.

Всякую точку, обладающую одним из этих трех свойств, мы будем называть *критической точкой по второй производной*.

Число критических точек по второй производной обычно оказывается ограниченным. Тогда для разыскания точек перегиба линии $y=f(x)$ и для суждения о характере ее вогнутости пригодно следующее правило.

Правило. Чтобы найти все точки перегиба линии $y=f(x)$ в промежутке (a, b) и определить, на каких ее участках эта линия вогнута вверх или вниз, поступаем следующим образом:

1) Находим в промежутке (a, b) все критические точки по второй производной. Нумеруем их в порядке их возрастания:

$$a<c_1<c_2<\ldots<c_n<b.$$

Абсциссы всех точек перегиба должны содержаться среди этих критических точек.

2) Во всех прочих точках промежутка (a, b) существует конечная вторая производная $f''(x)$, отличная от нуля. Она сохраняет неизменный знак внутри каждого из участков (a_1, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_n, b).

Если этот знак оказывается положительным, то соответствующая дуга линии $y=f(x)$ вогнута вверх; если отрицательным, то вниз.

3) Устанавливаем наличие или отсутствие перегиба в каждой из точек C_1, C_2, ..., C_n. Если при переходе через точку C_i направление вогнутости сменяется противоположным, а в самой

точке C_i линия $y=f(x)$ обладает касательной (т. е. первая производная $f'(c_i)$ существует), то C_i есть точка перегиба. Если же хотя бы одно из этих условий не выполнено, то перегиба нет.

Пример 1. Найти точки перегиба и исследовать характер вогнутости линии

$$y=x^3-3x^2+1$$

в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Решение. 1) Имеем

$$f'(x)=3x^2-6x, \quad f''(x)=6(x-1).$$

Для разыскания критических точек по второй производной достаточно решить уравнение

$$f''(x)=6(x-1)=0.$$

Получаем единственную критическую точку $x=1\ (=c)$. Ей соответствует точка $C(1; -1)$.

2) Критическая точка $c=1$ разбивает промежуток $(-\infty; \infty)$ на два участка: $(-\infty; 1)$ и $(1; \infty)$. Внутри первого участка вторая производная $f''(x)=6(x-1)$ сохраняет знак минус, внутри второго — знак плюс. Значит, на участке $(-\infty; 1)$ линия вогнута вниз, а на участке $(1; \infty)$ — вверх.

3) Направление вогнутости при переходе через точку $C(1; -1)$ сменяется противоположным, и в самой точке C линия обладает касательной [с угловым коэффициентом $f'(1)=-3$]. Значит, C есть точка перегиба.

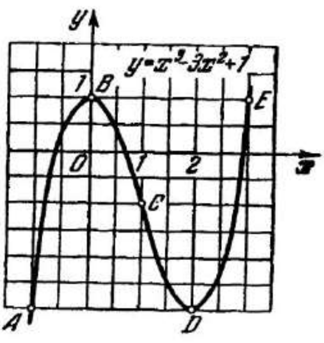


Рис. 137.

Для построения графика функции $y=f(x)$ сведения о характере его вогнутости и о точках перегиба служат полезным дополнением к сведениям о возрастании или убывании функции $f(x)$ и о ее экстремумах. Они сокращают количество дополнительных точек, необходимых для построения.

В нашем примере функция $f(x)=x^3-3x^2+1$ имеет, как легко подсчитать, два экстремума: $f(0)=1$ (максимум) и $f(2)=-3$ (минимум). В промежутке $(-\infty; 0)$ функция $f(x)$ возрастает, в промежутке $(0; 2)$ убывает и в промежутке $(2; \infty)$ снова возрастает. Чтобы получить довольно точный график функции $f(x)$ в промежутке $(-1; 3)$ (рис. 137), достаточно отметить найденные точки B, C, D и граничные точки A, E.

В ходе исследования составляется следующая таблица.

x	y'	y''	y	Свойства функции	Обозначения точек
-1	$+$		-3		A
0	0	$-$	1	Максимум	B
1	$-$	0	-1	Перегиб	C
2	0	$+$	-3	Минимум	D
3	$+$		1		E

Пример 2. Найти точки перегиба и исследовать характер вогнутости линии $y=\frac{1}{4}|x^3-8|$ в промежутке $(-3; 4)$.

Решение. 1) Имеем при $-\infty<x<2$

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x^3-8), \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2, \quad f''(x)=-\frac{3}{2}x;$$

при $2<x<\infty$

$$f(x)=\frac{1}{4}(x^3-8), \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2, \quad f''(x)=\frac{3}{2}x;$$

$$f(2)=0,\ f'(2) \text{ и } f''(2) \text{ не существуют.}$$

Критические точки по второй производной суть:

а) точка $x=0$ $(=c_1)$ — единственный корень уравнения $f''(x)=0$;

б) точка $x=2$ $(=c_2)$, где производная $f''(x)$ не существует.

Те же точки являются критическими по первой производной.

2) Критические точки c_1, c_2 разбивают данный промежуток на три участка:

$$(-3;\ 0), \quad (0;\ 2), \quad (2;\ 4).$$

Внутри первого $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2<0$ и $f''(x)=-\frac{3}{2}x>0$; график имеет спуск и вогнут вверх.

Внутри второго $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2<0$ и $f''(x)=-\frac{3}{2}x<0$; график имеет спуск и вогнут вниз.

Внутри третьего $f'(x)=\frac{3}{4}x^2>0$ и $f''(x)=\frac{3}{2}x>0$; график имеет подъем и вогнут вверх.

3) При переходе через критическую точку $x=0$ знак второй производной меняется; в самой же точке $x=0$ первая производная существует:

$$f'(0)=0.$$

Значит, соответствующая точка $C(2;\ 0)$ есть точка перегиба.

При переходе через критическую точку $x=2$ знак второй производной тоже меняется, но в самой точке $x=2$ первая производная не существует; значит, соответствующая точка $E(2;0)$ не является точкой перегиба. Так как первая производная при переходе через точку $x=2$ меняет отрицательный знак на положительный, то функция $f(x)$ имеет здесь минимум.

График функции (рис. 138) строится в соответствии с нижеследующей таблицей.

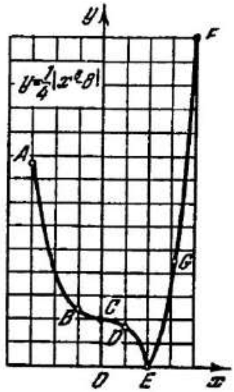


Рис. 138.

x	y'	y''	y	Свойства графика	Обозначения точек
—3	—	+	8,75		A
—1	—	+	2,25	В промежутке (—3; 0) вогнутость вверх	B
0	0	0	2	Перегиб	C
1	—	—	1,75	В промежутке (0; 2) вогнутость вниз	D
2	∓ 3	нет	0	Односторонние касательные, минимум	E
3	+	+	4,75	В промежутке (2; 4) вогнутость вверх	G
4	+	+	14		F

Пример 3. Исследовать характер вогнутости линии $y=(x-2)^{5/3}$ и найти точки ее перегиба в промежутке $(-2;\ 6)$. Построить эскиз этой линии.

Решение. Имеем

$$y'=\frac{5}{3}(x-2)^{2/3};\qquad y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-1/3}.$$

Уравнение $y''=0$ не имеет решений. Точка $x=2$ есть единственная критическая точка как по первой производной, так и по второй. Здесь первая производная $y'=0$, а вторая производная бесконечна.

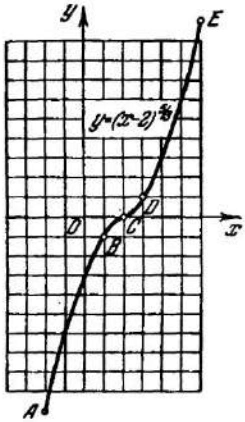


Рис. 139.

Слева от критической точки $x=2$ вторая производная отрицательна, справа — положительна. Значит, слева от соответствующей точки $C(2;\ 0)$ линия вогнута вниз, а справа — вверх. Стало быть, C есть точка перегиба (с горизонтальной касательной). Учитывая знак первой производной справа и слева от точки $x=2$, заключаем, что функция

$$y=(x-2)^{5/3}$$

возрастает во всем данном промежутке.

При наличии этих сведений для построения эскиза линии (рис. 139) достаточно отметить пять точек A, B, C, D, E в соответствии с нижеследующей таблицей.

x	y'	y''	y	Свойства графика	Обозначения точек
-2	$+$	$-$	$-10{,}1$	В промежутке $(-2;\ 2)$ возрастание; вогнутость вниз	A
1	$+$	$-$	-1		B
2	0	∞	0	Перегиб	C
3	$+$	$+$	1	В промежутке $(2;\ 6)$ возрастание; вогнутость вверх	D
6	$+$	$+$	9,2		E

Замечание. Если не учесть наличия точки перегиба, то даже при большем числе опорных точек эскиз дуги BCD может оказаться неудовлетворительным.

§ 107а. Задачи к §§ 106—107

Построить графики нижеприведенных функций; предварительно определить точки перегиба и характер вогнутости, а также учесть и другие особенности.

1. $y=4x^2-4x^3+x^4 \qquad (-0,3\leqslant x\leqslant 2,3)$.
2. $y=-0,025x^4+0,6x^2+1 \qquad (-5\leqslant x\leqslant 5)$.
3. $y=\dfrac{4x}{16x^2+1} \qquad (-1,5\leqslant x\leqslant 1,5)$.
4. $y=\dfrac{2x}{x^3+1} \qquad (-0,5\leqslant x\leqslant 2,0)$.
5. $y=\dfrac{1}{4}x\sqrt{16-x^2} \qquad (-4\leqslant x\leqslant 4)$.
6. $y=2\cos\dfrac{\pi}{2}x \qquad (-6\leqslant x\leqslant 6)$.
7. $y=4\sin^2 x \qquad (-\infty<x<\infty)$.
8. $y=\sin x+\sin 2x \qquad (-\infty<x<\infty)$.
9. $y=x-\sin x \qquad (-\infty<x<\infty)$.
10. $y=\lg \operatorname{tg} x \qquad \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.
11. $y=xe^{-x} \qquad (-1\leqslant x<\infty)$.
12. $y=x^2e^{-x} \qquad (-1\leqslant x<\infty)$.

§ 108. Четные и нечетные функции

Вычислительную и чертежную работу, связанную с построением графика функции $f(x)$, можно значительно облегчить в тех случаях, когда функция $f(x)$ является четной или нечетной.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *четной*, если при изменении знака аргумента x значение функции $f(x)$ не меняется:

$$f(-x)=f(x). \tag{1}$$

Этим свойством обладает, например, функция $y=x^2$; действительно, $(-3)^2=3^2$, $(-\pi)^2=\pi^2$ и вообще $(-x)^2=x^2$. Тем же свойством обладает всякая четная степень x^{2m} $(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, откуда и происходит термин *четная* функция. Примерами четных функций могут служить также функции $y=\cos x$, $y=x\sin x$ и др.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента x значение функции $f(x)$ сохраняет абсолютную величину, но меняет знак на обратный:

$$f(-x)=-f(x). \tag{2}$$

Этим свойством обладает любая нечетная степень x^{2m+1} $(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, например $(-x)^5=-x^5$. Функции $y=\sin x$, $y=x\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ тоже нечетные.

График всякой четной функции симметричен относительно оси Oy. Действительно, пусть на графике взята какая-либо точка M (рис. 140), соответствующая значению $x = OP$. Стало быть,

$$PM = f(OP). \tag{3}$$

На том же графике имеется некоторая точка M', соответствующая значению $x' = OP' = -OP$. Ордината $P'M'$ этой точки есть

$$P'M' = f(OP') = f(-OP).$$

А так как функция $f(x)$ по условию четная, то

$$P'M' = f(OP). \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), заключаем, что ординаты точек M, M' равны друг другу, тогда как абсциссы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Значит, точки M, M' симметричны относительно прямой Oy. Так как точка M была выбрана произвольно, то и весь график симметричен относительно Oy. Поэтому достаточно построить дугу KB (или ряд точек, лежащих на ней). Симметричную ей дугу KB' можно построить геометрически или просто скопировать.

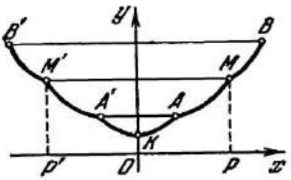


Рис. 140.

Рассуждая аналогично, докажем, что *график всякой нечетной функции симметричен относительно начала координат O.* Поэтому для построения графика опять-таки достаточно изготовить график только для положительных (или только для отрицательных) значений аргумента; вторую половину графика можно легко воспроизвести по первой.

§ 109. Асимптоты

Рис. 141.

Предварительное замечание. Если расстояние OM (рис. 141) от некоторой точки O до движущейся точки M стремится к бесконечности, то расстояние O_1M, на которое точка M удаляется от какой-либо другой неподвижной точки O_1, тоже стремится к бесконечности (так как оно не меньше, чем $|OM - OO_1|$). Ввиду этого можно сказать, что точка M *удаляется в бесконечность,* не указывая, от какой именно точки O отсчитывается расстояние OM. В частности, если линия UV, по которой движется точка M, отнесена к какой-либо прямоугольной системе координат, то можно считать, что точка O совпадает с началом координат.

Имея в виду это замечание, можно сформулировать определение асимптоты (I, § 59) следующим образом.

Определение. Прямая AB (рис. 142) называется *асимптотой* линии UV, если точка M может смещаться вдоль UV таким образом, что сама она удаляется в бесконечность, а ее расстояние MK до прямой AB стремится к нулю:

$$OM \to \infty; \quad |MK| \to 0.$$

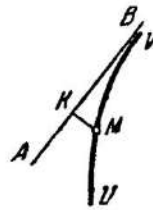


Рис. 142.

Замечание. Не всякая линия, по которой точка M может удаляться в бесконечность, обладает асимптотами. Так, у параболы, у синусоиды, у архимедовой спирали асимптоты нет. У гиперболы, как мы знаем (I, § 59), есть две асимптоты. При построении графика функции $y=f(x)$ полезно заранее знать, есть ли у него асимптоты, и если да, то какие именно.

§ 110. Вертикальные асимптоты

Теорема. Для того чтобы прямая $x=c$ была асимптотой линии $y=f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела в точке c бесконечный разрыв.

Доказательство. Предположим, что прямая $x=c$ (рис. 143) есть асимптота линии $y=f(x)$ (UV на рис. 143). Это значит, что точка $M(x, y)$ может смещаться по линии UV таким образом, что расстояние $|OM|$ стремится к бесконечности, а расстояние $|MP|=|x-c|$ стремится к нулю; стало быть,

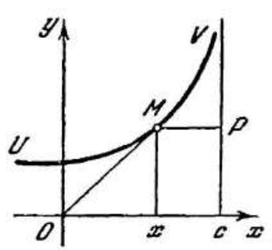


Рис. 143.

$$\lim_{x \to c} |OM| = \infty \tag{1}$$

(или $\lim\limits_{x \to c+0} |OM| = \infty$ или $\lim\limits_{x \to c-0} |OM| \to \infty$).

Из (1) следует, что

$$\lim_{x \to c} y = \lim_{x \to c} \sqrt{OM^2 - x^2} = \infty, \tag{2}$$

т. е. функция $y=f(x)$ имеет в точке c бесконечный разрыв (§ 38, замечание 5).

Мы доказали необходимость условия.

Предположим теперь, что функция $y=f(x)$ имеет в точке c бесконечный разрыв, т. е. что

$$\lim_{x \to c} y = \infty$$

(или $\lim\limits_{x\to c+0} y=\infty$ или $\lim\limits_{x\to c-0} y=\infty$). Тогда

$$\lim_{x\to c}|OM|=\lim_{x\to c}\sqrt{x^2+y^2}=\infty. \tag{3}$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{x\to c}|MP|=\lim_{x\to c}|x-c|=0. \tag{4}$$

Из доказанной теоремы вытекает следующее правило.

Правило. Чтобы разыскать все вертикальные асимптоты линии $y=f(x)$, находим все точки $x=c$, где функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв. Каждая из прямых $x=c$ будет асимптотой.

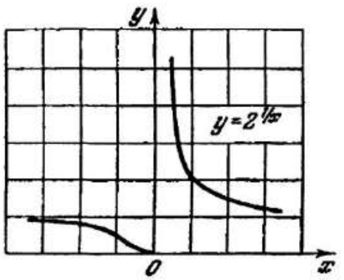


Рис. 144.

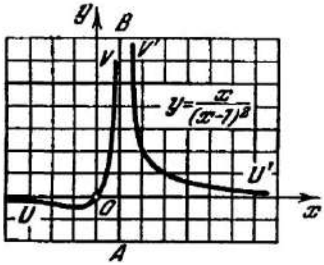


Рис. 145.

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты линии $y=2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Единственная точка разрыва функции $y=2^{1/x}$ есть точка $x=0$. Здесь функция имеет бесконечный разрыв (ибо $\lim\limits_{x\to+0} 2^{1/x}=\infty$). Значит, прямая $x=0$ (ось ординат) есть единственная вертикальная асимптота (рис. 144).

Пример 2. Найти вертикальные асимптоты линии $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

Решение. Единственная точка разрыва функции $\frac{x}{(x-1)^2}$ есть $x=1$. Разрыв бесконечный $\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty\right]$. Единственная вертикальная асимптота — прямая $x-1=0$ (AB на рис. 145).

Пример 3. Найти вертикальные асимптоты линии $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Решение. Функция $\frac{x}{x^2-1}$ имеет бесконечные разрывы в двух точках: $x=-1$ и $x=1$. Значит, график этой функции имеет две вертикальные асимптоты: $x+1=0$ (прямая A_1B_1 на рис. 146) и $x-1=0$ (прямая A_2B_2).

Замечание. Во взаимном расположении графика функции $y=f(x)$ и его вертикальных асимптот возможны разнообразные случаи. Так, в примере 1 прямая $x=0$ служит асимптотой только для правой ветви данной линии (вследствие того, что бесконечный предел односторонний); в примере 2 прямая AB служит асимптотой как для левой ветви UV, так и для правой ветви $U'V'$ (ибо бесконечный предел двусторонний); при этом на обеих ветвях приближение к асимптоте осуществляется при движении вверх. В примере 3 каждая из прямых A_1B_1, A_2B_2 служит асимптотой тоже для двух бесконечных ветвей, но на одной ветви приближение к асимптоте осуществляется при движении вверх, а на другой — при движении вниз (бесконечный предел ∞ двусторонний, но бесконечный предел $+\infty$, равно как бесконечный предел $-\infty$, односторонний).

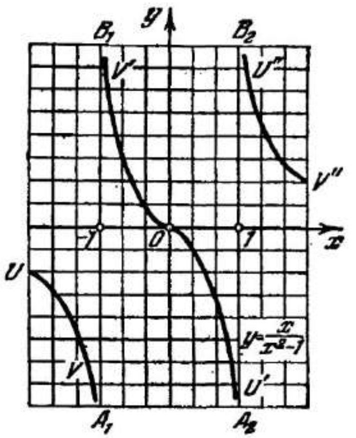


Рис. 146.

§ 111. Невертикальные асимптоты

Предварительные замечания. 1) Если точка $M'(x', y')$ удаляется в бесконечность по *невертикальной* прямой AB, то абсцисса x' стремится к $+\infty$ (при движении вправо) или к $-\infty$ (при движении влево). Обратно, если $x' \to +\infty$ или $x' \to -\infty$, то точка $M'(x', y')$ прямой AB удаляется в бесконечность (рис. 147).

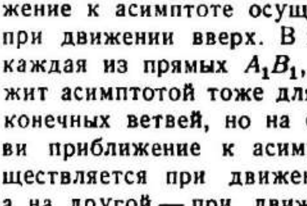


Рис. 147.

2) Пусть MK — перпендикуляр, опущенный из точки $M(x, y)$ на прямую

$$y=ax+b$$

(AB на рис. 147) и MP — ордината точки M. Последняя пересекает прямую AB в некоторой точке M'. При этом

$$M'M=y-(ax+b) \tag{1}$$

и (по формуле (10) I, § 42)

$$|MK|=\frac{|y-(ax+b)|}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$|M'M| = |MK|\sqrt{1+a^2}. \tag{3}$$

Теорема 1. Если прямая $y=ax+b$ есть асимптота линии $y=f(x)$, то имеет место одно из двух соотношений:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно определению асимптоты (§ 109) точка M линии $y=f(x)$ (рис. 148) может смещаться таким образом, что

$$|OM|\to\infty \quad \text{и} \quad |MK|\to 0. \tag{5}$$

Из (3) заключаем, что при этом

$$|M'M|\to 0. \tag{6}$$

Стало быть, в треугольнике OMM' одна сторона ($M'M$) бесконечно мала, а другая OM бесконечно велика. Значит, третья сторона OM' (она больше разности двух других) бесконечно велика: иными словами, точка $M'(x', y')$ удаляется в бесконечность (по прямой $y=ax+b$).

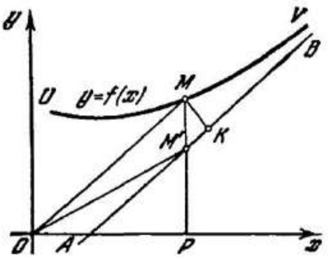


Рис. 148.

Значит, x' стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. А так как по построению $x=x'$, то

$$x\to\infty \quad \text{или} \quad x\to-\infty. \tag{7}$$

Из (6) и (7) заключаем, что имеет место одно из двух соотношений:

$$\lim_{x\to\infty} M'M=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} M'M=0.$$

Подставляя сюда выражение (1), получаем соотношения (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (обратная). Пусть имеет место одно из двух соотношений (4), скажем соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0\,[1]. \tag{8}$$

Тогда прямая $y=ax+b$ есть асимптота линии $y=f(x)$.

[1]) Предполагается, конечно, что функция $f(x)$ определена в некотором бесконечном промежутке (c, ∞).

Доказательство. В треугольнике OPM (рис. 148) $|OM|>|OP|=|x|$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}|OM|=\infty. \tag{9}$$

Вместе с тем имеем

$$|MK|\leqslant|M'M|=|f(x)-(ax-b)|. \tag{10}$$

Из (10) и (8) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}|MK|=0. \tag{11}$$

Соотношения (9) и (11), взятые в совокупности, означают, что прямая $y=ax+b$ есть асимптота линии $y=f(x)$.

В случае $x\to-\infty$ доказательство ведется аналогично.

Замечание 1. Соотношение (8) удобно представить в виде

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b. \tag{12}$$

Кроме того, отметим, что из (12) вытекает соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a. \tag{13}$$

Действительно, так как x стремится к бесконечности, то мы вправе считать, что $x\neq0$, а тогда разность $f(x)-ax$ можно представить в виде произведения $x\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]$, где первый множитель бесконечно велик. Чтобы это произведение стремилось к конечному пределу b, как того требует формула (12), необходимо, чтобы второй множитель $\frac{f(x)}{x}-a$ стремился к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]=0, \tag{13a}$$

откуда и получается формула (13).

Из вышеизложенного вытекает следующее правило.

Правило. Для разыскания невертикальных асимптот линии $y=f(x)$ ищем сначала $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если оказывается, что конечного предела не существует, то при $x\to+\infty$ асимптоты нет. Если же $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1$, то затем ищем $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]$.

Если оказывается, что конечного предела нет, то при $x\to+\infty$ асимптоты нет. Если же

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=b_1,$$

то прямая $y=a_1x+b_1$ есть асимптота при $x\to+\infty$.

Аналогично разыскивается асимптота при $x \to -\infty$.

Нередко случается, что асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ совпадают друг с другом (см. ниже пример 1). Но они могут быть и различными (см. ниже пример 2). Более двух невертикальных асимптот линия $y = f(x)$ иметь не может.

Замечание 2. Если при $x \to +\infty$ величина $f(x) - (a_1x + b_1) = M'M$ сохраняет один и тот же знак, то соответствующая бесконечная ветвь асимптоты лежит по одну сторону от асимптоты, а именно выше нее, если $M'M > 0$, и ниже нее, если $M'M < 0$. Но бывает и так, что величина $f(x) - (a_1x + b_1)$ при $x \to \infty$ принимает то положительные, то отрицательные значения, и тогда линия $y = f(x)$ без конца пересекает асимптоту, переходя с одной ее стороны на другую (рис. 149).

Рис. 149.

Пример 1. Найти все асимптоты линии $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Решение. Сперва будем искать вертикальные асимптоты. Так как функция $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \dfrac{1}{x}$ имеет единственный бесконечный разрыв в точке $x = 0$, то (§ 110) данная линия имеет единственную вертикальную асимптоту $x = 0$. Для разыскания невертикальных асимптот ищем сначала $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \qquad (= a_1).$$

Затем ищем

$$\lim_{x \to +\infty} (y - a_1x) = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2 \qquad (= b_1).$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ данная линия имеет асимптоту $y = x + 2$.

Так как величина $y - a_1x - b_1 = y - x - 2 = -\dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ сохраняет отрицательный знак, то соответствующая бесконечная ветвь данной линии лежит ниже асимптоты $y = x + 2$.

Выполнив аналогичные вычисления, найдем, что при $x \to -\infty$ данная линия имеет ту же асимптоту $y = x + 2$, но соответствующая бесконечная ветвь лежит выше асимптоты (рис. 150).

Кстати сказать, данная линия есть гипербола

$$x^2 - xy + 2x - 1 = 0.$$

Пример 2. Найти все асимптоты линии

$$y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Решение. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция всюду непрерывна. Для разыскания невертикальных асимптот ищем сначала

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \qquad (= a_1).$$

Теперь ищем

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - a_1 x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Здесь числитель $-2xe^{-x}$ стремится к нулю (см. § 101, пример 3, стр. 263), а знаменатель — к бесконечности. Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - a_1 x] = 0 \qquad (= b_1).$$

Значит, при $x \to +\infty$ данная линия имеет асимптоту $y = x$.

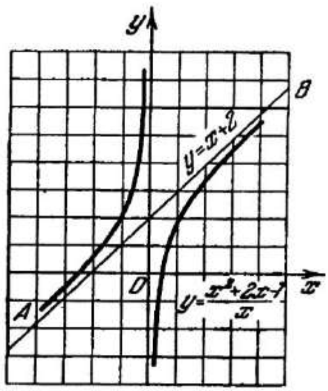


Рис. 150.

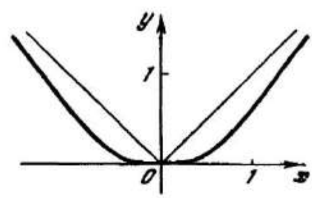


Рис. 151.

Так как величина $f(x) - a_1 x - b_1 = \frac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ при $x \to +\infty$ сохраняет отрицательный знак, то соответствующая бесконечная ветвь лежит ниже асимптоты.

Выполнив аналогичные вычисления для случая $x \to -\infty$, найдем, что $a_2 = -1$, $b_2 = 0$; следовательно, данная линия имеет вторую асимптоту $y = -x$; соответствующая бесконечная ветвь тоже лежит ниже асимптоты (см. рис. 151).

Замечание 3. Нередко требуется найти лишь такие невертикальные асимптоты, которые имеют заранее данное направление, т. е. данный угловой коэффициент a.

В этом случае достаточно воспользоваться одной формулой (12), по которой определяется начальная ордината искомой асимптоты, *если таковая существует*.

Особенно часто на практике приходится находить горизонтальные асимптоты данной линии $y=f(x)$. В этом случае формула (12) дает

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b. \tag{14}$$

Отсюда вытекает следующее правило.

Правило для разыскания горизонтальных асимптот. Для разыскания горизонтальных асимптот линии $y=f(x)$ ищем пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Если окажется, что

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b_1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b_2,$$

то прямые $y=b_1$, $y=b_2$ (они могут и совпасть) являются искомыми асимптотами. Если же какой-либо из этих пределов бесконечный или не существует, то соответствующей горизонтальной асимптоты нет.

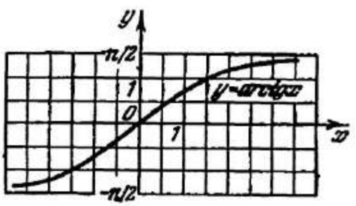


Рис. 152.

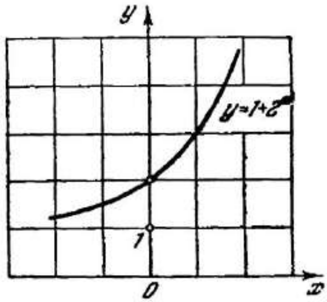


Рис. 153.

Пример 3. Найти горизонтальные асимптоты линии $y=\operatorname{arctg} x$.

Решение. Ищем пределы функции $\operatorname{arctg} x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$; находим

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

Значит, данная линия имеет две горизонтальные асимптоты: $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$ (рис. 152).

Пример 4. Найти горизонтальные асимптоты линии $y=1+2^x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} (1+2^x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} (1+2^x)=1.$$

Следовательно, прямая $y=1$ является единственной горизонтальной асимптотой (при $x\to-\infty$) (рис. 153).

Замечание 4. Даже в том случае, когда требуется найти все асимптоты данной линии, полезно предварительно посмотреть, не стремится ли функция $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) к некоторому конечному пределу b. Если да, то соответствующая асимптота найдена; если нет, то можно применить общий метод.

§ 111а. Задачи к § 108—111

Построить графики нижеприведенных функций; предварительно установить, имеются ли асимптоты, а также учесть и другие особенности.

1. $y=\frac{2x-1}{4x+2}$.
2. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$ (верзьера Марии Аньезя).
3. $y=\frac{10a^2}{\sqrt{25a^2-x^2}}$.
4. $y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a^2}{x}\right)$.
5. $y=e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).
6. $y=\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{x^2-1}$.
7. $y=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{2(x^2+1)}$.
8. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.
9. $y=e^{-x}\sin\pi x$ (кривая затухающих колебаний).
10. $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

§ 112. О построении графиков

График функции, заданной с помощью некоторой формулы, строится главным образом для того, чтобы образно представить характерные особенности функции. При бессистемном выборе опорных точек мы рискуем не достигнуть указанной цели. Так, если график функции $y=(x-1)^2(x+1)^3$ (см. рис. 127 на стр. 272) будет строиться по точкам $x=-1{,}5$, $x=-0{,}5$, $x=0$, $x=0{,}5$, то картина изменения функции грубо исказится.

Ниже приводится примерный план подготовительной работы по построению графика.

1. Установление области определения. Часто случается, что формула, задающая функцию $y=f(x)$, не определяет последнюю в некоторых точках или в некоторых промежутках. Их надо выявить предварительно. В частности, если в формулу входит корень четной степени из некоторой функции $\varphi(x)$, то надо исключить все те промежутки, где $\varphi(x)<0$, если в формулу входит выражение вида $\log F(x)$, то исключаются все промежутки, где $F(x)\leqslant 0$; при наличии выражения $\arcsin u$ или $\arccos u$ исключаются промежутки, где $|u|>1$.

2. Вертикальные асимптоты. Выделяем все точки бесконечного разрыва функции $f(x)$ (они обычно находятся среди точек, где функция $f(x)$ не определена). Каждой такой точке

$x=c$ соответствует вертикальная асимптота графика (§ 110). Таким путем находим все вертикальные асимптоты.

3. Симметрия. Выясняем, не является ли данная функция $f(x)$ четной или нечетной (§ 108). В первом случае график симметричен относительно оси Oy, во втором случае — относительно начала координат. В ряде случаев симметрия графика обнаруживается с помощью преобразования координат. Так, линия $y=\frac{1}{2}x+1-\frac{2x}{x^2+1}$ после переноса начала в точку (0; 1) представится уравнением $y=\frac{1}{2}x-\frac{2x}{x^2+1}$ (нечетная функция). Значит, график симметричен относительно точки (0; 1).

Полезно также заметить, что график симметричен относительно прямой $y=x$ (биссектриса I и III координатных углов), если уравнение $y=f(x)$ равносильно уравнению $x=f(y)$. Так, график функции $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$ (см. рис. 154 на стр. 303) симметричен относительно прямой $y=x$. Действительно, уравнение $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$ равносильно уравнению $x=\sqrt[3]{a^3-y^3}$; значит, если точка $M(b, c)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$, то тому же графику принадлежит точка $M'(c, b)$. А точки $M(b, c)$ и $M'(c, b)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Аналогично график функции $y=f(x)$ симметричен относительно прямой $y=-x$ (биссектриса II и IV координатных углов), если уравнение $y=f(x)$ равносильно уравнению $(-x)=f(-y)$. Таково, например, уравнение $y=\sqrt[3]{a^3+x^3}$; оно равносильно уравнению $-x=\sqrt[3]{a^3+(-y)^3}$.

4. Периодичность. Если функция $f(x)$ периодична и период ее равен T, то достаточно построить дугу графика в каком-либо промежутке длиной T, например в промежутке $(0, T)$. Затем эту дугу смещаем по горизонтальному направлению на расстояние $\pm T$, $\pm 2T$ и т. д.

5. Экстремумы. Дифференцируем данную функцию дважды. Попутно берем на заметку точки, где дифференцируемость нарушается. Определяем критические точки по первой и по второй производной; располагаем их в порядке возрастания. Находим все максимумы и минимумы функции $f(x)$ (§§ 104—105). Результаты вычисления по мере их получения заносим в таблицу.

Полезно заметить, что внутри промежутка, где функция $f(x)$ непрерывна, максимумы и минимумы последовательно чередуются.

6. Точки перегиба. Они находятся среди критических точек во второй производной (§ 107). Предварительно выясняется характер вогнутости графика. Вычисляем соответствующие значения функции $f(x)$; желательно вычислить также и значения $f'(x)$.

Полезно заметить, что в промежутке, где функция $f(x)$ дважды дифференцируема, между двумя точками экстремума есть по меньшей мере одна точка, где график имеет перегиб.

7. Другие замечательные точки. Они могут обнаружиться в ходе исследования. Так, если график имеет ось симметрии, то полезно определить точку пересечения графика с этой осью. Бывает также полезно определить точки пересечения графика с осями координат.

8. Невертикальные асимптоты. Если область изменения аргумента бесконечна, устанавливаем, имеются ли горизонтальные асимптоты; если нет, то имеются ли наклонные асимптоты (§ 111).

9. Построение элементов графика. Обозревая составленную таблицу, выбираем наиболее удобный масштаб. В случае необходимости масштабы на осях Ox, Oy берутся неодинаковыми. [Разумеется, при этом тангенс угла, образованного касательной с осью Ox, не будет равняться $f'(x)$]. Строим точки по ранее вычисленным координатам и намечаем соответствующие направления.

Проводим асимптоты (если они существуют). Делаем набросок графика (волосной чертой для последующего уточнения).

10. Дополнительные опорные точки. В некоторых случаях (в частности, когда график предназначается для использования в качестве пособия при вычислениях) набросок графика может оказаться недостаточно точным. Привлечение новых опорных точек позволит: 1) проконтролировать пригодность наброска; 2) уточнить его. В обоих случаях выбор опорных точек диктуется частными особенностями функции $f(x)$; при прочих равных условиях подбираются такие значения x, при которых упрощается вычисление $f(x)$ и $f'(x)$.

Когда достаточная степень точности достигнута, график фиксируется.

Пример 1. Построить график функции $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$.

Решение 1. Данная функция определена во всех без исключения точках.

2. Вертикальных асимптот нет.

3. График симметричен относительно прямой $y=x$ и пересекает ее в точке $A\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}, \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Касательная в точке A перпендикулярна к оси симметрии.

4. Данная функция непериодична.

5. Дифференцируя функцию $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$ дважды, получаем

$$y'=-\frac{x^2}{(a^3-x^3)^{2/3}}, \quad y''=-\frac{2a^3x}{(a^3-x^3)^{5/3}}.$$

Дифференцируемость нарушается только в точке $x=a$, где первая производная бесконечна и, значит, вторая производная не существует.

Критические точки по первой производной

$$x_1=0, \quad x_2=a.$$

Те же точки являются критическими по второй производной:

$$x_1'=0, \quad x_2'=a.$$

Экстремумов нет, так как во всех точках, отличных от x_1, x_2, первая производная y' отрицательна (вдоль всего графика спуск при движении вправо). Критическим значениям x_1, x_2 соответствуют точки B_1 $(0, a)$, B_2 $(a, 0)$ (симметричные относительно прямой $y=x$). В первой касательная горизонтальна, во второй — вертикальна.

6. В промежутках $(-\infty, x_1')$, (x_2', ∞) график вогнут вверх (так как внутри этих промежутков вторая производная y'' положительна); в промежутке (x_1', x_2') график вогнут вниз. В точках x_1', x_2' — перегибы. Соответствующие значения y и y' уже найдены.

7. В ходе исследования, кроме точек B_1, B_2, обнаружена точка $A\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}, \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)$, лежащая на оси симметрии $y=x$.

8. Горизонтальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\mp\infty$. Для разыскания наклонных асимптот ищем сначала

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-\sqrt[3]{1-\left(\frac{a}{x}\right)^3}\right].$$

Оказывается, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=-1$. Теперь надо искать

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{a^3-x^3}+x\right).$$

Здесь при $x\to+\infty$ первое слагаемое стремится к $(-\infty)$, а второе — к $(+\infty)$, а при $x\to-\infty$ наоборот; при этих обстоятельствах предел может быть и бесконечным и конечным. Для разыскания его используем дополнительный множитель, приводящий выражение в скобках к виду $\left(\sqrt[3]{a^3-x^3}\right)^3+x^3\ (=a^3)$. Получаем

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^3}{\sqrt[3]{(a^3-x^3)^2}-x\sqrt[3]{a^3-x^3}+x^2}.$$

Как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ каждый из трех членов знаменателя стремится к $+\infty$. Следовательно, и вся сумма стремится к $+\infty$. Значит,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=0.$$

Стало быть, наклонная асимптота (одна для обеих бесконечных ветвей) существует; это — прямая $y=-x$.

9. Строим (рис. 154) точки $A\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)$, B_1 $(0,\ a)$, B_2 $(a,\ 0)$ и асимптоту $y=-x$. Делаем набросок графика.

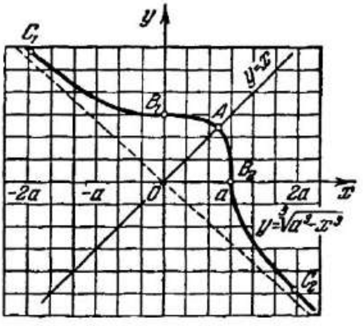


Рис. 154.

10. Так как расстояние точек B_1, B_2 от асимптоты составляет примерно 2/3 от наибольшего расстояния OA, то желательно уточнить картину постепенного приближения графика к асимптоте. Построив дополнительную точку $C_2(2a,\ -a\sqrt[3]{7})$ и симметричную точку $C_1(-a\sqrt[3]{7}, 2a)$, получаем более точные данные.

№ точки	x	y'	y''	y	Особенности формы графика	Обозначения точки
1	0	$-0-$	$+0-$	a	Перегиб	B_1
2	$\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\approx 0{,}79a$	-1		$\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\approx 0{,}79a$	Граница симметричных ветвей	A
3	a	$-\infty-$	Нет	0	Перегиб	B_2
4	$2a$			$-a\sqrt[3]{7}\approx -1{,}91a$		C_2
5	$-a\sqrt[3]{7}$			$2a$		C_1

Пример 2. Построить график функции $y=x\operatorname{arcctg} x$.

Решение 1. Данная функция определена во всех точках.

2. Вертикальных асимптот нет.

3. Симметрия не обнаруживается.

4. Функция непериодична.

5. Данная функция $f(x)$ дважды дифференцируема во всех точках, причем

$$y' = \operatorname{arcctg} x - \frac{x}{1+x^2}, \qquad y'' = -\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Для разыскания критических точек по первой производной достаточно решить уравнение

$$y' = \operatorname{arcctg} x - \frac{x}{1+x^2} = 0. \tag{1}$$

Если ввести новое неизвестное

$$u = \operatorname{arcctg} x, \tag{2}$$

то уравнение (1) после элементарных преобразований примет вид

$$u - \frac{1}{2}\sin 2u = 0$$

или

$$2u = \sin 2u.$$

Для решения этого уравнения лучше всего применить графический способ. Если начертить графики функций $2u$ и $\sin 2u$, то обнаружится, что они имеют единственную общую точку $u=0$ (в которой прямая $v=2u$ касается кривой $v=\sin 2u$; читателю рекомендуется построить эти графики самостоятельно).

Теперь остается подставить значение $u=0$ в формулу (2); получим уравнение

$$0 = \operatorname{arcctg} x,$$

которое не имеет решения. Следовательно, не имеет решения также и уравнение (1).

6. Так как вторая производная сохраняет отрицательный знак, то график всюду вогнут вниз, и точек перегиба нет.

7. График проходит через начало координат $O(0;\ 0)$. Угловой коэффициент касательной в точке O равен $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

8а. Имея в виду, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$. Значит, левая бесконечная ветвь графика не имеет горизонтальной асимптоты. Ищем теперь $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}(x \operatorname{arcctg} x)$ (первый сомножитель стремится к бесконечности, а второй к нулю).

Введем новую переменную

$$\operatorname{arcctg} x = z,$$

откуда $x = \operatorname{ctg} z$. Так как $x \to +\infty$, то $z \to +0$, и мы имеем

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (x \operatorname{arcctg} x) = \lim_{z \to +0} (z \operatorname{ctg} z) = \lim_{z \to +0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = 1$$

(ср. § 51).

Таким образом, горизонтальная прямая $y = 1$ есть асимптота правой бесконечной ветви; заметим, что при $x \to +\infty$ график лежит ниже асимптоты $\left(\text{ибо } \frac{z}{\operatorname{tg} z} < 1\right)$.

8б. Выясним, не имеет ли левая бесконечная ветвь наклонную асимптоту. Ищем сначала $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

Затем ищем $\lim\limits_{x \to -\infty} (y - \pi x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x (\operatorname{arcctg} x - \pi)$.

Введем новую переменную

$$\operatorname{arcctg} x - \pi = u.$$

Так как $x \to -\infty$, то $u \to -0$. Выразив x через u, получаем $x = \operatorname{ctg}(\pi + u) = \operatorname{ctg} u$.

Теперь получаем

$$\lim_{x \to -\infty} (y - \pi x) = \lim_{u \to -0} u \operatorname{ctg} u = 1.$$

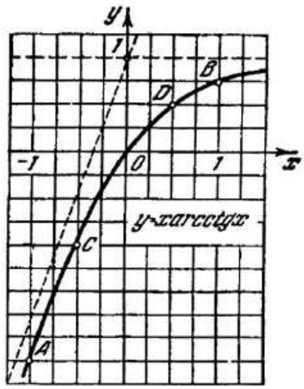


Рис. 155.

Таким образом, левая бесконечная ветвь имеет наклонную асимптоту $y = \pi x + 1$; заметим, что при $x \to -\infty$ график тоже лежит ниже асимптоты, так как величина $y - (\pi x + 1) = \frac{u}{\operatorname{tg} u} - 1$ отрицательна.

9. Строим асимптоты (рис. 155) и намечаем направление касательной в точке O. Делаем набросок графика.

10. Для построения дополнительных точек удобно положить $x = 1$, что дает

$$y = x \operatorname{arcctg} x = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

и $x = -1$, что дает

$$y = (-1) \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} \approx -2{,}35.$$

Построив точки $A(-1;\ -2{,}35)$ и $B\ (1;\ 0{,}79)$, получаем довольно точный график.

Для контроля и уточнения можно добавить, скажем, точки $C(-0{,}5;\ -1{,}01)$ и $D\ (0{,}5;\ 0{,}55)$.

§ 112а. Задачи к § 112

Построить графики следующих функций:

1. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.
2. $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$.
3. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
4. $y=x+2\operatorname{arcctg} x$.

ГЛАВА V

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ, НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ)

§ 113. Теорема Коши (о среднем значении)

Предварительные замечания. В этой главе мы не раз будем пользоваться теоремой Коши о среднем значении. Для лучшего ее понимания выясним предварительно геометрическое содержание этой теоремы.

Пусть дуга $AKLB$ (рис. 156) представляется параметрическими уравнениями

$$x=f(t),\ y=\varphi(x) \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

где функции $f(t)$, $\varphi(t)$ дифференцируемы в промежутке (a, b). Спрашивается, всегда ли на дуге $AKLB$ найдется такая точка N, где касательная NT была бы параллельна хорде AB, стягивающей данную дугу.

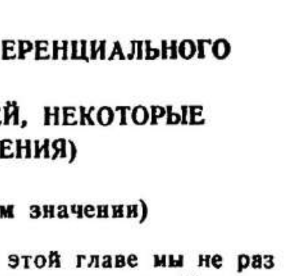


Рис. 156.

Теорема Коши позволяет ответить на этот вопрос утвердительно при следующих естественных условиях:

1) Производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ не должны обращаться в нуль одновременно ни в одной точке t промежутка (a, b).

Это условие гарантирует (§ 85) существование касательной в каждой точке дуги $AKLB$. Угловой коэффициент касательной выражается, как мы знаем, отношением $\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$.

2) Разности

$$f(b)-f(a), \qquad \varphi(b)-\varphi(a)$$

не должны одновременно равняться нулю.

Это условие означает, что концы A, B дуги $AKLB$ не должны совпадать друг с другом; иначе «хорда» AB не будет иметь определенного направления.

В заключение заметим, что теорема Лагранжа о среднем значении (§ 99) устанавливает тот же геометрический факт, но лишь для такой дуги AB, которую можно представить уравнением вида $y=f(x)$; иными словами, ни одна прямая, параллельная некоторому направлению, (принимаемому за вертикальное) не должна пересекать дугу AB более чем в одной точке. Таким образом, теорема Коши является широким обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема Коши. Предположим, что функции $f(t)$, $\varphi(t)$ дифференцируемы в замкнутом промежутке (a, b) и что производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ не обращаются одновременно в нуль нигде внутри этого промежутка.

Пусть при этом по меньшей мере одна из разностей

$$f(b)-f(a), \qquad \varphi(b)-\varphi(a) \tag{1}$$

не равна нулю.

Тогда имеет место пропорция

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}, \tag{2}$$

где τ [1]) *есть некоторая точка, лежащая между* a, b.

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы Лагранжа. А именно рассматривается вспомогательная функция

$$F(t)=\begin{vmatrix} f(t)-f(a) & f(b)-f(a) \\ \varphi(t)-\varphi(a) & \varphi(b)-\varphi(a) \end{vmatrix}$$

[удвоенная площадь ориентированного треугольника ABM (рис. 156) с вершинами $A(a)$, $B(b)$, $M(t)$]. Эта функция дифференцируема в замкнутом промежутке (a, b) и обращается в нуль при $t=a$, $t=b$. Следовательно, производная $F'(t)$ обращается в нуль в некоторой точке $t=\tau$, лежащей между a и b (§ 98). Получаем равенство

$$[f(b)-f(a)]\,\varphi'(\tau)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(\tau). \tag{3}$$

По условию одна из разностей $f(b)-f(a)$, $\varphi(b)-\varphi(a)$ отлична от нуля. Положим, что

$$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0. \tag{4}$$

Докажем, что в этом случае отлична от нуля также и производная $\varphi'(\tau)$. Предположим противное, т. е. допустим, что

$$\varphi'(\tau)=0. \tag{5}$$

Тогда надо считать, что

$$f'(\tau)\neq 0, \tag{6}$$

ибо по условию производные $\varphi'(\tau)$, $f'(\tau)$ обратиться в нуль обе сразу не могут. Из (4) и (6) будет следовать, что правая часть равенства (3) отлична

---

[1]) τ — греческая буква («тау»), соответствующая русской букве «т» и латинской t.

от нуля, а из (5) — что левая часть равенства (8) равна нулю. Нелепость вывода доказывает, что допущение (5) несостоятельно. Стало быть,

$$\varphi'(\tau) \neq 0. \tag{7}$$

Значит, мы вправе разделить обе части равенства на $\varphi'(\tau)[\varphi(b)-\varphi(a)]$. Тогда получим пропорцию (2).

Мы предположили, что из двух разностей (1) отлична от нуля вторая. Если предположить, что отлична от нуля разность $f(b)-f(a)$, то, рассуждая аналогично, получим пропорцию

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\varphi'(\tau)}{f'(\tau)}. \tag{2a}$$

Здесь не исключена возможность, что $\varphi(b)-\varphi(a)=0$. Ясно, что тогда $\varphi'(\tau)=0$. При этих обстоятельствах формула (2), строго говоря, теряет смысл, но она верна в условном смысле [как иносказательное выражение формулы (2a)].

Пример 1. Рассмотрим функции

$$x=f(t)=t^3, \qquad y=\varphi(t)=t^2 \tag{8}$$

в промежутке (0; 2). Каждая из этих функций дифференцируема во всех внутренних точках данного промежутка, а также и на концах его. Обе производные обращаются одновременно в нуль, но это имеет место *на конце* $t=0$ данного промежутка, а внутри промежутка обе производные отличны от нуля. Наконец, как одна, так и другая функция имеют неравные значения на концах данного промежутка. Все условия теоремы Коши выполнены. Теорема утверждает, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)}=\frac{2^3}{2^2}=2$$

равняется отношению

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

в некоторой точке $t=\tau$, лежащей между $a=0$ и $b=2$. И в самом деле, равенство

$$2=\frac{3}{2}t$$

удовлетворяется при $t=\frac{4}{3}$, а это число заключено между 0 и 2.

Геометрически: уравнения (8) представляют дугу OB полукубической параболы (рис. 157); значениям $t=0$, $t=2$ соответствуют точки $O(0;\ 0)$, $B(8;\ 4)$. Между точками O и B на дуге OB имеется точка $N\left(2\frac{10}{27};\ 1\frac{7}{9}\right)$, где касательная параллельна хорде OB.

Пример 2. Рассмотрим те же функции $f(t)=t^3$, $\varphi(t)=t^2$ в промежутке $\left(-1\frac{1}{2};\ 2\right)$. Теперь

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f\left(-1\frac{1}{2}\right)}{\varphi(2)-\varphi\left(-1\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^3-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3}{2^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}.$$

Если приравнять это число отношению $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3}{2}t$, то получим уравнение

$$\frac{13}{2}=\frac{3}{2}t,$$

единственный корень которого $\left(t=4\frac{1}{3}\right)$ лежит *вне промежутка*

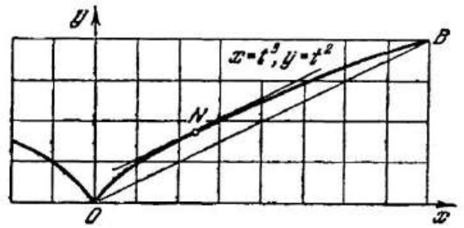


Рис. 157.

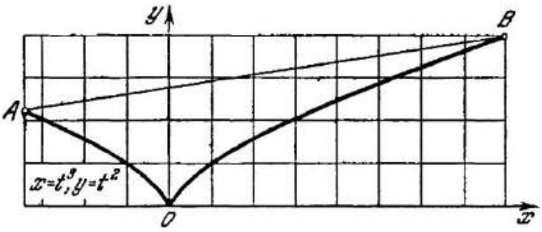


Рис. 158.

$\left(-1\frac{1}{2},\ 2\right)$; значит, на дуге AOB (рис. 158) полукубической параболы $x=t^3$, $y=t^2$ нет ни одной точки, где касательная была бы параллельна хорде AB.

Теорема Коши оказалась неприменимой по той причине, что точка $t=0$, где обе производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ равны нулю, теперь лежит *внутри* промежутка $(a,\ b)$.

§ 114. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя

Если какая-либо функция не определена в точке $x=a$, но обладает пределом при $x \to a$, то разыскание этого предела называют *раскрытием неопределенности*. В частности, раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$ называют разыскание предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где обе функции $f(x)$, $\varphi(x)$ обращаются в нуль при $x=a$, т. е.

$$f(a)=0, \quad \varphi(a)=0. \tag{1}$$

Теорема о пределе частного при этих обстоятельствах неприменима (ср. § 44, замечание 5), но во множестве случаев неопределенность вида $\frac{0}{0}$ удается раскрыть с помощью так называемого правила Лопиталя [1]).

Правило Лопиталя. Для разыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двух функций, обращающихся в нуль в точке a и дифференцируемых вблизи этой точки, можно рассматривать отношение производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Если оно стремится к некоторому пределу (конечному или бесконечному), то к тому же пределу стремится и отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2}$$

Доказательство. Применим теорему Коши [2]) к отношению $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$, которое в силу (1) принимает вид $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Получаем пропорцию

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}. \tag{3}$$

Здесь x_1 — некоторая точка, лежащая между a и x. Значит, когда точка x будет стремиться к a, точка x_1 тоже будет стремиться

---

[1]) Г. Лопиталь (1661—1704) — автор первого печатного руководства по дифференциальному исчислению (1696), где и сформулировано правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (в менее общей форме, чем оно было сформулировано позднее на основании теоремы Коши). Как указывает сам Лопиталь, автором правила является его учитель Иван Бернулли. Таким образом, название «правило Лопиталя» исторически неточно.

[2]) Несколькими строками ниже (см. замечание 1) доказано, что все условия теоремы Коши в данном случае соблюдены. Пока примем это в виде предположения.

к a. По условию отношение $\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$ должно стремиться к некоторому пределу. В силу (3) к тому же пределу стремится отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Замечание 1. Так как по условию функции $f(x)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и так как нас интересует разыскание *предела* отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$, то мы вправе считать, что точка x настолько близка к a, что в замкнутом промежутке (a, x) обе функции дифференцируемы.

Далее, так как по условию отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ стремится к некоторому пределу при $x \to a$, то окрестность точки a можно считать столь малой, что производная $\varphi'(x)$ всюду отлична от нуля. В самом деле, если бы в любой окрестности точки a содержались точки, где $\varphi'(x)=0$, то таких точек было бы бесконечно много, и в них отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не имело бы определенного значения. Значит, ни о каком пределе отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не могло бы быть и речи.

Наконец, разность $\varphi(x)-\varphi(a)$ надо также считать не равной нулю. Действительно, если допустить, что $\varphi(x)-\varphi(a)=0$, то функция $\varphi(t)-\varphi(a)$ обращалась бы в нуль при $t=x$ и при $t=a$. Но тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(t)$ обращалась бы в нуль в некоторой точке, лежащей между a и x, а эту возможность мы только что исключили.

Таким образом, оказывается, что применительно к отношению $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$ все условия теоремы Коши выполнены.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\cos x}{1-\cos x}$.

Решение. Имеем $f(x)=\ln\cos x$, $\varphi(x)=1-\cos x$, причем $f(0)=\ln\cos 0=\ln 1=0$; $\varphi(0)=1-\cos 0=0$. Попытка применить теорему о пределе частного приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Но можно применить правило Лопиталя, так как функции $f(x)$, $\varphi(x)$ вблизи точки $x=0$ дифференцируемы, причем

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=-\operatorname{tg} x, \quad \varphi'(x)=\sin x. \tag{4}$$

Отношение производных

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=-\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \tag{5}$$

при $x \to 0$ стремится к пределу -1 (так как $\operatorname{tg} x \approx \sin x$). Значит, к тому же пределу стремится отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$:

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x \to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x \to 0}\left(-\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)=-1.$$

Замечание 2. В силу (5) отношение производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to 0$ тоже является неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия ее мы могли бы применить правило Лопиталя повторно:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\sin x)'}=$$
$$=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos^2 x}:\cos x\right]=-1.$$

Однако этот путь менее удобен. Вообще следует предостеречь от «увлечения» правилом Лопиталя. Иной раз лучше обойтись без него; выгоднее же всего умело комбинировать применение правила Лопиталя с другими преобразованиями, облегчающими разыскание предела.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Решение. Следуя правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3\sin^2 x\cos x}. \qquad (6)$$

Снова получилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$, но применять правило Лопиталя лучше не сразу. Целесообразно предварительно преобразовать выражение (6) к виду $\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x\cos^2 x}$ и, заметив, что $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)=1$, идти дальше таким путем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^3 x)'}{(3\sin^2 x)'}.$$

Здесь мы применили правило Лопиталя. Окончательно получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^3 x)'}{(3\sin^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cos x\right)=\frac{1}{2}.$$

Другое решение. В данном выражении заменим бесконечно малую величину $\sin^3 x$ эквивалентной ей величиной x^3, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}.$$

Здесь мы опять использовали соотношение $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1$ (или, что то же, эквивалентность $\cos^2 x\approx 1$). Повторное применение правила

Лопиталя дает

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Замечание 3. Правило Лопиталя пригодно при разыскании как двустороннего, так и одностороннего предела (при $x\to a+0$ или при $x\to a-0$). Оно распространяется также и на случай, когда аргумент стремится к бесконечному пределу; в последнем случае формула (2) заменяется формулой

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{2a}$$

(и аналогичными формулами при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$). Формула (2а) верна при условии, что функции $f(x)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы при всех *достаточно больших* (по абсолютной величине) значениях x; предполагается также, что предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\sin\frac{1}{x}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg} x=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применив формулу (2а), получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg} x}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{1+x^2}\right):\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}:\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}:\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=1:1=1.$$

§ 114а. Задачи к § 114

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\ln x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos\frac{x}{2}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{\sin x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+4x+3}{3x^4+4x^3+1}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$. 11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\sin\frac{1}{x}}$.

§ 115. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Раскрытием неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ называют разыскание предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двух функций $f(x)$, $\varphi(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \to a$ (или при $x \to \infty$):

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

К неопределенностям такого вида тоже можно применять правило Лопиталя, т. е. вместо отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ рассматривать отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ [1]. Если оно стремится (при $x \to a$) к некоторому пределу (конечному или бесконечному), то к тому же пределу стремится и отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2}$$

Доказательство опускаем.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to +0} \ln x = -\infty; \qquad \lim_{x \to +0} \operatorname{ctg} x = +\infty.$$

Данное выражение есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ (функция $\ln x$ определена только при условии, что $x > 0$, но при этом условии она дифференцируема). Применяя формулу (2), получаем

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to +0} \left[\frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right] = \lim_{x \to +0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +0} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = 0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}2^x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}2^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1{,}2^x \ln 1{,}2} = \frac{0}{\infty} = 0.$

---

[1] Разумеется, предполагается, что функции $f(x)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы вблизи точки a.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Функции $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{tg} x$ бесконечно велики при $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. Их производные $(\operatorname{tg} 3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ тоже бесконечно велики. Но отношение $\frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} x)'}$ преобразуется к виду $3\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$, так что достаточно найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$. Здесь делимое и делитель бесконечно малы. Применяем правило Лопиталя. Выкладка имеет вид

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{\cos^2 3x} : \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 3 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2 = 3\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2 =$$

$$= 3\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin 3x}\right)^2 = 3\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{3\sin\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Другое решение. Выкладки упростятся, если данное выражение $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ представить в виде $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x}$. При $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ последнее выражение есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3\sin^2 x} = \frac{\sin^2 3\frac{\pi}{2}}{3\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

§ 116. Неопределенные выражения других видов

К неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно привести неопределенности многих других видов.

1. Неопределенность вида $0\cdot\infty$. Раскрытием неопределенности вида $0\cdot\infty$ называют разыскание предела произведения $f(x)\cdot\varphi(x)$, где функция $f(x)$ бесконечно мала, а функция $\varphi(x)$ бесконечно велика. Это произведение можно преобразовать по формуле

$$f(x)\cdot\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)},$$

и тогда получится неопределенность вида $\frac{0}{0}$, или по формуле

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\varphi(x):\frac{1}{f(x)},$$

и тогда получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x\cos 3x)$.

Решение. Преобразуем данное выражение к виду $\frac{\cos 3x}{\operatorname{ctg} 3x}$. При $x\to\frac{\pi}{2}$ делимое и делитель бесконечно малы. Находим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x\cos 3x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(-3\sin 3x):\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right]=-3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^4\ln x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+0}x^4\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln x:\frac{1}{x^4}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\left[\frac{1}{x}:\left(-\frac{4}{x^5}\right)\right]=0.$

II. Неопределенность вида $\infty-\infty$. Так называют разность двух функций, каждая из которых имеет бесконечный предел. Интерес представляет, конечно, только тот случай, когда обе функции при стремлении к бесконечности имеют один и тот же знак (в противном случае упомянутая разность может иметь только бесконечный предел). Неопределенность вида $\infty-\infty$ можно представить в виде $\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}$, где функции $f(x)$, $\varphi(x)$ бесконечно малы. Приведя эту разность к виду $\frac{\varphi(x)-f(x)}{f(x)\varphi(x)}$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Решение. Данное выражение есть разность двух функций, имеющих бесконечные пределы при $x\to 0$. При этом обе функции имеют один и тот же знак (положительный, если $x>0$, и отрицательный, если $x<0$). Приведя данную разность к виду $\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Ее удобно представить в виде $\frac{1}{e^x+1}\cdot\frac{e^x-1}{x}$. Первый сомножитель стремится к $\frac{1}{2}$; ко второму можно применить правило Лопиталя. Выкладка имеет вид

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$

III. Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Так называют функции вида $y=f(x)^{\varphi(x)}$, где $\lim f(x)=0$, $\lim\varphi(x)=0$ (неопределенность 0^0) или $\lim f(x)=\infty$, $\lim\varphi(x)=0$ (неопределенность ∞^0), или $\lim f(x)=1$, $\lim\varphi(x)=\infty$ (неопределенность 1^∞).

В каждом из этих трех случаев рекомендуется предварительно найти предел функции $\ln y$. Так как

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x),$$

то во всех трех случаях получим неопределенность вида $0\cdot\infty$. Предположим, что эту неопределенность удалось раскрыть и оказалось, что

$$\lim\ln y=b.$$

А так как $\lim\ln y=\ln\lim y$, то

$$\ln\lim y=b,$$

а отсюда найдем

$$\lim y=e^b.$$

Если окажется, что $\lim\ln y=+\infty$, то будем иметь $\lim y=+\infty$, а если $\lim\ln y=-\infty$, то $\lim y=0$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$ (неопределенность вида 0^0).

Решение. Полагая $y=x^x$, имеем $\ln y=x\ln x$. Ищем предел $\lim\limits_{x\to+0}\ln y$:

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}(x\ln x)=\lim_{x\to+0}\left(\ln x:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\left[\frac{1}{x}:\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=0.$$

Отсюда находим

$$\lim_{x\to+0}y=e^0=1.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (неопределенность вида ∞^0).

Решение. Полагаем $y=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, имеем $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+2x)$. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{1+2x}:1\right]=0.$$

Значит, $\lim y=1$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ (неопределенность вида 1^∞).

Решение. Полагаем $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; имеем $\ln y=\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x$. Далее,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[(\ln\operatorname{tg}x)':(\operatorname{ctg}2x)']=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\sin x\cos x}:\left(-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)\right]=-1.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{-1}$.

§ 116а. Задачи к §§ 115—116

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$. 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ax}}{x^n}$. $(a>0,\ n>0)$.

6. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x$. 7. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\operatorname{ctg}\pi x$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+a)\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\right]$.

11. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. 16. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

17. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln\operatorname{ctg} x}}$. 18. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-a^2)^{\frac{1}{\ln x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. 20. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

§ 117. Формула Тейлора [1]) (простейшие случаи)

П о с т а н о в к а в о п р о с а. Пусть функция $f(x)$ обладает в промежутке (r, s) последовательными производными $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ и т. д. Примем какую-нибудь точку a этого промежутка за начальную и предположим, что нам известны точные значения $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ и т. д. Постараемся найти по возможности простые приближенные формулы для вычисления $f(x)$ в других точках промежутка (a, b).

---

[1]) Усвоить формулу Тейлора сразу в общем ее виде (см. ниже § 118) довольно тяжело. Поэтому мы рассматриваем сначала простейшие частные случаи, после чего изучение § 118 вряд ли представит какие-либо трудности. Читатель, полагающийся на свои силы, может пропустить настоящий параграф.

В основу положим формулу конечных приращений (§ 100), которая при нынешних обозначениях запишется в виде

$$f(x) = f(a) + f'(x_1)(x - a). \tag{1}$$

Здесь x_1 — некоторая точка, лежащая между a и x.

Первое приближение. Заменим неизвестное значение $f'(x_1)$ известным значением $f'(a)$. Получится приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \tag{2}$$

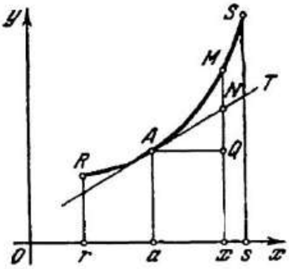


Рис. 159.

Геометрически оно означает замену линии $y = f(x)$ (RS на рис. 159) касательной AT в точке A. Чтобы оценить степень точности формулы (2), составим выражение

$$R_1(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)], \tag{3}$$

которое назовем ***остатком*** выражения (2). Геометрически остаток $R_1(x)$ представляет направленный отрезок NM, т. е. отклонение линии $y = f(x)$ от ее касательной AT. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. Остаток $R_1(x)$ выражения (2) можно представить (точной) формулой

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(x_2)(x - a)^2, \tag{4}$$

где x_2 — некоторая точка, лежащая между a и x.

Иначе говоря, отношение $\frac{R_1(x)}{(x-a)^2}$ равно половине второй производной $f''(x_2)$:

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} f''(x_2). \tag{4a}$$

Доказательство. Из формулы (3), определяющей функцию $R_1(x)$, следует, что $R_1(a) = 0$. Для функции $\varphi(x) = (x - a)^2$, стоящей в знаменателе дроби $\frac{R_1(x)}{(x-a)^2}$, тоже имеет место равенство $\varphi(a) = 0$. Следовательно, эту дробь можно представить в виде

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{R_1(x) - R_1(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}.$$

К последнему выражению применим теорему Коши (все условия

§ 113 выполняются); получаем

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2}=\frac{R_1'(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \tag{5}$$

где x_1 — некоторая точка, лежащая между a и x.

Но в силу той же формулы (3) имеем

$$R_1'(x)=f'(x)-f'(a).$$

Кроме того,

$$\varphi'(x)=2(x-a).$$

Следовательно, формулу (5) можно записать так:

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}\frac{f'(x_1)-f'(a)}{x_1-a}.$$

Применим к последнему отношению теорему Лагранжа (т. е. частный случай теоремы Коши). Получим

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(x_2),$$

где x_2 лежит между a и x_1 и, значит, между a и x.

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)=\ln x$ и примем точку $a=1$ за начальную. Нам известны точные значения

$$f(a)=\ln 1=0, \quad f'(a)=\frac{1}{a}=1.$$

Требуется найти приближенное значение $\ln 1{,}1$.

Воспользуемся формулой (2), положив в ней

$$f(x)=\ln x; \; x=1{,}1; \; a=1.$$

И в качестве первого приближения получаем

$$\ln 1{,}1 \approx 0+1\cdot 0{,}1=0{,}1.$$

Степень точности этого приближения можно оценить по формуле (4), которая представляет разность $R_1(1{,}1)=\ln 1{,}1-0{,}1$ в виде

$$R_1(1{,}1)=\frac{1}{2}f''(x_2)(0{,}1)^2=-\frac{0{,}01}{2x_2^2}, \tag{6}$$

где x_2 — некоторое число, заключенное между 1 и 1,1. Из формулы (6) следует, что первое приближение 0,1 является избыточным и что абсолютная величина погрешности $R_1(1{,}1)$ меньше чем 0,005:

$$|R_1(1{,}1)|<\frac{0{,}01}{2\cdot 1^2}=0{,}005.$$

Значит, в приближенном значении

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}10$$

все цифры верные.

Замечание. Для разыскания первого приближения $\ln 1{,}1$ можно использовать также и формулу конечных приращений (1). При $f(x)=\ln x$, $a=1$, $x=1{,}1$ она дает

$$\ln 1{,}1=\frac{0{,}1}{x_1}.$$

Число x_1 заключено между 1 и 1,1. Следовательно,

$$\frac{0{,}1}{1}<\ln 1{,}1<\frac{0{,}1}{1{,}1}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что ошибка приближенного равенства

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}10$$

по абсолютной величине меньше чем 0,01. Таким образом, предыдущая оценка лучше. Но, главное, тем же методом, которым мы ее получили, можно найти и более точные приближения и оценить их погрешности.

Второе приближение. Из формул (3) и (4) получаем *точное* равенство

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(x_2)(x-a)^2, \tag{8}$$

однако в нем значение x_2, а следовательно и значение $f''(x_2)$, неизвестно. Заменим неизвестное значение $f''(x_2)$ известным значением $f''(a)$. Получится приближенное равенство

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \tag{9}$$

Чтобы оценить степень его точности, составим выражение

$$R_2(x)=f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\right] \tag{10}$$

(остаток второго приближения) и докажем следующую теорему.

Теорема 2. Остаток $R_2(x)$ второго приближения (9) можно представить формулой

$$R_2(x)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x_3)(x-a)^3, \tag{11}$$

где x_3 — некоторая точка, лежащая между a и x.

Иначе говоря, отношение $\frac{R_2(x)}{(x-a)^3}$ равно третьей производной $f'''(x_3)$, деленной на 3! («три факториал»):

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3}=\frac{f'''(x_3)}{3!}. \tag{11a}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (10), получаем

$$R_2'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a), \tag{12}$$

$$R_2''(x) = f''(x) - f''(a), \tag{13}$$

$$R_2'''(x) = f'''(x). \tag{14}$$

Подставляя в (10), (12) и (13) $x = a$, имеем

$$R_2(a) = 0, \quad R_2'(a) = 0, \quad R_2''(a) = 0.$$

Введем еще обозначение

$$\varphi(x) = (x-a)^3.$$

Очевидно, имеют место равенства

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0, \quad \varphi''(a) = 0$$

и тождественное равенство

$$\varphi'''(x) = 6 \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3). \tag{15}$$

Заметив это, рассмотрим отношение

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{R_2(x) - R_2(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}.$$

Это отношение удовлетворяет условиям теоремы Коши. Следовательно,

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{R_2(x) - R_2(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{R_2'(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \tag{16}$$

где x_1 — некоторая точка, лежащая между a и x.

К отношению $\frac{R_2'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R_2'(x_1) - R_2'(a)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}$ снова применим теорему Коши; получим

$$\frac{R_2'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R_2''(x_2)}{\varphi''(x_2)}, \tag{17}$$

где x_2 — некоторая точка, лежащая между a и x_1 и, следовательно, между a и x.

Наконец, применим теорему Коши к отношению $\frac{R_2''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \frac{R_2''(x_2) - R_2''(a)}{\varphi''(x_2) - \varphi''(a)}$. Получим

$$\frac{R_2''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \frac{R_2'''(x_3)}{\varphi'''(x_3)}, \tag{18}$$

где x_3 — некоторая точка, лежащая между a и x_2 и, следовательно, между a и x.

В силу (14) имеем $R_2'''(x_3) = f'''(x_3)$, а в силу (15) имеем $\varphi'''(x_3) = 1\cdot 2\cdot 3$. Следовательно,

$$\frac{R_2'''(x_3)}{\varphi'''(x_3)} = \frac{f'''(x_3)}{1\cdot 2\cdot 3}. \tag{19}$$

Из цепи равенств (16) — (19) вытекает, что

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x_3).$$

Теорема 2 доказана.

Когда точка x достаточно близка к a, остаток $R_2(x)$ обычно оказывается меньше остатка $R_1(x)$, т. е. приближение (9) точнее, чем приближение (2).

Пример 2. В примере 1 мы, пользуясь формулой (2), нашли (избыточное) приближение $\ln 1{,}1 \approx 0{,}10$ и установили, что ошибка $|R_1(1{,}1)|$ меньше, чем $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$. Воспользуемся теперь формулой (9). Положив в ней

$$f(x) = \ln x,\ a = 1,\ x = 1{,}1,$$

будем иметь

$$f(a) = \ln 1 = 0;\ f'(a) = \frac{1}{a} = 1;\ \ f''(a) = -\frac{1}{a^2} = -1$$

и получим

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 = 0{,}095.$$

Степень точности этого приближения определим по формуле (11), которая представляет разность $R_2(1{,}1) = \ln 1{,}1 - 0{,}095$ в виде

$$R_2(1{,}1) = \frac{1}{6} f'''(x_3)\cdot 0{,}1^3 = \frac{1}{6}\,\frac{2}{x_3^3}\cdot 0{,}1^3 = \frac{0{,}1^3}{3x_3^3}. \tag{20}$$

Так как число x_3 заключено между 1 и 1,1, то из (20) следует, что второе приближение 0,095 является недостаточным и что ошибка $R_2(1{,}1)$ меньше чем $\frac{1}{3}\cdot 10^{-3}$ [т. е. в 10 с лишним раз меньше, чем ошибка $R_1(1{,}1)$]. Стало быть, в приближенном равенстве

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}095$$

все цифры верные.

Третье приближение. Из формул (10) и (11) получаем точную формулу

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_3)(x-a)^3. \tag{21}$$

Заменив неизвестное значение $f'''(x_3)$ известным значением $f'''(a)$, получим приближенное равенство

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3. \tag{22}$$

Обычно оно дает еще лучший результат, чем первые два приближения (2) и (9). Степень точности равенства (22) можно оценить тем же методом, который мы применили для оценки приближенного равенства (9); получим новую точную формулу

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+$$
$$+\frac{1}{4!}f^{\mathrm{IV}}(x_4)(x-a)^4, \tag{23}$$

а из нее — соответствующую приближенную формулу и так далее. Формулы (1), (8), (21), (23) являются частными случаями *формулы Тейлора*, общий вид которой рассматривается в следующем параграфе. Многочлены (2), (9), (22) и т. д. называются поэтому *многочленами Тейлора* (первого, второго, третьего и т. д. порядка).

Пример 3. Составить многочлены Тейлора первых трех порядков для функции $f(x)=\ln x$ при начальном значении $a=1$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f(x)&=\ln x, & f(a)&=0;\\ f'(x)&=\frac{1}{x}, & f'(a)&=1;\\ f''(x)&=-\frac{1}{x^2}, & f''(a)&=-1;\\ f'''(x)&=\frac{2}{x^3}, & f'''(a)&=2. \end{aligned}$$

Последовательные многочлены Тейлора $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_1(x)&=x-1,\\ P_2(x)&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2,\\ P_3(x)&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

График функции

$$y = P_1(x)$$

есть касательная $C'B'$ в точке $x=1$ линии $y=\ln x$ (рис. 160).

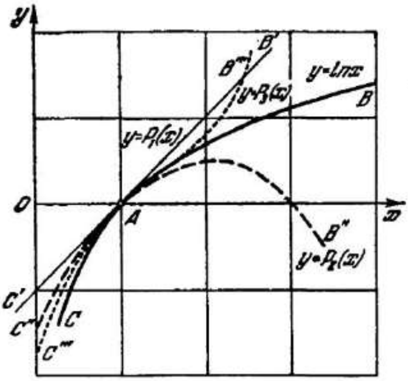


Рис. 160.

График функции

$$y = P_2(x)$$

есть парабола $C''AB''$, график функции

$$y = P_3(x)$$

— линия $C'''AB'''$.

Остатки

$$R_1(x) = \ln x - P_1(x),$$

$$R_2(x) = \ln x - P_2(x),$$

$$R_3(x) = \ln x - P_3(x)$$

представляют отклонения линии $y=\ln x$ (CAB на рис. 160) от линий $C'AB'$, $C''AB''$, $C'''AB'''$. Из чертежа видно, что вблизи от точки A эти отклонения тем меньше, чем выше порядок соответствующего многочлена Тейлора.

§ 118. Формула Тейлора (общий случай)

Теорема. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некотором промежутке (p, q), *содержащем точку* a (начальная точка). Тогда значение функции $f(x)$ в любой точке x промежутка (p, q) можно представить следующей формулой:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (1)$$

где ξ — *некоторая точка, лежащая между* a *и* x.

Доказательство. Составим выражение

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \right. \\ \left. \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] \qquad (2)$$

и докажем, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3}$$

Тем самым будет доказана формула (1).

Продифференцировав равенство (2) $n+1$ раз, получим

$$\left.\begin{aligned} R_n'(x) &= f'(x) - \Big[f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \\ &\qquad\qquad + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\Big], \\ R_n''(x) &= f''(x) - \Big[f''(a) + f'''(a)(x-a) + \ldots + \\ &\qquad\qquad + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}\Big], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a), \\ R_n^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из (2) и (4) находим, что

$$R_n(a) = 0, \quad R_n'(a) = 0, \quad R_n''(a) = 0, \quad \ldots, \quad R_n^{(n)}(a) = 0. \tag{5}$$

Введем еще обозначение

$$\varphi(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Очевидно, имеют место равенства

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0, \quad \varphi''(a) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(a) = 0$$

и *тождественное* равенство

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)! \tag{6}$$

Заметив это, рассмотрим отношение

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}$$

и применим к нему теорему Коши. Получим

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{R_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

где x_1 — некоторая точка, лежащая между a и x. К отношению

$\frac{R_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R_n'(x_1) - R_n'(a)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}$ снова применим теорему Коши; получим

$$\frac{R_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)},$$

где x_2 — некоторая точка, лежащая между a и x_1 и, следовательно, также между a и x.

Продолжая эти преобразования, получим цепь равенств

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \ldots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)},$$

где каждая из точек x_1, x_2, ..., $x_n(\xi)$ лежит между a и x. В силу последней из формул (4) имеем $R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$, а в силу (6) имеем $\varphi^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$ Следовательно,

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Отсюда тотчас же получается формула (3) и, следовательно, формула (1). Эту последнюю принято называть ***формулой Тейлора*** [1]), многочлен

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

— *многочленом Тейлора* (n-го порядка), а разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

— *остатком* или *остаточным членом*. В отличие от других

---

[1]) Брук Тейлор (1685—1731) — английский математик, последователь Ньютона. Ньютон систематически пользовался многочленами для приближенного представления функций, но общего закона составления коэффициентов он не указал. Тейлор обнаружил этот закон и выразил его формулой, которая в современных обозначениях имела бы вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \ldots,$$

где второе многоточие означает, что в достаточной близости от точки a многочлен $f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$ дает тем более точные значения функции $f(x)$, чем больше членов он содержит.

Тейлор вывел эту формулу очень сложным и крайне нестрогим (даже для своего времени) способом. Младший современник Тейлора английский математик Колин Маклорин (во французском чтении — Маклорен; 1698—1746) дал простой и более строгий вывод формулы Тейлора.

Но ни Ньютон, ни Тейлор, ни Маклорен не рассматривали вопроса об оценке остатка $R_n(x)$. Впервые такая оценка была дана Лагранжем (в 1799 г.).

видов, в которых можно представить остаток $R_n(x)$, выражение (3) называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Наиболее сжатый вид формула Тейлора принимает в том случае, когда начальная точка a является нулевой. Тогда формула (1) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (7)$$

Формулу (7) иногда называют (без достаточного основания) *формулой Маклорена* [1]).

Пример 1. Написать формулу Тейлора для функции $f(x)=\ln x$ при начальном значении $a=1$. Составить соответствующие многочлены Тейлора четвертого и пятого порядков.

Решение. Имеем

$$f(x)=\ln x, \qquad f(a)=f(1)=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad f'(a)=1, \qquad \frac{f'(a)}{1!}=1;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}, \qquad f''(a)=-1, \qquad \frac{f''(a)}{2!}=-\frac{1}{2};$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3}, \qquad f'''(a)=1\cdot 2, \qquad \frac{f'''(a)}{3!}=\frac{1}{3};$$

$$f^{\text{IV}}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}, \qquad f^{\text{IV}}(a)=-1\cdot 2\cdot 3, \qquad \frac{f^{\text{IV}}(a)}{4!}=-\frac{1}{4};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad f^{(n)}(a)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n};$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}},$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=(-1)^n\frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}}.$$

Искомая формула Тейлора имеет вид

$$\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+$$
$$+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\xi^{n+1}}, \quad (8)$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между 1 и x.

---

[1]) Маклорен вывел формулу Тейлора в виде (7) (без остаточного члена; см. предыдущее подстрочное примечание). Однако и сам Тейлор систематически пользовался формулой того же вида.

Соответствующий многочлен Тейлора n-го порядка имеет вид

$$P_n(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Многочлены Тейлора четвертого и пятого порядков суть

$$P_4(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4},$$

$$P_5(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}.$$

Замечание 1. Для функции $f(x)=\ln x$ можно составить формулу Тейлора при любом *положительном* начальном значении a; например, при $a=2$ формула (1) принимает вид

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{1\cdot 2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+(-1)^n\frac{1}{(n+1)\,\xi^{n+1}}(x-2)^{n+1}, \quad (9)$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между 2 и x.

Но нулем начальное значение быть не может, так как функция $\ln x$ не определена при $x=0$.

Пример 2. Написать формулу Тейлора для функции $f(x)=\ln(1+x)$ при начальном значении $a=0$. Составить соответствующие многочлены Тейлора четвертого и пятого порядков.

Решение. Имеем

$$f(x)=\ln(1+x), \qquad f(a)=f(0)=0;$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad f'(0)=1, \qquad \frac{f'(0)}{1!}=1;$$
$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0)=-1, \qquad \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n};$$
$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}},$$
$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$$

Формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$
$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}. \quad (10)$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между 0 и x. Соответствующий многочлен Тейлора имеет вид

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Многочлены Тейлора четвертого и пятого порядков суть

$$P_4(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4},$$

$$P_5(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}.$$

Замечание 2. Если в формулу (10) ввести новый аргумент x' с помощью подстановки $x=x'-1$, то получится формула

$$\ln x'=(x'-1)-\frac{(x'-1)^2}{2}+\frac{(x'-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x'-1)^n}{n}+$$
$$+(-1)^n\frac{(x'-1)^{n+1}}{(n+1)\,\xi'^{\,n+1}}, \qquad (10')$$

где ξ' — некоторая точка, лежащая между 1 и x'. Формула (10′) отличается от (8) только обозначениями. Точно так же формула Тейлора для функции $f(x)=\ln(2+x)$ при начальном значении $a=0$ будет отличаться только обозначениями от формулы (9). И вообще формула вида (7) по существу имеет столь же общий характер, что и формула (1). Переходу от одной из них к другой геометрически соответствует перенос начала координат.

§ 119. Вычисление логарифмов с помощью формулы Тейлора

Рассмотрим функцию $f(x)=\ln(1+x)$. Заменив эту функцию ее многочленом Тейлора при начальном значении $x=0$ (§ 118, пример 2), получим приближенное равенство

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad (1)$$

ошибка которого представляется выражением

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, \qquad (2)$$

где число ξ заключено между 0 и x.

Попробуем использовать приближенное равенство (1) для вычисления логарифмов чисел, *больших единицы* с точностью, скажем, до 10^{-5}.

Так как величина $1+x$ по условию больше единицы, то $x>0$; значит, число ξ тоже положительно. Поэтому при любом значении

n имеем $(1+\xi)^{n+1}>1$. Значит,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\right|<\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{3}$$

Пример 1. Найдем $\ln 1,1$, т. е. положим в формуле (1) $x=0,1$. Получим

$$\ln 1,1\approx 0,1-\frac{1}{2}\cdot 0,1^2+\frac{1}{3}\cdot 0,1^3-\frac{1}{4}\cdot 0,1^4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{0,1^n}{n}. \tag{4}$$

Ошибка $|R_n(0,1)|$ в силу (3) меньше чем $\frac{1}{n+1}\cdot 0,1^{n+1}$:

$$|R_n(0,1)|<\frac{1}{n+1}\cdot 0,1^{n+1}. \tag{5}$$

Число членов в формуле (4) надо взять с таким расчетом, чтобы обеспечить требуемую степень точности $\pm 10^{-5}$. С этой целью вычисляем последовательные значения $\frac{1}{n+1}\cdot 0,1^{n+1}$, пока не получим числа, меньшего 10^{-5}. Впервые это произойдет при $n=4$:

$$\frac{1}{n+1}\cdot 0,1^{n+1}=\frac{1}{5}\cdot 0,1^5=0,000002. \tag{6}$$

Так как это число значительно меньше чем 10^{-5}, то достаточно будет составить сумму (4) из 4 членов (надо иметь в виду, что к ошибке, порождаемой отбрасыванием остаточного члена $R_n(0,1)$, может присоединиться еще ошибка, порожденная округлением результата).

Вычисление ведем по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
0,1 &= +0,100000\\
-\frac{0,1^2}{2} &= -0,005000\\
+\frac{0,1^3}{3} &= +0,000333\\
-\frac{0,1^4}{4} &= -0,000025\\
\hline
& \ +0,095308
\end{aligned}$$

При суммировании допущена ошибка от округления третьего члена; но эта ошибка меньше чем $0,4\cdot 10^{-6}$. Теперь мы отбрасываем запасную цифру и округляем сумму до 0,09531. При этом снова возникает ошибка, но она составляет только $2\cdot 10^{-6}$ и, наконец, ошибка, порожденная отбрасыванием члена R_n, в силу неравенства (5) меньше чем $2\cdot 10^{-6}$. Следовательно, в наихудшем случае (если бы все три ошибки имели один и тот же знак) суммарная ошибка была бы меньше $4,4\cdot 10^{-6}$.

Значит, положив

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}09531, \tag{7}$$

мы находим искомое значение не только с точностью до 10^{-5}, но даже с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-5}$.

Пример 2. Теперь найдем $\ln 1{,}2$, т. е. положим в формуле (1) $x=0{,}2$. Получим

$$\ln 1{,}2 \approx 0{,}2-\frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2^3-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot 0{,}2^n, \tag{8}$$

причем в силу (3)

$$|R_n(0{,}2)|<\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}2^{n+1}. \tag{9}$$

Вычисляем последовательные значения $\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}2^{n+1}$. Теперь число, меньшее чем 10^{-5}, впервые получается при $n=6$:

$$\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}2^{n+1}=\frac{1}{7}\cdot 0{,}2^7\approx 0{,}0000018.$$

Составляем сумму (8) из семи членов и находим

$$\begin{array}{r}
+0{,}2=+0{,}200000\\
-\frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2=-0{,}020000\\
+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2^3=+0{,}002667\\
-\frac{1}{4}\cdot 0{,}2^4=-0{,}000400\\
+\frac{1}{5}\cdot 0{,}2^5=+0{,}000064\\
-\frac{1}{6}\cdot 0{,}2^6=-0{,}000011\\
\hline
0{,}182320
\end{array}$$

После округления получаем

$$\ln 1{,}2 \approx 0{,}18232.$$

Этот результат обладает требуемой степенью точности. Действительно, при суммировании возникает ошибка от округления 3-го и 6-го члена суммы. Она меньше чем $2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}=10^{-6}$. При округлении суммы сделана ошибка, меньшая чем $5\cdot 10^{-6}$. Наконец, ошибка, причиненная отбрасыванием остаточного члена, меньше чем $2\cdot 10^{-6}$. Следовательно, суммарная ошибка меньше чем $10^{-6}+5\cdot 10^{-6}+2\cdot 10^{-6}=8\cdot 10^{-6}<10^{-5}$.

Пример 3. При попытке вычислить $\ln 2$ по формуле (1) мы сталкиваемся со следующей трудностью. Формула (1) принимает вид

$$\ln 2 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \tag{10}$$

причем

$$|R_n(1)|<\frac{1}{n+1}.$$

Величина $\frac{1}{n+1}$ впервые становится меньшей 10^{-5} при $n=100\,000$. Поэтому для достижения требуемой степени точности потребовалось бы составить сумму (10) примерно из 200 000 слагаемых (тогда погрешность суммы составит $5\cdot 10^{-6}$), а каждое слагаемое вычислять с точностью до 10^{-11} (тогда суммарная ошибка округлений не превзойдет $2\cdot 10^{-6}$, и в итоге будет достигнута требуемая точность).

Таким образом, *теоретически* формула (1) *способна* дать $\ln 2$ с требуемой степенью точности, но практически она для этой цели непригодна.

Пример 4. Попытка вычислить $\ln 10$ по формуле (1) тотчас же обнаружит, что это намерение невыполнимо не только практически, но и теоретически. В самом деле, мы получаем «приближенную формулу»

$$\ln 10 \approx 9-\frac{1}{2}\cdot 9^2+\frac{1}{3}\cdot 9^3-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{9^n}{n},$$

ошибка которой, очевидно, не уменьшается по мере роста n, а, напротив, увеличивается.

Из сказанного ясно, сколь велика роль остаточного члена формулы Тейлора: *отбрасывать его можно не всегда, а лишь в тех случаях, когда доказано, что он не оказывает существенного влияния на результат.*

Замечание 1. В предыдущих примерах назначенная степень точности составляла 10^{-5}. Но к аналогичным результатам мы придем при любом повышении требуемой степени точности. Вычислим, например, $\ln 1{,}1$ с точностью до 10^{-8}.

Будем вычислять (ср. пример 1) значения $\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}1^n$, пока не удовлетворится неравенство $\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}1^{n+1}<10^{-8}$. Впервые это произойдет при $n=7$. Полагаем

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2+\frac{1}{3}\,0{,}1^3-\frac{1}{4}\cdot 0{,}1^4+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1^5-\frac{1}{6}\cdot 0{,}1^6+\frac{1}{7}\cdot 0{,}1^7.$$

Вычисление ведем по схеме

$$\begin{aligned}
+0,1 &= 0,100000000\\
-\frac{1}{2}\cdot 0,1^2 &= -0,005000000\\
+\frac{1}{3}\cdot 0,1^3 &= +0,000333333\\
-\frac{1}{4}\cdot 0,1^4 &= -0,000025000\\
+\frac{1}{5}\cdot 0,1^5 &= +0,000002000\\
-\frac{1}{6}\cdot 0,1^6 &= -0,000000167\\
+\frac{1}{7}\cdot 0,1^7 &= \underline{+0,000000014}\\
& 0,095310180
\end{aligned}$$

В итоге получаем $\ln 1,1 \approx 0,09531018$.

Ошибка, происходящая от округления слагаемых, меньше чем $3\cdot 0,5\cdot 10^{-9} = 1,5\cdot 10^{-9}$; ошибка, происходящая от пренебрежения остаточным членом, меньше чем $0,2\cdot 10^{-9}$. Суммарная ошибка меньше чем $1,5\cdot 10^{-9} + 0,2\cdot 10^{-9} = 1,7\cdot 10^{-9}$.

Стало быть, фактически степень точности результата еще выше, чем требуемая.

Замечание 2. Составим последовательность

$$u_1 = 0,1;\quad u_2 = 0,1 - \frac{1}{2}\cdot 0,1^2;\quad u_3 = 0,1 - \frac{1}{2}\cdot 0,1^2 + \frac{1}{3}\cdot 0,1^3;\ \ldots;$$
$$u_n = 0,1 - \frac{1}{2}\cdot 0,1^2 + \frac{1}{3}\cdot 0,1^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot \frac{0,1^n}{n};\ \ldots$$

Разность

$$\ln 1,1 - u_n$$

[т. е. остаточный член $R_n(0,1)$] при достаточно большом n удовлетворит неравенству

$$|\ln 1,1 - u_n| = |R_n(0,1)| < \varepsilon,$$

где ε — любое наперед заданное положительное число (см. выше замечание 1). Стало быть, $\ln 1,1$ есть предел последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

$$\ln 1,1 = \lim_{n\to\infty}\left[0,1 - \frac{1}{2}\cdot 0,1^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot \frac{0,1^n}{n}\right]. \qquad (11)$$

Равенство (11) принято записывать в следующем виде:

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{0{,}1^n}{n} + \ldots \qquad (12)$$

Второе многоточие заменяет здесь знак предела[1]).

Аналогично имеют место равенства

$$\ln 1{,}2 = \lim_{n\to\infty}\left[0{,}2 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{0{,}2^n}{n}\right],$$

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right]$$

(ср. примеры 2 и 3); их записывают в виде

$$\ln 1{,}2 = 0{,}2 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot 0{,}2^n + \ldots, \qquad (13)$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots \qquad (14)$$

Равенства (12), (13), (14) можно объединить в следующей формуле:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (15)$$

Однако пример 4 показывает, что формула (15) справедлива *не при всяком значении* x.

Сообщим без доказательства, что формула (15) верна при любом значении x, заключенном между -1 и $+1$, а также при $x=1$. Для всех остальных значений x формула (15) неверна.

На языке приближенных вычислений это означает, что приближенное равенство

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (16)$$

пригодно (теоретически) для вычисления логарифмов чисел, находящихся в промежутке (0; 2) (включая число 2) и непригодно для логарифмов чисел, больших 2. Практически же (ср. пример 3) приближенное равенство (16) пригодно в еще более узких пределах.

§ 120. Вычисление значений показательной функции

Применим формулу Тейлора для вычисления значений показательной функции e^x. Все производные этой функции равны e^x. Поэтому

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

---

[1]) Ср. подстрочное примечание в § 118 (стр. 328).

Формула Тейлора при начальном значении $a=0$ принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{1}$$

где

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2}$$

(число ξ заключено между 0 и x). Значения e^x будем искать с точностью до 10^{-5}.

Пример 1. Вычислить $e^{\frac{1}{2}}$ (т. е. извлечь квадратный корень из e).

Решение. При $x=\frac{1}{2}$ остаточный член $R_n(x)$ составляет

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!\,2^{n+1}} \qquad \left(0 < \xi < \frac{1}{2}\right).$$

Так как $\xi < \frac{1}{2}$, то $e^{\xi} < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Округляем квадратный корень (в сторону больших значений). Получаем неравенство $e^{\xi} < 2$. Следовательно,

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{2}{(n+1)!\,2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!\,2^n}. \tag{3}$$

Подставляя в формулу (1) значение $x=\frac{1}{2}$ и отбрасывая остаточный член, получаем приближенное равенство

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \ldots + \frac{1}{n!\,2^n}, \tag{4}$$

ошибка которого равна $R_n\left(\frac{1}{2}\right)$. В силу (3) эта ошибка будет меньше чем 10^{-5}, если число n удовлетворит неравенству

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n} < 10^{-5}.$$

Последовательные значения $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ удобно вычислять следующим образом:

$$\frac{1}{2!\,2} = 0{,}250000, \qquad \frac{1}{5!\,2^4} = \frac{1}{4!\,2^3} : 10 = 0{,}000521,$$

$$\frac{1}{3!\,2^2} = \frac{1}{2!\,2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2!\,2} : 6 = 0{,}041667, \qquad \frac{1}{6!\,2^5} = \frac{1}{5!\,2^4} : 12 = 0{,}000044,$$

$$\frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{3!\,2^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{3!\,2^2} : 8 = 0{,}005209, \qquad \frac{1}{7!\,2^6} = \frac{1}{6!\,2^5} : 14 = 0{,}000004$$

(все частные берем с избытком).

Итак, если в сумме (4) положить $n=6$ (т. е. составить сумму из 7 слагаемых), то ошибка, происходящая от отбрасывания остатка $R_7\left(\frac{1}{2}\right)$, будет заведомо меньше $4\cdot 10^{-6}$. Ошибка от округления суммы может достигнуть $5\cdot 10^{-6}$; значит, чтобы обеспечить точность до 10^{-5}, надо, чтобы ошибка от округления слагаемых не могла превзойти $1\cdot 10^{-6}$. А для этого в каждом слагаемом надо взять по две запасные цифры. Вычисление ведем по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
&1 && = 1{,}0000000\\
&\frac{1}{1!\,2} && = 0{,}5000000\\
&\frac{1}{2!\,2^2}=\frac{1}{1!\,2}:4 && = 0{,}1250000\\
&\frac{1}{3!\,2^3}=\frac{1}{2!\,2^2}:6 && = 0{,}0208333\\
&\frac{1}{4!\,2^4}=\frac{1}{3!\,2^3}:8 && = 0{,}0026042\\
&\frac{1}{5!\,2^5}=\frac{1}{4!\,2^4}:10 && = 0{,}0002604\\
&\frac{1}{6!\,2^6}=\frac{1}{5!\,2^5}:12 && = 0{,}0000217\\
&\frac{1}{7!\,2^7}=\frac{1}{6!\,2^6}:14 && = 0{,}0000015\\
& && \overline{\ 1{,}6487211}
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\sqrt{e}\approx 1{,}64872.$$

Ошибка от округления слагаемых меньше чем

$$5\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}=2{,}5\cdot 10^{-7}<0{,}3\cdot 10^{-6}.$$

Ошибка от округления суммы меньше $12\cdot 10^{-7}=1{,}2\cdot 10^{-6}$. Ошибка, порождаемая отбрасыванием остаточного члена, меньше $4\cdot 10^{-6}$. Суммарная ошибка меньше чем

$$0{,}3\cdot 10^{-6}+1{,}2\cdot 10^{-6}+4\cdot 10^{-6}=5{,}5\cdot 10^{-6}<10^{-5}.$$

Пример 2. Вычислить $e^{-0{,}25}$.

Решение. При $x=-0{,}25$ число ξ в остаточном члене (2) заключено между $-0{,}25$ и 0, т. е. $\xi<0$; значит, $e^{\xi}<e^0=1$.

Следовательно,

$$|R_n(-0{,}25)| < \frac{0{,}25^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!\,4^{n+1}}.$$

Неравенство

$$\frac{1}{(n+1)!\,4^{n+1}} < 10^{-5}$$

впервые удовлетворяется при $n=4$, ибо

$$\frac{1}{5!\,4^5} \approx 0{,}8 \cdot 10^{-5}.$$

Но так как при округлении суммы может возникнуть ошибка, достигающая $0{,}5 \cdot 10^{-5}$, то лучше положить $n=5$. Тогда остаточный член удовлетворяет неравенству

$$|R_5(-0{,}25)| < \frac{1}{6!\,4^6} \approx 0{,}00000033,$$

т. е. $|R_5(-0{,}25)| < 0{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Взяв в формуле (1) шесть членов, получаем

$$e^{-0{,}25} = 1 - \frac{1}{1!\,4} + \frac{1}{2!\,4^2} - \frac{1}{3!\,4^3} + \frac{1}{4!\,4^4} - \frac{1}{5!\,4^5}.$$

Вычисление дает

$$\begin{array}{lr}
1 & = 1{,}000000 \\
-\dfrac{1}{1!\,4} & = -0{,}250000 \\
+\dfrac{1}{2!\,4^2} = \dfrac{1}{1!\,4} : 8 & = +0{,}031250 \\
-\dfrac{1}{3!\,4^3} = -\dfrac{1}{2!\,4^2} : 12 & = -0{,}002604 \\
+\dfrac{1}{4!\,4^4} = \dfrac{1}{3!\,4^3} : 16 & = +0{,}000163 \\
-\dfrac{1}{5!\,4^5} = -\dfrac{1}{4!\,4^4} : 20 & = -0{,}000008 \\
\hline
 & 0{,}778801
\end{array}$$

Округляя, находим $e^{-0{,}25} \approx 0{,}77880$.

Ошибка округления слагаемых меньше чем $3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$. Ошибка округления суммы составляет 10^{-6}; суммарная ошибка меньше чем $1{,}5 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} + 0{,}4 \cdot 10^{-6} = 2{,}9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$.

Пример 3. При $x=1$ функция e^x принимает значение e. Формула (1) дает

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

где

$$R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad (0 < \xi < 1).$$

Имеем

$$e^{\xi} < e^{1} < 3,$$

поэтому

$$R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Величина $\frac{3}{(n+1)!}$ впервые становится меньше 10^{-5} при $n=8$; но тогда $\frac{3}{(n+1)!}=\frac{3}{9!}\approx 0{,}0000083$, а это число слишком близко к 10^{-5}. Поэтому для надежности надо положить $n=9$; тогда $\frac{3}{(n+1)!}=\frac{3}{10!}\approx$ $\approx 0{,}0000008 < 10^{-6}$. Вычисляем сумму

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}; \tag{5}$$

в каждом слагаемом достаточно взять по одной запасной цифре. Ошибка от округления слагаемых будет меньше чем $7\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-6} =$ $= 3{,}5\cdot 10^{-6}$. Суммируя (5), получаем 2,718282. Округляя, находим

$$e \approx 2{,}71828.$$

Суммарная ошибка меньше чем $3{,}5\cdot 10^{-6}+2\cdot 10^{-6}+10^{-6}=$ $=6{,}5\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$.

Замечание 1. В § 48 было установлено, что число e заключено между $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ и $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!\,n}$. Значит, ошибка приближенного равенства $e^x\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ меньше чем $\frac{1}{n!\,n}$. Эта оценка примерно втрое точнее, чем та, которой мы руководствовались. Если бы мы исходили из этой более точной оценки, то не отвергли бы значения $n=8$, и в сумме (5) оказалось бы одним членом меньше.

Замечание 2. В предыдущих примерах требуемая степень точности составляла 10^{-5}. Но аналогично можно вычислить $e^{0,5}$, $e^{-0,25}$, e с любой более высокой степенью точности. Иначе говоря, имеют место соотношения

$$e^{0,5}=1+\frac{0{,}5}{1!}+\frac{0{,}5^2}{2!}+\ldots+\frac{0{,}5^n}{n!}+\ldots$$
$$e^{-0,25}=1-\frac{0{,}25}{1!}+\frac{0{,}25^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{0{,}25^n}{n!}+\ldots$$
$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

(ср. § 119, замечание 2).

Сообщим без доказательства, что формула

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{6}$$

в противоположность формуле (15) § 119, справедлива при всяком значении x. На языке приближенных вычислений это означает, что приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \tag{7}$$

теоретически пригодно для вычисления e^x с любой требуемой точностью при любом значении x.

Однако *практически* при больших значениях x соотношение (7) приносит мало пользы, так как для достижения требуемой степени точности приходится суммировать слишком много членов (ср. § 119, пример 3).

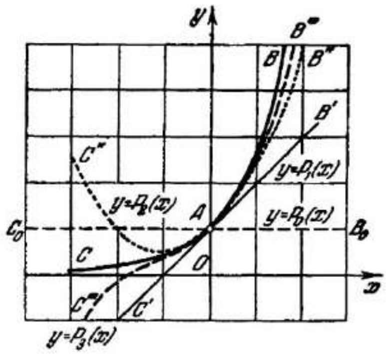


Рис. 161.

Замечание 3. Первые четыре многочлена Тейлора функции e^x при начальном значении $a=0$ имеют вид

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

На рис. 161 изображены графики этих многочленов вместе с графиком самой функции e^x (линия CAB).

§ 121. Вычисление значений $\sin x$, $\cos x$

Предварительно представим производные от функций $\sin x$, $\cos x$ в единообразном виде.

Для функции $y = \sin x$ имеем

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\mathrm{IV}} = \sin x.$$

Эти четыре производные можно единообразно представить формулой

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Она означает, что каждое новое дифференцирование равнозначно увеличению аргумента на $\frac{\pi}{2}$. При этом четвертая производная оказывается тождественной с исходной функцией. Значит, при всех последующих дифференцированиях упомянутая закономерность сохраняется. Стало быть, формула

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

справедлива при любом натуральном значении n. Аналогично получается общая формула

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Заметив это, составим формулу Тейлора для функции $f(x)=\sin x$ при начальном значении $a=0$. Имеем

$$f(0)=\sin 0=0,\quad f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad f''(0)=\sin 2\frac{\pi}{2}=0,$$

$$f'''(0)=\sin 3\frac{\pi}{2}=-1,\quad f^{IV}(0)=\sin 4\frac{\pi}{2}=0,$$

$$f^{V}(0)=\sin 5\frac{\pi}{2}=1 \text{ и т. д.}$$

Общие формулы имеют вид

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin(2m-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{m-1},\qquad f^{(2m)}(0)=\sin 2m\frac{\pi}{2}=0.$$

Многочлен Тейлора порядка $2m$ имеет вид

$$P_{2m}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \tag{3}$$

Он содержит только нечетные степени аргумента x, так как все коэффициенты при четных степенях обращаются в нуль. Поэтому выражение (3) является одновременно многочленом Тейлора порядка $2m-1$. Однако, приписывая ему порядок $2m$, мы получаем более выгодную оценку остатка. Формула Тейлора принимает вид

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m+1}(x), \tag{4}$$

где

$$R_{2m+1}(x)=\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left[\xi+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

(ξ — некоторое число, заключенное между 0 и x). А так как синус любого угла не превосходит единицы по абсолютной величине, то

$$|R_{2m+1}|\leqslant\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{5}$$

Совершенно аналогично получим формулу Тейлора для функции $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2}(x), \tag{6}$$

где

$$R_{2m+2}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos\left[\xi + (2m+2)\frac{\pi}{2}\right].$$

Остаточный член удовлетворяет неравенству

$$|R_{2m+2}(x)| \leqslant \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}. \tag{7}$$

Пример 1. Вычислить $\sin 20°$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Прежде всего переведем градусную меру в радианную[1])

$$20° = \frac{\pi}{180}\cdot 20 = \frac{\pi}{9} = 0{,}349066.$$

Так как выражение, стоящее в правой части неравенства (5), имеет тот же вид, что основные члены формулы (4), то оценку остатка можно совершать попутно с вычислением основных членов. Имеем

$$\begin{aligned} +\frac{\pi}{9} \qquad\quad &= +\,0{,}349066\\ -\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 &= -\,0{,}007089\\ +\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 &= \underline{+\,0{,}000043}\\ &\quad\; +0{,}342010 \end{aligned}$$

Мы ограничились этими тремя членами, так как соответствующий остаток $R_7\left(\frac{\pi}{9}\right)$ по абсолютной величине не превосходит $\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^7 = \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2$, а это число меньше последнего учтенного члена примерно в 400 раз.

В итоге получаем

$$\sin 20° = 0{,}34201$$

с точностью до $3{,}5\cdot 10^{-6}$ (так как ошибка от округления слагаемых меньше $3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6} = 1{,}5\cdot 10^{-6}$, округление суммы ошибки не создает, а ошибка, вызванная отбрасыванием остатка, меньше чем $2\cdot 10^{-6}$).

[1]) Напомним, что все формулы математического анализа, содержащие тригонометрические функции, например формулы $\sin x \approx x$, $(\sin x)' = \cos x$ и т. д., выведены в предположении, что за единицу измерения углов принимается радиан. При градусном измерении углов эти формулы имели бы более громоздкий вид.

Пример 2. Вычислить $\sin 85^\circ$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Если снова воспользоваться формулой (4), то тремя членами мы уже не обойдемся, так как аргумент увеличился более чем в 4 раза. Поэтому применим формулу приведения

$$\sin 85^\circ = \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ$$

и воспользуемся формулой (6). Имеем

$$\begin{array}{lr}
5^\circ = \dfrac{\pi}{36} & = \quad 0{,}087266 \\
+1 & = +\,1{,}000000 \\
-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{36}\right)^2 & = -\,0{,}003808 \\
\hline
 & 0{,}996192
\end{array}$$

Мы вправе ограничиться этими двумя членами, так как соответствующий остаток $R_4\left(\frac{\pi}{36}\right)$ не превосходит $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$. В итоге получаем

$$\sin 85^\circ = 0{,}99619$$

с точностью до $5{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Замечание 1. Так же как формула (6) § 120, формулы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots, \qquad (8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots \qquad (9)$$

справедливы при любом значении x, т. е. соответствующие приближенные равенства теоретически всегда пригодны для вычисления $\sin x$, $\cos x$ с любой требуемой степенью точности. Разумеется, на практике, применяя формулы приведения, мы всегда сведем дело к вычислению $\sin x$, $\cos x$ при x, заключенном в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. А тогда в наихудшем случае $\left(x = \frac{\pi}{4}\right)$ четыре члена формулы (4) или (6) обеспечат точность до 10^{-6}, пять членов — точность до 10^{-6}, шесть — точность до 10^{-7} и т. д. Это легко установить с помощью грубого подсчета по формулам (5) и (7).

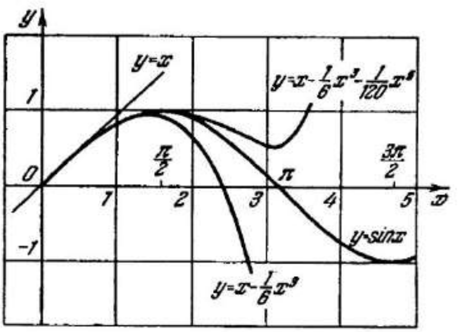


Рис. 162.

На рис. 162 изображен график функции $y=\sin x$ вместе с графиками ее многочленов Тейлора

$$y=P_1(x)=x,\quad y=P_3(x)=x-\frac{1}{6}x^3,\quad y=P_5(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5.$$

Чтобы укрупнить рисунок, графики начерчены только справа от начала координат (все они симметричны относительно точки O).

На рис. 163 изображен график функции $y=\cos x$ вместе с графиками ее многочленов Тейлора

$$y=P_0(x)=1,$$

$$y=P_2(x)=1-\frac{1}{2}x^2,$$

$$y=P_4(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$

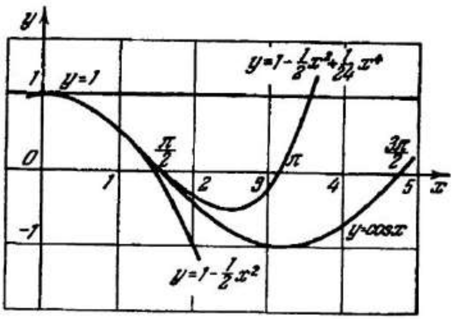


Рис. 163.

Графики начерчены только справа от начала координат (все они симметричны относительно оси Oy).

§ 121а. Задачи к §§ 117—121

1. Составить многочлен Тейлора шестого порядка для функции $\ln(1+x)$ при начальном значении $x=0\ (=a)$; с помощью этого многочлена вычислить $\ln 1{,}3$ как можно точнее и указать степень точности результата.

2. Каков должен быть порядок многочлена Тейлора функции $\ln(1+x)$ (при $a=0$), чтобы этот многочлен дал $\ln 1{,}3$ с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$?

В задачах 3—5 найти (без таблиц) с точностью до 10^{-4} следующие величины:

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$. 4. $\cos 75°$. 5. $\sin 35°$.

6. Составить формулу Тейлора третьего порядка для функции $\sqrt{1+x}$ при начальном значении $x=0\ (=a)$. Найти по этой формуле $\sqrt{1{,}2}$ с возможно большей точностью и указать степень точности результата.

7. По формуле Тейлора для функции $\ln(1+x)$ (при $a=0$) вычислить $\ln\frac{2}{3}$ с точностью до 10^{-4}.

8. Составить формулу Тейлора для функции $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ при $a=0$. Вычислить по ней $\frac{1}{2}\left(\sqrt{e}+\sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ с точностью до 10^{-5}.

9. Написать формулу Тейлора для функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$ (при $a=0$); положив в ней $x=\frac{1}{3}$, вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

Указание. Данную функцию удобно представить в виде $\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

10. Для функции $f(x)=x^5$ составить формулу Тейлора третьего и пятого порядков при $a=1$. Сколько членов будет содержать формула Тейлора 12-го порядка?

§ 122. Численное решение уравнений (постановка вопроса)

Из элементарной алгебры известны формулы для решения уравнений первой и второй степени. Для уравнений третьей и четвертой степени тоже существуют общие формулы, позволяющие выразить корни уравнения через его коэффициенты с помощью алгебраических действий (т. е. сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня). Но формулы эти сложны. Что касается общего уравнения пятой степени, то поиски алгебраического его решения, предпринимавшиеся крупнейшими учеными 17-го и 18-го вв. оставались безуспешными и, наконец, на рубеже 18-го и 19-го вв. было доказано[1]), что алгебраическое решение уравнения пятой степени *невозможно*.

При этих обстоятельствах особо важны методы, позволяющие не только для алгебраических, но и для так называемых *трансцендентных* (т. е. неалгебраических) уравнений определять значения их корней с любой степенью точности.

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ непрерывна в некотором конечном или бесконечном промежутке; предполагается, что это уравнение в любом *конечном* промежутке может иметь лишь ограниченное число корней (на практике обычно так и бывает).

Численное решение[2]) уравнения (1) обычно складывается из двух последовательных процессов:

---

[1]) Итальянским ученым Паоло Руффини (1765—1822). Он дал несколько доказательств этой теоремы; последнее было опубликовано в 1813 г. В рассуждениях Руффини были некоторые недочеты. Безукоризненное доказательство впервые дал гениальный норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802—1829) в 1824 г. (ему тогда было 22 года).

[2]) Термин «численное решение» предпочтителен термину «приближенное решение» по той причине, что решение, дающее *любую* степень точности, принципиально не отличается от *точного* решения. Так, мы говорим, что уравнение $x^3=2$ имеет точное решение $x=\sqrt[3]{2}$, а это утверждение по смыслу равнозначно утверждению, что число, обозначаемое $\sqrt[3]{2}$, можно вычислить с любой степенью точности.

1) Сначала из данного промежутка выделяется ряд участков, каждый из которых содержит по одному корню. Этот процесс называется *отделением корней*, а каждый из найденных участков называется *промежутком изоляции*. Концы промежутка изоляции являются приближенными значениями соответствующего корня (недостаточным и избыточным).

2) Длина промежутка изоляции является мерой точности найденных приближенных значений. Если эта точность достаточна, то задача решена. Но обычно точность оказывается недостаточной, и второй этап решения состоит в постепенном уточнении корня.

§ 123. Отделение корней

Общего метода отделения корней не существует. Но на практике отделение корней часто выполняется без особых трудностей с помощью графического изображения и с учетом частных свойств функции $f(x)$.

Графическое изображение осуществляется одним из следующих двух способов.

Первый способ. Строим график функции $y=f(x)$, по возможности используя приемы, облегчающие это построение (§ 112). Желательно возможно точнее строить те точки графика, которые лежат вблизи оси Ox.

Корни x_1, x_2, ... уравнения $y=f(x)$ изобразятся точками пересечения графика с осью Ox. Для каждого из этих корней x_n на глаз находим промежуток изоляции (a_n, b_n). Затем выполняем проверку. Если окажется, что числа $f(a_n)$, $f(b_n)$ имеют противоположные знаки, то в промежутке (a_n, b_n) обязательно имеется по меньшей мере один корень. Остается тем или иным способом убедиться в том, что этот корень единственный. Если, например, окажется, что производная $f'(x)$ сохраняет в промежутке (a_n, b_n) неизменный знак, то функция $f(x)$ монотонна в этом промежутке, и тогда единственность корня обеспечена.

Пример 1. Отделить корни уравнения

$$x^3-9x^2+24x-18=0.$$

Решение. Устанавливаем, что функция $f(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty; 2)$, убывает в промежутке $(2; 4)$ и снова возрастает в промежутке $(4; +\infty)$; строим (рис. 164) грубый эскиз графика $y=f(x)$ по опорным точкам $A(1; -2)$, $B(2; 2)$, $C(4; -2)$. Внутри промежутка $(1; 2)$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, лежит наименьший корень $x=\alpha_1$; он является единственным, так как функция $f(x)$ в этом промежутке монотонна $[f'(x)>0]$. Таким образом, для корня α_1 получаем промежуток изоляции $(1; 2)$.

При более точном построении графика можно усмотреть, что корень α_1 лежит внутри промежутка (1,2; 1,4). Проверка покажет, что $f(1,2)<0$, $f(1,4)>0$. Значит, промежуток (1,2; 1,4) действительно является промежутком изоляции.

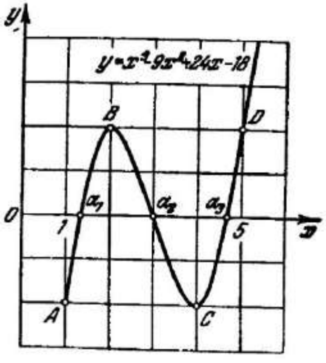


Рис. 164.

Таким же образом для наибольшего корня α_3 получим промежуток изоляции (4; 5) или, более точно, промежуток (4,6; 4,8).

Промежуток (2; 4), где функция $f(x)$ убывает, очевидно, является промежутком изоляции корня α_2.

По чертежу легко прочесть и более узкие промежутки изоляции этого корня; впрочем, легко заметить и проверить, что $\alpha_2=3$ есть точное его значение.

Второй способ. Данное уравнение $f(x)=0$ можно представить в виде $f_1(x)=f_2(x)$, причем одну из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ можно выбрать по произволу. Произвол используется так, чтобы графики функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ строились по возможности легче.

Построив оба графика, находим точки их пересечения. Координаты каждой из них удовлетворяют системе уравнений $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, а следовательно, также уравнению $f_1(x)=$ $=f_2(x)$. Стало быть, абсцисса каждой точки пересечения является корнем данного уравнения. Границы промежутка изоляции определяются так же, как в первом способе.

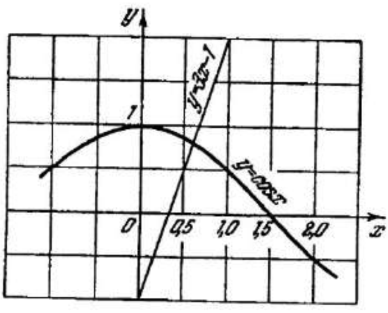


Рис. 165.

Пример 2. Отделить корни уравнения $3x-\cos x-1=0$.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$3x-1=\cos x.$$

Графики функций $y=3x-1$, $y=\cos x$ хорошо известны; сразу видно (рис. 165), что они имеют только одну общую точку, абсцисса которой находится где-то в промежутке (0; 1). Соответствующую дугу линии $y=\cos x$ надо построить тщательно (этой дугой можно и ограничиться). Прочитываем промежуток изоляции

(0,5; 0,7). Находим знаки чисел

$$f(0,5)=3\cdot 05-\cos 0,5-1\approx 3\cdot 0,5-\left(1-\frac{0,5^2}{2}\right)-1<0,$$

$$f(0,7)=3\cdot 0,7-\cos 0,7-1\approx 3\cdot 0,7-\left(1-\frac{0,7^2}{2}\right)-1>0.$$

Так как $f(0,5)$ и $f(0,7)$ имеют противоположные знаки, то промежуток (0,5; 0,7) действительно является промежутком изоляции.

§ 124. Уточнение корня. Способ проб

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке (a, b) и имеет противоположные знаки на концах этого промежутка. Пусть тем или иным способом установлено, что (a, b) есть промежуток изоляции для одного из корней уравнения (1). Требуется найти значение этого корня с данной степенью точности.

По способу проб эта задача решается следующим образом. Внутри промежутка (a, b) берем произвольную точку, скажем середину $x_1=\frac{a+b}{2}$ этого промежутка. Подвергаем точку x_1 испытанию, вычисляя значение $f(x_1)$. Если оказывается, что $f(x_1)=0$, то задача решена (x_1 есть точный корень). Если же $f(x_1)\neq 0$, то из двух промежутков (a, x_1), (x_1, b) берем тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.

Теперь мы имеем более узкий промежуток изоляции (a_1, b_1). Его мы снова разбиваем на два промежутка некоторой точкой x_2. После нового испытания либо находим точный корень, либо получаем еще более узкий промежуток изоляции и т. д.

Таким образом, мы получаем все более точные приближенные значения корня. Если делящая точка всякий раз берется в середине промежутка, то степень точности после каждой новой пробы увеличивается в два раза, так что способ проб позволяет найти корень уравнения с любой требуемой степенью точности.

Этот метод с успехом реализуется на электронных счетных машинах. При обычных способах работы способ проб оказывается не слишком трудоемким лишь тогда, когда требуемая степень точности невелика.

Пример. Дано уравнение

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0. \tag{2}$$

На концах промежутка (3; 4) функция $f(x)$ имеет противоположные знаки:

$$f(3)=-10<0, \qquad f(4)=9>0. \tag{3}$$

Следовательно, внутри промежутка (3; 4) лежит по меньшей мере один корень уравнения (2). Этот корень единственный, так как производная $f'(x)$ сохраняет в промежутке (3; 4) знак плюс:

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2)=+\cdot+=+.$$

Требуется уточнить корень, вычислив его с точностью до 0,01.

Решение. Берем середину данного промежутка изоляции

$$x_1=\frac{3+4}{2}=3{,}5.$$

Подвергаем число x_1 испытанию; находим, что $f(3{,}5)\approx-2{,}6<0$. Сопоставив это неравенство с неравенствами (3), видим, что из двух промежутков (3; 3,5) (3,5; 4) надо взять второй, так как на его концах функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Получаем суженный промежуток изоляции (3,5; 4). Берем его середину

$$x_2=\frac{3{,}5+4}{2}=3{,}75$$

и т. д. Вся выкладка (ниже пояснены отдельные ее моменты) имеет следующий вид:

$$a=3, \qquad b=4$$

1) $x_1=3{,}5,\quad f(x_1)=3{,}5^3-2\cdot3{,}5^2-4\cdot3{,}5-7\approx-2{,}6<0;$
2) $x_2=3{,}75,\quad f(x_2)=3{,}75^3-2\cdot3{,}75^2-4\cdot3{,}75-7\approx2{,}6>0;$
3) $x_3=3{,}62,\quad f(x_3)=3{,}62^3-2\cdot3{,}62^2-4\cdot3{,}62-7\approx-0{,}25<0;$
4) $x_4=3{,}68,\quad f(x_4)=3{,}68^3-2\cdot3{,}68^2-4\cdot3{,}68-7\approx1{,}0>0;$
5) $x_5=3{,}65,\quad f(x_5)=3{,}65^3-2\cdot3{,}65^2-4\cdot3{,}65-7\approx0{,}60>0;$
6) $x_6=3{,}64,\quad f(x_6)=3{,}64^3-2\cdot3{,}64^2-4\cdot3{,}64-7\approx0{,}17>0.$

На третьем этапе мы округлили среднее арифметическое $\frac{3{,}5+3{,}75}{2}=3{,}625$ до 3,62 для упрощения вычислений; с таким же успехом можно округлить до 3,63. На четвертом этапе мы округлили среднее арифметическое $\frac{3{,}62+3{,}75}{2}=3{,}685$ до 3,68.

В результате вышеприведенной выкладки оказывается, что искомый корень лежит между $x_3=3{,}62$ и $x_6=3{,}64$. Положив

$$x_7=\frac{3{,}62+3{,}64}{2}=3{,}63,$$

мы находим искомый корень с требуемой степенью точности. Действительно, в каком бы из двух промежутков (3,62; 3,63) (3,63; 3,64) ни лежал этот корень, число 3,63 разнится от корня меньше чем на 0,01.

§ 124а. Задачи к § 122—124

1. Отделить корни уравнения

$$x^3-6x+3=0$$

и вычислить их с точностью до 0,01. Применить оба способа графического изображения.

Указание. Масштаб на оси Oy удобно взять в несколько раз меньшим, чем на оси Ox.

2. Найти корни уравнения

$$x^4+10x-100=0$$

с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$.

Указание. Более удобен второй способ графического изображения Масштаб на оси Oy взять в 10—20 раз меньшим, чем на оси Ox.

§ 125. Уточнение корня. Правило пропорциональных частей (способ хорд)

Предварительное замечание. Здесь, а также в §§ 126 и 127 мы, как и ранее, предполагаем, что функция $f(x)$ имеет противоположные знаки в точках a и b. Сверх того, мы допускаем, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке (a, b), причем каждая из

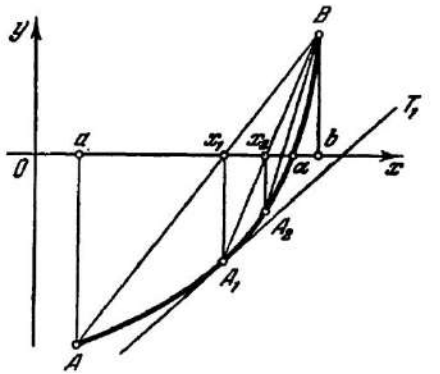


Рис. 166.

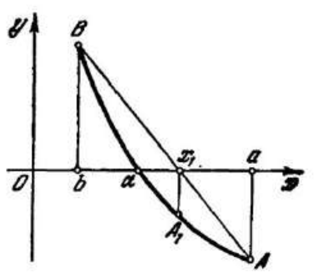


Рис. 167

производных $f(x)$, $f''(x)$ сохраняет в этом промежутке неизменный знак.

Геометрически эти условия означают, что:

1) точки A и B (рис. 166, 167) лежат по разные стороны от оси Ox;

2) вдоль дуги AB имеет место всюду подъем (рис. 166) или всюду спуск (рис. 167);

3) дуга AB вогнута всюду вверх или всюду вниз.

Вывод правила. В силу первых двух условий дуга AB пересекает ось Ox в одной-единственной точке α, лежащей внутри промежутка (a, b). Точка α есть корень уравнения

$$f(x)=0. \tag{1}$$

В способе проб за первое приближение корня α мы принимали произвольную точку x_1, лежащую между a и b. Чтобы ускорить процесс уточнения корня, будем выбирать точку x_1 не как попало и не в середине промежутка (a, b), а так, чтобы она делила (a, b) в отношении $|aA|:|bB|$; это значит, что x_1 будет точкой пересечения оси с хордой AB.

Для определенности предположим, что дуга AB вогнута всюду *вверх* (см. условие 3). Тогда точка A_1 дуги AB, соответствующая приближенному значению x_1, лежит ниже оси Ox. Действительно, точки A и B лежат выше касательной A_1T_1 (в силу определения § 106). Значит, вся хорда AB, и, в частности, точка x_1, тоже лежит выше касательной A_1T_1 и, следовательно, выше точки A_1. Стало быть, точка A_1, будучи ниже точки x_1, лежит ниже оси Ox.

Пусть буквой A обозначается тот конец дуги AB, который лежит ниже оси Ox (на рис. 166 это левый конец, на рис. 167 — правый). Так как точка A_1, по доказанному, тоже лежит ниже Ox, то она лежит на дуге $A\alpha$, т. е. точки x_1 и a находятся по одну сторону от корня α (на рис. 166 слева, на рис. 167 справа). Иначе говоря, точка x_1 лежит между a и α. Заметим теперь, что дуга A_1B удовлетворяет всем трем требованиям, предъявленным выше к дуге AB. Поэтому, если соединить точку A_1 с B, то в пересечении с осью Ox получим точку x_2, которая лежит между x_1 и α. Далее, соединяем точку A_2 дуги AB, соответствующую точке x_2, снова с точкой B, и находим точку x_3, лежащую между x_2 и α, и т. д.

Каждая вновь построенная точка x_{n+1} ближе к корню α, чем предыдущая, и, значит, дает лучшее приближение корня.

До сих пор мы предполагали, что дуга AB вогнута вверх. Когда она вогнута вниз, все остается по-прежнему; надо только буквой A обозначить тот конец дуги AB, который лежит *выше* оси Ox.

Таким образом, в обоих случаях точки A_1, A_2 и т. д. надо соединять с тем концом дуги AB, у которого ордината $f(x)$ *имеет тот же знак*, что вторая производная $f''(x)$ [последняя по условию сохраняет неизменный знак во всем промежутке (a, b)].

Найдем теперь численные значения $x_1, x_2, \ldots$ Составим уравнение секущей AB:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{2}$$

Чтобы определить абсциссу точки пересечения прямой AB с осью Ox, надо положить в уравнении (2) $y=0$. Получим [1])

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3}$$

Аналогично находим

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)\,f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}, \tag{4}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(b-x_2)\,f(x_2)}{f(b)-f(x_2)}, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)\,f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \tag{6}$$

Напоминаем, что буквой b обозначен тот конец промежутка изоляции, где $f(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки.

Так как каждая последующая точка $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ближе к корню α, чем предыдущая, и все они лежат по одну сторону от α, то точка x_n стремится (§ 47) к некоторому пределу. Обозначим его буквой c и докажем, что $c=\alpha$.

Для этого перепишем формулу (6) следующим образом:

$$-(b-x_n)\,f(x_n) = (x_{n+1}-x_n)\,[f(b)-f(x_n)]. \tag{7}$$

При $n \to \infty$ разность $x_{n+1}-x_n$ стремится к нулю (так как обе точки x_n, x_{n+1} стремятся к пределу c). Из формулы (7) видно, что произведение $(b-x_n)\,f(x_n)$ тоже стремится к нулю. Но множитель $b-x_n$ не может стремиться к нулю, так как промежуток (x_n, b) не может стать короче промежутка (α, b). Следовательно, к нулю стремится $f(x_n)$

$$\lim_{x_n \to c} f(x_n) = 0. \tag{8}$$

Но функция $f(x)$ непрерывна; это значит (§ 38, определение), что $\lim\limits_{x_n \to c} f(x_n) = f(c)$. Поэтому из (8) следует, что

$$f(c) = 0,$$

---

[1]) Формулу (3) можно записать также в виде

$$x_1 = b - \frac{(b-a)\,f(b)}{f(b)-f(a)} \tag{3а}$$

или в симметричном виде

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3б}$$

Аналогично можно видоизменить и формулы (4)—(6). Но формулы (3)—(6) удобнее для вычислений.

т. е. что число c (предел последовательности $x_1, x_2, \ldots$) есть корень уравнения $f(x)=0$. А это уравнение имеет в промежутке (a, b) только один корень, ранее обозначенный буквой α. Следовательно, $c=\alpha$, т. е.

$$\lim x_n = \alpha. \tag{9}$$

Замечание. Равенство (9) означает, что по формулам (3)—(6) можно вычислить корень уравнения $f(x)=0$ с любой требуемой степенью точности. Но практически важнее всего знать, в какой момент требуемая степень точности уже достигнута. Этот момент обнаружится в ходе вычисления сам собой, если каждое из приближений x_1, x_2, ... округлять *в сторону корня*, оставаясь однако в пределах допустимой ошибки. Если после такого округления окажется, что $f(x_n)$ имеет тот же знак, что $f(b)$, то значение x_n дает требуемую степень точности. В самом деле, *неокругленному* значению x_n соответствует, по доказанному, такое значение $f(x_n)$, которое имеет тот же знак, что $f(a)$. Значит, корень α содержится между неокругленным и округленным значениями x_n. А эти значения разнятся друг от друга на величину, меньшую допустимой ошибки.

Если же окажется, что знак $f(x_n)$ *и после округления* x_n совпадает со знаком $f(a)$, то надо продолжить вычисление и снова применить формулу (6). В правой ее части мы можем заменить величину x_n ее округленным значением, так как такая замена может только ускорить процесс уточнения корня.

Пример 1. По способу хорд найти с точностью до 0,01 корень уравнения

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

в промежутке (3; 4).

Решение. Условия применимости способа хорд соблюдены, так как

1) $f(3) = -10 < 0$; $f(4) = 9 > 0$, т. е. знаки $f(3)$ и $f(4)$ противоположны.

2) Производная

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(3x+2)$$

во всем промежутке (3; 4) сохраняет неизменный знак (плюс).

3) Вторая производная

$$f''(x) = 6x - 4 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

тоже сохраняет неизменный знак (плюс) в промежутке (3; 4).

Функции $f(x)$ и $f'(x)$ имеют одинаковые знаки в *правом* конце промежутка (3; 4). Поэтому букве b в формулах (3)—(6) надо приписать значение 4 (а не 3). Выкладка протекает следующим образом:

$$1)\ x_1 = 3 - \frac{(4-3)\,f(3)}{f(4)-f(3)} = 3 + \frac{10}{19} = 3{,}526\ldots \approx 3{,}53,\ \text{откуда}$$

$$f(x_1) = f(3{,}53) = 3{,}53^3 - 2\cdot 3{,}53^2 - 4\cdot 3{,}53 - 7 = -2{,}06 < 0.$$

При вычислении x_1 мы взяли округленное избыточное значение 3,53 по той причине, что искомый корень α лежит между $x_1 = -3{,}526\ \ldots$ и $b = 4$, т. е. справа от x_1; а округлять надо в сторону корня. При округлении мы не вышли за пределы допустимой ошибки 0,01.

Так как оказалось, что и после округления x_1 знак $f(x_1)$ совпадает со знаком $f(3)$, то вычисление надо продолжать. По формуле (4), в которую вместо x_1 подставляем округленное значение $x_1 \approx 3{,}53$, получаем

$$2)\ x_2 = 3{,}53 - \frac{(4-3{,}53)\,f(3{,}53)}{f(4)-f(3{,}53)} = 3{,}53 + \frac{0{,}968}{11{,}06} = 3{,}627 \approx 3{,}63,$$

откуда

$$f(x_2) = f(3{,}63) = 3{,}63^3 - 2\cdot 3{,}63^2 - 4\cdot 3{,}63 - 7 = -0{,}042 < 0.$$

Так как снова получилось отрицательное значение, то вычисление надо продолжить.

$$3)\ x_3 = 3{,}63 - \frac{(4-3{,}63)\,f(3{,}63)}{f(4)-f(3{,}63)} = 3{,}63 + \frac{0{,}1554}{9{,}04} = 3{,}631 \approx 3{,}64,$$

$$f(x_3) = f(3{,}64) = 3{,}64^3 - 2\cdot 3{,}64^2 - 4\cdot 3{,}64 - 7 = 0{,}17 > 0.$$

Здесь в результате округления x_n оказалось, что знак $f(x_n)$ совпадает со знаком $f(b)$. Стало быть, с точностью до 0,01 имеем $\alpha \approx 3{,}64$ (по избытку) или $\alpha \approx 3{,}63$ (по недостатку).

В примере § 124 мы получили тот же результат, но лишь на седьмом шаге.

Пример 2. Найти корни уравнения

$$x \lg x = 1 \tag{10}$$

с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}01$.

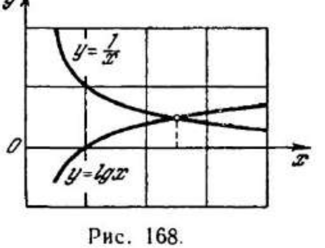


Рис. 168.

Решение. Чтобы отделить корни, представим уравнение (10) в виде

$$\lg x = \frac{1}{x}$$

и построим (рис. 168) графики функций

$$y = \lg x \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Достаточно грубого изображения этих линий, чтобы усмотреть, что уравнение (10) имеет единственный корень, заключенный в промежутке (2; 3).

Представив теперь уравнение (10) в виде

$$f(x) = x \lg x - 1 = 0, \tag{11}$$

найдем

$$f'(x) = \lg x + M \qquad (M \approx 0{,}43),$$

$$f''(x) = \frac{M}{x}.$$

Как в предыдущем примере, убеждаемся в том, что условия применимости способа хорд соблюдены и что применительно к уравнению (11) буква b в формулах (3)—(6) обозначает правый конец промежутка изоляции. Поэтому полагаем

$$a = 2, \quad b = 3;$$

$f(a) = f(2) = 2\lg 2 - 1 = -0{,}3980$, $f(b) = f(3) = 3\lg 3 - 1 = 0{,}4313$. Дальнейшие вычисления выполняются следующим образом:

$$1)\ x_1 = 2 - \frac{1\cdot(-0{,}3980)}{0{,}4313-(-0{,}3980)} = 2 + \frac{0{,}3980}{0{,}8293} \approx 2{,}480.$$

Округление произведено в сторону корня, т. е. взято избыточное значение. Испытание дает

$$f(x_1) = 2{,}480\ \lg 2{,}480 - 1 = -0{,}0216 < 0.$$

Так как оказалось, что знак $f(x_1)$ совпадает со знаком $f(2)$, то вычисление надо продолжить

$$2)\ x_2 = 2{,}480 - \frac{0{,}520\cdot(-0{,}0216)}{0{,}4313-(-0{,}0216)} = 2{,}480 + 0{,}0248 = 2{,}5048 \approx 2{,}505.$$

Практически вполне допустимо округлить значение x_2 до 2,510, т. е. увеличить найденное значение $x_2 = 2{,}5048$ на $5{,}2\cdot 10^{-3}$. Однако тогда мы вышли бы (хотя и незначительно) за пределы допустимой ошибки $\pm 5\cdot 10^{-3}$. Чтобы устранить всякие сомнения, мы ограничились округлением до 2,505. Испытание дает

$$f(x_2) = 2{,}505\ \lg 2{,}505 - 1 = -0{,}0010 < 0.$$

Так как оказалось, что $f(x_2) < 0$, то вычисление надо продолжить:

$$3)\ x_3 = 2{,}505 - \frac{0{,}495\cdot(-0{,}0010)}{0{,}4313-(-0{,}0010)} = 2{,}505 + 0{,}001\ldots = 2{,}506\ldots \approx 2{,}510.$$

Недостаточное значение $x_3 = 2{,}506$ округлено в сторону корня в пределах допустимой погрешности $\frac{1}{2}\cdot 0{,}01$.

Испытание дает

$$f(2{,}510) = 2{,}510 \lg 2{,}510 - 1 = 0{,}0032 > 0.$$

Стало быть, с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$ имеем

$$\alpha = 2{,}51.$$

§ 125а. Задачи к § 125

1. Найти корни уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$.

2. Найти корни уравнения

$$x \lg x = 1{,}2$$

с точностью до 0,001 (ср. § 125, пример 2).

§ 126. Уточнение корня. Правило Ньютона (способ касательных)

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где функция $f(x)$, заданная в некотором промежутке (a, b), удовлетворяет трем условиям § 125. Как и в § 125, буквой b будем обозначать тот конец данного промежутка, где функции $f(x)$, $f''(x)$ имеют одинаковые знаки.

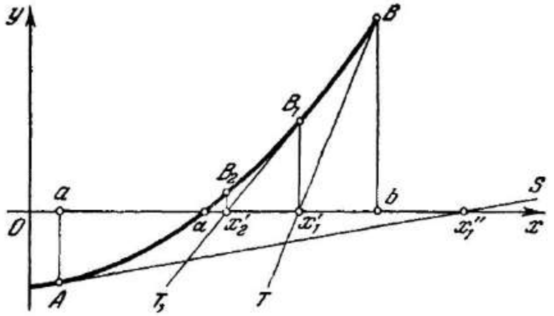


Рис. 169.

Правило Ньютона можно вывести геометрически следующим образом.

Через конец B дуги AB (рис. 169) проведем касательную BT. Она пересечет ось Ox в некоторой точке x_1' [1]). Предположим,

[1]) Обозначения x_1', x_2', ... употреблены для отличия от приближений x_1, x_2, ..., получаемых по методу хорд.

что дуга AB вогнута вверх, как на рис. 169. Тогда вторая производная $f''(x)$ во всем промежутке (a, b) положительна; значит, функция $f(x)$ в точке $x=b$ тоже положительна $(bB>0)$, т. е. точка b лежит ниже касательной BT. Между тем точка α [корень уравнения (1)], как и всякая другая точка дуги AB, лежит выше касательной BT. Стало быть, точки b и α лежат по разные стороны от прямой BT. Следовательно, отрезок αb делится касательной BT внутренним образом, т. е. точка x_1' лежит между α и b.

К тому же выводу мы придем в том случае, когда дуга AB вогнута вниз (рассуждение повторяется дословно).

Таким образом, в обоих случаях точка x_1' лежит по ту же сторону от корня α, что и точка b; но точка x_1' ближе к корню α и потому дает лучшее приближение, чем b[1]).

Пусть B_1 есть та точка дуги AB, которая соответствует точке x_1'. Дуга AB_1, очевидно, удовлетворяет всем трем условиям § 125. Поэтому, проведя касательную B_1T_1, мы получим в пересечении с осью Ox точку x_2', которая лежит по ту же сторону от корня, что и точка x_1', но находится еще ближе к корню. Этот процесс можно продолжать неограниченно.

Чтобы найти численные значения $x_1', x_2', \ldots$, рассмотрим прямоугольный треугольник $x_1'bB$. Его катеты суть

$$bB=f(b),$$
$$x_1'b=b-x_1',$$

а угол $bx_1'B$ образован касательной BT и осью Ox. Поэтому $\operatorname{tg}\angle bx_1'B=f'(b)$ и мы имеем $f(b)=(b-x_1')f'(b)$.

Аналогично получим формулы

$$f(x_1')=(x_1'-x_2')f'(x_1'),$$
$$f(x_2')=(x_2'-x_3')f'(x_2'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_n')=(x_n'-x_{n+1}')f'(x_n'). \tag{2}$$

---

[1]) Если вместо касательной BT провести касательную AS, то последняя пересечет ось Ox в некоторой точке x_1'', делящей отрезок $a\alpha$ не внутренним, а внешним образом. Поэтому точка x_1'' может дать *худшее* приближение к корню (по сравнению с точками a и b).

Следовательно,

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \tag{3}$$

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}, \tag{4}$$

. . . .

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \tag{5}$$

Так как каждая последующая точка x_1', $x_2', \ldots, x_n'$, ..., ближе к корню α, чем предыдущие, и все они лежат по одну сторону от α, то точка x_n' стремится (§ 47) к некоторому пределу c.

Чтобы доказать, что $c = \alpha$, обратимся к формуле (2). Так как обе точки x_{n+1}', x_n' стремятся к пределу c, то разность $x_n' - x_{n+1}'$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{x_n \to c} f(x_n') = 0. \tag{6}$$

Вследствие непрерывности функции $f(x)$ из (6) следует, что

$$f(c) = 0,$$

т. е. c есть корень уравнения $f(x) = 0$.

Но это уравнение имеет в промежутке (a, b) единственный корень, ранее обозначенный буквой α. Следовательно, $c = \alpha$, т. е.

$$\lim x_n' = \alpha. \tag{7}$$

Это равенство означает, что по формулам (3) — (5) можно вычислить корень уравнения $f(x) = 0$ с любой требуемой степенью точности.

Замечание 1. Момент достижения требуемой точности можно обнаружить с помощью округления в сторону корня, как в способе хорд (§ 125, замечание). Но теперь неокругленное значение x_n лежит по ту сторону от корня α, где находится точка b (а не точка a, как в способе хорд). Поэтому вычисление заканчивается в тот момент, когда окажется, что после округления x_n' величина $f(x_n')$ имеет тот же знак, что $f(a)$.

Замечание 2. Способ касательных обычно ведет к цели быстрее, чем способ хорд.

Пример 1. По способу касательных найти с точностью до 0,01 корень уравнения

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

в промежутке $(3; 4)$.

Решение. Условия § 125 соблюдены (см. § 125, пример 1). Имеем

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4, \quad b = 4.$$

Выкладка протекает следующим образом:

1) $x_1' = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} = 3{,}67.$

Округление произведено в сторону корня, т. е. значение x_1' взято с недостатком. Производим испытание

$$f(x_1') = 3{,}67^3 - 2\cdot 3{,}67^2 - 4\cdot 3{,}67 - 7 = 0{,}81 > 0.$$

Знаки $f(x_1')$ и $f(b)$ совпадают; поэтому вычисление надо продолжать

2) $x_2' = 3{,}67 - \frac{f(3{,}67)}{f'(3{,}67)} = 3{,}67 - \frac{0{,}813}{21{,}7} = 3{,}67 - 0{,}037 \approx 3{,}63,$

$$f(x_2') = 3{,}63^3 - 2\cdot 3{,}63^2 - 4\cdot 3{,}63 - 7 = -0{,}04 < 0.$$

Знак $f(x_2')$ совпадает со знаком $f(a)$. Вычисление закончено. С точностью до 0,01 имеем

$$\alpha = 3{,}63.$$

В § 125 (пример 1) мы получили тот же результат по способу хорд, но это потребовало трех шагов.

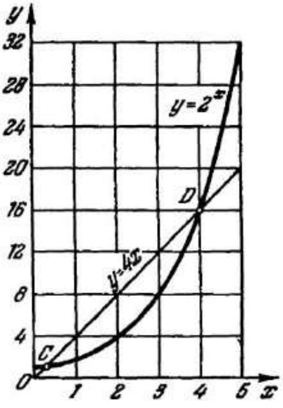


Рис. 170.

Пример 2. Найти корни уравнения

$$f(x) = 2^x - 4x = 0 \tag{8}$$

с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^4$.

Решение. Представим уравнение (8) в виде

$$2^x = 4x$$

и наметим графики линий $y = 2^x$, $y = 4x$ (рис. 170). Из них видно, что, кроме точного корня $x = 4$ (точка D на рис. 170), уравнение (8) имеет еще один корень, лежащий в промежутке (0; 1) (точка C на рис. 170).

Прежде всего выясним, удовлетворены ли для промежутка (0; 1) условия § 125:

1) $f(0) = 2^0 - 4\cdot 0 = 1 > 0, \quad f(1) = 2^1 - 4 = -2 < 0,$

т. е. знаки $f(0)$ и $f(1)$ противоположны.

2) Производная

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 4$$

в промежутке (0; 1) сохраняет неизменный знак (минус). Действительно, уменьшаемое $2^x \ln 2$ является возрастающей функцией; наибольшего своего значения оно достигает на правом конце промежутка ($x=1$). Но даже и здесь величина $2^x \ln 2 = 2 \ln 2 \approx 1,4$ меньше вычитаемого 4.

3) Вторая производная

$$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$$

тоже сохраняет неизменный знак (плюс). Таким образом, все три условия § 125 соблюдены.

Буквой b надо обозначить *левый* конец промежутка (0,1), т. е. точку $x=0$, так как именно в этом конце значения $f(x)$, $f''(x)$ имеют одинаковые знаки. Вычисление протекает следующим образом:

1) Полагаем в формуле (3)

$$b=0, \quad f(b)=f(0)=1,$$
$$f'(b)=f'(0)=\ln 2 - 4 = 0,6931 - 4 = -3,3069;$$

находим

$$x_1' = 0 - \frac{1}{-3,3069} = 0,30240.$$

Округление сделано в сторону корня (т. е. в сторону увеличения). Производим испытание

$$f(x_1') = 2^{0,30240} - 4 \cdot 0,30240 = 1,2332 - 1,2096 = 0,0236.$$

Значение $2^{0,30240} = 1,2332$ находим с помощью таблиц логарифмов.

Так как оказалось, что знак $f(x_1')$ совпадает со знаком $f(b)$, то вычисление надо продолжить. Для этого надо вычислить

$$f'(x_1) = 2^{x_1'} \ln 2 - 4 = 2^{0,30240} \cdot 0,6931 - 4 \approx -3,145.$$

Мы сохранили четыре значащих цифры (из них последняя запасная), так как этих цифр достаточно для дальнейшего вычисления.

2) По формуле (4) находим

$$x_2 = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')} = 0,30240 - \frac{0,0236}{(-3,145)} = 0,30240 + 0,00750 = 0,30990.$$

Производим испытание

$$f(x_2') = 2^{0,30990} - 4 \cdot 0,30990 = 1,2396 - 1,2396 = 0,0000.$$

Уже сейчас ясно, что требуемая степень точности достигнута; но так как знак $f(0,30990)$ остается неизвестным, то для полной гарантии вычисляем $f(0{,}30995)$

$$f(0{,}30995)=2^{0{,}30995}-4\cdot 0{,}30995=1{,}2396-1{,}2398=-0{,}0002.$$

Знак $f(0{,}30995)$ совпадает со знаком $f(a)$. Поэтому с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ имеем

$$\alpha=0{,}3099.$$

§ 126а. Задачи к § 126

1. Найти корни уравнения

$$x^3-2x-5=0$$

с точностью до 10^{-4}.

2. Найти корни уравнения

$$x-2+e^x=0$$

с точностью до 0,01.

3. Найти корни уравнения

$$x\lg x=1$$

с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}001$.

§ 127. Комбинированный способ хорд и касательных

Способы хорд и касательных можно применять совместно следующим образом.

Сперва, исходя из данного промежутка изоляции (a, b) (рис. 171), находим пару первых приближений x_1, x_1'. Приближение x_1, найденное по способу хорд, уклоняется от корня α в сторону вогнутости дуги AB, приближение x_1', найденное по способу касательных,— в противоположную сторону. Значит, искомая точка α лежит между x_1 и x_1' и длина $|x_1'-x_1|$ промежутка (x_1, x_1') служит мерой точности каждого из найденных приближений.

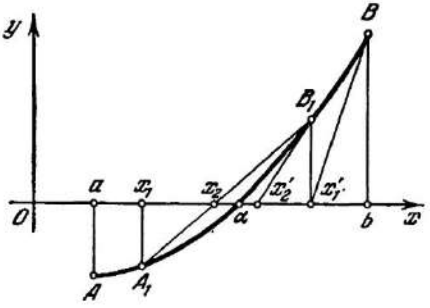


Рис. 171.

Если достигнутая степень точности недостаточна, то, исходя из найденного промежутка изоляции (x_1, x_1'), получаем пару более точных вторых приближений (x_2, x_2'). Таким же образом процесс уточнения можно продолжать и далее.

Последовательность x_1', x_2', ..., получаемая при этом комбинированном способе, совпадает с одноименной последовательностью, получаемой по способу касательных (§ 126). Значит, эта последовательность стремится к пределу α.

Последовательность x_1, x_2, ..., получаемая при комбинированном способе, тоже стремится к пределу α, и притом гораздо быстрее, чем одноименная последовательность в способе хорд (§ 125). Действительно, в способе хорд точка B (рис. 171) остается неизменной, в комбинированном же способе она с каждым шагом приближается к точке α.

При комбинированном методе на каждом его этапе получается как недостаточное, так и избыточное значения корня, так что достигнутая степень точности обнаруживается сама собой. В частности, если несколько первых значащих цифр у обоих приближений x_n, x_n' одинаковы, то эти цифры принадлежат также и корню α.

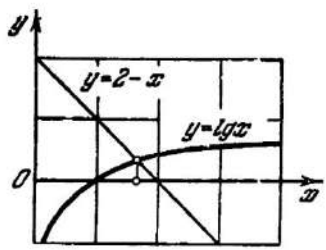


Рис. 172.

Вычисление заканчивается в тот момент, когда оказывается, что длина промежутка (x_n, x_n') меньше допустимой погрешности. По окончании процесса лучше всего взять среднее арифметическое последней пары приближений и положить

$$\alpha \approx \frac{x_n + x_n}{2}. \tag{1}$$

Если, как и прежде, мы будем обозначать буквой b тот конец первоначального промежутка изоляции, где функции $f(x)$, $f''(x)$ имеют одинаковые знаки, то численные значения x_1, x_1'; x_2, x_2'; ...; x_n, x_n' ... выразятся следующей системой формул:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \tag{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1' - x_1)\,f(x_1)}{f(x_1') - f(x_1)}, \quad x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}, \tag{3}$$

. . . .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n' - x_n)\,f(x_n)}{f(x_n') - f(x_n)}, \quad x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \tag{4}$$

Пример. Вычислить корни уравнения

$$f(x) = \lg x + x - 2 = 0 \tag{5}$$

с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

Решение. Построив графики $y=\lg x$, $y=2-x$ (рис. 172), усматриваем, что уравнение (5) имеет единственный корень и что последний заключен в промежутке (1,5; 2).

Имеем

$$f'(x)=\frac{M}{x}+1 \qquad (M\approx 0{,}43429),$$

$$f''(x)=-\frac{M}{x^2}<0.$$

Убеждаемся в том, что функция $f(x)$ в промежутке (1,5; 2) удовлетворяет условиям § 125. Функция $f(x)$ имеет тот же знак (минус), что вторая производная $f''(x)$ на левом конце промежутка (1,5; 2). Поэтому полагаем

$$a=2, \quad b=1{,}5,$$

$$f(a)=0{,}30103, \quad f(b)=-0{,}32391, \quad f'(b)=1{,}28953.$$

1) По формулам (2) находим

$$x_1=2-\frac{(1{,}5-2)\cdot 0{,}30103}{-0{,}32391-0{,}30103}=1{,}75916,$$

$$x_1'=1{,}5-\frac{(-0{,}32391)}{1{,}28953}=1{,}75118,$$

$$|x_1'-x_1|=0{,}00798.$$

Требуемая степень точности, как видим, не достигнута. Вычисление надо продолжить. Предварительно находим

$$f(x_1)=\lg 1{,}75916+1{,}75916-2=0{,}00447,$$

$$f(x_1')=\lg 1{,}75118+1{,}75118-2=-0{,}00548,$$

$$f'(x_1')=\frac{M}{1{,}75118}+1=1{,}24799.$$

2) По формулам (3) получаем

$$x_2=1{,}75916-\frac{(-0{,}00798)\cdot 0{,}00447}{-0{,}00548-0{,}00447}=1{,}75916-0{,}00357=1{,}75559,$$

$$x_2'=1{,}75118-\frac{(-0{,}00548)}{1{,}24799}=1{,}75118+0{,}00439=1{,}75557.$$

Заметим, что здесь округления произведены в сторону удаления от корня. В комбинированном способе на последних его этапах так следует поступать всегда. В противном случае может оказаться, что округленные значения x_n, x_n' будут лежать по одну сторону от корня α, и дальнейшее применение комбинированного способа станет невозможным.

Так как

$$|x_2' - x_2| = 2 \cdot 10^{-5},$$

то требуемая степень точности достигнута и можно положить

$$\alpha \approx \frac{x_2 + x_2'}{2} = 1{,}75558.$$

Фактически мы получили значение корня с точностью до 10^{-6}

$$(\alpha \approx 1{,}755581).$$

§ 127a. Задачи к § 127

1. Найти с точностью до 10^{-4} наибольший корень уравнения

$$x^5 - x - 0{,}2 = 0.$$

2. Найти с точностью до 10^{-7} корень уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

(ср. задачи 1 § 125а и 1 § 126а).

ГЛАВА VI

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 128. Уравнение касательной к линии $y=f(x)$

Пусть линия AB (рис. 173) представляется уравнением вида $y=f(x)$. Возьмем на этой линии какую-либо точку $M_0(x_0, y_0)$. Как мы знаем (§ 60), наличие касательной M_0T_0 в точке M_0 равносильно наличию производной $f'(x_0)$. Если производная $y_0'=f'(x_0)$ конечна, то касательная M_0T_0 не параллельна оси Oy, и ее угловой коэффициент a равен y_0':

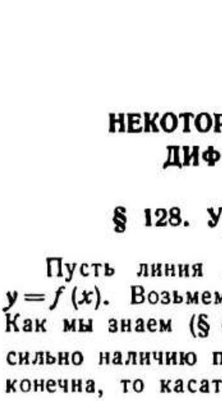


Рис. 173.

$$a=y_0'.$$

Уравнение прямой M_0T_0 можно представить (I, § 38) в виде

$$Y-y_0=a(X-x_0),$$

где X, Y — текущие координаты точки, лежащей на прямой M_0T_0. Следовательно, уравнение касательной M_0T_0 есть

$$Y-y_0=y_0'(X-x_0). \qquad (1)$$

Если же производная $f'(x_0)$ бесконечна, то касательная M_0T_0 параллельна оси Oy; в этом случае уравнение касательной есть

$$X-x_0=0. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти уравнение касательной к параболе $y=x^2-3x+2$ в точке (0; 2).

Решение. Находим $f'(x)=y'=2x-3$. Подставляя сюда значение $x=0$, получаем $y_0'=f'(0)=-3$. Согласно формуле (1) искомое уравнение касательной есть

$$Y-2=-3(X-0),$$

то есть

$$Y=-3X+2.$$

Пример 2. Найти уравнение касательной к линии $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ в точке (2; 1).

Решение. Имеем $f'(2) = \infty$. Согласно формуле (2) искомое уравнение касательной есть

$$X - 2 = 0.$$

§ 129. Уравнение касательной к параметризованной линии

Пусть линия AB (рис. 173) представляется параметрическими уравнениями

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{1}$$

где обе функции $f(t)$, $\varphi(t)$ имеют в точке t_0 конечные производные $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, из которых по меньшей мере одна отлична от нуля.

Как мы знаем (§ 85), такая линия имеет в точке t_0 касательную M_0T_0, причем угол α_0, образуемый касательной M_0T_0 с осью Ox, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\varphi'(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y_0'}{x_0'}.$$

Предположим сначала, что $x_0' \neq 0$. Тогда прямая M_0T_0 не параллельна оси Oy и представляется уравнением

$$Y - y_0 = \frac{y_0'}{x_0'}(X - x_0) \tag{2}$$

или, в симметричном виде

$$\frac{X - x_0}{x_0'} = \frac{Y - y_0}{y_0'}. \tag{3}$$

Предположим теперь, что $x_0' = 0$. Тогда по условию $y_0' \neq 0$. Прямая M_0T_0 теперь параллельна оси OY (ибо $\operatorname{tg} \alpha_0 = \infty$) и ее нельзя представить уравнением (2). Однако уравнение (3) пригодно и в этом случае. Действительно, теперь оно записывается в виде

$$\frac{X - x_0}{0} = \frac{Y - y_0}{y_0'}. \tag{4}$$

А эта запись означает, что

$$X - x_0 = 0,$$

так что уравнение (4) представляет прямую, параллельную оси Oy, проведенную через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Таким образом, уравнение (3) есть общее уравнение касательной к линии (1).

В дальнейшем мы будем опускать индекс нуль при обозначении точки касания и ее координат. Тогда уравнение касательной MT в точке M линии AB примет вид

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}. \tag{5}$$

Пример 1. Составить уравнение касательной к линии

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t \tag{6}$$

в точке $M\left(a\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2}\right)$, соответствующей значению параметра $t=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Дифференцируя уравнения (6), получаем

$$x'=-a\sin t, \qquad y'=a\cos t. \tag{7}$$

Подставляя сюда $t=\frac{\pi}{6}$, получаем

$$x'=-\frac{a}{2}, \qquad y'=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Согласно формуле (5) искомое уравнение касательной есть

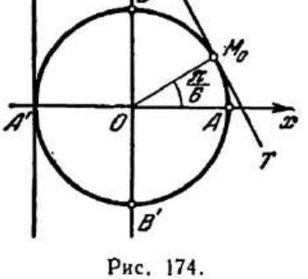


Рис. 174.

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{-\frac{a}{2}}=\frac{Y-\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

или

$$X\sqrt{3}+Y-2a=0. \tag{8}$$

Уравнения (6) представляют окружность $ABA'B'$ (рис. 174) радиуса a с центром в точке (0;0). Уравнение (8) представляет прямую, проходящую через точку $M_0\left(a\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$ и перпендикулярную к прямой OM_0.

Пример 2. Составить уравнение касательной к линии (6) в точке $A'(-a;\ 0)$, соответствующей значению параметра $t=\pi$.

Решение. Подставляя в (7) значение $t=\pi$, получаем

$$f'(\pi)=0; \qquad \varphi'(\pi)=-a.$$

Искомое уравнение касательной $A'T'$ (рис. 174) есть

$$\frac{X-(-a)}{0}=\frac{Y-0}{-a},$$

то есть

$$X+a=0.$$

Это уравнение представляет прямую, проведенную через точку $A'(-a;\ 0)$ параллельно оси Oy.

§ 129а. Задачи к §§ 128—129

В задачах 1—7 найти уравнения касательных к заданным линиям, а также построить эти линии и искомые касательные.

1. К линии $y=2x^3-5x^2+3x-3$ в точке $(2;\ -1)$.

2. К линии $y=a\sin\frac{x}{a}$ в точке $\left(a\frac{\pi}{6};\ \frac{a}{2}\right)$.

3. К линии $a^2y=x^3$ в точках пересечения этой линии с прямой $y=x$.

4. К линии $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ в точках $t=\frac{\pi}{3}$; $t=\pi$.

5. К линии $y=x^2$ параллельно прямой $x+2y-3=0$.

6. К линии $xy=a^2$ в точке $\left(\frac{a}{2};\ 2a\right)$.

7. К линии $x=\frac{a}{2\pi}\varphi\cos\varphi$; $y=\frac{a}{2\pi}\varphi\sin\varphi$ (архимедова спираль) в точке $\varphi=2\pi$.

8. Найти расстояние от вершины параболы $y=\frac{x^2}{a}-4x+5a$ до касательной, проведенной через точку пересечения параболы с осью Oy.

9. В примере 2 § 85 было доказано, что касательная к циклоиде проходит через точку E производящего круга, диаметрально противоположную точке его опоры. Доказать это свойство, исходя из уравнения касательной.

§ 130. Нормаль к плоской линии

О п р е д е л е н и е. *Нормалью* к линии AB (рис. 175) в точке M_0 называется прямая M_0N, проведенная через M_0 перпендикулярно к касательной M_0T.

О б щ е е у р а в н е н и е н о р м а л и. Пусть линия AB представляется уравнениями

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\tag{1}$$

где функции $f(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям § 129. Тогда касательная M_0T представляется уравнением $\frac{X-x_0}{x'_0}=\frac{Y-y_0}{y'_0}$

или

$$y'_0(X-x_0)=x'_0(Y-y_0).\tag{2}$$

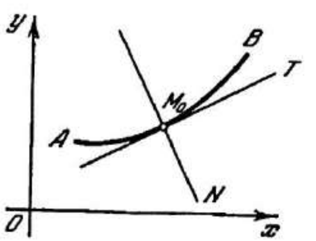


Рис. 175.

Так как нормаль M_0N проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, то уравнение нормали имеет вид

$$A(X-x_0)=B(Y-y_0),\tag{3}$$

где коэффициенты A, B должны удовлетворять условию перпендикулярности (I, § 35)

$$Ay'_0 + Bx'_0 = 0,$$

так что можно положить

$$A = x'_0, \quad B = -y'_0. \tag{4}$$

Подставив в (3) выражения (4), получаем уравнение нормали M_0N:

$$x'_0(X - x_0) + y'_0(Y - y_0) = 0. \tag{5}$$

Уравнение нормали к линии $y = F(x)$.

Пусть линия AB представляется уравнением $y = F(x)$, где функция $y = F(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $y'_0 = F'(x_0)$. Роль параметра играет теперь абсцисса x. Поэтому в уравнении (5) полагаем $x'_0 = 1$. Уравнение нормали M_0N принимает вид

$$X - x_0 + y'_0(Y - y_0) = 0. \tag{6}$$

Если же производная y'_0 бесконечна, т. е. касательная M_0T параллельна оси Oy, то нормаль M_0N параллельна оси Ox и, следовательно, представляется уравнением

$$Y - y_0 = 0. \tag{7}$$

Пример 1. Найти уравнение нормали к параболе $y = x^2 - 3x + 2$ в точке (0; 2).

Решение. Имеем $y'(0) = -3$. Согласно формуле (6) искомое уравнение нормали есть

$$X - 0 - 3(Y - 2) = 0$$

или

$$X - 3Y + 6 = 0$$

(ср. § 128, пример 1).

Пример 2. Найти уравнение нормали к линии $y = 1 + \sqrt[3]{x+2}$ в точке (—2; 1) (рис. 176).

Решение. Имеем $y' = \infty$. Согласно формуле (7) искомое уравнение нормали есть

$$Y - 1 = 0.$$

Пример 3. Найти уравнение нормали к окружности

$$x = a\cos t; \qquad y = a\sin t$$

в точках $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$.

Решение. Имеем

$$x' = -a \sin t, \qquad y' = a \cos t.$$

Уравнение нормали (5) принимает вид

$$-\sin t\,(X - a\cos t) + \cos t\,(Y - a\sin t) = 0$$

или

$$X \sin t - Y \cos t = 0.$$

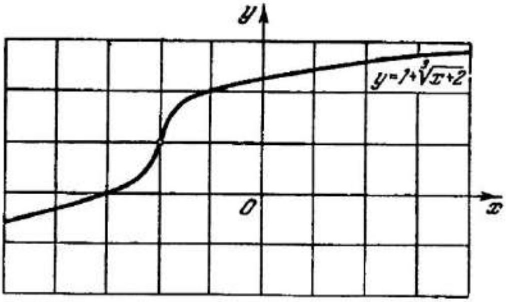


Рис. 176.

Нормали в точках $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ представляются соответственно уравнениями

$$\frac{1}{2} X - \frac{\sqrt{3}}{2} Y = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

§ 130а. Задачи к § 130

В задачах 1—7 найти уравнения нормалей к заданным линиям, а также построить эти линии и искомые нормали.

1. К линии $y = \frac{x^3}{2}$ в точке $x = -1$.

2. К линии $y = \operatorname{tg} 2x$ в начале координат.

3. К линии $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (верзьера М. Аньези) в точках ее пересечения с прямой $y = \frac{3}{4} a$.

4. К линии $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса) в точках перегиба.

5. К линии $x = at \cos t$, $y = at \sin t$ (архимедова спираль) в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

6. К линии $x = \left(a \cos \varphi + \frac{a}{2}\right) \cos \varphi$, $y = \left(a \cos \varphi + \frac{a}{2}\right) \sin \varphi$ (улитка Паскаля, § 84, пример 4) в точке $t = \frac{2}{3}\pi$.

7. К линии $x=\frac{3au}{1+u^3}$, $y=\frac{3au^2}{1+u^3}$ (декартов лист) в точке $u=-2$.

8. Доказать, что перпендикуляр MP, опущенный из произвольной точки M *цепной линии* $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ на ось Ox (*директриса* цепной линии), проектируется на нормаль MN цепной линии отрезком MP_1 постоянной длины.

§ 131. Центр, радиус и круг кривизны

Предварительные замечания. Нормаль к окружности в какой-либо ее точке M_0, очевидно, проходит через центр C окружности; здесь ее пересекают все другие нормали. Нормаль M_0N (рис. 177) линии AB, отличной от окружности, не пересекается соседними нормалями в точности в одной и той же точке. Но обычно оказывается, что на достаточно малом участке ab, охватывающем точку M_0, все нормали M_1N_1 пересекают нормаль M_0N *примерно* в одной точке C. На математическом языке это означает, что точка пересечения нормалей M_0N и M_1N_1 стремится к некоторой точке C, когда $M_1 \to M_0$.

Рис. 177.

Таким образом, дуга ab уподобляется дуге окружности радиуса M_0C с центром в C. Эта окружность (пунктирная линия $A'B'$ на рис. 177) практически сливается с дугой ab, и можно сказать, что на участке ab линия AB имеет ту же искривленность, что окружность C. Вот почему точку C называют *центром кривизны* линии AB (в точке M_0), отрезок M_0C — *радиусом кривизны*, а окружность $A'B'$ — *кругом кривизны*.

Случается и так, что точка C_1, где нормаль M_0N пересекается нормалью M_1N_1, удаляется в бесконечность при $M_1 \to M_0$. В этом случае роль круга кривизны $A'B'$ играет прямая M_0T, касающаяся линии AB в точке M_0, и поэтому считается, что линия AB имеет в точке M_0 бесконечный радиус кривизны.

Определение. Предположим, что нормаль M_0N_0, проведенная через точку M_0 линии AB (рис. 178), пересекается соседней нормалью M_1N_1 в точке C_1, которая стремится к некоторой точке C, когда $M_1 \to M_0$. Тогда точка C называется *центром кри-*

визны линии AB (в точке M_0), отрезок $M_0C = R$ — *радиусом кривизны*, а круг радиуса R с центром в C — *кругом кривизны*.

Если же точка C_1 при $M_1 \to M_0$ удаляется в бесконечность, то будем говорить, что линия AB в точке M_0 имеет бесконечный радиус кривизны:

$$R = \infty,$$

а касательную M_0T считать кругом кривизны (в точке M_0).

Замечание 1. Во втором случае не исключается возможность, что некоторые нормали M_1N_1 окажутся параллельными нормали M_0N_0. Так, если линия AB — прямая, то все ее нормали параллельны между собой, и радиус кривизны во всех ее точках бесконечный.

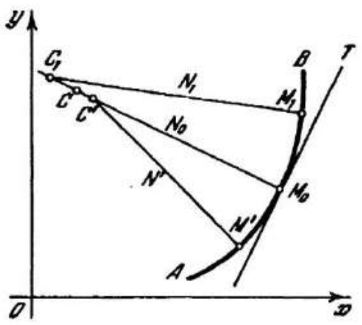


Рис. 178.

Замечание 2. Окружность радиуса a в каждой своей точке имеет, согласно определению, радиус кривизны $R = a$.

Теорема 1. Пусть линия AB представляется уравнениями

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \tag{1}$$

где $f(t)$, $\varphi(t)$ — дважды дифференцируемые функции, причем в точке $t = t_0$

$$x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 \neq 0. \tag{2}$$

Тогда в соответствующей точке M_0 линия AB обладает центром кривизны C, координаты которого выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_0 - y'_0 \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0}, \\ y_C &= y_0 + x'_0 \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Доказательство. Уравнения нормалей линии AB в точках M_0 и M_1 (рис. 179) суть

$$(X - x_0)\,x'_0 + (Y - y_0)\,y'_0 = 0, \tag{4}$$

$$(X - x_1)\,x'_1 + (Y - y_1)\,y'_1 = 0. \tag{5}$$

Из этих уравнений можно найти координаты X, Y точки C_1 (если нормали M_0N_0, M_1N_1 пересекаются) и затем найти

$$\lim X = x_C, \quad \lim Y = y_C.$$

Чтобы облегчить вычисления, введем вспомогательные неизвестные

$$\overline{X} = X - x_0, \quad \overline{Y} = Y - y_0, \tag{6}$$

т. е. координаты вектора $\overrightarrow{M_0C_1}$ (см. I, § 95).

Подставив в уравнения (4) — (5) выражения $X = \overline{X} + x_0$, $Y = \overline{Y} + y_0$, получим систему

$$\overline{X}\,x_0' + \overline{Y}\,y_0' = 0, \tag{7}$$

$$\overline{X}\,x_1' + \overline{Y}\,y_1' = x_1'\,\Delta x + y_1'\,\Delta y, \tag{8}$$

где через Δx, Δy обозначены приращения функций $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$:

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta y = y_1 - y_0.$$

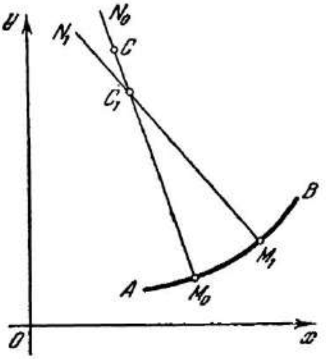


Рис. 179.

Вычтем почленно (7) из (8) и результирующее уравнение разделим почленно на Δt. Тогда система (7) — (8) заменится равносильной системой

$$\overline{X}\,x_0' + \overline{Y}\,y_0' = 0, \tag{9}$$

$$\overline{X}\,\frac{\Delta x'}{\Delta t} + \overline{Y}\,\frac{\Delta y'}{\Delta t} = x_1'\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + y_1'\,\frac{\Delta y}{\Delta t}, \tag{10}$$

где через $\Delta x'$, $\Delta y'$ обозначены приращения производных $x' = f'(t)$, $y' = \varphi'(t)$:

$$\Delta x' = x_1' - x_0',$$
$$\Delta y' = y_1' - y_0'.$$

Так как при $\Delta t \to 0$ определитель

$$D = \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \frac{\Delta x'}{\Delta t} & \frac{\Delta y'}{\Delta t} \end{vmatrix}$$

системы (9) — (10) стремится к пределу

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix},$$

который по условию отличен от нуля, то можно считать, что $D \neq 0$.

Следовательно, система (10)—(11) имеет единственное решение:

$$\overline{X}=\frac{-y_0'\left(x_1'\frac{\Delta x}{\Delta t}+y_1'\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{x_0'\frac{\Delta y'}{\Delta t}-y_0'\frac{\Delta x'}{\Delta t}},\quad \overline{Y}=\frac{x_0'\left(x_1'\frac{\Delta x}{\Delta t}+y_1'\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{x_0'\frac{\Delta y'}{\Delta t}-y_0'\frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{11}$$

Эти формулы выражают координаты вектора $\overrightarrow{M_0C_1}$.

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем выражения для координат вектора $\overrightarrow{M_0C}$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\overline{X}&=x_C-x_0=-y_0'\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-y_0'x_0''},\\ \lim_{\Delta t\to 0}\overline{Y}&=y_C-y_0=x_0'\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Отсюда непосредственно следуют формулы (3).

Теорема 2. Пусть линия AB представляется уравнениями

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),$$

причем в точке $t=t_0$

$$x_0'y_0''-y_0'x_0''=0,$$

но из двух производных x_0', y_0' по меньшей мере одна отлична от нуля.

Тогда линия AB в точке M_0 обладает бесконечным радиусом кривизны.

Доказательство. Пусть нормаль M_1N_1 (рис. 179) пересекает нормаль M_0N_0 в некоторой точке C_1. Надо доказать, что при $M_1\to M_0$ точка C_1 удаляется в бесконечность. Для этого достаточно обнаружить, что одна из координат $\overline{X}$, $\overline{Y}$ вектора $\overrightarrow{M_0C_1}$ стремится к бесконечности.

По условию одна из производных x_0', y_0' отлична от нуля. Допустим, например, что $y_0'\neq 0$, и рассмотрим первую из формул (11). При $\Delta t\to 0$ числитель ее правой части стремится к пределу $-y_0'(x_0'^2+y_0'^2)$; этот предел отличен от нуля. Знаменатель же стремится к пределу $x_0'y_0''-y_0'x_0''=0$. Следовательно, вся дробь имеет бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\overline{X}=\infty.$$

Если предположить, что $x_0'\neq 0$, то аналогично убедимся, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\overline{Y}=\infty.$$

Итак, точка C_1 пересечения нормалей M_0N_0, M_1N_1 удаляется в бесконечность, т. е. в точке M_0 линия AB обладает бесконечным радиусом кривизны.

Теорема 3. Пусть линия AB представляется уравнениями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t),$$

где функции $f(t)$, $\varphi(t)$ дважды дифференцируемы в точке $t=t_0$, причем из двух производных x_0', y_0' по меньшей мере одна отлична от нуля.

Тогда линия AB в точке M_0 обладает радиусом кривизны R, который выражается формулой

$$R=\frac{(x_0'^2+y_0'^2)^{3/2}}{|x_0'y_0''-y_0'x_0''|}. \tag{13}$$

Доказательство. В случае, когда $x_0'y_0''-y_0'x_0''\neq 0$, линия AB в точке M_0 обладает центром кривизны C и, следовательно, имеет конечный радиус кривизны $R=|\overrightarrow{M_0C}|$. Координаты вектора $\overrightarrow{M_0C}$ суть x_C-x_0, y_C-y_0. Следовательно,

$$R=\sqrt{(x_C-x_0)^2+(y_C-y_0)^2}. \tag{13'}$$

Подставляя сюда выражения (12), получаем

$$R=\sqrt{[(-y_0')^2+x_0'^2]\frac{(x_0'^2+y_0'^2)^2}{(x_0'y_0''-y_0'x_0'')^2}}=\frac{(x_0'^2+y_0'^2)^{3/2}}{|x_0'y_0''-y_0'x_0''|}.$$

В случае же, когда $x_0'y_0''-y_0'x_0''=0$, линия AB обладает в точке M_0 бесконечным радиусом. Выражение (13) (понимаемое, как обычно, в условном смысле) дает тот же результат. Действительно, числитель его отличен от нуля, ибо каждое из слагаемых $x_0'^2$, $y_0'^2$ неотрицательно, а одно из них заведомо отлично от нуля. Знаменатель же равен нулю.

Случай линии $y=F(x)$. В этом случае роль параметра играет абсцисса x. Поэтому

$$x_0'=1, \quad x_0''=0$$

и

$$x_0'y_0''-y_0'x_0''=y_0''.$$

В силу теоремы 1 линия $y=F(x)$ в точке $x=x_0$, где $y_0''\neq 0$, обладает центром кривизны C; его координаты выражаются формулами

$$x_C = x_0 - y_0' \frac{1+y_0'^2}{y_0''}; \quad y_C = y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y_0''}. \tag{3a}$$

В силу теоремы 3 радиус кривизны R выражается формулой

$$R = \frac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|}. \tag{13a}$$

Замечание 3. По сравнению с формулами (3), (13) формулы (3а), (13а) выглядят проще. Но практически они часто оказываются неудобными. Кроме того, они непригодны в том случае, когда ось Oy параллельна касательной M_0T.

Пример 1. Найти центр и радиус кривизны эллипса $ABA'B'$ (рис. 180) с полуосями $OA = a$, $OB = b$: 1) в конце B малой полуоси b, 2) в конце A большой полуоси a.

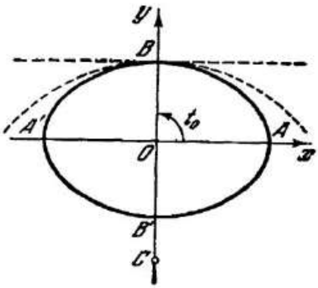


Рис. 180.

Решение. Расположив оси координат, как на рис. 180, представим данный эллипс уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Дифференцируя их, получаем

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t,$$
$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t.$$

Концу B малой полуоси соответствует значение $t = t_0 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому в формуле (3) надо подставить значения

$$x_0 = 0,\ y_0 = b,\ x_0' = -a,\ y_0' = 0,\ x_0'' = 0,\ y_0'' = -b.$$

Получаем

$$x_C = x_0 - y_0' \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''} = 0,$$

$$y_C = y_0 + x_0' \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''} = b - \frac{a^2}{b}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ суть

$$x_C - x_B = 0, \quad y_C - y_B = -\frac{a^2}{b}. \tag{14}$$

Радиус кривизны R_B находим по формуле (13')

$$R_B = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \frac{a^2}{b}. \tag{15}$$

Тот же результат получим по формуле (13).

Круг кривизны показан на рис. 180 пунктирной линией. Вблизи вершины B он сливается с эллипсом.

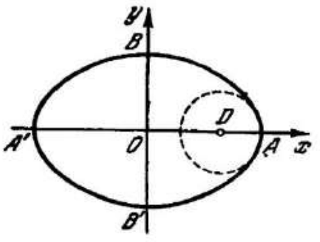


Рис. 181.

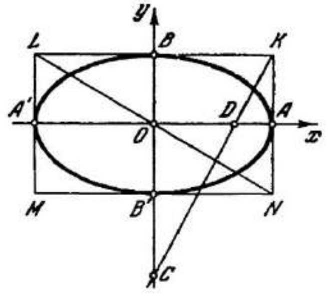


Рис. 182.

Совершенно аналогично найдем координаты центра кривизны D, соответствующего вершине A (рис. 181):

$$\left.\begin{aligned} x_D &= a - \frac{b^2}{a}, \\ y_D &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

а также радиус кривизны

$$R_A = |\overrightarrow{AD}| = \frac{b^2}{a}. \tag{17}$$

Круг кривизны (показанный на рис. 181 пунктиром) сливается с эллипсом вблизи вершины A.

Центры кривизны эллипса в его вершинах можно найти следующим простым построением. Около эллипса $ABA'B'$ описываем прямоугольник $KLMN$, как показано на рис. 182. Через вершину K проводим прямую перпендикулярно к диагонали NL. Эта прямая пересечет оси эллипса в точках C и D, которые являются центрами кривизны эллипса соответственно в вершинах A и B. Аналогично строятся центры кривизны в вершинах A', B'.

Чтобы доказать правильность этого построения, достаточно рассмотреть треугольники KNL и KBC. Из подобия этих треугольников находим

$$BC = BK\frac{KL}{KN} = a\,\frac{2a}{2b} = \frac{a^2}{b}.$$

Сопоставив это выражение с формулами (14) и (15), убеждаемся в том, что точка C есть центр кривизны эллипса $ABA'B'$ в вершине B.

Аналогично докажем, что точка D есть центр кривизны эллипса $ABA'B'$ в вершине A.

Другое решение. В той же системе координат xOy (рис. 180) полуэллипс ABA' представляется уравнением

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{18}$$

Дифференцируя, получаем

$$y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}\,,\quad y''=-\frac{ab}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}\,. \tag{19}$$

Следовательно, в точке $B(0;\ b)$ имеем

$$y_B=b,\ y'_B=0,\ y''_B=-\frac{b}{a^2}\,.$$

Подставив эти значения в формулы (3а), получим координаты центра кривизны

$$x_C=x_B-y'_B\frac{1+y'^2_B}{y''_B}=0,\quad y_C=y_B+\frac{1+y'^2_B}{y''_B}=b-\frac{a^2}{b}\,.$$

Отсюда находим

$$R=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\frac{a^2}{b}\,.$$

Для разыскания центра кривизны D (рис. 181) формулы (3а) непригодны, так как функция $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ в точке $x=a$ имеет бесконечную (одностороннюю) первую производную и не имеет второй производной. Впрочем, полуэллипс $B'AB$ можно представить уравнением $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ и, рассматривая ординату y как параметр, применить формулы (3), полагая в них $y'_0=1$, $y''_0=0$.

Замечание 4. Геометрически очевидно, что вектор $\overrightarrow{M_0C}$, ведущий из точки M_0 линии AB в соответствующий центр кривизны C, всегда направлен в сторону вогнутости линии AB.

Справедливость этого утверждения вытекает из формулы $y_C-y_0=\dfrac{1+y'^2_0}{y''_0}$.

Действительно, так как $1+y'_0>0$, то вертикальная проекция y_C-y_0 вектора $\overrightarrow{M_0C}$ имеет тот же знак, что вторая производная y''_0. Значит, если вектор $\overrightarrow{M_0C}$ направлен вверх, то $y_0'' > 0$ и, следовательно, линия AB в точке M_0 вогнута тоже вверх (§ 106). Если же вектор $\overrightarrow{M_0C}$ направлен вниз, то $y_0'' < 0$ и, следовательно, линия AB в точке M_0 вогнута тоже вниз. Таким образом, в обоих случаях вектор $\overrightarrow{M_0C}$ направлен в сторону вогнутости линии AB.

Пример 2. Найти центр и радиус кривизны параболы $y^2 = 2px$ в произвольной ее точке M.

Решение. За параметр удобнее всего принять ординату y. Тогда имеем

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x' = \frac{y}{p}, \quad x'' = \frac{1}{p}; \; y' = 1, \; y'' = 0.$$

Формулы (3) и (13) (если в них опустить индексы) дают

$$x_C = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = \frac{y^2}{2p} - \frac{\frac{y^2}{p^2} + 1}{-\frac{1}{p}} = \frac{3y^2}{2p} + p, \tag{20}$$

$$y_C = y + x'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = y + \frac{y}{p}\,\frac{\frac{y^2}{p^2} + 1}{-\frac{1}{p}} = -\frac{y^3}{p^2}, \tag{21}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{\left(\frac{y^2}{p^2} + 1\right)^{3/2}}{\left|-\frac{1}{p}\right|} = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}. \tag{22}$$

Чтобы построить центр кривизны C (рис. 183), заметим, что формулы (20) в силу уравнения $y^2 = 2px$ можно записать в виде

$$x_C = 3x + p$$

или

$$x_C - x = 2\left(x + \frac{p}{2}\right). \tag{23}$$

Геометрически это равенство выражает следующий факт. Обозначим буквой K точку пересечения нормали MN с прямой $x + \frac{p}{2} = 0$ (директриса PQ параболы). Величины $x_C - x$, $x + \frac{p}{2}$ суть горизонтальные проекции векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{KM}$, расположенных на одной прямой. Значит, из (23) следует, что

$$\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{KM}.$$

Стало быть, чтобы построить центр кривизны C параболы в точке M, достаточно довести нормаль MN до пересечения с директрисой PQ в точке K и на продолжении отрезка KM отложить отрезок $MC = 2KM$.

В частности, центр кривизны C_0, соответствующий вершине O параболы, отстоит от вершины на расстояние

$$OC_0 = 2DO = 2OF = p,$$

так что радиус кривизны $R_0 = p$.

На рис. 183 изображены (пунктиром) круги кривизны, соответствующие произвольно взятой точке M и вершине O.

Замечание 5. Вблизи точки M (рис. 183) парабола располагается частью вне круга кривизны C, а частью — внутри него. А именно, точки, лежащие справа от M, располагаются вне круга C, а точки, лежащие слева,— внутри этого круга.

Это явление, как правило, имеет место для любой линии в произвольно взятой ее точке M. Вне круга кривизны C_M оказываются те соседние с M точки, где радиус кривизны R больше, чем R_M, а внутри — те, где R меньше R_M. Иначе говоря, двигаясь

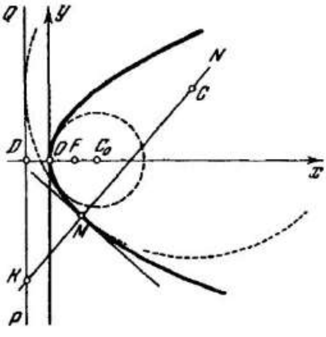


Рис. 183.

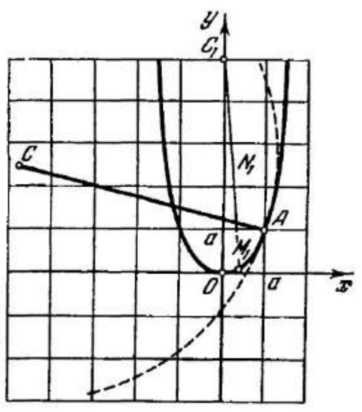


Рис. 184.

вдоль линии в сторону возрастания радиуса кривизны и проходя через точку M, мы выходим изнутри круга C_M наружу.

Исключение составляют, разумеется, те точки, где радиус кривизны имеет экстремальное значение. Так, вблизи вершины O, где радиус кривизны параболы имеет минимальное значение, парабола целиком лежит вне круга кривизны C_0. Такое же явление и по той же причине наблюдается вблизи вершины A эллипса $ABA'B'$ (рис. 181). Напротив, вблизи вершины B, где радиус кривизны эллипса имеет максимальное значение, эллипс (см. рис. 180) располагается целиком внутри соответствующего круга кривизны C.

Пример 3. Найти центр и радиус кривизны линии $a^3y = x^4$ (парабола четвертой степени, рис. 184) в точках $A(a, a)$ и $O(0, 0)$.

Решение. Находим

$$y = \frac{x^4}{a^3}, \quad y' = \frac{4x^3}{a^3}, \quad y'' = \frac{12x^2}{a^3}.$$

В точке A имеем

$$y' = 4, \quad y'' = \frac{12}{a}.$$

По формулам (3а) находим

$$x_C = x - y' \frac{1+y'^2}{y''} = a - 4 \cdot \frac{17a}{12} = -4\frac{2}{3}a,$$

$$y_C = y + x' \frac{1+y'^2}{y''} = a + \frac{17a}{12} = 2\frac{5}{12}a.$$

По формуле (13′) находим

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = R_A = \sqrt{\left(-5\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(1\frac{5}{12}a\right)^2} = \frac{17}{12}\sqrt{17}a \approx 5{,}84a.$$

Двигаясь вдоль данной линии от ее вершины O вправо и проходя через точку A, мы выходим изнутри круга кривизны C наружу.

В вершине O имеем $y''=0$. Следовательно, в вершине O радиус кривизны бесконечен

$$R_0 = \infty.$$

Роль круга кривизны играет касательная Ox.

Замечание 6. Нормаль M_1N_1 (рис. 184), проведенная через точку M_1, стремящуюся к O, пересекает нормаль Oy в точке C_1, которая удаляется в бесконечность по мере приближения M_1 к O. При этом окружность радиуса C_1O с центром в C_1 вблизи точки O стремится к слиянию с прямой Ox.

§ 131а. Задачи к § 131

Во всех нижеследующих задачах надо выполнить соответствующий чертеж.

Рекомендуется наметить хотя бы грубо положение центра кривизны (в пересечении близких нормалей). Результаты вычисления сопоставить с результатами измерения.

В задачах 1—5 требуется найти центр и радиус кривизны, а также начертить круг кривизны.

1. Линии $x=at^2$, $y=at^3$ (полукубическая парабола) в точке $t=1$.

2. Линии $y=ae^{\frac{x}{a}}$ (логарифмика) в точке пересечения с осью Oy.

3. Линии $x=2a\cos t$, $y=a\sin t$ (эллипс со сжатием 0,5) в точке $t=\frac{\pi}{4}$.

4. Линии $y=\cos x$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$.

5. Равносторонней гиперболы с полуосью a в вершине A гиперболы.

Пояснение. Указать положение центра кривизны относительно самой гиперболы—безотносительно к системе координат; последнюю можно выбрать произвольно (направив оси, скажем, по осям или по асимптотам); можно также воспользоваться параметрическими уравнениями, скажем уравнениями $x=a\sec u$, $y=a\operatorname{tg} u$.

6. Дана точка F—фокус параболы и прямая PQ—директриса. Построить (линейкой и циркулем) центр кривизны параболы в точке M_0, совпадающей с одним из концов хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к оси. Выразить радиус кривизны M_0C через параметр параболы.

7. Около точки O, взятой на окружности диаметра a с центром в точке Q, вращается луч OU. От точки N_1, где этот луч (или его продолжение за точку O) вторично встречает окружность, откладывается по направлению луча OU отрезок $NM=a$. Линия, описываемая точкой M,

называется *кардиоидой*. Найти зависимость радиуса кривизны кардиоиды от угла поворота φ луча OU ($\varphi = \angle QOM$).

8. Найти наименьший радиус кривизны логарифмики

$$y = ae^{\frac{x}{a}}.$$

9. Через произвольную точку M логарифмики (см. задачу 8) проводятся: 1) нормаль, пересекающая ее асимптоту в точке N, 2) касательная, пересекающая асимптоту в точке T. Из точки T проводится прямая TQ, перпендикулярная к асимптоте. Эта прямая пересекает нормаль MN в некоторой точке Q. Доказать, что отрезок NQ равен радиусу кривизны логарифмики в точке M (следовательно, чтобы построить центр кривизны C, достаточно продолжить нормаль за точку Q на расстояние $QC = NM$).

Указание. Вычислить алгебраическую величину отрезка NT и сопоставить ее с соответствующей проекцией вектора $\overrightarrow{MC}$ (C — центр кривизны).

10. Через точку M цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ проведена нормаль, пересекающая ось Ox (директриса цепной линии) в точке N. На продолжении отрезка NM за точку M откладывается отрезок $MD = NM$. Доказать, что точка D есть центр кривизны цепной линии (в точке M).

Указание. Можно, как в задаче 9, сопоставить проекцию вектора $\overrightarrow{MC}$ на ось Ox с проекцией вектора $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{NM}$. Но удобнее проектировать эти векторы на ось Oy.

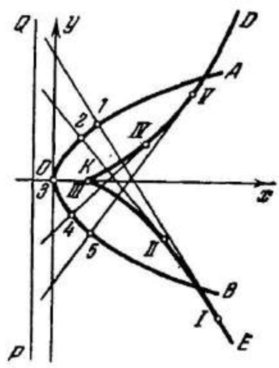


Рис. 185.

§ 132. Эволюта плоской линии

Определение. Геометрическое место центров кривизны плоской линии AB называется *эволютой* этой линии[1]).

На рис. 185 изображена эволюта DKE параболы AOB. На параболе отмечены точки *1, 2, 3, 4, 5*. Римскими цифрами отмечены соответственные точки эволюты. Способ их построения объяснен в § 131 (пример 2).

Формулы

$$x_C = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \qquad y_C = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \tag{1}$$

выражающие координаты центра кривизны C линии AB, являются вместе с тем параметрическими уравнениями ее эволюты. Если удается исключить из уравнений (1) параметр, то получается уравнение, связывающее координаты точек эволюты.

Пример 1. Найти эволюту параболы $y^2 = 2px$.

---

[1]) Происхождение этого названия выяснится в § 133.

Решение. В примере 2 § 131 мы нашли следующие выражения для координат центров кривизны C:

$$x_C=\frac{3y^2}{2p}+p\ ,\qquad y_C=-\frac{y^3}{p^2}.$$

Чтобы исключить параметр y, представим эту систему в виде

$$\frac{2}{3}p\,(x_C-p)=y^2\ ,\quad p^2y_C=-y^3\ .$$

В первом из этих уравнений возведем обе части в куб, а во втором — в квадрат. Сопоставив полученные два уравнения, найдем уравнение

$$27py_C^2=8\,(x_C-p)^3\ .$$

Оно представляет полукубическую параболу с вершиной K $(p,\ 0)$.

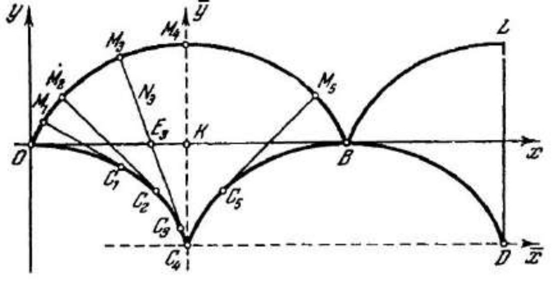


Рис. 186.

Пример 2. Найти эволюту циклоиды

$$x=a\,(t-\sin t),\qquad y=a\,(1-\cos t).\tag{2}$$

Решение. По формулам (1) находим

$$x_C=a\,(t+\sin t),\qquad y_C=-a\,(1-\cos t).\tag{3}$$

Сложив почленно второе уравнение (2) со вторым уравнением (3), получим

$$y+y_C=0.$$

Отсюда следует, что середина E отрезка MC (рис. 186) лежит на оси Ox циклоиды.

Значит, чтобы построить центр кривизны C циклоиды в точке M, достаточно продолжить нормаль MN за точку E, где она пересекает ось Ox на расстоянии $EC=ME$. Это дает простой способ построения эволюты.

Легко заметить, что эволюта OC_4BD данной циклоиды OM_4BL есть циклоида, конгруентная с данной, но смещенная вдоль основания OB на половину OK этого основания ($OK=\pi a$) и опущенная под основание на расстояние KC_4, равное высоте циклоиды ($KC_4=2a$).

Чтобы доказать это свойство циклоиды, достаточно перенести начало координат в точку $C_4\,(\pi a,\ -2a)$.

Тогда новые координаты $\overline{x}_C$, $\overline{y}_C$ центра кривизны будут

$$\overline{x}_C = x_C - \pi a, \quad \overline{y}_C = y_C + 2a.$$

Подставив сюда выражения (3), получим

$$\overline{x}_C = a\,(t - \pi + \sin t), \quad \overline{y}_C = a\,(1 + \cos t)$$

или

$$\overline{x}_C = a\,[(t - \pi) - \sin(t - \pi)], \quad \overline{y}_C = a\,[1 - \cos(t - \pi)]. \tag{4}$$

Если положить здесь $t - \pi = \overline{t}$, то уравнения (4) будут отличаться от уравнений (2) только обозначениями.

Замечание. На примерах 1 и 2 обнаруживается следующее свойство: *нормаль данной линии* (OM_4B на рис. 186) *касается ее эволюты* (OC_4B) (точкой касания служит соответствующий центр кривизны C).

Это свойство имеет место для эволюты любой линии AB при условии, что радиус кривизны $MC = R$ линии AB обладает в рассматриваемой точке M производной $\frac{dR}{dt}$, отличной от нуля.

§ 133. Эвольвента плоской линии

Определение. Линия AB (рис. 187) называется *эвольвентой* плоской линии $A'B'$, если $A'B'$ есть эволюта линии AB[1]).

Разыскание уравнений эвольвенты AB по данным уравнениям эволюты $A'B'$ связано с бо́льшими трудностями, чем решение обратной задачи. Поэтому мы ограничимся изложением механического построения эвольвенты. Это построение применимо ко всякой линии $A'B'$, имеющей непрерывно меняющуюся касательную и не содержащей точек перегиба.

Осуществив линию $A'B'$ (рис. 187) материально, закрепим в точке B' один конец нерастяжимой нити и будем наматывать нить на линию $A'B'$, как на катушку, оставляя нить все время натянутой. Другой, свободный, конец нити опишет при этом линию BA. Ту же линию, но в обратном направлении, опишет свободный конец нити, если мы будем развертывать нить, сматывая ее с линии $A'B'$ (опять-таки оставляя нить в натянутом состоянии).

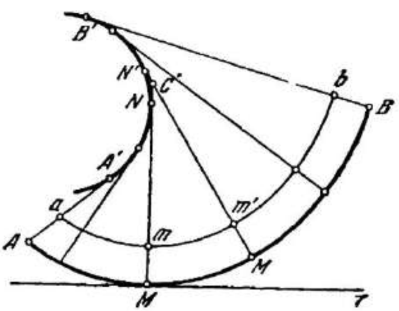


Рис. 187.

В любом своем промежуточном положении M свободный конец будет двигаться по направлению, перпендикулярному к нити. Действительно, смещаться по направлению, составляющему острый угол с лучом NM, точка M не может, так как при этом нить подверглась бы растяжению; тупой угол тоже не может образоваться, так как нить остается натянутой. Итак, точка M должна двигаться по направлению, перпендикулярному к нити NM, а последняя, очевидно, совпадает с касательной к линии $A'B'$.

[1]) Латинский термин «эвольвента» означает «развертка», а слово «эволюта» означает «развернутая». Происхождение этих наименований выясняется несколькими строками ниже.

Итак, касательная NM к линии $A'B'$ перпендикулярна к касательной MT линии AB, т. е. является нормалью линии $A'B'$.

Зафиксируем на линии $A'B'$ какую-либо точку N и рассмотрим переменную точку N', которая приближается к N вдоль линии $A'B'$. Точка C', где пересекаются касательные NM, $N'M'$, при этом смещается вдоль прямой NM и стремится к точке N. С другой стороны, прямые NM, $N'M'$ являются нормалями к линии AB. Так как точка C', где эти нормали пересекаются, стремится к точке N, то N есть центр кривизны линии AB (в точке M).

Но точка N была взята на линии $A'B'$ произвольно. Значит, линия $A'B'$ есть геометрическое место центров кривизны линии AB, т. е. $A'B'$ есть эволюта линии AB. Стало быть, AB есть эвольвента линии $A'B'$.

Из указанного построения явствует, что *всякая плоская линия $A'B'$ имеет бесчисленное множество эвольвент*. На рис. 187, кроме линии AB изображена еще одна эвольвента ab линии $A'B'$.

У двух эвольвент AB, ab одной и той же линии $A'B'$ все нормали общие, а отрезок нормали, заключенный между двумя эвольвентами, имеет постоянную длину, так что линии AB, ab как бы параллельны друг другу.

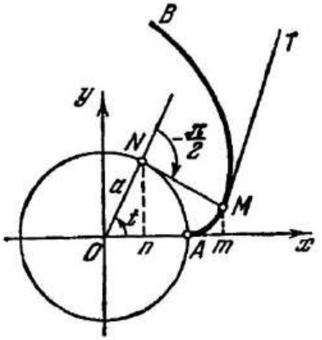


Рис. 188.

Замечание 1. Вышеприведенные соображения, разумеется, не являются математическим доказательством, но они подсказывают *идею* математического решения задачи. Это будет видно из следующего примера.

Пример. Найти эвольвенту окружности радиуса a.

Решение. Найдем линию AB, которую описывает свободный конец нити NM (рис. 188), наматываемый на окружность O, как на катушку. Затем мы докажем, что найденная линия действительно является эвольвентой окружности.

Обозначим буквой A ту точку окружности, с которой совместится точка M, когда нить полностью навернется на катушку, и, приняв точку O за начало координат, направим ось Ox по лучу OA.

Обозначим через t угол AON и представим окружность O параметрическими уравнениями

$$X = a\cos t, \quad Y = a\sin t.$$

Чтобы получить параметрические уравнения линии AB, учтем, что луч NM получается из луча ON поворотом (около точки N) на угол $-\frac{\pi}{2}$. А так как свободный отрезок NM нити по длине равен дуге AN, с которой он совместится, то проекции X_1, Y_1 вектора $\overrightarrow{NM}$ суть

$$X_1 = |\overrightarrow{NM}|\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = at\sin t,$$

$$Y_1 = |\overrightarrow{NM}|\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -at\cos t.$$

Координаты же x, y точки M суть проекции вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} x&=X+X_1=a\cos t+at\sin t,\\ y&=Y+Y_1=a\sin t-at\cos t.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Таковы параметрические уравнения линии AB.

Докажем, что эта линия является эвольвентой окружности O. Для этого найдем уравнения эволюты линии AB по формулам (1) § 132. Получим

$$x_C=a\cos t,\quad y_C=a\sin t.$$

Мы получили уравнения окружности O. Значит, окружность O есть эволюта линии AB; стало быть, линия AB есть эвольвента окружности O.

Замечание 2. Совершенно аналогично решается задача о разыскании эвольвенты и в общем случае. Дело сводится, таким образом, к разысканию длины дуги AN данной линии $A'B'$. В случае, когда линия $A'B'$ есть окружность, это нетрудно. Для других линий мы пока не умеем этого сделать.

Замечание 3. На рис. 189 эвольвента окружности продолжена дальше, чем на рис. 188: отрезок AB_1 в результате наматывания совместится с полной окружностью O, а отрезок AB_2 накроет эту окружность дважды.

Чем дальше от окружности O отходит эвольвента (1), тем более она сходна с архимедовой спиралью

$$\rho=a\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

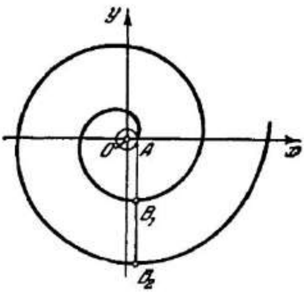


Рис. 189.

с которой эвольвента (1) неограниченно сближается. Так кратчайшее расстояние от конца первого завитка спирали (2) до эвольвенты (1) составляет всего 1% от шага $2\pi a$ спирали.

§ 133а. Задачи к §§ 132—133

1. Построить эволюту цепной линии (пользуясь, например, свойством, указанным в задаче 10 § 131а). Составить уравнения эволюты.

2. Построить эллипс, провести ряд его нормалей и, пользуясь свойством, указанным в замечании § 132, очертить эволюту эллипса. Отнеся эллипс к его осям, составить уравнение эволюты эллипса.

3. Та же задача для гиперболы.

4. Построить по точкам кардиоиду (§ 131а, задача 7), очертить ее эволюту и, составив параметрические уравнения последней, доказать, что эволюта кардиоиды есть кардиоида втрое меньших размеров.

§ 134. Кривизна

Сравнивая между собой две линии (скажем, два изогнутых стержня), мы часто замечаем, что одна из них искривлена больше, чем другая. Одна и та же линия вблизи различных своих точек тоже бывает искривлена в одном месте в большей степени, а в другом — в меньшей.

Численная мера искривленности линии в той или иной ее точке называется *кривизной*. Нам предстоит установить точное определение этого понятия. Установить его надо в соответствии с тем смыслом, который имеет слово «кривизна» в разговорной речи.

Так, кривую линию мы противопоставляем прямой. Значит, кривизну надо определить так, чтобы в силу этого определения кривизна прямой линии равнялась нулю.

Далее, из общего определения кривизны должно следовать, что окружность имеет во всех своих точках одну и ту же кривизну, что и равные окружности имеют также равные кривизны и что из двух неравных окружностей большую кривизну имеет та, у которой радиус меньше.

Исходя из этих требований, мы можем принять за кривизну *окружности* величину, обратно пропорциональную ее радиусу, например величину $\frac{1}{R}$.

Разумеется, вместо величины $\frac{1}{R}$ можно было бы принять за меру искривленности окружности величину $\frac{1}{2R}$ или $\frac{1}{2\pi R}$ и т. п. Ничто также не мешало бы считать кривизну величиной, обратно пропорциональной квадрату радиуса, скажем величину $\frac{1}{R^2}$ или $\frac{1}{\pi R^2}$ и т. д. Но практических преимуществ при этом не получается, а с математической точки зрения выражение $\frac{1}{R}$ проще многих других. Поэтому величина $\frac{1}{R}$ и принимается за кривизну окружности радиуса R.

Заметим, что численное значение кривизны данной окружности *зависит от выбора единицы масштаба*. В соответствии с этим кривизна окружности радиуса $R = 25$ *см* выражается именованным числом $0{,}04\ \frac{1}{см}$, или $0{,}004\ \frac{1}{мм}$, или $4\ \frac{1}{м}$ и т. д.

За кривизну *произвольной* линии AB естественно принять величину $\frac{1}{R}$, обратную *радиусу кривизны* этой линии. Таким образом, мы приходим к следующему определению кривизны.

Определение. *Кривизна K линии AB в данной ее точке M есть величина $\frac{1}{R}$, обратная радиусу кривизны R линии AB в рассматриваемой точке*

$$K = \frac{1}{R}. \tag{1}$$

Если в точке M линия AB обладает бесконечным радиусом кривизны ($R=\infty$), то кривизна ее считается равной нулю $\left(K=\frac{1}{\infty}=0\right)$. Поэтому *кривизна прямой линии во всякой ее точке оказывается равной нулю.*

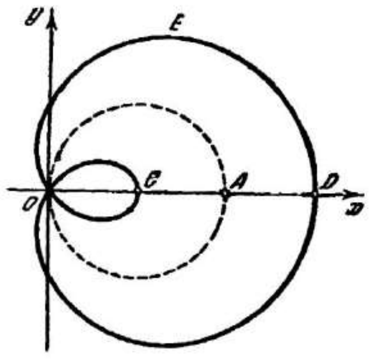


Рис. 190.

Из определения кривизны и из формулы (13) § 131 непосредственно следует, что кривизна линии

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

выражается формулой

$$K=\frac{1}{R}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

В частности, если линия представляется уравнением вида $y=f(x)$, то

$$K=\frac{1}{R}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Пример. Вычислить кривизну улитки Паскаля

$$x=\left(a\cos\varphi+\frac{a}{2}\right)\cos\varphi, \quad y=\left(a\cos\varphi+\frac{a}{2}\right)\sin\varphi \tag{4}$$

и, в частности, найти кривизну этой линии в ее узловой точке O (рис. 190; см. пример 3 § 85).

Решение. Из уравнений (4) находим

$$x'=-a\left(\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\right), \quad y'=a\left(\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi\right),$$

$$x''=-a\left(2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi\right), \quad y''=-a\left(2\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\right).$$

Отсюда

$$x'y''-y'x''=a^2\left[2(\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi)+\frac{1}{4}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}(\sin 2\varphi\sin\varphi+\cos 2\varphi\cos\varphi)\right]=a^2\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\cos\varphi\right),$$

$$x'^2+y'^2=a^2\left[(\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi)+\frac{1}{4}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\right.$$
$$\left.+(\sin 2\varphi\sin\varphi+\cos 2\varphi\cos\varphi)\right]=a^2\left(\frac{5}{4}+\cos\varphi\right).$$

По формуле (2) находим

$$K=\frac{a^2\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\cos\varphi\right)}{a^3\left(\frac{5}{4}+\cos\varphi\right)^{3/2}}=\frac{6}{a}\cdot\frac{3+2\cos\varphi}{(5+4\cos\varphi)^{3/2}}. \tag{5}$$

Узловой точке O соответствуют значения

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi\,(120^\circ) \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{4}{3}\pi\,(240^\circ).$$

В том и другом случаях формула (5) дает

$$K = \frac{4}{a\sqrt{3}}.$$

§ 135. Другое определение кривизны

Теорема. Кривизна K линии AB

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

в точке M есть предел, к которому стремится отношение угла ω между касательными MT, M_1T_1 (рис. 191) к хорде MM_1, когда точка M_1 стремится к M вдоль линии AB

$$K = \lim_{M_1 \to M} \frac{\omega}{|MM_1|}. \tag{1}$$

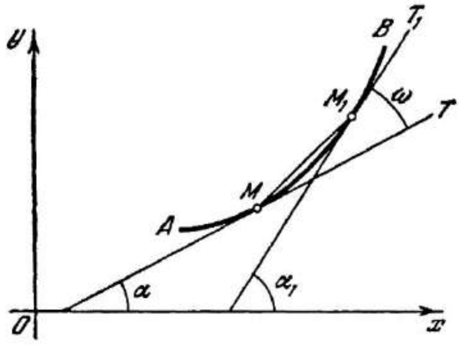


Рис. 191.

Пояснение. Говоря «угол между касательными», мы подразумеваем острый угол, считая его положительной величиной (см. I, § 20).

Доказательство. Обозначим через α угол наклона касательной к оси Ox; как мы знаем, он удовлетворяет равенству

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'}. \tag{2}$$

Угол ω есть абсолютная величина приращения $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha$ угла α: $\omega = |\alpha_1 - \alpha| = |\Delta\alpha|$. Следовательно,

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\omega}{|MM_1|} = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{MM_1} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right| : \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{MM_1}{\Delta t} \right|. \tag{3}$$

Вычислим сначала делимое; так как предел отношения $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ есть производная $\frac{d\alpha}{dt}$, то

$$\lim \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|.$$

Учитывая равенство (2), получаем

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}=\frac{1}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)=\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}.$$

Следовательно,

$$\lim\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|=\frac{|x'y''-y'x''|}{x'^2+y'^2}. \tag{4}$$

Теперь вычислим делитель выражения (3). Так как

$$|MM_1|=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \text{ то}$$

$$\lim\left|\frac{MM_1}{\Delta t}\right|=\lim\left|\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}\right|=\lim\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x'^2+y'^2}. \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в (3), находим

$$\lim\frac{\omega}{|MM_1|}=\frac{|x'y''-y'x''|}{x'^2+y'^2}:\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (2) § 134, получаем

$$K=\lim\frac{\omega}{|MM_1|}, \tag{1}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Позднее (в интегральном исчислении) будет установлено, что бесконечно малая хорда MM_1 и стягиваемая ею дуга $\smile{MM_1}$ эквивалентны:

$$|MM_1|\approx\smile{MM_1}. \tag{6}$$

Значит кривизну K можно представить также следующей формулой:

$$K=\lim\frac{\omega}{\smile{MM_1}}. \tag{1a}$$

Словами: кривизна K линии AB в данной ее точке M есть предел, к которому стремится отношение угла ω между касательными MT, M_1T_1 *к длине дуги* $\smile{MM_1}$, когда точка M_1 стремится к M вдоль линии AB.

Это свойство часто принимается за *определение* кривизны, и тогда радиус кривизны определяется как величина, обратная кривизне. Но чтобы со всей строгостью вывести отсюда формулы для кривизны K и радиуса кривизны R, необходимо доказать эквивалентность хорды MM_1 и дуги $\smile{MM_1}$. Для этого надо знать, как определяется длина дуги *произвольной* линии, а мы этого пока не знаем.

§ 135a. Задачи к §§ 134—135

1. Найти кривизну эллипса с полуосями a, b в вершинах A, B эллипса.
2. Найти кривизну гиперболы с полуосями a, b в вершине гиперболы.
3. Определить, в каких точках параболы $y^2=2px$ ее кривизна составляет $\frac{0{,}512}{p}$.
4. Найти кривизну линии $x^2+xy+y^2=3$ в точке (1; 1).

§ 136. Параметрическое задание пространственной линии

Рассматривая плоскую линию как след движущейся точки, мы представляем эту линию параметрическими уравнениями вида

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t).$$

Таким же образом пространственную линию можно представить параметрическими уравнениями вида

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t). \tag{1}$$

Здесь t (параметр) есть какая-либо переменная величина, от которой зависит положение движущейся точки $M(x, y, z)$. В механике за параметр часто принимают время, и тогда уравнения (1) определяют положение движущейся точки M в данный момент времени.

Но параметром может служить и любая другая физическая или геометрическая величина, если каждому значению, которое он может принять, соответствует определенное положение точки M. В частности, за параметр можно принять абсциссу x — *при условии, что рассматриваемая линия AB пересекает каждую плоскость, перпендикулярную к оси Ox, не более чем в одной точке*. Тогда линия AB представится уравнениями

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \tag{2}$$

[первое из уравнений (1) обращается в тождество $x = x$].

Замечание 1. Если линия AB лежит в плоскости R, перпендикулярной к оси Oz, то уравнения (2) имеют вид

$$y = \varphi(x), \quad z = c; \tag{3}$$

функция $\psi(x)$ оказывается постоянной величиной c, выражающей расстояние плоскости R от координатной плоскости xOy. Уравнение $z = c$ часто подразумевают, но не записывают, и тогда линия AB представляется уравнением привычного вида

$$y = \varphi(x).$$

Замечание 2. Линию, лежащую в плоскости Q, перпендикулярной к оси Oy, можно представить параметрическими уравнениями вида $y = b$, $z = \psi(x)$; они аналогичны уравнениям (3) и тоже являются частным видом уравнений (2). Но линию, лежащую в плоскости P, перпендикулярной к оси Ox, уравнениями вида (2) представить нельзя. Действительно, все точки такой линии имеют одну и ту же абсциссу, поэтому положение точки M заданием абсциссы x не определяется.

Пример 1. Составим параметрические уравнения прямой UV, проведенной через точку $M_0(2; -1; 0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}\{3; 5; 7\}$.

Решение. Установим на прямой UV свою систему координат, как мы это делали в I, § 146, а именно: за начало координат примем точку M_0, за положительное направление — направление вектора $\boldsymbol{a}$ и за единицу масштаба — отрезок, равный вектору $\boldsymbol{a}$ по длине. Тогда координатой t точки M, произвольно взятой на прямой UV, будет число t, равное отношению вектора $\overrightarrow{M_0M}$ к вектору $\boldsymbol{a}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}.$$

Следовательно,

$$x-2=3t, \quad y+1=5t, \quad z=7t,$$

или

$$x=3t+2, \quad y=5t-1, \quad z=7t. \tag{4}$$

Мы получили параметрические уравнения вида (1), представляющие данную прямую UV.

Замечание 3. Данную линию можно представить различными параметрическими уравнениями, так как за параметр можно принимать различные величины. Если уже известна одна система параметрических уравнений, то любая другая система получается из прежней, если в ней заменить параметр t некоторой функцией нового параметра t_1.

Пример 2. Покажем, что прямую UV, рассмотренную в примере 1, можно представить также параметрическими уравнениями

$$x=5+9t, \quad y=4+15t, \quad z=7+21t. \tag{5}$$

Заметим прежде всего, что прямая (4) проходит через точку $M_1(5; 4; 7)$ (эта точка соответствует значению $t=1$ прежнего параметра t). Установим на прямой UV новую систему координат, приняв за начало точку M_1, а за единицу масштаба — отрезок, равный по длине вектору $3\boldsymbol{a}=\{9; 15; 21\}$; положительное направление сохраним прежнее. Обозначив через t_1 новую координату точки $M(x, y, z)$, произвольно взятой на прямой UV, и рассуждая, как в примере 1, мы получим параметрические уравнения (5).

Уравнения (5) можно получить и непосредственно из системы (4), если в ней заменить параметр t выражением

$$t=1+3t_1.$$

Пример 3. Составить параметрические уравнения прямой (4), приняв за параметр абсциссу x.

Решение. Уравнение $x=3t+2$ устанавливает зависимость между старым параметром t и новым параметром $x\ (=t_1)$. Из этого уравнения находим выражение старого параметра через новый:

$$t=\frac{x-2}{3}. \tag{6}$$

Если теперь заменить в уравнениях (4) параметр t его выражением (6), то получим новые параметрические уравнения прямой UV:

$$y=\frac{1}{3}(5x-13), \quad z=\frac{7}{3}(x-2)$$

[первое из уравнений (4) обращается в тождество $x=x$].

Замечание 4. Чтобы узнать, лежит ли линия, заданная параметрическими уравнениями (1) на некоторой поверхности S, достаточно подставить выражения (1) в уравнение поверхности. Если последнее обратится в тождество, то линия (1) лежит на поверхности S; в противном случае линия (1), взятая в целом, на поверхности S не лежит (хотя может иметь с поверхностью общие точки и даже общие участки).

Пример 4. Определить, лежит ли прямая линия

$$x=-2+t, \qquad y=3+2t, \qquad z=1-2t \tag{7}$$

на поверхности гиперболического параболоида

$$z-\frac{1}{2}=\frac{2x^2}{7}-\frac{y^2}{14}. \tag{8}$$

Решение. Подставив выражения (7) в уравнение (8), получаем тождество $\frac{1}{2}-2t=\frac{1}{2}-2t$. Значит, прямая (7) лежит на поверхности (8).

Замечание 5. Если установлено, что некоторая линия AB лежит как на поверхности S_1, так и на поверхности S_2, то это значит, что линия AB лежит на пересечении поверхностей S_1, S_2. Однако отсюда не следует, что на линии AB лежат все точки пересечения поверхностей S_1, S_2. Так, прямая (7) лежит как на гиперболическом параболоиде (8), так и на плоскости

$$y+z-4=0. \tag{9}$$

Но на прямой (7) лежат *не все* общие точки поверхностей (8) и (9). Действительно, плоскость (9) пересекает гиперболоид (8) по двум прямолинейным образующим (см. I, § 158); одна из них есть прямая (7).

§ 137. Винтовая линия

Определение. Пусть точка M (рис. 192) равномерно движется по образующей QR круглого цилиндра, а сама образующая равномерно вращается вокруг оси цилиндра. Тогда точка M описывает пространственную кривую AMC, называемую *винтовой линией* (так как именно эта линия применяется для нарезки винтов).

Радиусом винтовой линии называется радиус $OA = a$ цилиндра, несущего винтовую линию. *Осью* винтовой линии называется ось этого цилиндра.

Винтовая линия называется *правой* (рис. 193,*а*), если для наблюдателя, к которому точка M *приближается*, вращение ее около оси происходит против стрелки часов; если же вращение точки M, приближающейся к наблюдателю, происходит по стрелке часов, то винтовая линия называется *левой* (рис. 193,б).

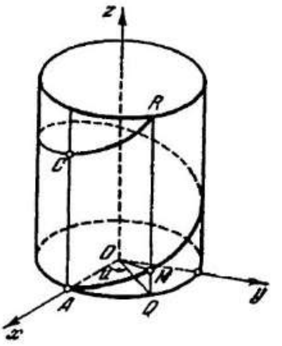


Рис. 192.

Отрезок $AC = h$, на который смещается точка M вдоль образующей при полном обороте последней, называется *шагом* винтовой линии. Шаг правой винтовой линии считается положительным, шаг левой — отрицательным.

Замечание 1. Правизна или левизна есть свойство, присущее самой винтовой линии и не зависящее от той или иной позиции наблюдателя. Предположим, например, что вы отвинчиваете гайку и для этого должны вращать ее против стрелки часов. Тогда вы назовете винтовую линию, нарезанную на болте, правой. Для вашего товарища, стоящего лицом к вам по другую сторону болта, вращение гайки происходит, разумеется, по стрелке часов. Однако при этом гайка *удаляется* от него. Гайка будет приближаться к нему при *завинчивании*, а тогда он будет наблюдать вращение *против* часовой стрелки.

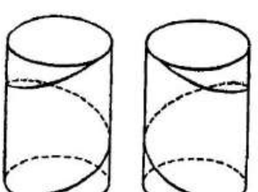


Рис. 193.

Правая и левая винтовые линии несовместимы друг с другом даже в том случае, когда они имеют один и тот же радиус и одинаковую абсолютную величину шага. Так, гайку с правой нарезкой нельзя навинтить ни на какой болт с левой нарезкой.

Зеркальное отражение правой винтовой линии есть левая винтовая линия (и наоборот).

Замечание 2. Окружность радиуса a можно рассматривать как винтовую линию с шагом $h = 0$.

Уравнения винтовой линии. Примем ось цилиндра, несущего винтовую линию, за ось Oz (рис. 192). Ось Ox направим в произвольно выбранную точку A винтовой линии (начальная точка). В качестве параметра возьмем угол, на который поворачивается осевое сечение $OQMR$ цилиндра от своего начального положения OAC.

Проекция Q точки M на плоскость xOy описывает окружность радиуса a. При этом радиус OQ поворачивается от своего начального положения OA на угол $AOQ=u$. Значит, координаты x, y точки M выражаются через параметр u следующими равенствами:

$$x=x_Q=a\cos u, \qquad y=y_Q=a\sin u. \tag{1}$$

Остается выразить через u аппликату z, т. е. смещение QM точки M вдоль образующей. Это смещение пропорционально времени t, протекшему от начального момента. Угол поворота u тоже пропорционален времени t. Следовательно,

$$z=bu, \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности b выражает смещение точки M вдоль образующей при повороте радиуса OA на угол 1 *рад*. Этот поворот происходит против стрелки часов, если смотреть на плоскость xOy сверху. Если винтовая линия правая, то точка M при этом приближается к наблюдателю, т. е. смещение положительно; для левой же винтовой линии коэффициент пропорциональности b отрицательный.

Стало быть, коэффициент b и шаг h спирали имеют одинаковые знаки. Зависимость между b и h мы получим из формулы (2), положив в ней $u=2\pi$, $z=h$. Находим

$$h=2\pi b. \tag{3}$$

Итак, уравнения винтовой линии суть

$$x=a\cos u, \qquad y=a\sin u, \qquad z=bu, \tag{4}$$

где $b=\frac{h}{2\pi}$.

Пример 1. Составить уравнения левой винтовой линии радиуса 6 *см*, у которой длина шага вдвое меньше радиуса.

Решение. Имеем

$$a=6 \text{ см}, \qquad |h|=\frac{6}{2}=3 \text{ см}, \qquad h=-3 \text{ см}.$$

Следовательно, $b=-\frac{3}{2\pi}\approx -0{,}48$ (*см*). Уравнения (4) (при единице масштаба 1 *см*) принимают вид

$$x=6\cos u, \qquad y=6\sin u, \qquad z=-\frac{3}{2\pi}u.$$

Замечание 3. Всякая винтовая линия может двигаться вдоль себя; этим свойством обладают *только* винтовые линии (включая и окружность). Вот почему нарезка болтов, гаек и т. д. делается только по винтовым линиям.

Длина дуги винтовой линии. Длина s дуги винтовой линии, отсчитываемая от начальной точки $u=0$, выражается формулой

$$s=\overset{\smile}{AM}=\sqrt{a^2+b^2}\,|u|. \tag{5}$$

Чисто математическое доказательство этой формулы будет дано в дальнейшем. Здесь же мы привлечем на помощь некоторые механические соображения.

Представим себе, что винтовая линия начерчена на листе бумаги, навернутом на цилиндр (рис. 194). Развернем лист так, чтобы он совпал с плоскостью P, касающейся цилиндра по образующей AC. При этом винтовая линия превратится в прямую (AK на рис. 194).

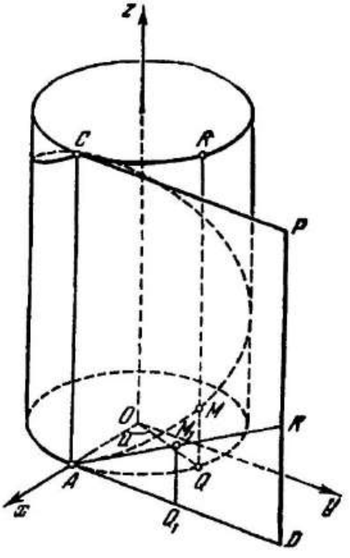


Рис. 194.

Действительно, пусть Q — произвольная точка окружности основания цилиндра. После разворачивания листа дуга $\overset{\smile}{AQ}$ превратится в горизонтальный отрезок AQ_1 той же длины, а отрезок QM образующей, оставаясь вертикальным, перейдет в положение Q_1M_1. При этом будем иметь

$$AQ_1=\overset{\smile}{AQ}=au,\quad Q_1M_1=QM=bu.$$

Следовательно,

$$Q_1M_1:AQ_1=b:a. \tag{6}$$

Так как отрезки AQ_1, Q_1M_1 можно рассматривать как абсциссу и ординату точки M_1 на плоскости P, то из уравнения (6) следует, что геометрическое место точек M_1 есть прямая линия.

Дуга $\overset{\smile}{AM}$ винтовой линии по длине равна отрезку AM_1 прямой AK. Следовательно,

$$\overset{\smile}{AM}=AM_1=\sqrt{AQ_1^2+Q_1M_1^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,|u|,$$

что и утверждалось.

Пример 2. Найти длину одного витка винтовой линии радиуса $a=10$ *мм* с шагом $h=3$ *мм*.

Решение. По формуле (5), полагая в ней $u=2\pi$, находим

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\,2\pi=\sqrt{(2\pi a)^2+(2\pi b)^2}=$$
$$=\sqrt{(2\pi a)^2+h^2}\approx\sqrt{62{,}8^2+3^2}\approx 62{,}9\ (\text{мм}).$$

§ 138. Касательная к пространственной линии

Теорема. Пусть линия AB представляется параметрическими уравнениями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \tag{1}$$

и пусть в точке $t=t_0$ функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ обладают производными x_0', y_0', z_0', из которых по меньшей мере одна отлична от нуля.

Тогда линия AB имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ касательную[1]), которая представляется уравнениями

$$\frac{X-x_0}{x_0'}=\frac{Y-y_0}{y_0'}=\frac{Z-z_0}{z_0'}. \tag{2}$$

Доказательство. Так как вектор $\boldsymbol{a}\{x_0', y_0', z_0'\}$ по условию отличен от нулевого, то уравнения (2) представляют некоторую прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$; вектор $\boldsymbol{a}$ является направляющим вектором этой прямой (см. I, § 144).

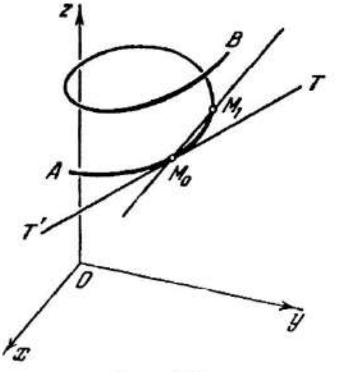


Рис. 195.

Требуется доказать, что прямая $T'T$ в точке M_0 касается линии AB. Проведем секущую M_0M_1 (рис. 195), соединяющую точку M_0 с точкой $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ линии AB. Вектор $\boldsymbol{a}_1\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ есть направляющий вектор этой секущей. Теорема будет доказана, если мы установим, что острый угол между прямыми $T'T$ и M_0M_1 стремится к нулю при $\Delta t \to 0$, т. е. что величина $|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}_1})|$ стремится к единице.

По формуле для угла между векторами (I, § 106) находим

$$\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1})\right|=\frac{|x_0'\Delta x+y_0'\Delta y+z_0'\Delta z|}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $|\Delta t|$, получим

$$\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1})\right|=\frac{\left|x_0'\frac{\Delta x}{\Delta t}+y_0'\frac{\Delta y}{\Delta t}+z_0'\frac{\Delta z}{\Delta t}\right|}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

---

[1]) Определение касательной, данное в § 60, относится как к плоским, так и к неплоским линиям.

Следовательно,

$$\lim \left| \cos (\widehat{aa_1}) \right| = \frac{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}},$$

откуда $\lim \left| \cos (\widehat{aa_1}) \right| = 1$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Составить уравнения касательной к винтовой линии

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu \tag{3}$$

в произвольной ее точке M.

Решение. Из уравнений (3) находим

$$x' = -a \sin u, \quad y' = a \cos u, \quad z' = b.$$

Уравнения (2) принимают вид

$$\frac{X - a\cos u}{-a \sin u} = \frac{Y - a \sin u}{a \cos u} = \frac{Z - bu}{b}. \tag{4}$$

Пример 2. Шаг винтовой линии AB равен окружности основания цилиндра, несущего линию AB. Найти угол, который касательная MT к линии AB составляет с ее осью (точка касания M произвольная).

Решение. По условию имеем

$$|h| = 2\pi a$$

или

$$2\pi |b| = 2\pi a,$$

откуда

$$|b| = a. \tag{5}$$

Направляющие коэффициенты l, m, n касательной в силу уравнений (4) суть

$$l = -a \sin u, \quad m = a \cos u, \quad n = b.$$

Угол γ, образуемый касательной с осью Oz, находится (I, § 139) по формуле

$$\cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Учитывая (5), получаем

$$|\cos \gamma| = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{или} \quad \gamma = -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Стало быть, касательная к данной винтовой линии наклонена к ее оси под постоянным углом 45°.

§ 139. Вектор-функция скалярного аргумента

Предварительное пояснение. Пусть из некоторой точки O проводится вектор $\overrightarrow{OM}$ в точку M (рис. 196), которая описывает в пространстве линию AB. Тогда в течение некоторого промежутка времени каждому моменту t соответствует определенное положение точки M в пространстве. Вместе с тем каждому значению величины t соответствует определенное направление и определенная длина вектора $\overrightarrow{OM}$.

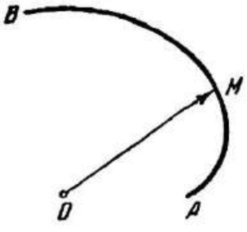


Рис. 196.

По аналогии с ранее установленным (§ 13) понятием функции можно сказать, что вектор $\overrightarrow{OM}$ является *функцией* аргумента t.

Как и прежде, мы можем в качестве аргумента t взять любую физическую или геометрическую (скалярную) величину, определяющую положение точки M на линии AB. Однако теперь функция является *не скалярной*, а *векторной величиной*. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, говорят, что вектор $\overrightarrow{OM}$ является *векторной функцией* (короче, *вектор-функцией*) скалярного аргумента.

Определение. Пусть скалярная величина t изменяется в данной области, и пусть каждому значению, которое эта величина способна принимать, соответствует определенное направление и определенный модуль векторной величины $\boldsymbol{p}$. Тогда величина $\boldsymbol{p}$ называется *вектор-функцией скалярного аргумента* t (ср. определение § 13). Запись:

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t).$$

Начало вектора $\boldsymbol{p}$ может менять свое положение в зависимости от аргумента t. Но в этом случае можно выбрать какую-либо фиксированную точку O и принять ее за начало векторов $\overrightarrow{OM}$, соответственно равных векторам $\boldsymbol{p}$. Тогда конец M, как правило, опишет некоторую линию AB. Она называется *годографом*[1]) вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$.

Замечание. Вектор $\boldsymbol{p}$ есть геометрическая (или физическая) величина, существующая безотносительно к выбору той или иной системы координат. Если же отнести вектор $\boldsymbol{p}$ к некоторой системе координат $Oxyz$, то координаты X, Y, Z вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$ окажутся обычными («скалярными») функциями аргумента t.

[1]) От греческого слова hódos — путь.

Таким образом, задание вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$ *при дополнительном задании системы координат* равносильно заданию трех скалярных функций вида

$$X=f(t), \qquad Y=\varphi(t), \qquad Z=\psi(t). \tag{1}$$

Обратно, задание трех функций (1) равносильно заданию одной вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$, которая представляется уравнением

$$\boldsymbol{p}(t)=f(t)\,\boldsymbol{i}+\varphi(t)\,\boldsymbol{j}+\psi(t)\,\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Пример. Пусть точка N (рис. 197) описывает винтовую линию AB радиуса a с шагом $h=2\pi a$; с точкой N соединен отрезок NK длины a, направленный по касательной NT в сторону движения точки N.

Каждому значению параметра u, от которого зависит положение точки N на винтовой линии, соответствует определенное направление вектора $\overrightarrow{NK}$, а также определенная его длина (в данном случае эта длина постоянна). Значит, вектор $\overrightarrow{NK}=\boldsymbol{p}$ есть вектор-функция скалярного аргумента u.

Начало N вектора $\overrightarrow{NK}$ меняет свое положение в зависимости от аргумента u. Однако можно привести все векторы $\overrightarrow{NK}$ к произвольно выбранному общему началу. Для большей наглядности возьмем общее начало в какой-либо точке O' оси uv данной винтовой линии.

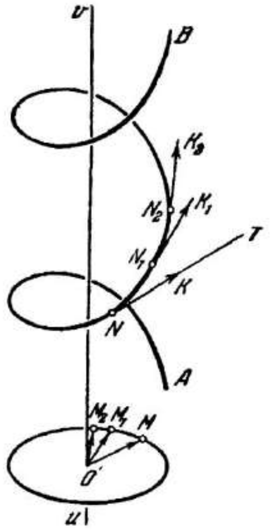


Рис. 197.

Конец M вектора $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{NK}$ опишет линию, которая является годографом данной вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$. Этот годограф является окружностью радиуса $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, плоскость которой перпендикулярна к оси uv, а центр лежит на оси uv (на расстоянии $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ от точки O'). Действительно, касательная NT данной винтовой линии, как мы знаем (§ 138, пример 2) составляет угол 45° с осью uv. Значит, вектор $\boldsymbol{p}(u)$ описывает боковую поверхность круглого конуса, у которого образующая имеет длину a и составляет с осью uv угол 45°.

Введем теперь систему координат $Oxyz$, как объяснено в § 137. Тогда вектор $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{NK}$ приобретает три координаты X, Y, Z, каждая из которых является скалярной функцией аргумента u. Найдем эти функции.

Вектор $\overrightarrow{NK}$ направлен по касательной NT, направляющие коэффициенты которой суть

$$l = -a\sin u, \qquad m = a\cos u, \qquad n = b = a$$

(§ 138, пример 1).

Длина вектора $\overrightarrow{NK}$ есть a. Значит,

$$\left.\begin{aligned}
X &= a\cos(\overrightarrow{NK},\ \boldsymbol{i}) = a\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u,\\
Y &= a\cos(\overrightarrow{NK},\ \boldsymbol{j}) = a\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u,\\
Z &= a\cos(\overrightarrow{NK},\ \boldsymbol{k}) = a\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Таковы выражения координат вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$. Система (3) равносильна одному векторному уравнению

$$\boldsymbol{p}(u) = \overrightarrow{NK} = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u\boldsymbol{i} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u\boldsymbol{j} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Таково выражение вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$ через орты координатных осей в системе $Oxyz$. Если начало координат перенести в точку O' (не меняя направления осей), то координаты вектора $\boldsymbol{p}$ не изменятся. А так как начало вектора $\overrightarrow{O'M} = \boldsymbol{p}$ совпадает с началом координат, то величины X, Y, Z являются не только координатами вектора $\overrightarrow{O'M}$, но также и координатами его конца M. Поэтому годограф функции $\boldsymbol{p}(u)$, т. е. окружность, описываемая точкой M (в системе $O'x'y'z'$), представляется уравнениями

$$x = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u, \quad y = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, \quad z = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§ 140. Предел вектор-функции

Определение. Постоянный вектор $\boldsymbol{b}$ называется *пределом вектор-функции* $\boldsymbol{p}(t)$ при $t \to a$ (или при $t \to \infty$):

$$\boldsymbol{b} = \lim_{t \to a} \boldsymbol{p}(t), \tag{1}$$

если *модуль* разности векторов $\boldsymbol{p}(t)$ и $\boldsymbol{b}$ стремится к нулю при

$t \to a$, т. е. если

$$\lim_{t \to a} |\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{b}| = 0. \qquad (2)$$

Пояснение. Отнесем переменный вектор $\boldsymbol{p}(t)$ и постоянный вектор $\boldsymbol{b}$ к общему началу O (рис. 198). Разность $\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{b}$ представляет вектор $\overrightarrow{BM}$. Модуль $|\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{b}|$ этой разности есть длина вектора $\overrightarrow{BM}$, т. е. некоторая *скалярная* функция аргумента t. Условие (2) требует, чтобы расстояние между неподвижной точкой B и подвижной точкой M стремилось к нулю при $t \to a$. Иными словами, точка M должна стремиться к совпадению с точкой B.

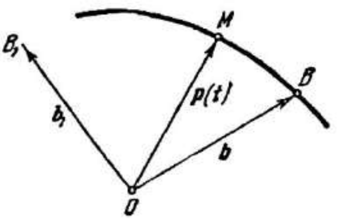


Рис. 198.

Из определения следует, что вектор $\boldsymbol{p}(t)$ стремится к нуль-вектору в том и только в том случае, когда его модуль стремится к нулю. В этом случае вектор $\boldsymbol{p}(t)$ называется *бесконечно малым*. *Порядком малости* такого вектора называется порядок малости его модуля.

Отметим следующие свойства предела вектор-функции.

Свойство 1. Если вектор $\boldsymbol{b}$ есть предел вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$, то координаты X_0, Y_0, Z_0 вектора $\boldsymbol{b}$ являются пределами соответственных координат $X = f(t)$, $Y = \varphi(t)$, $Z = \psi(t)$ вектора $\boldsymbol{p}(t)$.

Обратно, если координаты X_0, Y_0, Z_0 вектора $\boldsymbol{b}$ суть пределы координат $X = f(t)$, $Y = \varphi(t)$, $Z = \psi(t)$ вектора $\boldsymbol{p}(t)$, то $\boldsymbol{b} = \lim \boldsymbol{p}(t)$.

Действительно, если длина вектора $\overrightarrow{MB}$ (рис. 198) стремится к нулю, то его проекции $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$ тоже стремятся к нулю и обратно.

Свойство 1 можно сформулировать еще так: *одно векторное* равенство

$$\lim_{t \to a} [f(t)\,\boldsymbol{i} + \varphi(t)\,\boldsymbol{j} + \psi(t)\,\boldsymbol{k}] = X_0\boldsymbol{i} + Y_0\boldsymbol{j} + Z_0\boldsymbol{k}$$

равносильно *трем скалярным*

$$\lim_{t \to a} f(t) = X_0, \quad \lim_{t \to a} \varphi(t) = Y_0, \quad \lim_{t \to a} \psi(t) = Z_0.$$

Свойство 2. Если

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b},$$

то

$$\lim_{t \to a} |\boldsymbol{p}(t)| = |\boldsymbol{b}|. \qquad (3)$$

Словами: ***если вектор $\boldsymbol{p}(t)$ имеет пределом вектор $\boldsymbol{b}$, то длина вектора $\boldsymbol{p}$ имеет пределом длину вектора $\boldsymbol{b}$.***

Действительно, равенство (2) означает, что длина стороны MB треугольника OBM (рис. 198) стремится к нулю. Но разность $|\overrightarrow{OM}|-|\overrightarrow{OB}|$ двух других сторон треугольника OBM по абсолютной величине меньше, чем $|\overrightarrow{MB}|$. Следовательно, эта разность и подавно стремится к нулю, т. е. $\lim|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OB}|$, что и утверждает равенство (3).

Замечание 1. Обратное предложение неверно. Иными словами: из равенства (3) равенство (1) *не вытекает*.

Это видно из рис. 198, где вектор $\overrightarrow{OB_1}$ имеет ту же длину, что вектор $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Таким образом, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to a}|\boldsymbol{p}(t)|=|\boldsymbol{b}_1|$. Но равенство, аналогичное равенству (1), не имеет места, так как вектор $\boldsymbol{b}_1$, очевидно, не является пределом вектора $\boldsymbol{p}(t)$.

Свойство 3. Если вектор-функция $\boldsymbol{p}(t)$ имеет предел $\boldsymbol{b}$, отличный от нуль-вектора, то вектор $\boldsymbol{p}(t)$ имеет предельное направление, а именно направление вектора $\boldsymbol{b}$.

Точнее: если $\lim\limits_{t\to a}\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{b}\neq 0$, то угол между векторами $\boldsymbol{p}(t)$ и $\boldsymbol{b}$ стремится к нулю при $t\longrightarrow a$.

Действительно, в треугольнике OBM (рис. 198) сторона BM по условию бесконечно мала; значит, можно считать, что она меньше стороны OB, имеющей постоянную длину. Значит, угол BOM острый. По теореме синусов имеем

$$\sin\angle BOM=\sin\angle OMB\frac{MB}{OB}<\frac{MB}{OB};$$

отсюда

$$\lim\sin\angle BOM=\frac{\lim MB}{OB}=0. \tag{4}$$

А так как угол BOM, по доказанному, острый, то из (4) следует, что

$$\lim\angle BOM=0.$$

Замечание 2. Если вектор-функция $\boldsymbol{p}(t)$ имеет пределом нуль-вектор, то вектор $\boldsymbol{p}(t)$ может иметь предельное направление, а может и не иметь.

Точнее: пусть $\lim\boldsymbol{p}(t)=0$; тогда могут представиться два случая:

1) при $t\longrightarrow a$ вектор $\boldsymbol{p}$ образует бесконечно малый угол с некоторым постоянным (ненулевым) вектором $\boldsymbol{c}$;

2) никакой постоянный вектор не образует с вектором $\boldsymbol{p}(t)$ бесконечно малого угла.

Первый случай иллюстрируется рис. 199, где конец M вектора $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{p}$ стремится к точке O вдоль линии, имеющей в точке O касательную OT. Вектор $\boldsymbol{c}$ направлен по этой касательной.

Второй случай иллюстрируется рис. 200, где M стремится к O по спирали, так что с течением времени (при $t \to \infty$) вектор $\overrightarrow{OM}$ стремится к нулю, совершая бесчисленное множество оборотов около точки O.

Замечание 3. Теоремы о пределе суммы и произведения скалярных функций распространяются и на вектор-функции, причем можно рассматривать всевозможные произведения (скалярной функции на векторную, скалярное произведение двух вектор-функций,

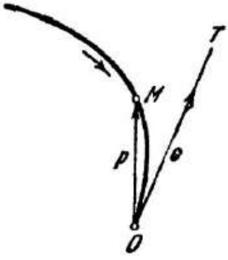


Рис. 199.

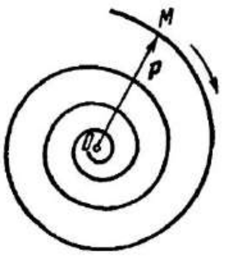


Рис. 200.

их векторное произведение и смешанное произведение трех вектор-функций). Так, например,

$$\lim(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=\lim\boldsymbol{p}+\lim\boldsymbol{q},$$
$$\lim(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})=\lim\boldsymbol{p}\times\lim\boldsymbol{q}$$

и т. п. Все упомянутые теоремы доказываются так же, как соответствующие теоремы для скалярных функций.

Теорема о пределе частного распространяется на единственный вид деления, рассматриваемый в векторной алгебре (деление вектор-функции на скалярную функцию).

Замечание 4. Непрерывность вектор-функции определяется так же, как для скалярной функции (§ 38). Наглядно непрерывность вектор-функции выражается в том, что ее годографом является сплошная линия. Если вектор $\boldsymbol{p}$ есть непрерывная функция аргумента t, то координаты его — тоже непрерывные (скалярные) функции от t и обратно.

§ 141. Производная вектор-функции скалярного аргумента

Производная от вектор-функции скалярного аргумента определяется по аналогии с производной скалярной функции.

Определение. *Производной от вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 называется *вектор* $\boldsymbol{r}'_0$, равный пределу отношения $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$:

$$\boldsymbol{r}'_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

Если производная существует в каждой точке некоторого промежутка (t_1, t_2), то она сама является вектор-функцией скалярного аргумента t; эта функция обозначается $\boldsymbol{r}'(t)$.

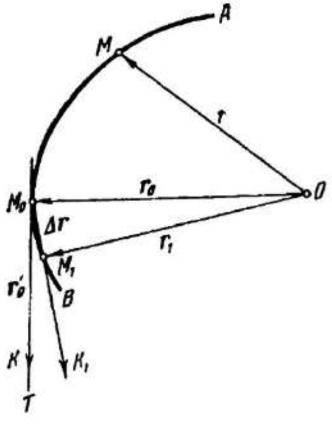


Рис. 201.

Геометрическое истолкование. Пусть подвижный конец M вектора $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}(t)$ (рис. 201) описывает линию AB — годограф вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$. Обозначим через s длину дуги $\overset{\frown}{AM}$ годографа, отсчитываемую от некоторой начальной точки A; таким образом, величина s есть некоторая (скалярная) функция от t.

Построим при некоторой точке M_0 годографа AB вектор $\overrightarrow{M_0K}$, равный производной $\boldsymbol{r}'_0$ от вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ (мы предполагаем, что эта производная существует и *отлична от нуль-вектора*). Докажем,

1) что прямая M_0T, на которой лежит вектор $\overrightarrow{M_0K} = \boldsymbol{r}'_0$ есть касательная к годографу,

2) что направление вектора $\overrightarrow{M_0K}$ (на касательной M_0T) совпадает с направлением *возрастания* параметра t,

3) что длина вектора $\overrightarrow{M_0K}$ равна абсолютной величине производной $\frac{ds}{dt}$ дуги s по параметру t.

Доказательство. 1) Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ принимает значение $\overrightarrow{OM_1}$ при $t = t_1$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ («вектор хорды») выражает приращение $\Delta \boldsymbol{r}$ вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0) = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M_1}.$$

Значит, отношение $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ есть некоторый вектор $\overrightarrow{M_0K_1}$, коллинеарный с секущей M_0M_1:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\Delta t}=\overrightarrow{M_0K_1}. \tag{1}$$

С другой стороны, по построению имеем

$$r_0'=\overrightarrow{M_0K}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) на основании определения производной вектор-функции имеем

$$\overrightarrow{M_0K}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{M_0K_1}. \tag{3}$$

Следовательно (§ 140, свойство 3), угол K_1M_0K между прямой M_0T и секущей M_0M_1 стремится к нулю при $\Delta t\to 0$. Значит, прямая M_0T есть касательная к годографу (см. определение касательной § 60).

2) Для определенности предположим, что $t_1>t_0$. Тогда $\Delta t>0$, следовательно, вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}\left(=\frac{1}{\Delta t}\Delta r\right)$ *равнонаправлен* с вектором $\Delta r=\overrightarrow{M_0M_1}$.

Стало быть, вектор секущей $\overrightarrow{M_0K_1}$ указывает направление от точки M_0 с меньшим значением параметра t к точке M_1 с большим значением параметра. Тем же свойством обладает и вектор касательной $\overrightarrow{M_0K}$ (так как он составляет бесконечно малый угол с вектором $\overrightarrow{M_0K_1}$).

Мы пришли бы, разумеется, к тому же выводу, если бы предположили, что $t_1<t_0$. В самом деле, хотя в этом случае вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ укажет направление убывания параметра t, однако вектор $\overrightarrow{M_0K_1}=\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0M_1}$ снова укажет направление возрастания параметра (так как множитель $\frac{1}{\Delta t}$ отрицательный).

3) Так как $\overrightarrow{M_0K}=\lim\overrightarrow{M_0K_1}$, то (по свойству 2 § 140)

$$\left|\overrightarrow{M_0K}\right|=\lim\left|\overrightarrow{M_0K_1}\right|,$$

то есть

$$\left|\overrightarrow{M_0K}\right|=\lim\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\Delta t|}. \tag{4}$$

Исходя из допущения[1]), что бесконечно малая дуга $\overset{\frown}{M_0M_1}$ и стягивающая ее хорда M_0M_1 эквивалентны по длине

$$|M_0M_1| \approx |\overset{\frown}{M_0M_1}|,$$

мы можем вместо (4) написать

$$\left|\overrightarrow{M_0K}\right| = \lim \frac{|\overset{\frown}{M_0M_1}|}{|\Delta t|} = \lim \frac{|\Delta s|}{|\Delta t|} = \lim \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|,$$

откуда

$$\left|\overrightarrow{M_0K}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Резюмируем: *ненулевая производная* $\mathbf{r}'(t_0)$ *от вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ *есть вектор* $\overrightarrow{M_0K}$, *направленный по касательной к годографу* AB *в сторону возрастания параметра* t; *длина вектора* $\overrightarrow{M_0K}$ *равна абсолютной величине производной* $\frac{ds}{dt}$ (s — *длина дуги* AM_0 *годографа* AB).

Механическое истолкование. В § 57 мы говорили о скорости движущейся точки M как о скалярной величине. Эта величина определяется как предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \qquad (5)$$

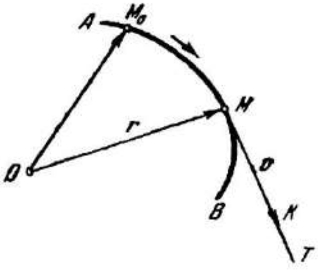


Рис. 202.

Здесь s есть расстояние M_0M, отделяющее точку M от ее начального положения M_0. При этом, если точка M описывает кривую линию AB (рис. 202), то и расстояние M_0M измеряется вдоль этой кривой.

Величину v, определенную равенством (5), мы назовем теперь *скалярной скоростью*, так как термином «скорость» обычно обозначают *векторную* величину, определяемую следующим образом.

Определение. *Скоростью* точки M в момент времени t называется вектор $\mathbf{v}$ (рис. 202), направленный по касательной MT к траектории (в сторону движения точки M) и по модулю равный скалярной скорости точки M:

$$|\mathbf{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \qquad (6)$$

Если $\frac{d}{dt} = 0$, то вектор скорости тоже равен нулю.

[1]) См. замечание в конце § 135.

Выберем по произволу точку O. Вектор $OM = \boldsymbol{r}$ будет вектор-функцией от времени t:

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}(t).$$

Легко видеть, что *вектор скорости* $\boldsymbol{v}$ *есть производная от вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'(t).$$

Действительно, производная $\boldsymbol{r}'(t)$ есть вектор, направленный по касательной MT в сторону возрастания параметра t, а так как t есть время, то направление возрастания параметра есть направление движения. Длина же вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ по доказанному равна $\frac{ds}{dt}$. Стало быть, вектор $\boldsymbol{r}'(t)$ имеет то же направление и ту же длину, что вектор скорости $\boldsymbol{v}$.

Производные высших порядков. Они определяются так же, как для скалярных функций, и обозначаются $\boldsymbol{r}''(t)$, $\boldsymbol{r}'''(t)$ и т. д.

Если, например, параметр t есть время, то вторая производная $\boldsymbol{r}''(t)$ от вектор-функции $\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ есть производная $\boldsymbol{v}'(t)$ от вектора скорости $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'(t)$. Этот вектор называется вектором ускорения или просто *ускорением* и обозначается $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}'(t) = [\boldsymbol{r}'(t)]' = \boldsymbol{r}''(t).$$

§ 142. Дифференциал вектор-функции скалярного аргумента

Дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ определяется так же, как дифференциал скалярной функции (§ 66), и обозначается $d\boldsymbol{r}$.

Дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ есть *вектор*; он равен произведению производной $\boldsymbol{r}'(t)$ на приращение Δt скалярного аргумента:

$$d\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t, \tag{1}$$

или, что то же,

$$d\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t)\,dt. \tag{2}$$

Геометрическое истолкование. Как явствует из формулы (1), дифференциал $d\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{MN}$ (рис. 203) коллинеарен с вектором $\boldsymbol{r}'(t)$ и, следовательно, направлен по касательной MT к годографу AB вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$. Вектор $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MM_1} = d\boldsymbol{r} - \Delta\boldsymbol{r}$ при $\Delta t \to 0$ имеет высший порядок малости относительно Δt.

Длина вектора $\overrightarrow{MN} = d\boldsymbol{r}$ составляет

$$|d\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}'\,dt| = |\boldsymbol{r}'|\,|dt|.$$

А так как $|\boldsymbol{r}'| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$, то

$$|d\boldsymbol{r}| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\,|dt| = |ds|.$$

Итак, ***дифференциал*** $d\boldsymbol{r}$ ***по длине равен дифференциалу дуги годографа и направлен по касательной к годографу.***

Механическое истолкование. Пусть AB (рис. 203) есть траектория точки M, и пусть O — произвольно выбранная точка. Согласно формуле (1) дифференциал вектор-функции $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$, где t есть время, выражает тот вектор $\overrightarrow{MN}$, на который сместилась бы за время Δt точка M, если бы она продолжала двигаться со скоростью $\boldsymbol{r}'(t)$, достигнутой в момент t. Иными словами, дифференциал $d\boldsymbol{r}$ — это путь, который прошла бы точка M за время Δt, двигаясь по инерции.

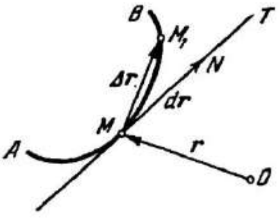


Рис. 203.

Инвариантность выражения (2). Формула (2), так же как аналогичная формула для скалярной функции, верна и в том случае, когда величина t рассматривается как функция какого-либо аргумента. Формула (1) этим свойством не обладает (ср. § 73).

Дифференциалы высших порядков. Они определяются так же, как для скалярных функций (§§ 90, 93), и обозначаются $d^2\boldsymbol{r}$, $d^3\boldsymbol{r}$ и т. д.

Выражения производных через дифференциалы. Первая производная $\boldsymbol{r}'(t)$ выражается в силу (2) формулой

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Она верна как в том случае, когда t есть независимая переменная, так и в том случае, когда t есть функция некоторого аргумента.

Вторая и высшие производные выражаются формулами

$$\boldsymbol{r}''(t)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},\qquad \boldsymbol{r}'''(t)=\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\ \text{и т. д.},$$

которые верны, когда t — независимая переменная; в противном же случае они, как правило, неверны (ср. § 91).

§ 143. Правила дифференцирования вектор-функций

Для вектор-функций скалярного аргумента справедливы следующие правила дифференцирования:

1. *Производная постоянного вектора* $\boldsymbol{a}$ *равна нулю*:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0\qquad(\boldsymbol{a}=\text{const}).\tag{1}$$

Предупреждение. Вектор $\boldsymbol{p}$, имеющий постоянную *длину*, но не имеющий постоянного направления, *не является* постоянным.

Его производная может равняться нулю, но при *некоторых значениях аргумента* t. Если же равенство $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$ имеет место во всех точках некоторого промежутка (t_1, t_2), то вектор $\boldsymbol{a}$ постоянный, т. е. он имеет неизменную длину и неизменное направление.

2. *Производная суммы ограниченного числа векторов равна сумме их производных*:

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})'=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{r}'. \tag{2}$$

3. *Для всех видов умножения векторов имеют место правила дифференцирования, аналогичные правилам дифференцирования скалярных функций, с тем лишь отличием, что в векторных и смешанных произведениях соблюдается надлежащий порядок сомножителей.* Соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$(m\boldsymbol{p})'=m\boldsymbol{p}'+m'\boldsymbol{p}, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q})'=\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q}. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) перестановка сомножителей допустима.

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})'=\boldsymbol{p}'\times\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}'. \tag{5}$$

В формуле (5) ни в одном из членов правой части перестановка сомножителей недопустима.

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r})'=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}'. \tag{6}$$

Здесь перестановка сомножителей допустима лишь в том случае, если она не нарушает ориентации системы сомножителей.

Все вышеприведенные формулы выводятся точно так же, как соответствующие формулы для скалярных функций.

4. *Постоянный множитель* (скалярный или векторный) *можно выносить за знак производной*:

$$(a\boldsymbol{p})'=a\boldsymbol{p}' \qquad (a=\text{const}), \tag{3a}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p})'=\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}' \qquad (\boldsymbol{a}=\text{const}), \tag{4a}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})'=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}' \qquad (\boldsymbol{a}=\text{const}), \tag{5a}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q})'=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})' \qquad (\boldsymbol{a}=\text{const}). \tag{6a}$$

Формулы (3а)—(6а) вытекают соответственно из формул (3)—(6), если учесть, что производная от постоянной величины (скалярной или векторной) равна нулю.

5. *Координаты производной вектора соответственно равны производным его от координат.*

Иначе говоря, *из равенства*

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{7}$$

вытекает равенство

$$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}. \tag{8}$$

Действительно, применяя сначала формулу (2), а затем формулу (3), получаем

$$\boldsymbol{r}' = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})' = (x\boldsymbol{i})' + (y\boldsymbol{j})' + (z\boldsymbol{k})' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}.$$

Пример 1. Формула (4), если в ней положить $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, дает

$$(\boldsymbol{p}^2)' = \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}'\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'. \tag{9}$$

Замечание 1. Из формулы (9) вытекает следующее важное свойство. Пусть вектор $\boldsymbol{p}$ имеет постоянную длину, но изменяется по направлению. Величина $\boldsymbol{p}^2$ выражает квадрат длины вектора $\boldsymbol{p}$; значит, эта величина постоянна. Следовательно, $(\boldsymbol{p}^2)' = 0$. Из формулы (9) следует, что

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = 0. \tag{10}$$

Предположим, что в рассматриваемой точке t вектор $\boldsymbol{p}'$ отличен от нуля. Вектор $\boldsymbol{p}$ не может равняться нулю по условию. Значит, из формулы (10) вытекает перпендикулярность векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$. Мы пришли к следующему выводу: *если вектор* $\boldsymbol{p}(t)$ *сохраняет постоянную длину, но изменяется по направлению, то он перпендикулярен к вектору* $\boldsymbol{p}'(t)$ (если последний отличен от нуля).

Геометрически это означает, что если годограф вектора $\boldsymbol{p}(t)$ — сферическая линия, то касательная к этой линии перпендикулярна к радиусу сферы (т. е. лежит в плоскости, касательной к сфере).

Пример 2. Найти скалярную скорость точки M, закон движения которой определяется формулами

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \tag{11}$$

(t — время).

Решение. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M есть вектор-функция времени t, выражаемая формулой

$$\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}. \tag{12}$$

Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки M есть производная от вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ (§ 141). Из формулы (12) на основании правила 5 получаем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'(t) = (a\cos t)'\boldsymbol{i} + (a\sin t)'\boldsymbol{j} + (bt)'\boldsymbol{k} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}.$$

Скалярная скорость v точки M есть модуль вектора $\boldsymbol{v}$. Следовательно,

$$v = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{r}'| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{13}$$

Другое решение. Скалярная скорость точки M есть производная $\frac{ds}{dt}$, где s — длина дуги $\overset{\frown}{M_0M}$, отсчитываемой от начальной точки M_0. Уравнения (11) показывают, что точка M движется по винтовой линии. Длина ее дуги (отсчитываемой от точки $t = 0$)

выражается [§ 137, формула (5)] формулой

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

Отсюда

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{a^2+b^2}$$

в согласии с формулой (13).

Замечание 2. В данном примере второе решение оказалось проще первого. Надо, однако, учесть, что длину дуги винтовой линии мы нашли в § 137 с помощью искусственного (и притом нестрогого) приема. Первый же способ не требует вычисления длины дуги и применим к любому закону движения точки.

Пример 3. Найти производную смешанного произведения $\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}''$.

Решение. По формуле (6) находим

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'')'=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}''+\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}''\boldsymbol{p}''+\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'''.$$

Смешанное произведение $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}''$ равно нулю, так как в нем первые два множителя коллинеарны. Смешанное произведение $\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}''\boldsymbol{p}''$ тоже равно нулю (так как два последних множителя коллинеарны). Следовательно,

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'')'=\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}'''.$$

§ 143а. Задачи к § 136—143

1. В каких точках линия

$$x=3a^2u-u^3,\quad y=3au^2,\quad z=3a^2u+u^3 \tag{1}$$

параллельна координатным плоскостям?

2. Определить, в каких точках линия (1) параллельна плоскости $3x+y+z=0$.

3. Найти точки, где линия (1) перпендикулярна к прямой

$$x=y=z.$$

4. Составить уравнение нормальной плоскости к линии (1) в точке $u=0$ (нормальной плоскостью называется плоскость, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания).

5. Найти проекцию линии

$$x=a(u-\sin u),\quad y=a(1-\cos u),\quad z=4a\sin\frac{u}{2} \tag{2}$$

на плоскость xOy.

6. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в произвольной точке линии (2). Определить угол γ, который касательная образует с осью Oz.

7. Определить, какой угол образует с осью Oz линия пересечения цилиндрических поверхностей $x^2+z^2=3a^2$ и $y^2+z^2=4a^2$ в точках, где она пересекает плоскость $y=z$.

8. Сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ пересечена цилиндрической поверхностью $x^2+y^2-ax=0$. Найти угол γ, под которым линия пересечения (*кривая Вивиани*) наклонена к оси Oz в точках, где $z=\frac{a}{2}$.

9. Каков должен быть шаг винтовой линии радиуса a, чтобы она составляла с осью Oz угол 85°.

10. Найти линию, по которой касательные к винтовой линии радиуса a с шагом $2\pi a$ пересекают плоскость, перпендикулярную к оси винтовой линии.

11. Найти годограф вектор-функции

$$\boldsymbol{r}(t)=4a\cos\frac{2\pi t}{T}\boldsymbol{i}+3a\sin\frac{2\pi t}{T}\boldsymbol{j} \qquad (T-\text{const}). \tag{3}$$

12. Найти годограф производной от вектор-функции (3).

13. Закон движения точки выражается формулами (3), где t — время. Найти численную величину скорости точки в момент $t=\frac{T}{3}$.

14. Закон движения точки выражается формулой

$$\boldsymbol{r}=v_0t\cos\varphi\cos\psi\boldsymbol{i}+v_0t\cos\varphi\sin\psi\boldsymbol{j}+\left(v_0t\sin\varphi-\frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{k}$$

(φ и ψ — постоянные). Найти траекторию точки; определить численную величину скорости и ускорения в произвольный момент времени.

Вычислить производные следующих функций:

15. $\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

16. $\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

17. $\sqrt{\boldsymbol{r}^2}$.

18. $\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{r}^2}}$.

ГЛАВА VII

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 144. Функция двух переменных

Предварительное замечание. Чтобы найти объем шара, достаточно промерить его диаметр. В соответствии с этим мы говорим (на основании определения § 13), что объем шара есть функция его диаметра.

Чтобы найти объем цилиндра, *одного* промера мало. Но два промера — диаметра D и высоты H — позволяют найти объем цилиндра по формуле

$$V = \frac{1}{4}\pi D^2 H. \tag{1}$$

Эта формула устанавливает правило, на основании которого каждой *паре* значений, принимаемых совместно двумя величинами D, H, соответствует определенное значение третьей величины V. По аналогии с прежде установленным понятием функции мы скажем, что величина V есть функция двух переменных D, H.

Определение 1. Рассмотрим всевозможные пары значений, совместно принимаемых двумя переменными величинами x, y («аргументы» или «независимые переменные»). Пусть каждой такой паре соответствует определенное значение третьей величины z. Тогда говорят, что ***величина z есть функция двух переменных x, y***.

При этом под термином «функция» понимается иногда сама величина z (в вышеприведенном примере — объем V цилиндра), но чаще всего ***та зависимость***, в которой величина z находится от аргументов x, y (в нашем примере эта зависимость выражена формулой $z = \frac{1}{4}\pi x^2 y$, где x — диаметр основания, y — высота цилиндра). (Ср. § 13, замечание 3.)

Словесное выражение «функция двух переменных x, y» сокращенно записывается $f(x, y)$ («эф от икс игрек»). Вместо буквы f

часто употребляются буквы F, φ, ψ; употребляются и другие буквенные обозначения.

Запись

$$z=f(x, y)$$

означает, что величина z есть какая-то функция двух переменных x, y; эта функция может быть как известной, так и неизвестной. Вместо $z=f(x, y)$ нередко пишут

$$z=z(x, y).$$

Пример 1. Имея медный провод с сечением 1 *мм*² и зная силу тока I в этом проводе, а также его длину l, можно найти напряжение V на концах провода по формуле

$$V=0{,}0175lI \tag{2}$$

(где l выражается в метрах, I — в амперах, V — в вольтах).

Каждой паре значений, совместно принимаемых величинами l, I, соответствует определенное значение величины V. Стало быть, величина V есть функция двух независимых переменных l, I (аргументов функции V).

Замечание 1. Аргументы рассматриваемой функции способны принять *не всякую пару значений*: прежде всего, аргумент l может принимать только положительные значения; кроме того, аргумент I (который тоже считается положительным, поскольку направление тока в данном вопросе безразлично) не может превышать некоторого предела (примерно 11 *а*), потому что при более сильном токе проводник расплавляется.

Определение 2. Совокупность пар тех чисел, которые (по условию вопроса) способны быть совместными значениями аргументов x, y функции $z=f(x, y)$, называется *областью изменения аргументов* функции $f(x, y)$.

Пример 2. Высота h пункта земной поверхности (над уровнем океана) есть функция географических координат — широты φ и долготы ψ

$$h=f(\varphi, \psi).$$

Действительно, каждой паре чисел φ_0, ψ_0, которые могут выражать соответственно широту φ и долготу ψ, соответствует определенный пункт земного шара, и этот пункт обладает определенной высотой над уровнем океана (мы будем пренебрегать медленными изменениями этой высоты со временем).

Функцию $f(\varphi, \psi)$ вряд ли можно представить формулой сколько-нибудь пригодной для вычислений. Тем не менее значения этой функции можно находить с большой степенью точности, пользуясь специальными географическими картами или таблицами. Например, паре значений $\varphi = +44°26'00''$, $\psi = +34°2'20''$ соответствует значение $h \approx 1230$ *м*.

В данном примере аргументы φ, ψ функции $f(\varphi, \psi)$ тоже могут принимать не всякую пару значений, а лишь такие пары, где φ лежит в промежутке $(-90°; +90°)$, а ψ — в промежутке $(-180°, +180°)$. Совокупность всех таких пар составляет область изменения аргументов функции $f(\varphi, \psi)$.

Замечание 2. В примере 2 область изменения аргументов функции двух аргументов устанавливается заданием пары промежутков, каждый из которых является областью изменения соответственного аргумента. Однако во многих практически важных случаях дело обстоит не так просто. В нижеследующем примере рассмотрен один из таких случаев.

Рис. 204.

Пример 3. На шнуре A_1A_2 (рис. 204) длиной 20 *м* завязываются два узла X, Y (узел X — ближе к A_1, узел Y — ближе к A_2) и свободные концы A_1, A_2 соединяются узлом A. Через три узла A, X, Y пропускаются колышки, и на земле строится прямолинейный веревочный треугольник AXY. Площадь S этого треугольника есть функция двух переменных $x = A_1X$ и $y = A_2Y$:

$$S = f(x, y).$$

Функцию $f(x, y)$ в данном примере можно представить формулой

$$S = \sqrt{10(10-x)(10-y)(x+y-10)}. \tag{3}$$

Она непосредственно вытекает из известной формулы Герона.

Чтобы установить область изменения аргументов функции $f(x, y)$, учтем, что отрезок $x = A_1X$ должен быть одной из сторон треугольника AXY. Но во всяком треугольнике одна сторона меньше суммы двух других и, следовательно, меньше полупериметра треугольника. Значит, для того чтобы было возможно построить треугольник AXY, отрезок A_1X должен быть меньше чем $\frac{1}{2}A_1A_2 = 10$ *м*. Следовательно, аргумент x должен содержаться в промежутке $(0; 10)$. В том же промежутке должен содержаться аргумент y.

Если рассматривать каждый из аргументов x, y по отдельности, то он может принимать *любое* значение, содержащееся в упомянутом промежутке; например, аргумент x может иметь значение $x = 5$, а аргумент y может иметь значение $y = 4$. Но быть *совместными значениями* аргументов x, y числа 5 и 4 *не могут*, так как сумма двух сторон треугольника должна быть *больше* полупериметра.

Мы приходим к выводу, что пара чисел x, y, способных быть совместными значениями аргументов функции $f(x, y)$, должна удовлетворять следующим трем неравенствам:

$$0 < x < 10, \quad 0 < y < 10, \quad x + y > 10. \tag{4}$$

С другой стороны, если неравенства (4) удовлетворены, то из отрезков A_1X, XY, YA_2 можно составить треугольник и, значит, числа x, y способны быть совместными значениями функции $f(x, y)$. Стало быть, область изменения аргументов функции $f(x, y)$ есть совокупность пар таких чисел x, y, которые удовлетворяют системе неравенств (4).

Замечание 3. Понятие функции двух переменных включает в себя (в качестве частного случая) понятие функции одной переменной, а также (в качестве еще более частного случая) понятие постоянной величины.

В самом деле, не исключено, что значение функции $f(x, y)$ меняется в зависимости от x, но остается одним и тем же, когда меняется только величина y, а величина x сохраняет неизменное значение. В этом случае функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функцию одной переменной x. Если же значение функции $f(x, y)$ остается одним и тем же при любых значениях обоих аргументов, то функция $f(x, y)$ оказывается постоянной величиной.

Пример 4. Суточное количество осадков (h *мм*) на территории Московской области есть функция широты φ и долготы ψ места наблюдения. Как правило, величина h меняется как при движении вдоль меридиана, так и при движении вдоль параллели. Но бывает и так, что суточное количество осадков оказывается практически неизменным при движении вдоль любого меридиана, но меняется при движении вдоль параллели. Тогда величина h фактически оказывается функцией *одной* переменной (долготы ψ).

Случается также, что суточное количество осадков оказывается всюду одним и тем же (скажем, если в течение суток по всей области дождей не было, то при любых значениях φ и ψ величина h была равна нулю). Тогда величина h фактически оказывается постоянной.

§ 145. Геометрическое представление аргументов функции двух переменных

Рассмотрение области изменения аргументов функции $f(x, y)$ значительно облегчится, если мы прибегнем к геометрическому изображению пары чисел x, y.

Для этого введем в рассмотрение плоскость P, отнесенную к какой-либо прямоугольной системе координат xOy. Тогда каждую пару чисел x, y можно будет изобразить точкой M с координатами x, y. Обратно, каждой точке M плоскости P будет соответствовать определенная пара чисел x, y.

Множество пар чисел x, y, составляющих в совокупности область изменения аргументов функции $f(x, y)$, представляется множеством точек M, составляющих в совокупности некоторую фигуру. Эта фигура и будет изображать область изменения аргументов x, y.

Пример 1. Рассмотрим функцию $h=f(x, y)$, где h — высота пункта земной поверхности, x — долгота пункта; y — его широта. Область изменения аргументов функции $f(x, y)$ состоит (см. § 144, пример 2) из всех пар чисел x, y, удовлетворяющих системе неравенств

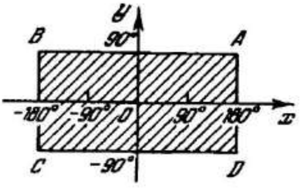


Рис. 205.

$$-180 \leqslant x \leqslant 180, \quad -90 \leqslant y \leqslant 90. \qquad (1)$$

Первая пара неравенств означает геометрически, что точка $M(x, y)$ (рис. 205) лежит внутри или на границах полосы, образованной вертикальными прямыми DA, CB; второе — что точка M лежит внутри или на границах полосы, образованной горизонтальными прямыми CD, BA.

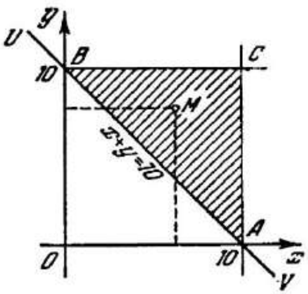


Рис. 206.

Значит, область изменения аргументов геометрически изображается совокупностью всех точек, лежащих внутри прямоугольника $ABCD$ и на его границе.

Пример 2. В примере 3 § 144 была рассмотрена функция $S=f(x, y)$, у которой область изменения аргументов составляется из пар чисел x, y, удовлетворяющих системе неравенств

$$0 < x < 10, \qquad 0 < y < 10, \qquad x+y > 10. \qquad (2)$$

Первая пара неравенств (2) геометрически означает, что точка $M(x, y)$ лежит внутри полосы, ограниченной прямыми $x=0$, $x=10$ (Oy, AC на рис. 206); второе неравенство означает, что точка M лежит внутри полосы, ограниченной прямыми $y=0$, $y=10$ (Ox, BC на рис. 206). Таким образом, неравенства $0<x<10$ и $0<y<10$, рассматриваемые совместно, означают, что точка M лежит внутри квадрата $OACB$.

Переведем на геометрический язык третье неравенство (2). Для этого построим линию

$$x+y=10.$$

Это — прямая UV, отсекающая на осях координат отрезки, равные 10 единицам масштаба, т. е. проходящая через точки A, B. *Все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству* $x+y>10$, *лежат по одну сторону от прямой* UV (в силу теоремы из I, § 41), а именно по ту же сторону, где находится точка $C(10; 10)$. В самом деле, координаты этой точки удовлетворяют неравенству $x+y>10$.

Итак, система неравенств (2) геометрически означает, что точка $M(x, y)$ лежит внутри квадрата $OACB$ и находится, как и точка C, выше диагонали AB. Следовательно, область изменения аргументов x, y геометрически изображается совокупностью всех точек, лежащих внутри треугольника ABC.

§ 146. Функция точки

Пусть некоторое тело подвергается нагреванию; если источник тепла остается неизменным, то через некоторое время в каждой точке M этого тела устанавливается стационарная температура T. При отсутствии тепловой изоляции величина T будет меняться от точки к точке, причем каждой данной точке M будет соответствовать определенное значение величины T. Пользуясь привычной терминологией, мы скажем, что переменная величина T есть *функция переменной точки* M и что точка M есть *аргумент* этой функции. Символически:

$$T=f(M).$$

Областью изменения аргумента функции $f(M)$ является совокупность всех точек нагреваемого тела.

Вообще говорят, что переменная величина u есть *функция переменной точки* M, если каждой точке M_0, с которой (по условию вопроса) может совмещаться точка M, соответствует определенное значение переменной u. Точки, с которыми способна совмещаться переменная точка M, в совокупности составляют *область изменения аргумента* M.

Если, например, нагреваемое тело является прямолинейным стержнем, то область изменения аргумента M есть некоторый отрезок (мы отвлекаемся от поперечных размеров стержня). Если нагреваемое тело является круглым диском, то область изменения аргумента M есть круг (мы отвлекаемся от толщины диска). Если нагревается кирпич, то областью изменения аргумента M будет прямоугольный параллелепипед и т. д.

Предположим сначала, что область изменения точки M есть некоторый отрезок AB. Установим на прямой AB какую-либо систему координат. Тогда задание точки будет равнозначно заданию ее абсциссы x. Значит, задание функции $u=f(M)$ точки M будет равнозначно заданию функции $u=f(x)$ от *числового* аргумента x. Подчеркнем следующее обстоятельство. На прямой AB можно ввести различные системы координат. Поэтому одну и ту же функцию $u=f(M)$ точки M можно представить различными функциями числового аргумента x (абсциссы точки M). И наоборот, одна и та же функция $u=f(x)$ может представлять различные функции точки M.

Пусть теперь областью изменения точки M является круг O радиуса a, т. е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга и на его окружности. Предположим, что плоскость круга отнесена к какой-либо системе координат, скажем к системе xOy, изображенной на рис. 207. Тогда задание точки M равнозначно заданию *пары чисел* x, y — координат OP, PM точки M. Значит, задание функции $u=f(M)$ точки M будет равнозначно заданию некоторой функции $u=f(x, y)$ от *двух* (числовых) *аргументов*. Замечание, касающееся изменения системы координат, остается в силе, разумеется, и в этом случае.

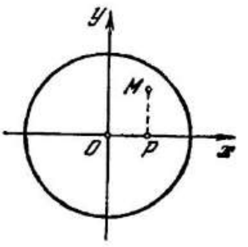


Рис. 207.

Пример 1. Диск радиуса a подвергается нагреванию, благодаря которому на нем устанавливается стационарное распределение температуры T. В центре O температура $T=50°$, на окружности $T=20°$, вдоль каждого радиуса температура падает равномерно.

Эти данные определяют T как функцию точки M, областью изменения которой является круг O.

$$T=f(M).$$

Значение функции T в любой точке M можно вычислить по формуле

$$T=50-\frac{30}{a}OM. \tag{1}$$

Если отнести круг к системе координат xOy с началом в центре круга O, то температура T окажется функцией двух переменных x, y

$$T=f(x, y)$$

и формула (1) примет вид

$$T=50-\frac{30}{a}\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Геометрическая терминология. Каков бы ни был подлинный физический смысл аргументов функции $f(x, y)$, численные значения этих аргументов всегда можно принять за координаты некоторой точки M. Тогда функция $f(x, y)$ окажется функцией координат точки M. Так как задание такой функции равнозначно заданию функции точки M, то вошло в обычай называть любую функцию $f(x, y)$ *функцией точки* (на плоскости); при этом сама пара аргументов x, y получает название «точки (x, y)».

Далее, для характеристики области изменения аргументов функции $f(x, y)$ употребляется наименование той геометрической фигуры, которая является областью изменения точки $M(x, y)$.

Пример 2. В условиях примера 1 § 144 переменная V есть функция двух аргументов l, I, представляемая формулой

$$V = 0{,}0175lI,$$

причем область изменения аргументов l, I определяется неравенствами

$$l > 0, \quad 0 < I < 11.$$

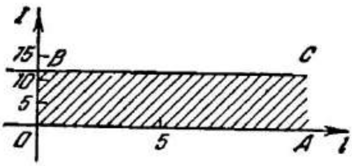


Рис. 208.

Пользуясь геометрической терминологией (рис. 208), мы можем сказать, что V есть функция точки $M(l, I)$ и что областью изменения точки M является бесконечная фигура $AOBC$, ограниченная с трех сторон отрезком OB и двумя перпендикулярными к нему лучами OA, BC.

Замечание. Именуя пару чисел x, y «точкой», мы *сочетаем два* аргумента (x, y) в едином понятии («точка M»). Помимо наглядности, связанной с геометрическим изображением, это объединение и само по себе имеет важное принципиальное значение.

§ 147. Способы представления функции двух переменных

В зависимости от того, какие цели преследует рассмотрение той или иной функции двух переменных, пользуются различными способами представления этой функции.

Весьма употребительны следующие четыре способа: а) табличный, б) аналитический, в) пространственно-геометрический, г) способ линий уровня.

а) Табличный способ. Значения функции $f(x, y)$ располагаются в виде прямоугольника, окаймленного сверху и слева. В верхней полосе проставляются значения одного из аргументов, в левой полосе — значения другого. И здесь и там значения аргумента берутся обычно через равные промежутки. В пересечении соответствующих строки и столбца находим требуемое значение функции. Таблица, устроенная описанным образом, называется *таблицей с двойным входом.*

Пример 1. Объем V ($м^3$) одного килограмма воздуха зависит от давления $p\left(\frac{m}{м^2}\right)$, под которым он находится, и от его температуры $t°$ С. Функция $V=f(p, t)$ представляется таблицей, извлечение из которой приводится ниже.

$p\ \frac{m}{м^2}$ \ $t°$ С	-20	-10	0	10	20
10,0	0,7411	0,7704	0,7997	0,8289	0,8582
10,1	0,7338	0,7628	0,7918	0,8207	0,8497
10,2	0,7266	0,7553	0,7840	0,8126	0,8414
10,3	0,7195	0,7480	0,7764	0,8048	0,8332
10,4	0,7126	0,7408	0,7689	0,7970	0,8252
10,5	0,7058	0,7337	0,7616	0,7894	0,8173

б) Аналитический способ состоит в том, что зависимость функции z от аргументов x, y выражается формулой (или системой формул). Функция, заданная аналитически, называется *явной*, если уравнение, связывающее x, y, z, разрешено относительно z. В противном случае z есть *неявная* функция.

Пример 2. Функцию $V=f(p, t)$, рассмотренную в примере 1, можно представить формулой

$$pV = 0{,}02927\,(273{,}2 + t). \tag{1}$$

Тогда V есть неявная функция двух переменных p, t. Формула

$$V = 0{,}02927\,\frac{273{,}2 + t}{p} \tag{2}$$

представляет ту же функцию в явном виде.

Как формула (1), так и формула (2) нуждаются в указании области изменения аргументов. Действительно, взятая сама по себе, формула (2) имеет смысл при любом ненулевом значении p и при любом значении t. Однако по своему физическому смыслу величина t должна быть больше чем $-273{,}2°$, а величина p должна быть положительной. Сверх того, формула (2) дает достаточную точность лишь до тех пор, пока величина p изменяется в известных пределах. Так, точность до 1% обеспечивается лишь до тех пор, пока величина p заключена примерно в промежутке от $\frac{2}{3}\frac{m}{м^2}$ до $100\,\frac{m}{м^2}$.

Область существования функции. *Областью существования* аналитически заданной функции $z=f(x, y)$ называется совокупность всех точек (x, y), для которых формула $z=f(x, y)$ имеет смысл.

Так, область существования функции (2) охватывает все точки (p, t), за исключением точек, лежащих на оси $p=0$.

Всякий раз, как функция $f(x, y)$ задается формулой, должна быть задана и область изменения ее аргументов. И если эта область не указана, то надо подразумевать, что она совпадает с областью существования функции. (Ср. § 15, замечание 1.)

Пример 3. Пусть функция V аргументов D, H задана формулой

$$V=\frac{1}{4}\pi D^2 H \tag{3}$$

без специального указания области изменения аргументов.

Тогда подразумевается, что эта область совпадает с областью определения функции; последняя же, очевидно, есть вся плоскость [т. е. совокупность всех точек (D, H)].

Если же равенство (3) понимается как формула, выражающая объем цилиндра через его диаметр D и высоту H, то область изменения аргументов есть совокупность всех точек, лежащих внутри «первой четверти» [т. е. точек (D, H), у которых обе координаты положительны] (см. рис. 209).

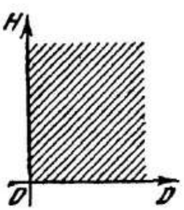


Рис. 209.

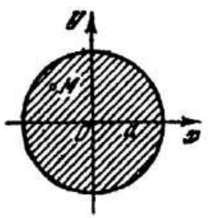


Рис. 210.

Пример 4. Область существования функции

$$z=\ln(a^2-x^2-y^2) \quad (a>0) \tag{4}$$

есть внутренность круга радиуса a с центром в начале координат (рис. 210). Действительно, формула (4) имеет смысл только тогда, когда величина $a^2-x^2-y^2$, стоящая под знаком логарифма, положительна:

$$a^2-x^2-y^2>0.$$

А этому неравенству удовлетворяют только те точки $M(x, y)$, для которых

$$a^2-OM^2>0,$$

то есть

$$|OM|<a.$$

Пример 5. Определить область существования функции

$$z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-1}. \tag{5}$$

Решение. Формула (5) имеет смысл всякий раз, как *обе* подкоренные величины неотрицательны, т. е. когда удовлетворяется система неравенств

$$|x| \geqslant 2, \qquad |y| \geqslant 1. \tag{6}$$

Если же ***хотя бы одно*** из этих неравенств не удовлетворяется, то формула (5) не имеет смысла.

Стало быть, искомая область определяется системой неравенств (6).

Геометрически неравенство $|x| \geqslant 2$ означает, что точка $M(x, y)$ лежит за пределами полосы, ограниченной вертикальными прямыми A_1A_4, A_2A_3 (рис. 211), или на одной из этих граничных прямых; неравенство $|y| \geqslant 1$ означает, что точка $M(x, y)$ лежит за пределами полосы, ограниченной горизонтальными прямыми A_1A_2, A_3A_4, или на одной из этих граничных прямых.

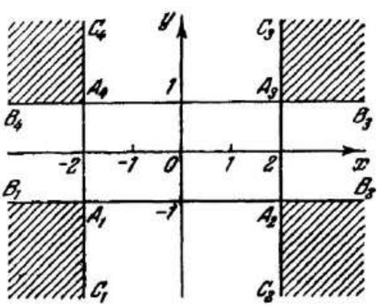


Рис. 211.

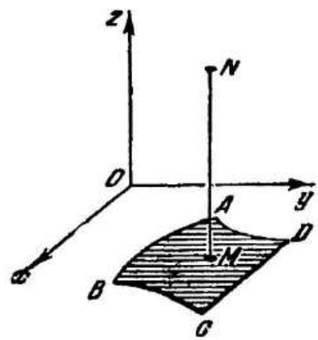


Рис. 212.

Представим себе плоскость xOy в виде черной доски; если заклеить белой бумагой две вышеупомянутые полосы (эти наклейки скрестятся по прямоугольнику $A_1A_2A_3A_4$), то область, сохранившая черный цвет, изобразит область существования функции (6). Это будет совокупность всех точек, лежащих внутри углов $\angle B_1A_1C_1$, $\angle B_2A_2C_2$, $\angle B_3A_3C_3$, $\angle B_4A_4C_4$ и на сторонах этих углов.

в) Пространственно-геометрический способ. Введем в пространстве систему координат $Oxyz$ (рис. 212) и изобразим на плоскости xOy область изменения функции $z=f(x, y)$ (фигура $ABCD$ на рис. 212). При точках M этой области построим направленные отрезки MN, параллельные оси Oz и численно равные соответственным значениям функции $z=f(x, y)$:

$$MN = z = f(x, y). \tag{7}$$

Геометрическое место точек N будет служить изображением функции $z=f(x, y)$. Для функций, с которыми нам в дальнейшем придется иметь дело, это изображение будет некоторой поверхностью S (или, лучше сказать, куском поверхности). При аналитическом представлении функции $f(x, y)$ уравнение $z=f(x, y)$ будет уравнением поверхности S.

Пример 6. Область изменения аргументов функции $f(x, y)$ задана неравенствами

$$|x| \leqslant l, \qquad |y| \leqslant l, \tag{8}$$

и пусть в этой области функция $z=f(x, y)$ определяется формулой

$$z = 4l - \frac{x^2+y^2}{l}. \tag{9}$$

Найдем геометрическое изображение этой функции. Область (8) изменения аргументов геометрически изображается квадратом $SPQR$ (рис. 213), стороны которого параллельны осям Ox, Oy, а центр совпадает с началом координат O. Сторона квадрата равна $2l$ (в состав области включаются и граничные точки).

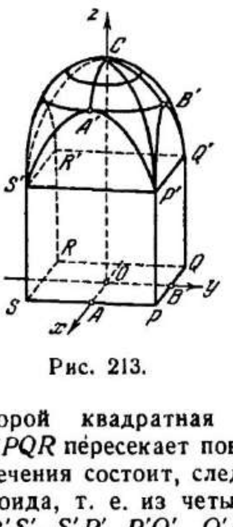


Рис. 213.

Построим при точках M квадрата $SPQR$ вертикальные отрезки $MN=z$, определяемые по формуле (9). Концы их заполнят кусок поверхности. Эта поверхность есть параболоид вращения с вершиной в точке $C(0; 0; 4l)$; осью параболоида служит ось Oz; параметр соответствующей параболы равен $\frac{1}{2}l$.

Пространственное изображение данной функции представляет собой кусок поверхности параболоида, лежащий над квадратом $SPQR$. Этот кусок ограничен линией, по которой квадратная призматическая поверхность с основанием $SPQR$ пересекает поверхность параболоида. Упомянутая линия пересечения состоит, следовательно, из четырех плоских сечений параболоида, т. е. из четырех параболических дуг, стягиваемых хордами $R'S'$, $S'P'$, $P'Q'$, $Q'R'$ (первая из этих дуг изображена пунктиром, последняя вовсе не изображена, чтобы не усложнять чертежа).

г) Способ линий уровня. Изобразив на плоскости xOy область изменения аргументов функции $f(x, y)$, проставим при точках M этой области числовые пометки, выражающие значение функции $f(x, y)$ в соответствующей точке M (этот способ применяется в картографии для обозначения высоты географического пункта). Если сеть точек M достаточно густа, то такая «карта» функции $f(x, y)$ дает возможность прочесть (приблизительное) значение функции в любой точке (x, y).

Это изображение приобретает высокую степень наглядности, если точки, где функция $f(x, y)$ имеет одно и то же значение, соединить плавной линией — *линией уровня.* Этот способ тоже широко применяется при составлении специальных карт. Так, на топографических картах линия уровня («горизонталь») проходит через точки, имеющие одну и ту же высоту; на метеорологических картах «изотермы июля» соединяют пункты, где средняя температура в июле месяце одна и та же, и т. д.

Итак, *линия уровня функции $f(x, y)$ есть геометрическое место тех точек плоскости xOy, где функция имеет одно и то же значение.*

Пример 7. На рис. 214 изображены линии уровня функции $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Область изменения аргументов («карта» функции) есть круг радиуса $OB=a$ с центром в начале координат O.

При точке O проставлена буква a, выражающая значение функции z в точке $O(0; 0)$. В точке $M(0; -0{,}8a)$ данная функция имеет значение $z=0{,}6a$. Это значение прочитывается по пометке, проставленной при соответствующей линии уровня. Последняя является геометрическим местом точек, где функция $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ имеет значение $0{,}6a$; уравнение этого геометрического места есть

$$\sqrt{a^2-x^2-y^2}=0{,}6a,$$

то есть

$$x^2+y^2=0{,}64a^2.$$

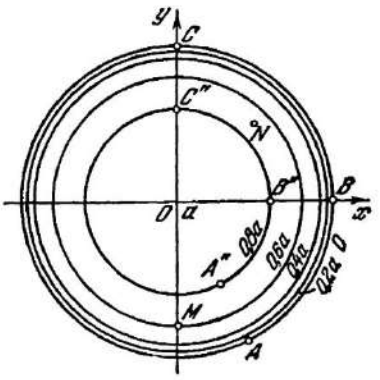


Рис. 214.

Стало быть, линия уровня, проходящая через точку M, есть окружность радиуса $0{,}8a$ с центром в точке O.

На рис. 214 изображены также линии уровня, соответствующие значениям $z=0{,}8a$, $z=0{,}4a$, $z=0{,}2a$, $z=0$; последняя линия совпадает с границей области изменения аргументов.

Чтобы определить значение функции в точке $N\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, которая не лежит ни на одной из изображенных линий уровня, прочитываем пометки $0{,}6a$ и $0{,}8a$ при ближайших линиях уровня. Принимая, что изменение функции $f(x, y)$ приблизительно пропорционально расстоянию точки $M(x, y)$ до ближайшей линии уровня и учитывая, что точка N находится примерно на равном расстоянии от ближайших линий уровня $z=0{,}6a$ и $z=0{,}8a$, находим, что

$$z\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a\right)\approx 0{,}7a.$$

Замечание 1. Изображение функции $f(x, y)$ с помощью линии уровня приобретает наибольшую наглядность, если соответствующие значения функции берутся через равные промежутки (как это имеет место на рис. 214, где значения функции взяты через промежуток $0{,}2a$). В этом случае говорят, что линии уровня образуют *равномерную сеть.*

Рассмотрение линий уровня дает возможность наглядно сравнить друг с другом скорости изменения функции $f(x, y)$ в различных точках. А именно, функция $f(x, y)$ изменяется быстрее там, где линии уровня гуще.

Так, на рис. 214, где линии уровня сгущаются по мере удаления от точки O, расстояние между линиями $z=0{,}4a$ и $z=0{,}2a$ примерно втрое меньше, чем между линиями $z=0{,}8a$ и $z=0{,}6a$. Между тем значение функции $f(x, y)$ в обоих случаях падает на одну и ту же величину. Значит, между линиями $0{,}4a$ и $0{,}2a$ функция $f(x, y)$ изменяется быстрее, чем между линиями $0{,}8a$ и $0{,}6a$.

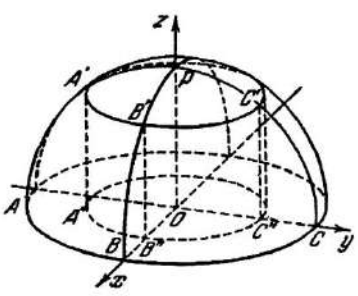


Рис. 215.

Замечание 2. Если пересечь поверхность $z=f(x, y)$ плоскостью $z=k$ и спроектировать сечение на плоскость xOy, то получится линия уровня функции $f(x, y)$ с пометкой k.

Пример 8. Поверхность $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ есть полусфера, изображенная на рис. 215. Пересечем ее плоскостью $z=k$. В сечении получается окружность $A'B'C'$; она представляется системой уравнений

$$z=k, \qquad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}. \tag{10}$$

Исключив z из уравнений (10), получаем уравнение

$$\sqrt{a^2-x^2-y^2}=k, \tag{11}$$

которое представляет окружность $A''B''C''$ — проекцию сечения $A'B'C'$ на плоскость Oxy (см. правило в I, § 147). Линия (11) есть линия уровня функции $f(x, y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ с пометкой k. На рис. 214 эта линия уровня обозначена теми же буквами $A''B''C''$.

§ 148. Функции трех и большего числа переменных

Все, что было сказано в § 144 о функциях двух переменных, распространяется на случай трех и большего числа переменных. Например, для случая трех аргументов устанавливаются следующие определения.

Определение 1. Рассмотрим всевозможные системы значений, совместно принимаемых тремя переменными x, y, z (аргументы). Пусть каждой такой системе соответствует определенное значение четвертой величины u. Тогда говорят, что ***величина u есть функция трех переменных x, y, z.***

Запись:

$$u=f(x,\ y,\ z)$$

или

$$u=u(x,\ y,\ z)$$

и т. п.

Определение 2. Совокупность систем трех чисел, которые (по условию вопроса) способны быть совместными значениями аргументов x, y, z функции $f(x,\ y,\ z)$, называется *областью изменения аргументов* функции $f(x,\ y,\ z)$.

Пример 1. Произведение u трех сомножителей x, y, z есть функция трех переменных x, y, z. Область изменения аргументов есть совокупность всевозможных систем трех чисел x, y, z. Функция $u(x,\ y,\ z)$ выражается формулой

$$u=xyz.$$

Область изменения аргументов функции *трех* переменных можно представить геометрически некоторой совокупностью точек в пространстве, аналогично тому, как область изменения аргументов функции $f(x,\ y)$ представляется совокупностью точек плоскости (§ 145).

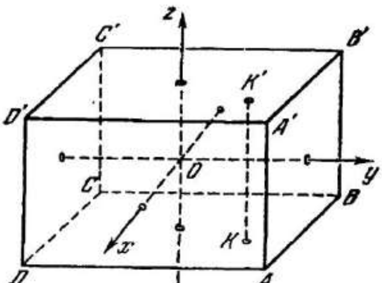


Рис. 216.

Пример 2. Пусть область изменения аргументов некоторой функции $f(x,\ y,\ z)$ устанавливается системой неравенств

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c \tag{1}$$

(где a, b, c — положительные числа).

Тогда геометрическое изображение данной области есть прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 216) со сторонами $AB=2a$, $DA=2b$, $AA'=2c$. Точнее говоря: упомянутое изображение состоит из множества всех точек, лежащих внутри параллелепипеда и на его поверхности (ср. пример 1 § 145).

Пример 3. Пусть область изменения аргументов некоторой функции $\varphi(x, y, z)$ устанавливается соотношением

$$x^2+y^2+z^2<1. \tag{2}$$

Это неравенство геометрически означает, что квадрат расстояния точки $M(x, y, z)$ от начала координат меньше единицы:

$$OM^2<1.$$

Значит, $OM<1$, т. е. точка M лежит внутри шара радиуса $R=1$ с центром в начале координат.

Итак, геометрическое изображение области изменения аргументов есть шар с центром O радиуса $R=1$, лишенный точек, лежащих на поверхности.

Замечание 1. Для функций четырех переменных x, y, z, u систему совместных значений аргументов уже нельзя изобразить *одной* геометрической точкой. Тем не менее систему совместных значений x, y, z, u часто называют «точкой (x, y, z, u)». В аналогичном смысле употребляется выражение «точка (x, y, z, u, v)» и т. д.

Такое словоупотребление оправдывается следующими соображениями: во-первых, оно обладает преимуществом краткости; во-вторых, оно сочетает *несколько* аргументов в едином понятии («точка») (ср. § 146, замечание). Разумеется, можно было бы вместо термина «точка» употреблять какой-либо другой, столь же краткий. Однако при этом утратилось бы третье преимущество, состоящее в следующем.

Существует ряд свойств, общих для функций *любого числа* переменных. Благодаря этому доказательство многих общих теорем, касающихся функций нескольких переменных, можно проводить применительно только к функциям двух или трех переменных (так как для четырех и т. д. переменных рассуждение протекает вполне аналогично). А для функций двух (или трех) переменных каждый шаг рассуждения можно иллюстрировать соответствующим геометрическим построением; и благодаря этому становится гораздо легче следить за *ходом* доказательства. Вот почему совокупность совместных значений четырех, пяти и т. д. аргументов выгодно называть именно *точкой*, а не каким-либо другим термином.

Замечание 2. Понятие функции трех переменных включает (в качестве частного случая) понятие функции двух переменных, а также (в качестве еще более частных случаев) понятие функции одной переменной и понятие постоянной величины (ср. § 144, замечание 3).

Пример 4. Температура T тела, обладающего малой теплопроводностью и подвергающегося неравномерному нагреванию, как правило, меняется от точки к точке и, следовательно, является (в данный момент времени) функцией трех координат x, y, z переменной точки M. При этом, однако, возможно, что вдоль всякого вертикального отрезка KK' (рис. 216) температура имеет одну и ту же величину. Тогда функция $T(x, y, z)$ фактически оказывается функцией двух переменных x, y. Не исключено также, что температура T имеет одну и ту же величину на каждом сечении тела, параллельном плоскости yOz. Тогда функция $T(x, y, z)$ фактически является функцией одной переменной x. Наконец, если температура T во всех точках тела одинакова, то $T(x, y, z)$ есть постоянная величина.

Точно так же функция четырех, пяти и т. д. переменных может оказаться функцией меньшего их числа.

§ 149. Способы представления функции трех переменных

а) Табличный способ. Значения функции $f(x, y, z)$ при некотором фиксированном значении $x=x_0$ можно расположить в таблицу с двойным входом (§ 147, пункт а)). Набор таких таблиц для различных значений x_0 составляет таблицу функции $f(x, y, z)$.

б) Аналитический способ. Этот способ (см. § 147, пункт б)) применим к функциям любого числа переменных; в математическом анализе он является преобладающим. Как и в случае функции двух переменных, функция считается заданной лишь тогда, когда наряду с формулой, определяющей функцию, известна область изменения ее аргументов; если эта область не указана, то подразумевается, что она совпадает с областью существования функции.

Пример 1. Область существования функции

$$f(x, y, z)=\sqrt{25-(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2} \tag{1}$$

есть совокупность точек $M(x, y, z)$, для которых

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant 25. \tag{2}$$

Неравенство (2) означает, что квадрат расстояния между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(a, b, c)$ не превосходит 25:

$$M_0M^2 \leqslant 25.$$

Следовательно, область существования функции (1) есть шар радиуса $R=5$ (включаются и точки, лежащие на поверхности шара).

Пример 2. Пусть функция u трех аргументов x, y, z задана формулой

$$u = \sqrt{25-x^2} + \sqrt{16-y^2} + \sqrt{20-z^2} \tag{3}$$

без указания области изменения аргументов. Так как формула (3) имеет смысл в том и только в том случае, когда одновременно удовлетворяются три неравенства

$$|x| \leqslant 5, \quad |y| \leqslant 4, \quad |z| \leqslant 2\sqrt{5}, \tag{4}$$

то область существования функции (3) есть совокупность всех точек $M(x, y, z)$, для которых все три неравенства (4) верны. А это есть прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (см. § 148, пример 2, рис. 216) с ребрами $AB = 10$, $AD = 8$, $AA' = 4\sqrt{5}$, соответственно параллельными осям Ox, Oy, Oz и с центром в начале координат O. Этот параллелепипед и подразумевается в качестве области изменения точки $M(x, y, z)$.

в) Способ поверхностей уровня. В § 147 были объяснены два геометрических способа, употребляемых для изображения функций двух переменных. В первом способе значения функции $f(x, y)$ изображались отрезками, перпендикулярными к плоскости xOy; этот способ, очевидно, нельзя перенести на случай функции трех переменных. Во втором для изображения функции $f(x, y)$ применялись линии уровня. Этот способ переносится на случай функции трех переменных.

Назовем *поверхностью уровня* геометрическое место точек $M(x, y, z)$, где функция $f(x, y, z)$ имеет одно и то же значение. Уравнение поверхности уровня есть

$$f(x, y, z) = u_0,$$

где u_0 — некоторая постоянная величина.

Различным значениям u_0 будут соответствовать, как правило, различные поверхности уровня.

Рассматривая *равномерную сеть* (см. § 147, замечание 1) поверхностей уровня, мы можем сравнивать друг с другом скорости изменения функции $f(x, y, z)$ в различных точках $M(x, y, z)$ по степени густоты поверхностей уровня вблизи соответствующих точек M.

Так, если функция $f(x, y, z)$ представляет температуру воздуха в точке $M(x, y, z)$, то поверхность уровня есть *изотермическая* поверхность (т. е. поверхность равных температур), и густота равномерной сети изотермических поверхностей характеризует быстроту падения температуры (по направлению, перпендикулярному к изотермической поверхности).

Пример 3. Поверхность уровня функции

$$u=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}, \tag{5}$$

соответствующая значению $u=\frac{a}{2}$, представляется уравнением

$$\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}=\frac{a}{2}$$

или

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}a^2.$$

Следовательно, рассматриваемая поверхность уровня есть сфера радиуса $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ с центром в начале координат. Вообще все поверхности уровня функции (5) являются концентрическими сферами. Рис. 214 дает разрез их равномерной сети. Все поверхности уровня принадлежат шару O радиуса a.

§ 149а. Вопросы и задачи к §§ 144—149

1. Пусть $x=AB$, $y=AC$ — катеты прямоугольного треугольника ABC, $z=AD$ — его высота. Гипотенуза BC не должна превышать данный отрезок a. Представить z как функцию x, y аналитическим способом. Как изобразится область изменения аргументов?

2. Пусть x, y — площади квадратов, построенных на катетах AB, AC, прямоугольного треугольника ABC, z — площадь квадрата, построенного на высоте AD. Представить z как функцию x, y. Как изобразится область изменения аргументов при условии, что $|BC|\leqslant a$?

3. Изобразить геометрически область существования функции

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-x^2-4y^2}.$$

Какой поверхностью геометрически представляется эта функция? Построить линии уровня с числовыми пометками, разнящимися друг от друга на 0,2.

4. Определить область существования функции

$$z=\sqrt{a(x+y)} \qquad (a>0).$$

Построить равномерную сеть линий уровня. Каков вид поверхности, изображающей данную функцию?

Указание. Совершить поворот осей Ox, Oy около оси Oz.

5. Определить область существования функции

$$z=\frac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Построить равномерную сеть линий уровня. Определить вид поверхности, изображающей данную функцию.

6. Найти область существования функции $z=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ и построить линии уровня с пометками $\frac{5}{4}a$, $a\sqrt{2}$, $\frac{5}{3}a$.

7. На плоскости дан отрезок $F_1F_2=2c$. Функция $z=f(M)$ переменной точки M задана соотношением

$$f(M)=|F_1M|+|F_2M|.$$

Построить линии уровня с пометками

$$2c;\quad 2{,}5c;\quad 3c;\quad 3{,}5c;\quad 4c.$$

Выбрав удобную систему координат, выразить z как функцию координат точки M.

8. На плоскости дан отрезок $F_1F_2=2c$. Функция $z=f(M)$ задана соотношением

$$z=\frac{F_1M^2-F_2M^2}{c}.$$

Выбрав удобную систему координат, представить z как функцию координат точки M. Построить линии уровня с пометками 0, c, $-c$.

9. Функция u точки M (в пространстве) определена соотношением

$$u=f(M)=\frac{OA^2}{OA^2-OM^2},$$

где O и A — фиксированные точки. Какова область существования функции $f(M)$? Какой вид имеет поверхность уровня с пометкой 2?

Выбрав удобную пространственную систему координат, выразить u как функцию координат x, y, z точки M.

10. Функция u точки M (в пространстве) определена соотношением

$$u=f(M)=\frac{AM^2+BM^2}{AB},$$

где A и B — фиксированные точки.

Выразить u как функцию координат x, y, z точки M и определить вид поверхностей уровня.

§ 150. Последовательность точек и ее предел

Определение 1. Совокупность точек M_1, M_2, ..., M_n (рис. 217), следующих друг за другом в порядке возрастания натурального аргумента n, называется *последовательностью точек* (ср. § 31, определение).

Замечание 1. Задание последовательности точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, ... на плоскости равнозначно заданию двух числовых последовательностей, а именно последовательности абсцисс

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

и последовательности ординат

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

Задание последовательности точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ...

$\ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$, $\ldots$ равнозначно заданию трех числовых последовательностей:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \; y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots; \; z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Задание последовательности «точек» $M_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, u_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n, u_n)$, $\ldots$ (см. § 148, замечание 1) равнозначно заданию четырех последовательностей: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$; $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$; $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и т. д.

Расстояние между двумя точками. Когда словом «точка» именуется система совместных значений двух переменных x, y, то под расстоянием между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) понимается [по аналогии с расстоянием между геометрическими точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$] число $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. В случае трех переменных расстоянием между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ называется число $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

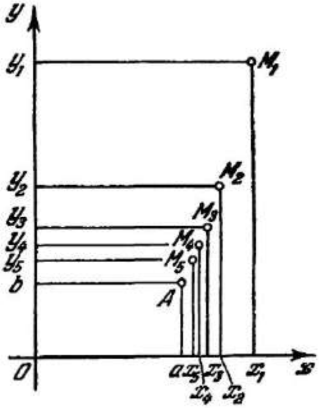


Рис. 217.

Эта терминология распространяется и на случаи четырех, пяти и т. д. переменных. Так, расстоянием между точками $M_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, u_2)$ называется число

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(u_2-u_1)^2}$$

и т. д.

Определение 2. Точка $A(a, b)$ называется *пределом последовательности* точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

$$A = \lim M_n \quad (\text{или } M_n \to A),$$

если последовательность расстояний $|AM_1|$, $|AM_2|, \ldots, |AM_n|, \ldots$ имеет пределом число нуль:

$$\lim |AM_n| = 0.$$

Пример 1. Последовательность точек

$$M_1(3; 4),\ M_2\left(\frac{5}{2};\ \frac{9}{4}\right),\ M_3\left(\frac{7}{3};\ \frac{16}{9}\right),\ \ldots,\ M_n\left[\frac{2n+1}{n},\ \frac{(n+1)^2}{n^2}\right], \ldots$$

(см. рис. 217) имеет пределом точку $A(2;1)$.

Действительно, расстояния AM_n образуют последовательность

$$|AM_1| = \sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2} = \sqrt{10}, \quad |AM_2| = \frac{1}{4}\sqrt{29},$$

$$|AM_3| = \frac{1}{9}\sqrt{58}, \quad \ldots, \quad |AM_n| = \frac{\sqrt{5n^2+4n+1}}{n^2}, \quad \ldots$$

Отсюда находим

$$\lim |AM_n| = \lim \sqrt{\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = 0.$$

Теорема. Точка A является пределом последовательности точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ в том и только в том случае, когда каждая из координат точки A является пределом последовательности, пробегаемой соответственной координатой точки M_n.

Доказательство. Для определенности рассмотрим четырехмерный случай.

1) Пусть точка A (a, b, c, d) есть предел последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1, z_1, u_1), \ M_2(x_2, y_2, z_2, u_2), \ \ldots, \ M_n(x_n, y_n, z_n, u_n), \ \ldots$$

Это значит, что

$$\lim \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2+(z_n-c)^2+(u_n-d)^2} = 0. \tag{1}$$

Подкоренное выражение есть сумма четырех неотрицательных слагаемых. Значит, каждое из этих слагаемых не превосходит их суммы; в частности,

$$(x_n-a)^2 \leqslant (x_n-a)^2+(y_n-b)^2+(z_n-c)^2+(u_n-d)^2,$$

откуда

$$|x_n-a| \leqslant \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2+(z_n-c)^2+(u_n-d)^2}.$$

Правая часть этого неравенства по условию стремится к нулю; значит, левая часть и подавно стремится к нулю:

$$\lim |x_n-a| = 0.$$

Аналогично для остальных координат. Таким образом, заключаем, что

$$\lim x_n = a, \ \lim y_n = b, \ \lim z_n = c, \ \lim u_n = d. \tag{2}$$

2) Обратно, из соотношений (2) непосредственно вытекает соотношение (1). Теорема доказывается аналогично для любого числа измерений.

Пример 2. Для последовательности точек, рассмотренной в примере 1, имеем

$$\lim x_n = \lim \frac{2n+1}{n} = 2, \ \lim y_n = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Отсюда заключаем, что последовательность точек $M_n\left[\frac{2n+1}{n}, \frac{(n+1)^2}{n^2}\right]$ имеет пределом точку $A(2; 1)$.

§ 151. Предел функции нескольких переменных

Определение предела функции $f(x)$, данное в § 34, можно (слегка перефразируя его) высказать в следующей форме [1]:

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \longrightarrow a$, если всякой последовательности точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

стремящихся к пределу a (но отличных от a), соответствует числовая последовательность вида

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

имеющая пределом b.

Это определение распространяется и на случай функции любого числа переменных. Для определенности будем говорить о функции двух переменных.

Определение. Число c называется пределом функции $f(x, y)$ при $x \longrightarrow a$, $y \longrightarrow b$ [или при $M \longrightarrow A(a, b)$], если всякой последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots,$$

стремящихся к пределу $A(a, b)$, но отличных от $A(a, b)$, соответствует числовая последовательность вида

$$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots, f(x_n, y_n), \ldots,$$

имеющая пределом c.

Запись:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = c$$

или

$$\lim_{M \to A(a, b)} f(x, y) = c.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} (3x^2 - 4xy)$.

Решение. Возьмем любую последовательность точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n),$$

стремящихся к пределу $A(2; 1)$ (например, последовательность, рассмотренную в примере 1 § 150). Имеем

$$\lim x_n = 2, \lim y_n = 1 \tag{1}$$

(в силу теоремы § 150).

---

[1]) Исходные условия этого определения мы пока оставляем без внимания (см. ниже замечание).

Взятой последовательности точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, ... соответствует последовательность значений данной функции

$$3x_1^2-4x_1y_1,\ \ 3x_2^2-4x_2y_2,\ \ \ldots,\ \ 3x_n^2-4x_ny_n,\ \ldots \tag{2}$$

Эта последовательность имеет пределом число 4. Действительно,

$$\lim(3x_n^2-4x_ny_n)=3[\lim(x_n)^2]-4(\lim x_n)(\lim y_n)=$$
$$=3\cdot 2^2-4\cdot 2\cdot 1=4.$$

Ответ: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(3x^2-4xy)=4.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{M\to A(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение. Искомый предел не существует. Действительно, рассмотрим какую-либо последовательность точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots,$$

стремящихся к точке $A(0;0)$ вдоль прямой $y=x$. Тогда наряду с соотношениями

$$\lim x_n=0,\ \lim y_n=0 \tag{3}$$

будет иметь место соотношение

$$x_n=y_n. \tag{4}$$

Поэтому в последовательности

$$f(x_1, y_1)=\frac{x_1^2-y_1^2}{x_1^2+y_1^2},\qquad f(x_2, y_2)=\frac{x_2^2-y_2^2}{x_2^2+y_2^2},\ \ldots,$$
$$f(x_n, y_n)=\frac{x_n^2-y_n^2}{x_n^2+y_n^2},\ \ldots \tag{5}$$

все члены будут равны нулю. Значит, последовательность (5) в рассматриваемом случае имеет пределом число нуль.

Рассмотрим теперь какую-либо последовательность точек M_1, M_2, ..., M_n, ..., стремящихся к точке $A(0;0)$ вдоль оси Ox. Тогда вместо соотношения (4) будем иметь равенство $y_n=0$. Поэтому последовательность (5) примет вид

$$f(x_1, y_1)=\frac{x_1^2}{x_1^2}=1,\ f(x_2, y_2)=\frac{x_2^2}{x_2^2}=1,\ \ldots,\ f(x_n, y_n)=1,\ \ldots$$

и, следовательно, будет иметь пределом число единицу.

Нетрудно составить также и такие последовательности точек M_n, стремящихся к A, для которых последовательность (5) имеет пределом другие числа и даже вовсе не имеет предела.

Значит, функция $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ при $x\to 0$, $y\to 0$ предела не имеет.

Замечание. В определении предела функции одной переменной мы исходили из предположения (§ 34, исходные условия), что точка a принадлежит некоторому промежутку (m, n), внутри которого функция $f(x)$ определена во всех точках, отличных от a [при этом не исключается, что функция $f(x)$ определена и в самой точке a, но это не обязательно].

В вышеприведенном определении предела $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ функции двух переменных исходим из аналогичного предположения. Только вместо *промежутка* (m, n) *числовой прямой*, содержащего точку a, рассматривается некоторая область D *числовой плоскости*, содержащая точку $A(a, b)$.

В качестве такой области можно взять, например, какой-либо круг K (рис. 218), т. е. совокупность точек, расстояние которых до точки K не превосходит некоторого числа R.

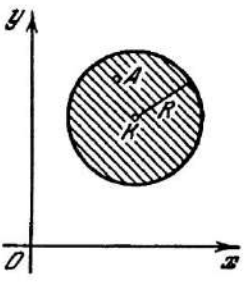


Рис. 218.

Итак, исходное условие при определении предела $\lim\limits_{M \to R} f(x, y)$ можно сформулировать следующим образом.

Предполагается, что точка A принадлежит некоторому кругу K и что во всех точках этого круга, отличных от A, функция $f(x, y)$ определена (не исключается, что она определена и в самой точке A, но это не обязательно).

Если речь идет о функции трех переменных $f(x, y, z)$, то вместо круга берется некоторый шар K, т. е. совокупность точек $M(x, y, z)$, расстояние которых до точки K не превосходит некоторого числа R.

Аналогично в случае функции $f(x, y, z, u)$ четырех переменных в качестве области изменения аргументов берется «шар радиуса R с центром в точке K»; под этим термином понимается совокупность точек $M(x, y, z, u)$, расстояние которых до точки $K(a, b, c, d)$ не превосходит числа R (определение термина «расстояние» было дано в § 150).

§ 151а. Задачи к §§ 150—151

Найти указанные пределы (или установить, что они не существуют).

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$. 2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -2}} \dfrac{(x-1)^2-(y+2)^2}{(x-1)^2+(y+2)^2}$ (ср. § 151, пример 2).

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$. 4. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{(x+1)^2+2y^2}}{(x+1)^2+y^2}$.

§ 152. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 1. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке A*, если предел функции при $M \longrightarrow A$ равен значению функции в точке A. В противном случае точка A называется *точкой разрыва* функции $f(M)$.

Это определение дословно соответствует определению предела функции одной переменной (§ 38, стр. 106). Пояснение к этому определению тоже сохраняет полную силу.

Пример 1. Функция $f(x, y) = 3x^2 - 4xy$ непрерывна в точке $A(2; 1)$. Действительно, в точке A функция $f(x, y)$ имеет значение $f(2; 1) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. С другой стороны, при $M(x, y) \longrightarrow A(2; 1)$ предел функции $f(x, y)$ — число 4 (§ 151, пример 1). Таким образом,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} f(x, y) = f(2; 1),$$

т. е. функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $x = 2$, $y = 1$.

Пример 2. Функция $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ разрывна в точке $A(0; 0)$, так как не имеет предела при $x \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow 0$ (см. § 151, пример 2).

Замечание. Кроме того, формула $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не задает значения функции в точке $A(0; 0)$, но эту неопределенность можно было бы устранить, если бы данная функция имела некоторый предел a при $x \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow 0$. Для этого достаточно было бы ввести дополнительную формулу $f(0, 0) = a$.

Определение 2. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в некоторой области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Пример 3. Функция $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ непрерывна в круге радиуса $R = 4{,}8$ с центром в точке $C(4; 3)$. Действительно, в любой точке, отличной от точки $(0; 0)$, функция $f(x, y)$ непрерывна. Точка разрыва $(0; 0)$ лежит вне круга C; поэтому в каждой точке, принадлежащей кругу C, функция $f(x, y)$ непрерывна.

§ 153. Бесконечно малые величины

Определение. Утверждение «функция $f(M)$ бесконечно мала при $M \longrightarrow A$» равнозначно утверждению, что $\lim\limits_{M \to A} f(M) = 0$.

Теорема 1. Число c является пределом функции $f(x, y)$ в том и только в том случае, когда разность $f(x, y) - c$ есть бесконечно малая величина.

Эта теорема распространяется на функции любого числа переменных и доказывается точно так же, как теорема § 41.

Основные свойства бесконечно малых величин (§ 43), теоремы о конечных пределах (§ 44) и теоремы § 45 о непрерывных функциях тоже остаются в силе для функций нескольких переменных и доказываются аналогично.

Что касается сравнения двух бесконечно малых величин α, β, то здесь надо заметить следующее.

В § 53 мы различали три случая:

1) отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ имеет конечный предел, отличный от нуля; тогда бесконечно малые величины α, β имеют (согласно определению 2 § 53) одинаковый порядок малости.

2) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$; тогда α имеет (согласно определению 1 § 53) высший порядок относительно β.

3) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$; тогда α имеет (согласно определению 1 § 53) низший порядок относительно β.

Однако логически возможен еще один случай:

4) Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела. В этом случае говорят, что бесконечно малые α и β *несравнимы*.

Так, например, при бесконечно малом x величины $\alpha = x \cos \frac{\pi}{2x}$ и $\beta = 2x$ бесконечно малы, но несравнимы, так как отношение $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2x}$ при $x \to 0$ не имеет предела (см. § 34, пример 3).

Однако случай 4 для элементарных функций *одной переменной* является исключительным и практического интереса не представляет. А для бесконечно малых функций *нескольких переменных* случай 4 является обычным и встречается при рассмотрении даже простейших функций.

Пример 1. При $M \to M_0\,(0; 0)$ величины $\alpha = 2x^2 - y^2$ и $\beta = x^2 + y^2$ бесконечно малы, но несравнимы. Действительно, отношение $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ при $M \to M_0$ не имеет предела (ср. § 151, пример 2).

Замечание 1. Бесконечно малая величина $x^2 + y^2$ есть квадрат расстояния $|M_0M|$ от точки M_0 до точки M, стремящейся к M_0. Вообще случай, когда в отношении $\frac{\alpha}{\beta}$ одна из величин α, β является какой-либо степенью расстояния между точкой M и ее пределом M_0, имеет в математическом анализе особо важное значение.

Пример 2. Функция двух переменных $\alpha = 2(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ имеет при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ высший порядок малости относительно расстояния

$$|M_0M| = \rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Действительно, рассмотрим отношение

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{2\Delta x^2+\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

где для краткости положено $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, и представим его в виде

$$2\Delta x \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \Delta y \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}. \tag{1}$$

Каждая из величин $\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, $\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ по абсолютной величине не превосходит единицы $\left(\text{ср. рис. 219, где } \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \cos\beta\right)$. А каждая из величин $2\Delta x$, Δy стремится к нулю при $M \to M_0$. Следовательно, каждый из членов суммы (1) стремится к нулю. Значит, и сама сумма стремится к нулю. Стало быть,

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha}{\rho} = 0,$$

т. е. α имеет высший порядок относительно ρ.

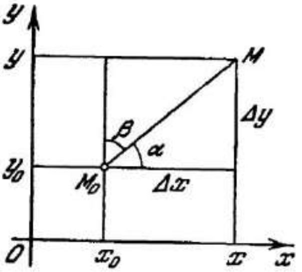


Рис. 219.

Теорема 2. Если величины α, β, γ бесконечно малы при $|MM_0| = \rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} \to 0$, то величина $\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z$ имеет высший порядок относительно ρ.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z}{\rho} = \alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho} + \gamma\frac{\Delta z}{\rho}.$$

Каждая из величин $\frac{\Delta x}{\rho}, \frac{\Delta y}{\rho}, \frac{\Delta z}{\rho}$ не превосходит единицы[1]), а каждая из величин α, β, γ бесконечно мала. Следовательно (ср.

[1]) Геометрически эти отношения суть косинусы углов между отрезком M_0M и осями Ox, Oy, Oz.

пример 2) отношение $\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y+\gamma\,\Delta z}{\rho}$ стремится к нулю при $\rho\to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y+\gamma\,\Delta z}{\rho}=0,$$

то есть величина $\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y+\gamma\,\Delta z$ имеет высший порядок относительно ρ

Теорема 3 (обратная). Величину ε, имеющую высший порядок малости относительно $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, можно представить в виде

$$\varepsilon=\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y+\gamma\,\Delta z, \tag{2}$$

где величины α, β, γ бесконечно малы.

Доказательство. Введем обозначение $\frac{\varepsilon}{\rho}=\lambda$. По условию величина λ бесконечно мала при $\rho\to 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon=\lambda\rho=\lambda\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\\ =\left(\lambda\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}\right)\Delta x+\left(\lambda\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}\right)\Delta y+\\ +\left(\lambda\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}\right)\Delta z.\end{aligned} \tag{3}$$

Каждое из выражений, заключенных в скобки, представляет бесконечно малую величину. Так, выражение $\lambda\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\alpha$ есть произведение бесконечно малой величины λ на отношение $\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}$, не превосходящее единицы по абсолютной величине. Следовательно, величина α бесконечно мала. Аналогично докажем, что бесконечно малы также величины $\lambda\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\beta$, $\lambda\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\gamma$ и формула (3) примет вид (2).

Замечание 2. В условиях теоремы 2 величину ε можно представить в виде (2) бесчисленным множеством иных способов.

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 распространяются на любое число измерений.

§ 153а. Задачи к § 153.

Сравнить две бесконечно малые величины α, β по порядку их малости (или установить, что эти величины несравнимы).

1. $\alpha=x^2-y^2$, $\beta=x^2+2y^2$ (при $x\to 0$, $y\to 0$).
2. $\alpha=x^2-y^2$, $\beta=\sqrt{x^2+y^2}$ (при $x\to 0$, $y\to 0$).
3. $\alpha=(3+x)^2y-6y$, $\beta=2x$ (при $x\to 0$, $y\to 0$).
4. $\alpha=x^3+y^3$, $\beta=x^2+y^2$ (при $x\to 0$, $y\to 0$).

§ 154. Частные производные

Частная производная функции $z=f(x, y)$ по аргументу x в точке $M_0(x_0, y_0)$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 220) принадлежит области изменения аргументов некоторой функции $z=f(x, y)$. Проведем через точку M_0 прямую UU', параллельную оси Ox, и оставим пока без внимания все точки области D, не лежащие на прямой UU'. Тогда величина z окажется функцией только одного аргумента x; эту функцию обозначим $f(x, y_0)$.

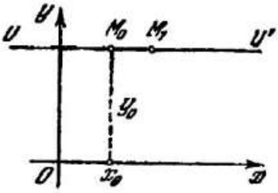


Рис. 220.

Если функция $f(x, y_0)$ обладает в точке $x=x_0$ производной (по аргументу x), то последняя называется *частной производной функции $f(x, y)$ по аргументу x в точке M_0* и обозначается одним из символов

$$z'_x, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Замечание 1. Символ $\frac{\partial z}{\partial x}$ составлен по образцу выражения $\frac{dz}{dx}$ для производной от функции одной переменной. Однако обозначения ∂z, ∂x *не выражают* каких-либо дифференциалов. Подробнее об этом будет сказано ниже (§ 157), а пока подчеркнем, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ надо рассматривать не как отношение неких величин ∂z и ∂x, а как единое и нераздельное обозначение частной производной.

Замечание 2. Вспоминая определение производной (§ 59), мы можем высказать определение частной производной следующим образом.

Определение. Частной производной функции $z=f(x, y)$ по аргументу x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения $\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$f'_x(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Замечание 3. В процессе вычисления предела (1) считается постоянной не только величина y_0, но также величина x_0. Но точка $M(x_0, y_0)$ может занимать различные положения, и тогда частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ будет функцией двух переменных (координат точки M_0). Имея это в виду, мы можем переписать формулу (1) в виде

$$f'_x(x, y)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}. \tag{2}$$

При этом надо твердо помнить, что в процессе *предельного перехода* обе величины x и y рассматриваются как постоянные (ср. § 58, замечание 1).

Частная производная функции $z=f(x, y)$ по аргументу y в точке $M_0(x_0, y_0)$. Она определяется как предел отношения $\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ при $\Delta y \to 0$ и обозначается одним из символов

$$z'_y\ ,\quad f'_y(x_0, y_0)\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0),$$

так что, например,

$$f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{1a}$$

Имея в виду, что точка M_0 может занимать различные положения на плоскости xOy, можно записать формулу (1a) в виде

$$f'_y(x, y)=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}. \tag{2a}$$

Частные производные функции трех и большего числа переменных определяются и обозначаются аналогично. Так, для случая функции $u=f(x, y, z)$ трех переменных имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x}$$

и т. д.

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ можно рассматривать как скорости изменения функции $u(x, y, z)$ при смещении точки $M(x, y, z)$ по направлениям, параллельным осям Ox, Oy, Oz.

Замечание 4. Вычисление частных производных по существу не отличается от вычисления обыкновенной производной. В самом деле, чтобы найти, например, частную производную $u'_x=f'_x(x, y, z)$, достаточно найти обыкновенную производную переменной u, считая последнюю функцией одного аргумента x и рассматривая величины y, z как постоянные.

Пример. Найти значения частных производных от функции

$$u=f(x, y, z)=2x^2+y^2-3z^2-3xy-2xz$$

в точке $M_0(0; 0; 1)$.

Решение. Считая u функцией одного аргумента x, находим, что ее производная u'_x равна $4x-3y-2z$. В точке $(0; 0; 1)$ значение этой производной равно -2. Это и есть искомое значение частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично найдем значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Запись:

$$f'_x(0;\ 0;\ 1) = 4x - 3y - 2z\Big|_{\substack{x=0\\y=0\\z=1}} = -2,$$

$$f'_y(0;\ 0;\ 1) = 2y - 3x\Big|_{\substack{x=0\\y=0\\z=1}} = 0,$$

$$f'_z(0;\ 0;\ 1) = -6z - 2x\Big|_{\substack{x=0\\y=0\\z=1}} = -6.$$

Замечание 5. Более практичный способ, позволяющий в один прием найти все частные производные, будет объяснен ниже (в § 163).

§ 155. Геометрическое истолкование частных производных от функций двух переменных

Пусть поверхность S (рис. 221) служит пространственно-геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ (§ 147). Пусть точке $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy отвечает точка N_0 поверхности S. Проведем через эту точку плоскость N_0M_0U, параллельную плоскости xOz. В пересечении с плоскостью xOy она дает прямую UM_0, параллельную оси Ox (ср. рис. 220 на стр. 444), а в пересечении с поверхностью S — некоторую линию L_1N_0. Последняя представляется (в своей плоскости) уравнением

$$z = f(x, y_0),$$

выражающим аппликату z в функции одного аргумента x. Производная $\frac{dz}{dx}$ от этой функции в точке $x = x_0$ есть частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ (согласно определению § 154). С другой стороны, производная $\frac{dz}{dx}$ равна тангенсу угла

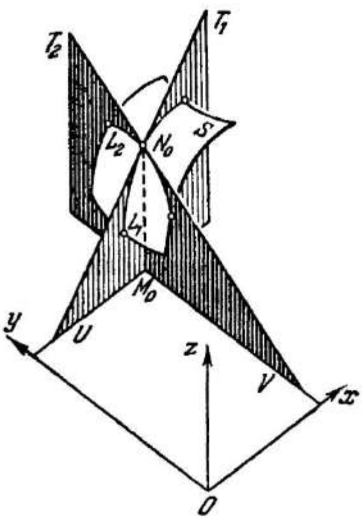


Рис. 221.

$\alpha_1 = \angle M_0UT_1$, который касательная N_0T_1 к линии L_1N_0 образует с прямой UM_0, а значит, и с плоскостью xOy. Следовательно,

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha_1.$$

Таким образом, частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ выражает тангенс угла $\alpha_1 = \angle M_0UT_1$, который образует с плоскостью xOy касательная N_0T_1 к сечению поверхности S, параллельному плоскости xOz.

Аналогично частная производная $f'_y(x_0, y_0)$ выражает тангенс угла $\alpha_2 = \angle M_0VT_2$, который образует с плоскостью xOy касательная N_0T_2 к сечению поверхности S, параллельному плоскости yOz.

§ 155а. Задачи к §§ 154—155

В задачах 1—4 требуется найти частные производные указанных функций:

1. $f(x, y) = x^3y - y^3x$ в точке $M_0(1; 3)$.

2. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ в точке $M_0(2; 4)$. 3. $f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}$ в точке $(0; 2)$.

4. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке $(1; 2; -1)$.

5. Через точку $M_0(1; 2; 6)$ эллиптического параболоида $z = 2x^2 + y^2$ проведены сечения, параллельные координатным плоскостям xOz и yOz. Найти направляющие коэффициенты касательных к этим сечениям в точке M_0.

6. Площадь S треугольника ABC рассматривается как функция стороны $c = AB$ и прилежащих углов $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. Доказать, что

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{b^2}{2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{a^2}{2},$$

где $a = BC$, $b = AC$.

§ 156. Частные приращения и частные дифференциалы

Частные приращения. Согласно определению § 154 частная производная $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ функции $u = f(x, y, z)$ есть предел отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Числитель этого выражения есть приращение, которое получает функция $u = f(x, y, z)$, когда начальное значение x_0 аргумента x получает приращение Δx, а начальные значения y_0, z_0 аргументов y, z остаются неизменными (т. е. $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$). Такое приращение функции u называется *частным приращением* и обозначается $\Delta_x u$ или $\Delta_x f(x, y, z)$ и т. п.

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$:

$$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$
$$\Delta_z u = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Замечание 1. Для случая функции $z=f(x, y)$ двух переменных x, y частное приращение $\Delta_x z$ геометрически изображается приращением аппликаты $M_0N_0=z_0$ (рис. 221, стр. 446) при смещении точки N_0 вдоль линии L_1N_0, а частное приращение $\Delta_y z$ получается при смещении вдоль линии L_2N_0.

Пример 1. Найти выражения частных приращений функции

$$u=f(x, y, z)=x^2y+2xz$$

при произвольно взятых начальных значениях x_0, y_0, z_0 аргументов x, y, z.

Решение.

$$\Delta_x u=[(x_0+\Delta x)^2 y_0+2(x_0+\Delta x) z_0]-[x_0^2y_0-2x_0z_0]= \\ =(2x_0y_0+2z_0)\,\Delta x+y_0\Delta x^2,$$

$$\Delta_y u=[x_0^2(y_0+\Delta y)+2x_0z_0]-[x_0^2y_0+2x_0z_0]=x_0^2\Delta y,$$

$$\Delta_z u=[x_0^2y_0+2x_0(z_0+\Delta z)]-[x_0^2y_0+2x_0z_0]=2x_0\Delta z.$$

Замечание 2. Частное приращение $\Delta_x u$ при фиксированных начальных значениях x_0, y_0, z_0 аргументов x, y, z есть не что иное, как обыкновенное приращение функции $f(x, y_0, z_0)$ одного аргумента при фиксированном начальном его значении x_0. Надо, однако, помнить, что вид самой функции $f(x, y_0, z_0)$, как правило, *зависит от выбора* начальных значений y_0, z_0. Аналогично для частных приращений $\Delta_y u$, $\Delta_z u$.

Пример 2. При начальных значениях $x=2\ (=x_0)$, $y=1\ (=y_0)$, $z=0\ (=z_0)$ частное приращение $\Delta_x u$ функции $u=f(x, y, z)=x^2y+2xz$ (см. пример 1) имеет вид

$$\Delta_x u=4\Delta x+\Delta x^2.$$

Это частное приращение есть не что иное, как обыкновенное приращение функции

$$f(x, y_0, z_0)=f(x, 1, 0)=x^2$$

при начальном значении $x=2\ (=x_0)$.

Возьмем теперь иные начальные значения y_0, z_0, сохранив прежнее начальное значение $x_0=2$. Частное приращение $\Delta_x u$ будет совпадать с обыкновенным приращением функции $f(x, y_0, z_0)$ при начальном значении $x_0=2$, но сама функция $f(x, y_0, z_0)$ будет иметь, как правило, иной вид. Например, при $y_0=3$, $z_0=1$ будем иметь

$$f(x, y_0, z_0)=f(x, 3, 1)=3x^2+2x.$$

Обыкновенное приращение этой функции при начальном значении $x_0=2$ есть $14\Delta x+3\Delta x^2$. Это и есть частное приращение $\Delta_x u$ при начальных значениях $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=1$.

Частные дифференциалы. Пусть частное приращение $\Delta_x u$ функции $u=f(x, y, z)$ (при фиксированных начальных значениях x_0, y_0, z_0 и переменном приращении Δx) разбивается на два слагаемых

$$\Delta_x u = A\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

из которых одно ($A\Delta x$) пропорционально Δx, а другое (α) имеет при $\Delta x \to 0$ высший порядок относительно Δx.

Тогда величина $A\Delta x$ называется *частным дифференциалом функции $f(x, y, z)$ по аргументу x* [в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$]; этот частный дифференциал обозначается $d_x u$ или $d_x f(x, y, z)$, так что

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\Delta x. \tag{2}$$

Короче говоря, частный дифференциал $d_x f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это обыкновенный дифференциал функции $f(x, y_0, z_0)$ одного аргумента x, взятый в точке $x = x_0$ (см. определение § 66). Аналогично определяются частные дифференциалы $d_y f(x, y, z)$, $d_z f(x, y, z)$ по аргументам y, z.

Теорема. Коэффициент пропорциональности A в формуле (1) равен частной производной u'_x:

$$A = u'_x = f'_x(x, y, z). \tag{3}$$

Иными словами: *частный дифференциал функции $f(x, y, z)$ есть произведение частной производной по соответствующему аргументу на приращение этого аргумента* [ср. формулу (2)]:

$$d_x u = u'_x dx. \tag{4}$$

Аналогично

$$d_y u = u'_y dy, \tag{5}$$

$$d_z u = u'_z dz. \tag{6}$$

Эта теорема доказывается так же, как аналогичная теорема для функции одной переменной (§ 66).

Пример 3. Найти частные дифференциалы функции

$$u = x^2 y + 2xz \tag{7}$$

в точке $M_0(2; 1; 0)$.

Решение. Будем сперва считать величины y и z постоянными. Дифференцируя формулу (7) в этом предположении, получаем частный дифференциал $d_x u$:

$$d_x u = f'_x(x, y, z)\,dx = (2xy + 2z)\,dx.$$

При данных начальных значениях имеем

$$d_x f(2; 1; 0) = 4dx.$$

Считая теперь постоянными величины x, z, находим

$$d_y u = d_y f(x, y, z) = x^2 dy,$$

откуда

$$d_y f(2;\ 1;\ 0) = 4dy.$$

Аналогично найдем

$$d_z u = 2x\,dz,$$

$$d_z f(2;\ 1;\ 0) = 4dz.$$

§ 157. О выражении частной производной через дифференциалы

Из формул (4) — (6) предыдущего параграфа вытекает, что частные производные функции $u(x, y, z)$ можно представить в виде дробей следующим образом:

$$u'_x = \frac{d_x u}{dx}, \quad u'_y = \frac{d_y u}{dy}, \quad u'_z = \frac{d_z u}{dz}.$$

При этом в символах $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$ *надо обязательно сохранять обозначение аргумента*, по которому берется частный дифференциал. Несоблюдение этого требования может привести к ошибкам.

Пример. Объем V, давление p и абсолютная температура T некоторого количества идеального газа связаны друг с другом формулой Клапейрона

$$pV = RT, \tag{1}$$

где R есть некоторая постоянная величина. Любую из переменных величин p, V, T можно рассматривать как функцию двух других. Рассматривая T как функцию от p и V, находим частную производную

$$T'_p = \frac{d_p T}{dp} = \frac{V}{R} \tag{2}$$

(другая частная производная нас здесь не интересует). Рассматривая p как функцию V и T, находим

$$p'_V = \frac{d_V p}{dV} = -\frac{RT}{V^2}. \tag{3}$$

Наконец, рассматривая V как функцию от p и T, получаем

$$V'_T = \frac{d_T V}{dT} = \frac{R}{p}. \tag{4}$$

Перемножив равенства (2), (3), (4) почленно и приняв во внимание формулу (1), получим одно из основных соотношений термодинамики

$$\frac{d_pT}{dp}\frac{d_Vp}{dV}\frac{d_TV}{dT}=\frac{V}{R}\left(-\frac{RT}{V^2}\right)\frac{R}{p}=-1. \qquad (5)$$

Между тем, если, вопреки предостережению, опустить в числителях левой части (5) обозначения аргументов дифференцирования, то после сокращения получится вместо -1 ошибочный результат $+1$.

Замечание. Так как выражения $\frac{d_xu}{dx}$, $\frac{d_yu}{dy}$ и т. п. громоздки, то они неупотребительны, и вместо них для обозначения частных производных пользуются символами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ [1] и т. п.

Из вышеизложенного ясно, что эти символы *нельзя* рассматривать как дроби или как отношения неких величин ∂u, ∂x и т. п. (ср. § 154, замечание 1).

§ 158. Полное приращение и полный дифференциал

Пусть аргументы x, y функции $f(x, y)$ принимают сначала значения x_0, y_0, а затем значения $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$. Тогда величина Δx называется приращением аргумента x, а величина Δy — приращением аргумента y; разность же $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$, *рассматриваемая как функция двух аргументов* Δx, Δy (при фиксированных начальных значениях x_0, y_0), называется *полным приращением* функции $f(x, y)$ и обозначается $\Delta f(x, y)$:

$$\Delta f(x, y)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0).$$

Наименование «полное» подчеркивает, что значения приращений Δx, Δy не подчинены никаким дополнительным требованиям [не считая само собой разумеющегося требования, чтобы точка $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ принадлежала области изменения аргументов функции $f(x, y)$].

Аналогично определяется полное приращение функции большего числа переменных.

Пример 1. Найти полное приращение функции $f(x, y)=x^2y$ при начальных значениях $x=3\ (=x_0)$, $y=2\ (=y_0)$.

Решение.

$$\Delta f(x, y)\Big|_{\substack{x=3\\ y=2}}=(3+\Delta x)^2(2+\Delta y)-3^2\cdot 2=$$
$$=12\Delta x+9\Delta y+2\Delta x^2+6\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\,\Delta y. \qquad (1)$$

Замечание 1. Сгруппировав члены формулы (1), перепишем ее в следующем виде:

$$\Delta f(x, y)\Big|_{\substack{x=3\\ y=2}}=(12\Delta x+9\Delta y)+(2\Delta x^2+6\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\,\Delta y).$$

[1]) Они введены немецким математиком Якоби (1804—1851).

Члены первой группы соответственно пропорциональны приращениям Δx, Δy, а каждый из членов второй группы имеет высший порядок малости относительно расстояния $|M_0M_1|$ (рис. 222) от точки $M_0(3;\,2)$ до точки $M_1(3+\Delta x,\ 2+\Delta y)$.

Действительно, так как

$$|\Delta x| = |M_0Q| \leqslant |M_0M_1|, \quad |\Delta y| = |QM_1| \leqslant |M_0M_1|,$$

то

$$2\Delta x^2 \leqslant 2\,|M_0M_1|^2, \quad |6\Delta x\,\Delta y| \leqslant 6\,|M_0M_1|^2, \quad |\Delta x^2\,\Delta y| \leqslant |M_0M_1|^3.$$

Значит, члены $2\Delta x^2$ и $6\Delta x\,\Delta y$ имеют порядок не ниже второго (относительно $|M_0M_1|$), а член $\Delta x^2\,\Delta y$ — не ниже третьего. Следовательно, при $|M_0M_1| \to 0$ вторая группа членов в сумме дает бесконечно малую величину высшего порядка относительно $|M_0M_1|$.

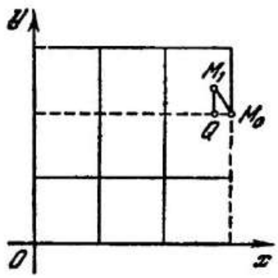


Рис. 222.

Таким образом, полное приращение функции $f(x,\,y) = x^2y$ (при начальных значениях $x_0 = 3,\ y_0 = 2$) разбивается на два слагаемых, из которых одно $(12\Delta x + 9\Delta y)$ составлено из членов, соответственно пропорциональных Δx, Δy, а другое имеет высший порядок малости относительно расстояния $|M_0M_1| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

По аналогии с дифференциалом функции одной переменной (ср. определение § 66) мы назовем первое слагаемое $12\Delta x + 9\Delta y$ полным дифференциалом функции $f(x,\,y) = x^2y$ (при начальных значениях $x_0 = 3,\ y_0 = 2$).

Определение. Пусть полное приращение Δz функции $z = f(x,\,y)$ [при фиксированной начальной точке $M_0(x_0,\,y_0)$ и переменных приращениях Δx, Δy] разбивается на два слагаемых

$$\Delta z = (A\Delta x + B\Delta y) + \varepsilon, \tag{2}$$

из которых одно $(A\Delta x + B\Delta y)$ состоит из членов, соответственно пропорциональных приращениям аргументов, а другое ε имеет при $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ высший порядок относительно $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Тогда функция $z = f(x,\,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0,\,y_0)$, а линейное выражение $A\Delta x + B\Delta y$ называется ***полным дифференциалом*** (в точке M_0) и обозначается dz.

Величину $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ [расстояние между точками $M_0(x_0,\,y_0)$, $M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$] принято обозначать буквой ρ.

Пример 2. Функция $f(x,\,y) = x^2y$ дифференцируема в точке $M_0(3;\,2)$, и полный дифференциал ее в этой точке есть

$$dz = 12\Delta x + 9\Delta y.$$

Это вытекает из решения примера 1.

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z=f(x, y)=x^2y$ при произвольных начальных значениях x, y.

Решение. Найдем выражение для полного приращения функции

$$\Delta z=\Delta(x^2y)=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y=$$
$$=(2xy\,\Delta x+x^2\Delta y)+(y\Delta x^2+2x\,\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\,\Delta y).$$

Как видим, полное приращение можно разбить на два слагаемых, одно из которых составлено из членов, соответственно пропорциональных Δx, Δy. Другое слагаемое имеет высший порядок относительно $|M_0M_1|=\rho$ (это доказывается как в примере 1).

Согласно определению данная функция дифференцируема в любой точке, и дифференциал ее есть

$$dz=2xy\,\Delta x+x^2\,\Delta y.$$

Замечание 2. Функция $f(x, y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, обязательно непрерывна в этой точке.

Действительно, переписав равенство (2) в виде

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon \tag{3}$$

и переходя к пределу при $\rho=|M_0M_1|\to 0$, получаем

$$\lim_{\rho\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=0,$$

то есть

$$\lim_{\rho\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0).$$

Это равенство выражает, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 (по определению 1 § 152).

Теорема. Пусть функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее полный дифференциал в этой точке есть

$$dz=A\Delta x+B\Delta y. \tag{4}$$

Тогда функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 частные производные

$$z'_x=A, \quad z'_y=B. \tag{5}$$

Доказательство. В формуле (3) переменные величины Δx, Δy могут меняться произвольным образом. В частности, величина Δy может быть нулем, а величина Δx стремиться к нулю (тогда точка M_1 стремится к M_0 по прямой, параллельной оси Ox). При этом имеем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{\Delta x^2+0^2}=|\Delta x|$.

При этих обстоятельствах формула (3) принимает вид

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)=A\Delta x+\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}=A+\frac{\varepsilon}{\Delta x}.$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta x}\right). \qquad (6)$$

Но величина ε, согласно определению, имеет высший порядок относительно ρ, т. е. относительно $|\Delta x|$. Это значит, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta x}\right)=0$. Левая же часть формулы (6) есть частная производная z'_x (§ 154, определение). Таким образом,

$$z'_x=A.$$

Аналогично докажем, что

$$z'_y=B.$$

Следствие. Из формул (4) и (5) вытекает, что

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y, \qquad (7)$$

т. е.: *полный дифференциал* (если он существует) *равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы аргументов.*

Вспоминая, что частные дифференциалы d_xz, d_yz выражаются формулами

$$d_xz=z'_x\Delta x, \quad d_yz=z'_y\Delta y,$$

можем переписать формулу (7) в виде

$$dz=d_xz+d_yz,$$

т. е. *полный дифференциал* (если он существует) *равен сумме частных дифференциалов.*

Замечание 3. Все вышесказанное распространяется на функции трех и большего числа аргументов. Так, функция $u=f(x, y, z)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, обязательно непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные u'_x, u'_y, u'_z; ее полный дифференциал du представляется выражением $du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz$ и равен сумме частных дифференциалов

$$du=d_xu+d_yu+d_zu.$$

Доказательство ведется аналогично.

§ 159. Достаточное условие дифференцируемости

Для функции одной переменной мы доказали в § 66 два взаимно обратных предложения:

1) Если функция $f(x)$ имеет в данной точке x дифференциал $A\,\Delta x$, то число A есть производная $f'(x)$ в данной точке.

2) Если функция $f(x)$ имеет в данной точке конечную производную $f'(x)$, то произведение $f'(x)\,\Delta x$ есть дифференциал функции в данной точке.

Первое из этих предложений, по доказанному в § 158, распространяется на функции двух и большего числа переменных, а второе — нет: функция $z=f(x, y)$ может иметь в данной точке конечные частные производные z'_x, z'_y, но не иметь полного дифференциала.

Пример. Функция

$$z=f(x, y)=\sqrt[3]{x^3+8y^3}$$

имеет в точке $M_0(0; 0)$ частные производные

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0)-f(0; 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}-0}{\Delta x}=1,$$

$$z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, \Delta y)-f(0; 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{8\Delta y^3}-0}{\Delta y}=2.$$

Однако данная функция не дифференцируема в точке (0; 0). Действительно, если бы она обладала полным дифференциалом, то последний представлялся бы (§ 158, следствие) выражением $A\Delta x+B\Delta y=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=\Delta x+2\Delta y$.

Если теперь мы разобьем полное приращение

$$\Delta z=f(\Delta x, \Delta y)-f(0; 0)=\sqrt[3]{\Delta x^3+8\Delta y^3}$$

на два слагаемых, из которых первым будет $A\,\Delta x+B\,\Delta y=\Delta x+2\Delta y$, то вторым будет величина

$$\varepsilon=\Delta z-(A\,\Delta x+B\,\Delta y)=\sqrt{\Delta x^3+8\Delta y^3}-(\Delta x+2\Delta y).$$

Если бы выражение $\Delta x+2\Delta y$ было полным дифференциалом функции z, то величина ε имела бы высший порядок малости относительно $|M_0M_1|=\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, т. е. отношение $\frac{\varepsilon}{\rho}$ стремилось бы к нулю при $\rho\to 0$. Однако это отношение к нулю не стремится. Предположим, например, что точка $M_1(\Delta x, \Delta y)$ стремится к точке $M_0(0; 0)$ по биссектрисе первого координатного угла ($y=x>0$). Тогда $\Delta y=\Delta x$ и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3+8\Delta y^3}-(\Delta x+2\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt[3]{9\Delta x^3}-3\Delta x}{|\Delta x|\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-3}{\sqrt{2}}.$$

Ясно, что отношение $\frac{\varepsilon}{\rho}$ к нулю не стремится, т. е. величина ε не имеет высшего порядка относительно ρ [1]).

Следующая теорема устанавливает условие, гарантирующее существование полного дифференциала.

Теорема. Пусть функция

$$z=f(x,\ y)$$

имеет частные производные z'_x, z'_y в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и в некоторой ее окрестности (скажем, внутри некоторого круга с центром в точке M_0). Если обе эти производные непрерывны в точке M_0, то функция $f(x,\ y)$ дифференцируема в этой точке.

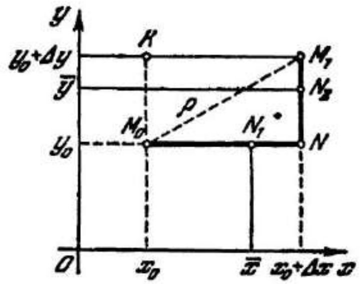


Рис. 223.

Пояснение. Представим себе поверхность $z=f(x,\ y)$ в виде гористой местности. Мы поднимаемся из точки M_0 в точку M_1 (рис. 223 есть план местности) по маршруту M_0NM_1. Полная высота подъема (полное приращение Δz функции z) есть сумма высот подъема на участках M_0N, NM_1

$$\Delta z=f(M_1)-f(M_0)=[f(N)-f(M_0)]+[f(M_1)-f(N)]. \qquad (1)$$

Первое слагаемое $f(N)-f(M_0)$ есть частное приращение $\Delta_x f(x_0,\ y_0)$ функции $f(x,y)$ на участке $M_0\ N$; главная его часть есть частный дифференциал $f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x$. Главная часть второго слагаемого $f(M_1)-f(N)$ есть частный дифференциал $f'_y(x_0+\Delta x, y_0)\Delta y$. Он не совпадает с частным дифференциалом $f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y$, но различие между ними нечувствительно, если частные производные $f''_y(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0+\Delta x,y_0)$ мало отличаются друг от друга, то есть если крутизна подъема из точки N по направлению NM_1 мало отличается от крутизны подъема из точки M_0 по направлению M_0K. Поэтому можно ожидать, что сумма $f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x+j'_y(x_0,y_0)\,\Delta y$ будет главной частью полного приращения Δz, то есть полным дифференциалом функции $f(x,y)$.

Замечание 1. В рассмотренном выше примере условие теоремы не было соблюдено. Ведь в точке $M(x,\ y)$, отличной от $M_0(0;\ 0)$, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ выражается формулой

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^3\,(x^3+8y^3)^{-2/3}=\left[1+8\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]^{-2/3}.$$

[1]) Величины ε и ρ несравнимы (см. § 153).

Отсюда следует, что в точке M_0 производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ разрывна. В самом деле, когда точка M стремится к M_0, например, вдоль прямой $y=kx$, величина $\frac{\partial z}{\partial x}$ остается равной $(1+8k^3)^{-\frac{2}{3}}$. Поэтому в любой близости от точки M_0 найдутся точки, где производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ имеет любое наперед заданное значение (вследствие произвольности k). Иными словами, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $M \to M_0$ предела не имеет. Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ тоже разрывна в точке $M_0(0, 0)$.

Доказательство теоремы. Первое слагаемое формулы (1)

$$f(N)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$$

можно рассматривать как приращение функции $f(x,\ y_0)$ одного аргумента x. Применим к нему формулу конечных приращений (§ 100)

$$f(N)-f(M_0)=f'_x(\overline{x},\ y_0)\,\Delta x. \tag{2}$$

Здесь $\overline{x}$ есть некоторое число, заключенное между x_0 и $x_0+\Delta x$, так что точка $N_1(\overline{x},\ y_0)$ лежит где-то на участке M_0N.

Аналогично второе слагаемое формулы

$$f(M_1)-f(N)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)$$

есть приращение функции $f(x_0+\Delta x,\ y)$ одного аргумента y (ибо на участке NM_1 величина $x_0+\Delta x$ остается постоянной). По формуле конечных приращений

$$f(M_1)-f(N)=f'_y(x_0+\Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y. \tag{3}$$

Здесь $\overline{y}$ — некоторое число, заключенное между y_0 и $y_0+\Delta y$, так что точка $N_2(x_0+\Delta x,\ \overline{y})$ лежит где-то на отрезке NM_1.

Из формул (1), (2), (3) вытекает соотношение

$$\Delta z=f'_x(\overline{x},\ y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0+\Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y. \tag{4}$$

Таково выражение полного приращения функции z. Чтобы доказать дифференцируемость этой функции в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, составим выражение

$$f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y \tag{5}$$

(если полный дифференциал в точке M_0 существует, то он представляется именно этим выражением). Теперь остается доказать, что разность

$$\varepsilon=\Delta z-\left[f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y\right] \tag{6}$$

имеет при $|MM_1|=\rho \to 0$ высший порядок малости относительно ρ, т. е. что $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho}=0$.

Подставляя в (6) выражение (4) и деля на ρ, получаем

$$\frac{\varepsilon}{\rho}=\left[f'_x(\overline{x},\ y_0)-f'_x(x_0,\ y_0)\right]\frac{\Delta x}{\rho}+\left[f'_y(x_0+\Delta x,\ \overline{y})-f'_y(x_0,\ y_0)\right]\frac{\Delta y}{\rho}. \tag{7}$$

Здесь каждая из величин

$$\frac{\Delta x}{\rho}=\frac{M_0N}{|M_0M_1|}=\cos\angle NM_0M_1,$$
$$\frac{\Delta y}{\rho}=\frac{M_0K}{|M_0M_1|}=\cos\angle KM_0M_1$$

не превосходит единицы.

Что касается величин, заключенных в квадратные скобки, то каждая из них стремится к нулю при $\rho\to 0$. Действительно, при этом точка M_1, а вместе с ней и точки $N_1(\overline{x},\ y_0)$, $N_2(x_0+\Delta x,\ \overline{y})$ стремятся к точке M_0. Но по условию функции $f'_x(x,\ y)$, $f'_y(x,\ y)$ непрерывны в точке M_0. Значит (§ 152),

$$\lim_{\rho\to 0} f'_x(\overline{x},\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0),\quad \lim_{\rho\to 0} f'_y(x_0+\Delta x,\ \overline{y})=f'_y(x_0,\ y_0).$$

Отсюда

$$\lim_{\rho\to 0}\left[f'_x(\overline{x},\ y_0)-f'_x(x_0,\ y_0)\right]=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\left[f'_y(x_0+\Delta x,\ \overline{y})-f'_y(x_0,\ y_0)\right]=0,$$

и из формулы (7) находим, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}=0,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 2. Доказанная теорема распространяется на случай любого числа переменных (доказательство аналогично).

§ 160. Дифференциал линейной функции

Рассмотрим *линейную функцию* нескольких, скажем трех, независимых переменных, т. е. функцию вида

$$u=f(x,\ y,\ z)=kx+ly+mz+n,$$

где $k,\ l,\ m,\ n$ — постоянные.

Полное приращение Δu этой функции есть

$$\Delta u=[k(x_0+\Delta x)+l(y_0+\Delta y)+m(z_0+\Delta z)+n]-\\ -[kx_0+ly_0+mz_0+n]=k\,\Delta x+l\,\Delta y+m\,\Delta z. \quad (1)$$

Формулу (1) можно записать в виде

$$\Delta u=k\,\Delta x+l\,\Delta y+m\,\Delta z+\varepsilon, \quad (2)$$

где величина ε равна нулю. Но нуль имеет высший порядок малости относительно $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ $\left(\text{так как } \frac{\varepsilon}{\rho}=0 \text{ и, следовательно, } \lim\frac{\varepsilon}{\rho}=0\right)$.

Таким образом, формула (2) позволяет утверждать (на основании определения полного дифференциала), что $k\,\Delta x+l\,\Delta y+m\,\Delta z$

есть полный дифференциал функции u:

$$du = d(kx + ly + mz + n) = k\,\Delta x + l\,\Delta y + m\,\Delta z\ ^{1)}. \tag{3}$$

Дифференциалы независимых переменных. В частном случае, когда $k=1$, $l=0$, $m=0$, $n=0$ формула (3) примет вид

$$dx = \Delta x. \tag{4}$$

Аналогично (полагая сначала $l=1$, $k=m=n=0$, а затем $m=1$, $k=l=n=0$) получим формулы

$$dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z. \tag{5}$$

Поэтому дифференциалы независимых переменных считаются равными их приращениям.

Следствие. Полный дифференциал функции $v = f(x, y, z)$ (если он существует) можно представить не только в виде

$$dv = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + v'_z \Delta z,$$

но также в виде

$$dv = v'_x dx + v'_y dy + v'_z dz.$$

Аналогично для функций двух, четырех и т. д. аргументов.

§ 161. Сложная функция

Сложная функция одного аргумента. Пусть переменная z есть функция двух переменных x, y:

$$z = F(x, y). \tag{1}$$

Пусть переменные x, y в свою очередь являются функциями переменной t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t). \tag{2}$$

Если при изменении t в некотором промежутке (t_1, t_2) точка $M(x, y)$ не выходит из области изменения аргументов функции $F(x, y)$, то система соотношений (1)—(2) определяет переменную z как функцию от t, причем областью изменения аргумента является промежуток (t_1, t_2).

Функция от аргумента t, заданная таким образом [через посредство *промежуточной функции* $F(x, y)$], называется *функцией*

---

[1]) Формулу (3) можно написать сразу на основании теоремы § 159 (так как частные производные $u'_x = k$, $u'_y = l$, $u'_z = m$ суть непрерывные функции). Мы предпочли более длинный путь, так как он более нагляден.

от функции или *сложной функцией* и обозначается $F[f(t), \varphi(t)]$ (ср. § 20).

Сложные функции отличаются от «несложных» не какими-либо существенными свойствами, а только способом задания.

Пример 1. Пусть z есть высота MN (рис. 224) точки N поверхности S над плоскостью P; x, y — координаты проекции M точки N на плоскость P; t — время. Тогда промежуточная функция $F(x, y)$ характеризует поверхность, на которой находится точка N, а функции $f(t)$, $\varphi(t)$ в своей совокупности характеризуют траекторию, предназначаемую для точки M. Промежуток времени (t_1, t_2), в течение которого точка M должна пройти дугу M_1M_2, расположенную под поверхностью S, служит областью изменения аргумента t сложной функции $z = F[f(t), \varphi(t)]$; последняя выражает высоту точки N при ее движении по поверхности S. В точке t, лежащей за пределами промежутка (t_1, t_2), функция $F[f(t), \varphi(t)]$ не определена, так как соответствующая точка $M(x, y)$ выходит за пределы области, расположенной под поверхностью S.

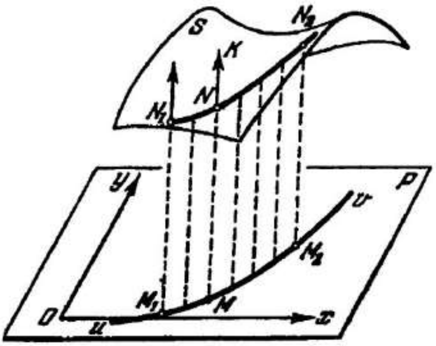


Рис. 224.

Пример 2. Функцию

$$z = \sin^2 t \cos t$$

можно рассматривать как сложную функцию аргумента t, определяемую через посредство функции

$$z = x^2 y,$$

аргументы которой сами являются функциями от t:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

Разумеется, ту же функцию $z = \sin^2 t \cos t$ можно представить в виде сложной функции множеством других способов.

Сложная функция нескольких переменных. Аналогично определяется сложная функция двух, трех и т. д. аргументов.

Пусть по-прежнему дана функция

$$z = F(x, y),$$

а каждая из переменных является функцией трех переменных t, u, v:

$$x = x(t,\ u,\ v), \quad y = y(t,\ u,\ v).$$

Допустим, что когда точка $K(t,\ u,\ v)$ находится в пределах некоторой области D, соответствующая ей точка $M(x,\ y)$ не выходит за пределы области изменения аргументов функции $F(x,\ y)$. Тогда величина z есть *сложная функция* аргументов t, u, v:

$$z = F[x(t,\ u,\ v),\ y(t,\ u,\ v)].$$

Замечание. Вспомогательная функция F может зависеть также от трех, четырех и т. д. аргументов (а также от одного аргумента).

§ 162. Инвариантная форма полного дифференциала

Выражение

$$z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \qquad (1)$$

представляет полный дифференциал функции $z = f(x,\ y)$ в том случае, когда аргументами дифференцируемой функции являются переменные x, y.

Если же величина $z = f(x,\ y)$ есть сложная функция одного или нескольких аргументов, от которых зависят промежуточные переменные x, y, то выражение (1), как правило, *не представляет* полного дифференциала.

Пример. В § 158 (примеры 1 и 2) мы нашли дифференциал функции

$$z = f(x,\ y) = x^2 y$$

при начальных значениях $x = 3$, $y = 2$:

$$dz = 12\Delta x + 9\Delta y. \qquad (2)$$

При этом величины x, y рассматривались как независимые переменные.

Теперь предположим, что сами величины x, y суть функции аргумента t, причем

$$x = 3t, \quad y = 2t^2. \qquad (3)$$

При $t = 1$ переменные x, y получают прежние значения $x = 3$, $y = 2$. Однако формула (2) теперь неверна.

Действительно, из (3) мы находим

$$\Delta x = 3\Delta t,\ \ \Delta y = 4t\,\Delta t + 2\Delta t^2 = 4\Delta t + 2\Delta t^2.$$

Следовательно,

$$12\Delta x + 9\Delta y = 12\cdot 3\Delta t + 9(4\Delta t + 2\Delta t^2) = 72\Delta t + 18\Delta t^2.$$

Полученное выражение нелинейно относительно Δt, и уже по этой причине не может быть дифференциалом величины z.

Замечание 1. Как мы знаем (§ 160), дифференциал функции $z=f(x, y)$, где x, y — независимые переменные, можно представить в виде

$$dz=z'_x dx+z'_y dy.$$

Эта формула остается верной и в том случае, когда переменные x, y сами зависят от одного или нескольких аргументов u, v, t, ... Для определенности предположим, что переменные x, y суть функции *двух* аргументов, и докажем следующую теорему (ср. теорему § 73).

Теорема. Пусть $z=f(x, y)$ есть дифференцируемая функция переменных x, y, которые сами являются дифференцируемыми функциями аргументов u, v:

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v). \tag{4}$$

Тогда сложная функция $z=f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ дифференцируема, причем формула

$$dz=z'_x dx+z'_y dy \tag{5}$$

сохраняет свою силу.

Доказательство. По условию функция $z=f(x, y)$ дифференцируема; это значит, что полное приращение Δz, порождаемое приращениями Δx, Δy, можно представить в виде

$$\Delta z=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y+\varepsilon_1, \tag{6}$$

где ε_1 имеет высший порядок малости относительно $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Точно так же приращения Δx, Δy, порождаемые приращениями аргументов Δu, Δv, представляются в виде

$$\left.\begin{aligned} \Delta x&=x'_u\Delta u+x'_v\Delta v+\varepsilon_2, \\ \Delta y&=y'_u\Delta u+y'_v\Delta v+\varepsilon_3, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где ε_2, ε_3 имеют высший порядок малости относительно $r=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$.

Из (7) видно, что при $r \to 0$ приращения Δx, Δy, а следовательно, и $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ бесконечно малы.

Подставив выражения (7) в формулу (6), получим

$$\begin{aligned} \Delta z&=z'_x(x'_u\Delta u+x'_v\Delta v+\varepsilon_2)+z'_y(y'_u\Delta u+y'_v\Delta v+\varepsilon_3)+\varepsilon_1= \\ &=[(z'_x x'_u+z'_y y'_u)\Delta u+(z'_x x'_v+z'_y y'_v)\Delta v]+(\varepsilon_1+z'_x\varepsilon_2+z'\varepsilon_3). \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что величина ε_1 имеет высший порядок малости не только относительно $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, но также и относительно $r=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$. В самом деле, величину ε_1 можно представить в виде

$$\varepsilon_1=\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

где α и β — бесконечно малые величины (§ 153, теорема 3). Подставив сюда выражения (7), находим

$$\varepsilon_1=(\alpha x'_u+\beta y'_u)\,\Delta u+(\alpha x'_v+\beta y'_v)\,\Delta v+(\alpha\varepsilon_2+\beta\varepsilon_3).$$

Здесь сумма двух первых членов имеет высший порядок относительно $r=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$ (§ 153, теорема 2); третий член — тоже. Стало быть, ε_1 имеет высший порядок относительно r.

Обратимся теперь к формуле (8). Она показывает, что полное приращение Δz разбивается на два слагаемых: одно (заключенное в квадратные скобки) линейно относительно Δu, Δv, а другое имеет высший порядок малости относительно

$$r=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}.$$

Значит (§ 158, определение), функция $f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)]$ дифференцируема, и ее полный дифференциал есть

$$dz=(z'_x x'_u+z'_y y'_u)\,\Delta u+(z'_x x'_v+z'_y y'_v)\,\Delta v. \tag{9}$$

С другой стороны, полные дифференциалы функций $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ суть

$$dx=x'_u\Delta u+x'_v\Delta v,\qquad dy=y'_u\Delta u+y'_v\Delta v. \tag{10}$$

Заменив дифференциалы dx, dy, dz их выражениями (9), (10), непосредственно убеждаемся в том, что равенство (5) тождественно удовлетворяется. Теорема доказана.

Соответствующая теорема для функции $z=f(x, y, \ldots)$ любого числа переменных x, y, ..., являющихся в свою очередь функциями любого числа аргументов u, v, t, ..., доказывается слово в слово так же. Таким образом, выражение $z'_x dz+z'_y dy+\ldots$ неизменно представляет полный дифференциал функции $z=f(x, y, \ldots)$ как в том случае, когда переменные x, y, ... независимы, так и в том случае, когда сами они являются функциями аргументов u, v, t, ...

Вот почему выражение $z'_x dx+z'_y dy+\ldots$ (в отличие от выражения $z'_x\Delta x+z_y\Delta y+\ldots$) называется *инвариантной* (т. е. неизменной) формой дифференциала.

§ 163. Техника дифференцирования функций нескольких переменных

Техника дифференцирования функций одной переменной основывается:

а) на формулах дифференцирования основных элементарных функций, как-то:

$$d\sin x = \cos x\, dx, \quad de^x = e^x\, dx \quad \text{и т.д.};$$

б) на основных свойствах дифференциалов, выражаемых следующими формулами:

$$d(au) = a\,du, \qquad d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Здесь буквы u и v до сих пор обозначали функции *одной* переменной. **Но эти формулы верны также и в том случае, когда u, v являются независимыми переменными или (дифференцируемыми) функциями любого числа независимых переменных.**

Докажем, например, последнюю формулу. Сначала предположим, что u и v — независимые переменные, причем $v_0 \neq 0$. Функция $f(u, v) = \frac{u}{v}$ обладает частными производными

$$f'_u(u, v) = \frac{1}{v}; \quad f'_v(u, v) = -\frac{u}{v^2}. \tag{1}$$

Эти производные непрерывны в точке u_0, v_0 и в некоторой ее окрестности. Поэтому (§ 159) функция $\frac{u}{v}$ дифференцируема в точке (u_0, v_0), и ее полный дифференциал есть

$$df(u, v) = f'_u(u, v)\,du + f'_v(u, v)\,dv = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv,$$

то есть

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{2}$$

Теперь предположим, что u и v суть дифференцируемые функции нескольких (скажем, трех) аргументов x, y, z. Согласно теореме § 162 формула $df(uv) = f'_u(u, v)\,du + f'_v(u, v)\,dv$ сохраняет свою силу, т. е. формула (2) верна и в этом случае.

Таким же образом доказываются и три остальные формулы.

Пример 1. Вычислить полный дифференциал функции

$$\frac{2x - 5y + 4z}{x + y - 3z}.$$

Решение. Данную функцию можно рассматривать как сложную функцию вида $\frac{u}{v}$, где $u=2x-5y+4z$, $v=x+y-3z$. Применяя формулу (2), получаем

$$d\,\frac{2x-5y+4z}{x+y-3z}=\frac{(x+y-3z)\,d\,(2x-5y+4z)-(2x-5y+4z)\,d\,(x+y-3z)}{(x+y-3z)^2}.$$

Теперь, применяя первые две формулы группы б), получаем

$$d\,\frac{2x-5y+4z}{x+y-3z}=\frac{(x+y-3z)\,(2dx-5dy+4dz)-(2x-5y+4z)\,(dx+dy-3dz)}{(x+y-3z)^2}=$$
$$=\frac{(7y-10z)\,dx+(-7x+11z)\,dy+(10x-11y)\,dz}{(x+y-3z)^2}.$$

Замечание 1. Из теоремы § 162 непосредственно следует, что и все формулы группы а) остаются верными для случая, когда переменная x есть дифференцируемая функция любого числа аргументов u, v, ...

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$ (предполагается, что $v\neq 0$).

Решение. Имеем

$$d\operatorname{arctg}\frac{u}{v}=\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2+u^2}. \tag{3}$$

Замечание 2. Тот же результат можно получить по формуле

$$df(u,\,v)=f'_u(u,\,v)\,du+f'_v(u,\,v)\,dv, \tag{4}$$

предварительно вычислив частные производные функции $f(u,\,v)$:

$$\left.\begin{aligned}
f'_u(u,\,v)&=\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right)'_u=\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'_u}{1+\frac{u^2}{v^2}}=\frac{1}{v}:\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)=\frac{v}{v^2+u^2},\\
f'_v(u,\,v)&=\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right)'_v=\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'_v}{1+\frac{u^2}{v^2}}=-\frac{u}{v^2}:\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)=-\frac{u}{v^2+u^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставив эти выражения в (4), получим формулу (3).

Но этот способ хуже первого, во-первых, потому, что некоторые промежуточные выкладки приходится выполнять повторно, а во-вторых, потому, что вычисления с производными вообще менее удобны, чем соответствующие вычисления с дифференциалами.

Более того, если требуется вычислить *только* частные производные функции $f(u, v, \ldots)$, то и тогда выгодно сначала найти полный дифференциал данной функции. Он будет иметь вид $A\,du + B\,dv + \ldots$, а отсюда определятся искомые частные производные

$$f'_u(u, v, \ldots) = A, \quad f'_v(u, v) = B.$$

Пример 3. Найти все частные производные функции

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. Находим полный дифференциал

$$du = d\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)\,dx - x\,d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)\,dx - x(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{(y^2+z^2-x^2)\,dx - 2xy\,dy - 2xz\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

В этой единой формуле содержатся все три искомые выражения, а именно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Пример 4. Пусть $z = f(x, y)$ есть произвольно заданная дифференцируемая функция переменных x, y, а сами эти переменные выражаются через аргументы u, v следующими формулами:

$$x = uv, \quad y = \frac{u}{v}. \tag{6}$$

Требуется найти частные производные z'_u, z'_v.

Решение. В инвариантное выражение полного дифференциала

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy$$

подставляем выражения

$$dx = u\,dv + v\,du, \quad dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

найденные из формул (6).

Получаем

$$dz = f'_x(u\,dv + v\,du) + f'_y\frac{v\,du - u\,dv}{v^2} =$$
$$= \left(vf'_x + \frac{1}{v}f'_y\right)du + \left(uf'_x - \frac{u}{v^2}f'_y\right)dv.$$

Отсюда прочитываем

$$z'_u = vf'_x + \frac{1}{v} f'_y, \quad z'_v = uf'_x - \frac{u}{v^2} f'_y.$$

Замечание 3. Иной раз даже при дифференцировании функции одной переменной имеет смысл привлечь к рассмотрению функцию нескольких переменных.

Пример 5. Найти $d(x^{\sin x})$.

Решение. Рассматривая функцию $y = x^{\sin x}$ как сложную функцию $[y = x^v, \ v = \sin x]$, получаем

$$dy = d(x^v) = y'_x\,dx + y'_v\,dv = vx^{v-1}\,dx + x^v \ln x\,dv =$$
$$= \sin x \cdot x^{\sin x - 1}\,dx + x^{\sin x} \ln x\,d(\sin x) =$$
$$= \left[\frac{\sin x}{x} + (\cos x) \ln x\right] x^{\sin x}\,dx.$$

Ср. § 80а, задачу 5.

§ 163а. Задачи к §§ 156—163

1. Найти частные дифференциалы функции $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$ по всем независимым переменным, а затем составить выражение полного дифференциала.

2. Ту же задачу решить в обратном порядке: сначала найти полный дифференциал, а затем выделить выражения частных дифференциалов.

В задачах 3—7 найти полные дифференциалы указанных функций.

3. $u = xy^2z^3$. 4. $u = \dfrac{s+t}{s-t}$.

5. $u = xy \sin(x+y)$.

6. $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$. 7. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$.

В задачах 8—13 найти частные производные указанных функций по всем аргументам (любым способом).

8. $u = \sin(st)$. 9. $u = e^{\sin \frac{y}{x}}$.

10. $u = (xy)^z$. 11. $u = z^{xy}$.

12. $f(x, y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$ в точке (2; 1).

13. $\varphi(x, y, z) = \ln(xy + z)$ в точке (1; 2; 0).

В задачах 14—16 проверить справедливость следующих тождественных соотношений:

14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, если $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

15. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $u = (x-y)(y-z)(z-x)$.

16. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$, если $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

§ 164. Полная производная

Предварительный пример. Пусть переменная u выражается через переменные x, y, z формулой

$$u = F(x, y, z) = xy + yz + zx, \tag{1}$$

где переменная x независимая, а переменные y, z являются функциями от x

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x). \tag{2}$$

Если эти функции известны, то, подставив выражения (2) в (1), мы получим функцию одного переменного

$$u = F[x, f(x), \varphi(x)] = xf(x) + f(x)\varphi(x) + x\varphi(x)$$

и по правилам дифференциального исчисления найдем производную этой «сложной» функции.

Если же функции $f(x)$, $\varphi(x)$ могут от случая к случаю иметь различный вид, то возникает необходимость в общем выражении для производной сложной функции аргумента x, заданной посредством «промежуточной» функции $u = F(x, y, z)$ *трех* переменных и «вспомогательных» функций $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$.

Чтобы получить это общее выражение, найдем сначала полный дифференциал промежуточной функции

$$du = dF(x, y, z) = (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz. \tag{3}$$

Формула (3) инвариантна (§ 162); в частности, она имеет место и в нашем случае, когда переменная x независима, а переменные y, z суть функции от x. В этом случае формула (3) дает

$$du = (y + z)\,dx + (z + x)\,f'(x)\,dx + (x + y)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Следовательно, искомая производная сложной функции есть

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}F[x, f(x), \varphi(x)] = (y + z) + (z + x)\,f'(x) + (x + y)\,\varphi'(x).$$

Принято называть эту производную *полной производной функции* $F(x, y, z)$ *по аргументу* x (в отличие от «неполной» производной $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = y + z$, которая берется в предположении, что переменные y, z тоже независимые).

Определение. *Полной производной* функции $u = F(x, y, z)$ по аргументу x называется производная сложной функции, возникающей из функции $F(x, y, z)$ в предположении, что переменные y, z являются функциями от x.

Пояснение. Таким образом, «полная производная функции $F(x, y, z)$» по сути дела является производной *не от самой этой* *функции*, а от функции $F[x, f(x), \varphi(x)]$, которая лишь для краткости обозначается $F(x, y, z)$.

Общее выражение полной производной. Пусть переменная u есть сложная функция аргумента x, определяемая промежуточной функцией

$$u = F(x, y, z) \tag{4}$$

и вспомогательными функциями

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x). \tag{5}$$

Чтобы получить выражение полной производной функции $F(x, y, z)$ по аргументу x, найдем полный дифференциал промежуточной функции (4):

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz. \tag{6}$$

Вследствие инвариантности формулы (6) она имеет место также и для сложной функции $F[x, f(x), \varphi(x)]$; тогда

$$dy = f'(x)\, dx, \quad dz = \varphi'(x)\, dx.$$

Подставляя эти выражения в (6), получаем

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} f'(x)\, dx + \frac{\partial F}{\partial z} \varphi'(x)\, dx,$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial z} \varphi'(x). \tag{7}$$

Таково общее выражение полной производной.

Замечание 1. Формулу (7) обычно записывают в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{8}$$

Надо, однако, твердо помнить, что в правой части формулы (8) переменная u рассматривается как (промежуточная) функция переменных x, y, z, а в левой — как (сложная) функция аргумента x. Это различие *внешним образом* выражается в том, что «неполные» производные, входящие в правую часть, обозначены курсивными буквами ∂ (потому что эти производные частные); в левой же части стоят «прямые» буквы d (потому что полная производная $\frac{du}{dx}$ обыкновенная).

Замечание 2. Однако различие между обыкновенной и частной производной не является *существенным* признаком для различения «полной» и «неполной» производных. Это видно из следующего. Рассмотрим сложную функцию *двух независимых* *переменных* x, y, возникающую из функции $u=\Phi(x, y, z)$ в предположении, что переменная z является функцией от x, y:

$$z=\psi(x, y).$$

Производная этой сложной функции $\Phi[x, y, \psi(x, y)]$ по аргументу x называется *полной*, в отличие от «неполной» производной $\frac{\partial u}{\partial x}$, которая берется в предположении, что все три переменные x, y, z являются независимыми. Аналогично определяются полные производные сложной функции от любого числа независимых переменных, возникающей из функции от любого числа промежуточных переменных.

Таким образом, в общем случае полная производная, так же как и неполная, является *частной производной*.

Полную производную $\frac{\partial\Phi[x, y, \psi(x, y)]}{\partial x}$, в отличие от неполной частной производной $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, часто обозначают (по аналогии с функцией одного аргумента) $\frac{d\Phi}{dx}$. Употребляется также и обозначение $\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]$, где квадратные скобки указывают на «полноту» частной производной.

Пример 1. Найти полную производную от функции $u=x^3e^{y^2}$, где y есть некоторая функция от x.

Решение. Здесь величина u есть функция *двух* переменных x, y, так что формула (8) имеет вид

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Вычисляем производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3e^{y^2})=3x^2e^{y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3e^{y^2})=2x^3ye^{y^2}.$$

Подставив в (9), получим

$$\frac{du}{dx}=3x^2e^{y^2}+2x^3ye^{y^2}\frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

Замечание 3. Для разыскания производной лучше всего пользоваться полным дифференциалом. Тогда отпадает надобность в формуле (9). Вычисление ведем так:

$$du=d(x^3e^{y^2})=e^{y^2}d(x^3)+x^3d(e^{y^2})=$$
$$=3x^2e^{y^2}dx+x^3e^{y^2}d(y^2)=3x^2e^{y^2}dx+2x^3e^{y^2}y\,dy.$$

Разделив на dx, получим формулу (10).

Пример 2. Найти полную производную от функции $z=x\frac{dy}{dx}$.

Решение. Роль вспомогательной функции y играет здесь производная $y'=\frac{dy}{dx}$. Находим

$$dz=d(xy')=y'dx+x\,d(y')=y'dx+xy''dx.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx}=y'+xy''.$$

Тот же результат получим по формуле (9).

§ 164а. Задачи к § 164

1. Дана функция $z=e^{xy}$. Требуется найти ее полную производную по x в предположении, что $y=\varphi(x)$.
2. Тот же вопрос для функции $z=x^y$.
3. Найти полную производную от функции $x^2\sqrt{1+y'^2}$ $\left(\text{где } y'=\frac{dy}{dx}\right)$.
4. Найти частную производную по y' от функции $x^2\sqrt{1+y'^2}$.

§ 165. Полный дифференциал в приближенных вычислениях

В многочисленных случаях на практике требуется найти приращение Δz некоторой функции $z=f(x, y)$ приближенно — с тем, чтобы погрешность (в процентном отношении к Δz) не превышала известной величины.

В таких случаях часто бывает выгодно вместо приращения Δz вычислять полный дифференциал dz. Дело в том, что разность $\Delta z-dz=\varepsilon$ при достаточно малых значениях Δx, Δy мала по сравнению с этими значениями; как правило, она мала также и по сравнению с Δz, и тогда замена приращения Δz дифференциалом dz не влечет за собой чувствительной ошибки.

Пример 1. Закрытый ящик, имеющий наружные размеры 30 *см*, 24 *см*, 18 *см*, сделан из дощечек толщиной в 0,5 *см*. Требуется найти объем материала, затраченного на ящик.

Первое решение. Внутренние размеры ящика суть $30-2\cdot 0{,}5=29$ (*см*), $24-2\cdot 0{,}5=23$ (*см*), $18-2\cdot 0{,}5=17$ (*см*). Искомый объем составляет

$$30\cdot 24\cdot 18-29\cdot 23\cdot 17=12\,960-11\,339=1621\ (см^3).$$

Этот ответ, арифметически точный, на деле является приближенным, поскольку сами исходные данные являются округленными величинами.

Второе решение. Искомый объем можно представить в виде разности

$$xyz-(x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z), \tag{1}$$

где $x=30$, $y=24$, $z=18$, $\Delta x=\Delta y=\Delta z=-1$. Если ввести в рассмотрение величину

$$V=xyz \tag{2}$$

(выражающую объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами x, y, z), то разность (1) будет выражать величину $-\Delta V$. Заменим приращение ΔV полным дифференциалом

$$dV=d(xyz)=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz.$$

Тогда искомый объем приближенно представится выражением

$$-dV=-yz\,\Delta x-zx\,\Delta y-xy\,\Delta z=$$
$$=24\cdot 18+18\cdot 30+30\cdot 24=1692\ (см^3).$$

Это число примерно на 4,4% превышает «точный» результат, так что чувствительной ошибки мы не сделали.

Пример 2. После обработки цилиндра высотой $H=30{,}0$ *см* с диаметром основания $D=20{,}0$ *см* высота H уменьшилась на 3 *мм*, а диаметр D — на 2 *мм*. Найти объемное количество стружки.

Решение. Объем стружки по абсолютной величине равен приращению ΔV функции $V=\frac{1}{4}\pi D^2H$ двух переменных D, H при начальных значениях $H=30{,}0$ *см*, $D=20{,}0$ *см* и при $\Delta H=-0{,}3$ *см*, $\Delta D=-0{,}2$ *см*.

Если заменить приращение ΔV дифференциалом

$$dV=\frac{1}{4}\pi\,(D^2\Delta H+2DH\Delta D),$$

то получим приближенное значение

$$\Delta V\approx\frac{1}{4}\pi\,[400\,(-0{,}3)+1200\,(-0{,}2)]=-90\pi\approx-283\ см^3.$$

Ответ. Объемное количество стружки составляет примерно 283 $см^3$.

Проверка. Непосредственное вычисление дает

$$\frac{1}{4}\pi\,[20^2\cdot 30-19{,}8^2\cdot 29{,}7]\approx 89{,}1\pi\approx 280\ см^3.$$

Значит, относительная погрешность приближенного результата составляет около 1%, тогда как вычисления упрощаются.

Пример 3. Пусть (положительные) величины x, y находятся путем измерения, причем известно, что относительная погрешность приближенного значения x не превосходит (по абсолютной величине) числа α, а относительная погрешность значения y не превосходит числа β. Требуется указать предельную относительную погрешность частного $\frac{y}{x}=u$.

Решение. Абсолютная погрешность частного, порождаемая погрешностями измерения величин x, y, есть приращение Δu функции $u=\frac{y}{x}$, соответствующее приращениям Δx, Δy аргументов x, y. По условию

$$\frac{|\Delta x|}{x}<\alpha, \quad \frac{|\Delta y|}{y}<\beta. \tag{3}$$

Требуется найти такое число γ, которое заведомо превосходило бы относительную погрешность $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$.

Заменив приращение Δu дифференциалом, получаем приближенное равенство

$$\Delta u \approx d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,\Delta y-y\,\Delta x}{x^2}, \tag{4}$$

откуда

$$|\Delta u|<\frac{x\,|\Delta y|+y\,|\Delta x|}{x^2}.$$

Подставляя сюда вместо $|\Delta y|$, $|\Delta x|$ их выражения, полученные из (3), получаем

$$|\Delta u|<\frac{y}{x}(\alpha+\beta).$$

Следовательно,

$$\frac{|\Delta u|}{u}=|\Delta u|:\frac{y}{x}<\alpha+\beta.$$

Отсюда видно, что в качестве числа γ можно взять сумму чисел

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

т. е. *предельная погрешность частного равна сумме предельных погрешностей делимого и делителя.*

§ 165а. Задачи к § 165

1. Один катет прямоугольного треугольника увеличивается с 5 *см* до 5,2 *см*; другой уменьшается с 12 *см* до 11,75 *см*. Найти приращение гипотенузы c по точной формуле и приближенно (с помощью дифференциала).

2. Даны две стороны треугольника $b=20$ *см*, $c=30$ *см* и угол между ними $A=45°$. Определить, как изменится третья сторона, если величины b, c, A получат приращения $\Delta b=1$ *см*, $\Delta c=-0,5$ *см*, $\Delta A=1°$.

3. Пусть α — предельная относительная погрешность при измерении величины x, β — предельная относительная погрешность при измерении величины y. Найти предельную относительную погрешность произведения xy.

4. Период колебания T маятника (при небольших амплитудах) вычисляется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Величина l известна с точностью до 0,2%, а величина g — с точностью до 0,1%. Какова степень точности результата, найденного по формуле?

5. Предполагая, что величины x, y малы по сравнению с единицей, выразить приближенно

а) величину $(1+x)^2(1+y)^3$;

б) величину $\dfrac{1+x}{1-y}$;

в) $\ln(1+x)\ln(1+y)$.

6. Вычислить приближенно

а) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$;

б) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

7. При измерении радиуса основания R и высоты H цилиндра получены следующие результаты:

$$R = 2{,}5\ м \pm 0{,}1\ м, \quad H = 4{,}0\ м \pm 0{,}2\ м.$$

Если по этим данным вычислить объем цилиндра, то какова будет предельная абсолютная погрешность?

§ 166. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение. Плоскость P (рис. 225) называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0, если угол $\psi = \angle MM_0K$ между плоскостью P и секущей M_0M стремится к нулю, когда точка M, оставаясь на поверхности S, стремится к M_0 (по любому закону). (Ср. определение касательной прямой в § 60.)

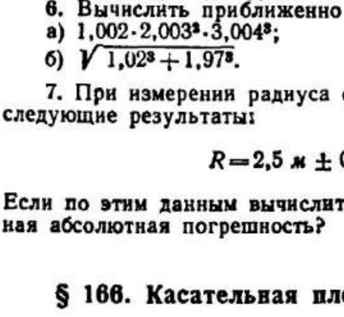


Рис. 225.

Прямая M_0N, проведенная через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости P, называется *нормалью* к поверхности S (в точке M_0).

Замечание 1. Может случиться, что в некоторой точке M_0 поверхность S не обладает касательной плоскостью. Подобный случай имеет место, например, в вершине круглого конуса.

Теорема. Предположим, что функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $m_0(x_0, y_0)$. Тогда поверхность S, представляемая уравнением $z = f(x, y)$, обладает в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ касательной плоскостью, причем уравнение последней есть

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0). \qquad (1)$$

Доказательство. Уравнение (1), очевидно, представляет некоторую плоскость Q (рис. 226), проходящую через точку M_0. Докажем, что эта плоскость является касательной к поверхности S. Для этого надо удостовериться, что секущая, проведенная из

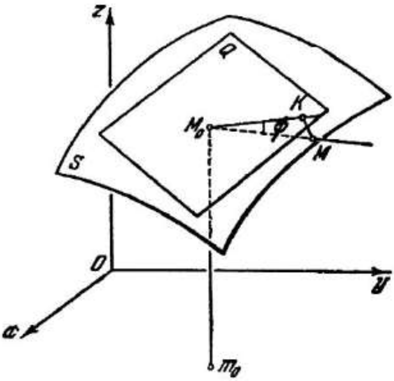


Рис. 226.

точки M_0 в точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ поверхности S, составляет с плоскостью (1) угол ψ, стремящийся к нулю, когда $|M_0M|\to 0$. Так как приращения Δx, Δy, Δz суть направляющие коэффициенты прямой M_0M, то (I, § 141)

$$\sin\psi=\frac{\left|-f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x-f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y+\Delta z\right|}{\sqrt{\left[f'_x(x_0, y_0)\right]^2+\left[f'_y(x_0, y_0)\right]^2+1}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}. \quad (2)$$

Но функция z по условию дифференцируема в точке $m_0(x_0, y_0)$; поэтому числитель имеет высший порядок малости относительно $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\rho$. А так как

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\leqslant\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=|M_0M|,$$

то относительно $|M_0M|$ числитель выражения (2) и подавно имеет высший порядок. Следовательно,

$$\lim\sin\psi=\frac{1}{\sqrt{\left[f'_x(x_0, y_0)\right]^2+\left[f'_y(x_0, y_0)\right]^2+1}}\times$$

$$\times\lim\frac{\left|-f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x-f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y+\Delta z\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=0. \quad (3)$$

Так как угол ψ острый, то из (3) следует, что

$$\lim\psi=0.$$

Следовательно, плоскость (1) является касательной плоскостью поверхности S в точке M_0. Теорема доказана.

Замечание 2. Справедлива также и обратная теорема: если поверхность $z=f(x, y)$ обладает в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ касательной плоскостью, не параллельной оси Oz, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $m_0(x_0, y_0)$.

Уравнения нормали. Так как вектор нормали плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ коллинеарен с вектором $\{A, B, C\}$ (I, § 128), то из уравнения (1) касательной плоскости P получаются следующие уравнения нормали M_0N:

$$\frac{X-x_0}{-f'_x(x_0, y_0)}=\frac{Y-y_0}{-f'_y(x_0, y_0)}=Z-z_0. \tag{4}$$

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к эллиптическому параболоиду

$$z=2x^2+y^2 \tag{5}$$

в точке $M_0(1; -1; 3)$.

Решение. Дифференцируя уравнение (5), находим

$$dz=4x\,dx+2y\,dy=4dx-2dy. \tag{6}$$

Подставляя в формулу (1) значения $x_0=1$, $y_0=-1$, $z_0=3$, $f'_x(x_0, y_0)=4$, $f'_y(x_0, y_0)=-2$, получаем уравнение касательной плоскости

$$Z-3=4(X-1)-2(Y+1) \tag{7}$$

или

$$4X-2Y-Z-3=0.$$

Уравнения нормали

$$\frac{X-1}{-4}=\frac{Y+1}{2}=Z-3$$

можно получить сразу из уравнения (7), где числа -4; 2; 1 суть направляющие коэффициенты нормали.

Замечание 3. Уравнение (7) получается из формулы (6), если в ней вместо dx, dy, dz написать $X-1$, $Y+1$, $Z-3$. Из следующего параграфа будет видно, что такая замена всегда правомерна.

§ 167. Геометрическое истолкование полного дифференциала функции двух переменных

Пусть плоскость P (рис. 227) касается поверхности S, изображающей функцию $z=f(x, y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Сместим проекцию $m_0(x_0, y_0)$ точки M_0 на плоскость xOy в положение $m(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и проведем перпендикуляр mMR к плоскости xOy.

Он пересечет плоскость P в некоторой точке R, координаты которой суть

$$X = x_0 + \Delta x, \quad Y = y_0 + \Delta y, \quad Z = mR. \tag{1}$$

Эти координаты удовлетворяют уравнению касательной плоскости (§ 166)

$$Z - z_0 = f'_x (X - x_0) + f'_y (Y - y_0).$$

Подставляя сюда выражения X, Y из формул (1), получаем

$$Z - z_0 = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$$

или

$$mR - m_0 M_0 = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Левая часть этой формулы представляет приращение ΔZ аппликаты Z касательной плоскости, а правая — полный дифференциал функции $f(x, y)$:

$$\Delta Z = df(x, y). \tag{2}$$

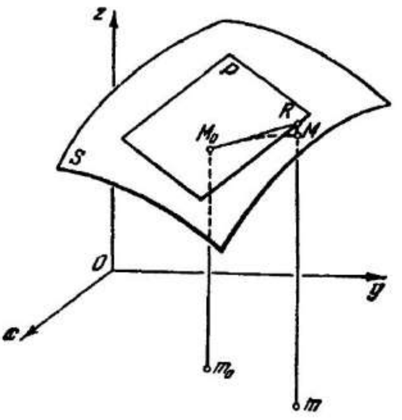


Рис. 227.

Итак, *полный дифференциал функции $f(x, y)$ выражает приращение аппликаты касательной плоскости.*

Замечание. Полное приращение функции $f(x, y)$ выражает приращение $mM - m_0 M_0$ ординаты поверхности $z = f(x, y)$:

$$\Delta f(x, y) = \Delta z = mM - m_0 M_0. \tag{3}$$

Вычитая почленно (2) из (3), получаем

$$\Delta f(x, y) - df(x, y) = mM - mR = RM.$$

Стало быть, *разность между полным приращением функции $f(x, y)$ и ее полным дифференциалом выражает расстояние от точки M поверхности S до касательной плоскости P, если измерять это расстояние по направлению оси Oz.*

Но разность $\Delta f(x, y) - df(x, y)$ имеет высший порядок малости относительно $m_0 m = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и, значит, также относительно $|M_0 M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. С другой стороны, *кратчайшее* расстояние h от точки M до плоскости P (измеряемое по направлению нормали) не превосходит MR.

Следовательно, *расстояние h от точки M поверхности S до касательной плоскости P имеет высший порядок относительно расстояния* $|M_0M|$, т. е.

$$\lim \frac{h}{|M_0M|} = 0.$$

§ 168. Дифференцирование неявной функции одной переменной

В § 87 мы на примерах разъяснили способ дифференцирования неявно заданной функции одной переменной. Здесь мы изложим этот способ в общем виде, чтобы затем перейти к дифференцированию неявной функции нескольких переменных. Читатель должен предварительно перечитать § 87.

Постановка вопроса. Пусть имеем уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Левая его часть есть данная функция *двух переменных* x, y (определенная в некоторой области D плоскости xOy). Пусть далее дана «начальная» точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая области D и удовлетворяющая уравнению (1). При некоторых дополнительных условиях (они указаны ниже в замечании 5) эти данные неявно определяют некоторую непрерывную функцию $y = f(x)$. Требуется найти производную $f'(x_0)$.

Пояснение. Слова «неявно определяет» надо понимать так: в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 существует одна-единственная непрерывная функция $y = f(x)$, обладающая следующими двумя свойствами:

1) при $x = x_0$ она принимает значение $y = y_0$:

$$f(x_0) = y_0;$$

2) она удовлетворяет уравнению (1), т. е. в любой точке x (достаточно близкой к x_0) функция $F[x, f(x)]$ имеет нулевое значение. Так, например, задание уравнения $x^2 + y^2 - 25 = 0$ и начальной точки $M(3; -4)$ неявно определяет непрерывную функцию

$$y = -\sqrt{25 - x^2},$$

ибо 1) при $x = 3$ эта функция принимает значение $y = -4$; 2) она удовлетворяет данному уравнению, т. е. в любой точке x, принадлежащей промежутку $(-5; 5)$, функция $x^2 + \left[-\sqrt{25 - x^2}\right]^2 - 25$ имеет нулевое значение. При этом функция $y = -\sqrt{25 - x^2}$ является *единственной* непрерывной функцией, удовлетворяющей обоим условиям.

Подчеркнем, что вдали от точки x_0 [в нашем примере — за пределами промежутка $(-5;\ 5)$] неявная функция $f(x)$ может и не существовать.

Замечание 1. Если задать уравнение $x^2+y^2=0$ и точку $M_0(0,\ 0)$, то эти данные *не определят* неявной функции ни в какой окрестности точки $x=0$. Действительно, никакая другая пара значений x, y, кроме $x_0=0$, $y_0=0$, не удовлетворяет данному уравнению. Из этого примера видна необходимость дополнительных условий, гарантирующих существование неявной функции.

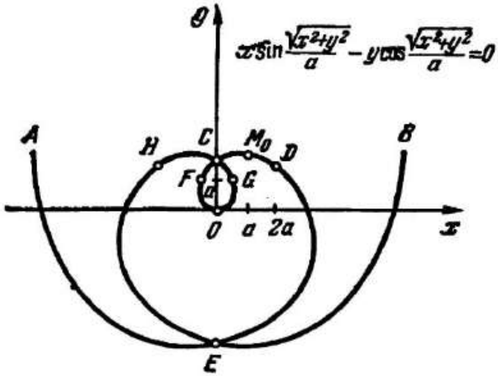


Рис. 228.

Замечание 2. Точку M_0 надо задать непременно двумя координатами; одной координаты, как правило, недостаточно. Пусть, например, уравнение (1) имеет вид

$$x^2+y^2-25=0;$$

если задать только координату $x_0=4$, то координата y_0 может равняться либо 3, либо -3. В первом случае уравнение (1) неявно определяет непрерывную функцию $y=\sqrt{2-x^2}$; во втором — функцию $y=-\sqrt{25-x^2}$. В соответствии с этим искомая производная в первом случае равна $-\frac{4}{3}$, а во втором $\frac{4}{3}$ (см. § 87, пример 1).

Замечание 3. На практике функция $F(x,\ y)$ обычно задается аналитически. Но для вычисления производной $f'(x)$ вовсе не требуется представить аналитически функцию $f(x)$. Более того, такое представление часто невыполнимо.

Для примера рассмотрим уравнение

$$x\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}-y\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=0, \tag{2}$$

представляющее изображенную на рис. 228 линию AB (архимедова спираль; см. задачу 8 в § 86а, стр. 225, а также I, § 48а, задача 10, стр. 483). Зададим точку $M_0\left(\frac{a\pi}{3};\ \frac{a\pi}{3}\sqrt{3}\right)$, удовлетворяющую данному уравнению (она лежит на левой ветви спирали). Тогда в окрестности точки M_0, например в промежутке $(0;\ 2a)$, будет неявно определена непрерывная функция $y=f(x)$ (изображаемая дугой CD), которая при $x=\frac{a\pi}{3}$ принимает значение $y=\frac{a\pi}{3}\sqrt{3}$ и удовлетворяет уравнению (2). Но представить эту функцию аналитическим способом, т. е. *фактически* решить уравнение (2) относительно y (равно как и относительно x), не удается.

Из того же рисунка видно, что в некоторых исключительных случаях задание начальной точки даже двумя ее координатами оказывается недостаточным для того, чтобы уравнение (2) неявно определяло *единственную* непрерывную функцию. Так, например, если за начальную точку принять точку $C\left(0;\ \frac{a\pi}{2}\right)$, то будем иметь *две* непрерывные функции (изображаемые дугой FCD и дугой GCH), каждая из которых удовлетворяет уравнению (2) и принимает значение $y=\frac{a\pi}{2}$ при $x=0$. То же самое произойдет в том случае, если в качестве начальной взять точку $E\left(0;\ -\frac{3a\pi}{2}\right)$.

Вывод формулы. Предположим, что функция $F(x,\ y)$ обладает в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и в некоторой ее окрестности непрерывными частными производными, причем хотя бы одна из них, скажем $F'_y(x,\ y)$, в точке M_0 не обращается в нуль:

$$F'_y(x_0,\ y_0)\neq 0.$$

В силу теоремы § 159 функция $F(x,\ y)$ дифференцируема в точке M_0, и ее полный дифференциал есть

$$dF(x,\ y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=F'_x(x_0,\ y_0)\,dx+F'_y(x_0,\ y_0)\,dy. \tag{3}$$

Формула (3) верна не только тогда, когда обе переменные x, y независимы, но и в том случае, когда переменная y есть *какая угодно* дифференцируемая функция от x (§ 162).

Предположим, что задание уравнения $F(x,\ y)=0$ и начальной точки $M_0(x_0,\ y_0)$ неявно определяет какую-то дифференцируемую функцию $y=f(x)$. Тогда сложная функция $F[x,\ f(x)]$ является постоянной величиной (нулем). Следовательно, ее дифференциал равен нулю (в некоторой окрестности точки x_0 и, в частности, в самой точке x_0). Принимая во внимание формулу (3), получаем равенство

$$F'_x(x_0,\ y_0)\,dx+F'_y(x_0,\ y_0)\,dy=0. \tag{4}$$

Отсюда получаем формулу

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x_0,\ y_0)}{F'_y(x_0,\ y_0)}. \tag{5}$$

Замечание 4. Формула (5) пригодна и в том случае, когда $F'_y(x_0, y_0)=0$ (тогда по условию $F'_x(x_0, y_0)\neq 0$). В этом случае функция $f(x)$, хотя она, вопреки предположению, оказывается недифференцируемой в точке x_0, тем не менее обладает в точке x производной (бесконечной). Доказательство опускаем (см. ниже пример 2).

Замечание 5. Если, вопреки условию теоремы, *обе частные производные* $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$ равны нулю, то равенство (4) становится тождеством $0=0$ и из него нельзя найти $f'(x_0)$. Тогда надо применять другие средства. Впрочем, случаи, когда искомая производная $f'(x_0)$ существует, но обе частные производные $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$ равны нулю, хотя и возможны, но практического значения не имеют. Обычно обращение в нуль обеих частных производных свидетельствует о том, что уравнение $F(x, y)$ либо вовсе не определяет непрерывной функции $y=f(x)$, соответствующей точке M_0 (см. замечание 2), либо определяет *две* такие функции (или большее их число) (см. ниже примеры 3 и 4).

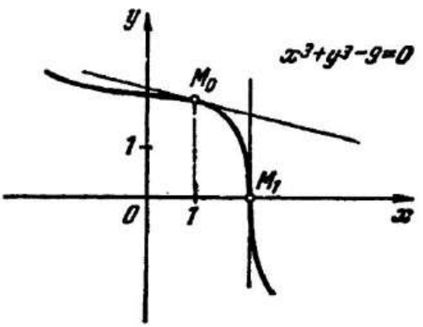


Рис. 229.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y)=x^3+y^3-9=0$$

и возьмем точку $M_0(1;\ 2)$; очевидно, она удовлетворяет данному уравнению. Последнее можно представить в виде $y=\sqrt[3]{9-x^3}$ и отсюда найти производную y'_x в точке $(1;\ 2)$. Однако гораздо проще применить формулу (5). Имеем

$$F'_x(1;\ 2)=3x^2\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=3,\quad F'_y=3y^2\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=12,$$

$$y'_x=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}.$$

Проверьте результат дифференцированием явной функции $y=\sqrt[3]{9-x^3}$. Геометрическую картину дает рис. 229.

Пример 2. Рассмотрим снова уравнение $x^3+y^3-9=0$, но вместо точки $M_0(1;\ 2)$ возьмем точку $M_1(\sqrt[3]{9};\ 0)$ (рис. 229). Теперь имеем

$$F'_x(\sqrt[3]{9};\ 0)=3\sqrt[3]{81};\quad F'_y(\sqrt[3]{9};\ 0)=0.$$

Отсюда

$$y'_x=\frac{3\sqrt[3]{81}}{0}=\infty,$$

т. е. искомая производная бесконечна.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$F(x,\ y)=4(x^2+y^2-ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0 \tag{6}$$

и возьмем точку $M_0(0;\ 0)$ [она удовлетворяет уравнению (6)].

Имеем

$$F'_x(x_0,\ y_0)=8(x_0^2+y_0^2-ax_0)(2x_0-a)-2a^2x_0=0,$$
$$F'_y(x_0,\ y_0)=16(x_0^2+y_0^2-ax_0)y_0-2a^2y_0=0.$$

Теперь обе частные производные $F'_x(x_0,\ y_0)$, $F'_y(x_0,\ y_0)$ равны нулю, и формула (5) была бы непригодна, если бы даже уравнение (6) определяло единственную неявную функцию $y=f(x)$, принимающую при $x=0$ значение $y=0$. Но в данном случае дело обстоит иначе, в чем можно убедиться из следующих геометрических соображений.

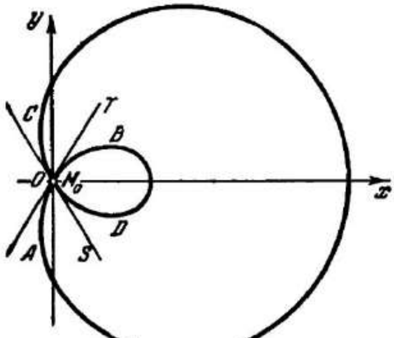


Рис. 230.

Отнесем линию (6) к полярным координатам ρ, φ с помощью формул

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Получим знакомое нам (§ 84, пример 4) уравнение улитки Паскаля

$$\rho=a\cos\varphi+\frac{a}{2}$$

(рис. 230). Через точку M_0 проходят две ветви улитки: AM_0B и CM_0D; угловые коэффициенты их касательных (они найдены в примере 3 § 85) суть $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Это значит, что уравнение (6) при начальном условии $x_0=0$, $y_0=0$ определяет *две непрерывные функции* $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, причем $f'_1(0)=\sqrt{3}$, $f'_2(0)=-\sqrt{3}$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 9(x^2 + y^2 - ax)^2 - 16a^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (7)$$

Точка $O(0, 0)$ удовлетворяет этому уравнению. Как и в предыдущем примере, обе частные производные $F'_x(0, 0)$, $F'_y(0, 0)$ равны нулю, и формула (5) непригодна. Но в данном примере уравнение (7) *не определяет ни одной непрерывной функции* $y = f(x)$, которая принимала бы при $x = 0$ значение $y = 0$.

В самом деле, уравнение (7) представляет фигуру, состоящую из улитки Паскаля $ABCD$ (рис. 231) и *отдельно лежащей точки* $O(0, 0)$ (§ 84, пример 4).

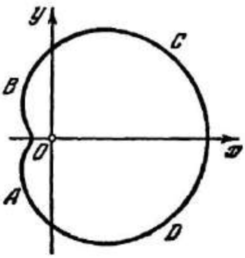


Рис. 231.

Замечание 6. При выводе формулы (5) мы сделали ряд предположений. Некоторые из них допускают непосредственную проверку. А именно, если функция $F(x, y)$ дана, то можно (по крайней мере принципиально) установить, обращается ли она в нуль в точке $M_0(x_0, y_0)$, обладает ли она в окрестности точки M_0 непрерывными частными производными и отлична ли от нуля производная $F'_y(x_0, y_0)$.

Но, кроме того, мы предположили, что уравнение $F(x, y) = 0$ при начальном условии $x = x_0$, $y = y_0$ неявно определяет дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Оказывается, что это предположение вытекает как следствие из вышеперечисленных. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема. Предположим, что функция $F(x, y)$ обладает непрерывными частными производными $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и что точка M_0 удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$. Пусть при этом частная производная $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля.

Тогда в некоторой окрестности точки M_0 уравнение $F(x, y) = 0$ определяет одну-единственную непрерывную функцию $y = f(x)$, принимающую при $x = x_0$ значение $f(x_0) = y_0$. Эта функция обладает непрерывной производной.

Доказательство опускаем.

§ 169. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных

Способ дифференцирования неявной функции одной переменной распространяется и на случай функции любого числа переменных. Так, для функции двух переменных имеет место следующая теорема.

Теорема. Предположим, что функция $F(x, y, z)$ обладает непрерывными частными производными $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y, z)=0. \tag{1}$$

Пусть при этом частная производная $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ отлична от нуля:

$$F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки M_0 уравнение (1) определяет одну-единственную функцию $z=f(x, y)$, принимающую при $x=x_0$, $y=y_0$ значение $f(x_0, y_0)=z_0$. Эта функция обладает непрерывными частными производными $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ [и, значит, дифференцируема].

На основании этой теоремы (доказательство которой мы опускаем) задача о дифференцировании неявной функции ставится и решается следующим образом.

Постановка вопроса. Даны уравнение

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющая этому уравнению, причем выполняются условия вышеприведенной теоремы. Требуется найти полный дифференциал соответствующей неявной функции $z=f(x, y)$ в точке M_0.

Решение. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция $F(x, y, z)$ *трех* переменных имеет полный дифференциал

$$dF(x, y, z)\big|_{M=M_0}=F'_x(x_0, y_0, z_0)\,dx+\\ +F'_y(x_0, y_0, z_0)\,dy+F'_z(x_0, y_0, z_0)\,dz. \tag{2}$$

Формула (2) верна и в том случае, когда переменная z есть *какая-либо* дифференцируемая функция от x, y. В частности, она верна, когда функция z есть функция $f(x, y)$, неявно определяемая уравнением (1). Но в этом случае сложная функция $F[x, y, f(x, y)]$ оказывается постоянной величиной (нулем); следовательно, ее полный дифференциал равен нулю:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\,dx+F'_y(x_0, y_0, z_0)\,dy+F'_z(x_0, y_0, z_0)\,dz=0. \tag{3}$$

А так как по условию $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то из (3) получаем

$$dz=-\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)\,dx+F'_y(x_0, y_0, z_0)\,dy}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{4}$$

Отсюда можно получить выражения для частных производных z'_x, z'_y:

$$z'_x = f'_x(x_0,\ y_0) = -\frac{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)};$$
$$z'_y = f'_y(x_0,\ y_0) = -\frac{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{5}$$

Для практических целей запоминать формулы (3) и (4) нет нужды: формула (3) получается из данного уравнения (1) непосредственным дифференцированием, и затем из (3) находим выражение dz через dx, dy. А если потребуется найти частные производные z'_x, z'_y, то они прочтутся как коэффициенты при dx, dy.

Пример 1. Найти полный дифференциал и частные производные в точке $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}},\ \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ от функции $z = f(x,\ y)$, заданной неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0.$$

Для данной точки M_0 это соотношение принимает вид

$$\frac{dx}{a} + \frac{dy}{b} + \frac{dz}{c} = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{c}{a}\,dx - \frac{c}{b}\,dy.$$

Следовательно,

$$z'_x = -\frac{c}{a}, \quad z'_y = -\frac{c}{b}.$$

Пример 2. В произвольной точке $M(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющей уравнению

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0, \tag{6}$$

найти частные производные неявной функции $z = f(x,\ y)$.

Решение. Дифференцируя (6), находим

$$x^2dx + y^2dy + z^2dz - yz\,dx - xz\,dy - xy\,dz = 0$$

или

$$(x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{(x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy}{z^2-xy}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zx-y^2}{z^2-xy}.$$

§ 169а. Задачи к § 169

Найти в данной точке M частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции.

1. $z^3+3xyz=0$ в точке $M\left(\frac{1}{3}a;\ -4a;\ 2a\right)$.
2. $x+y+z=e^z$ в точке $M\,(e;\ -1;\ 1)$.
3. $x+y+z=xyz$ в точке $M\,(2;\ 1;\ 3)$.
4. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ в произвольной точке $M\,(x,\ y,\ z)$.

§ 170. Общий вид уравнений касательной и нормали

Пусть точка $M_0(x_0,\ y_0)$ лежит на линии AB (рис. 232), заданной уравнением

$$F(x,\ y)=0, \tag{1}$$

причем функция $F(x,\ y)$ обладает в окрестности точки M_0 непрерывными частными производными $F'_x(x,\ y)$, $F'_y(x,\ y)$. Требуется найти уравнение касательной к линии AB в точке M_0.

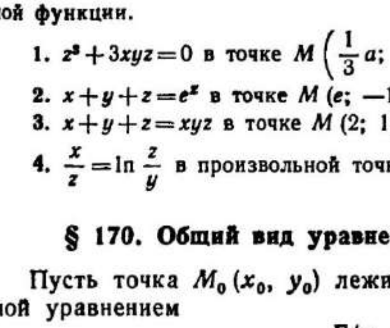


Рис. 232.

Случай 1. *Хотя бы одна из частных производных $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0,\ y_0)$ отлична от нуля.* Не нарушая общности, можно считать, что отлична от нуля производная $F'_y(x_0,\ y_0)$. Действительно, если $F'_y(x_0, y_0)=0$, то другая производная $F'_x(x_0,\ y_0)$ отлична от нуля, и мы просто переименуем абсциссы в ординаты и наоборот.

Итак, пусть $F'_y(x_0,\ y_0)\neq 0$. Тогда в силу теоремы § 168 линия AB в некоторой окрестности точки M_0 представляется уравнением вида $y=f(x)$, причем функция $f(x)$ обладает в точке x_0 конечной производной $f'(x_0)$. Следовательно (§ 60, теорема 1), линия AB имеет в точке M_0 касательную M_0T_0.

Чтобы составить уравнение этой касательной, продифференцируем равенство (1), имея в виду, что точка M_0 принимается за начальную. Получится соотношение

$$F'_x(x_0,\ y_0)\,dx + F'_y(x_0,\ y_0)\,dy = 0. \tag{2}$$

Здесь dx есть дифференциал *независимой переменной* x, т. е. dx представляет некоторое *приращение* абсциссы; что касается dy, то это — дифференциал функции $y=f(x)$, т. е. соответствующее *приращение ординаты касательной* (§ 69). Таким образом,

$$dx = \Delta X = X - x_0, \quad dy = \Delta Y = Y - y_0,$$

где X, Y — координаты произвольной точки L касательной M_0T_0.

Подставив эти выражения в (2), получим

$$F'_x(x_0,\ y_0)(X - x_0) + F'_y(x_0,\ y_0)(Y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Это и есть искомое уравнение касательной M_0T_0.

Переименование координат не влияет на вид уравнения (3). Поэтому оно остается в силе, если хотя бы одна (любая) из производных $F'_x(x_0,\ y_0)$, $F'_y(x_0,\ y_0)$ отлична от нуля.

Случай 2. *Обе частные производные равны нулю*:

$$F'_x(x_0,\ y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,\ y_0) = 0.$$

В этом случае уравнение (1), как правило, не представляет в окрестности точки M_0 ни дифференцируемой функции $y=f(x)$, ни дифференцируемой функции $x=\varphi(y)$. Рассуждения, которые привели нас к уравнению (3), теряют силу, а само уравнение обращается в бессодержательное тождество. В рассматриваемом случае вид линии AB вблизи точки M_0 будет отличаться некоторыми особенностями. Так, например, на рис. 230 (стр. 482) особенность состоит в том, что в точке M_0 пересекаются две непрерывные ветви линии $ABDC$. Каждая из этих ветвей, рассматриваемая по отдельности, обладает касательной, но совокупность двух ветвей касательной не имеет.

Вот почему те точки линии $F(x,\ y)=0$, где обе частные производные $F'_x(x,\ y)$, $F'_y(x,\ y)$ одновременно равны нулю, наряду с точками, где функция $F(x,\ y)$ недифференцируема, называют *особыми*.

Точки же, где функция $F(x,\ y)$ обладает отличным от нуля полным дифференциалом, называются *обыкновенными*.

В итоге приходим к следующему правилу.

Правило. Чтобы составить уравнение касательной к линии $F(x,\ y)=0$ в обыкновенной ее точке $M_0(x_0,\ y_0)$, достаточно продифференцировать уравнение этой линии (считая точку M_0 начальной) и заменить дифференциалы dx, dy соответствующими разностями $X-x_0$, $Y-y_0$ (X, Y — текущие координаты касательной).

Пример 1. Составить уравнение касательной к линии $F(x, y)=x^2+y^2-25=0$ в точке (5; 0).

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$x\,dx+y\,dy=0.$$

Подставив начальные значения $x_0=5$, $y_0=0$ и заменив дифференциалы dx, dy разностями $X-5$, $Y-0$, получаем искомое уравнение касательной

$$X-5=0$$

(ср. § 168, пример 2).

Пример 2. Составить уравнение касательной к линии

$$F(x, y)=x\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}-y\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=0$$

в точке $M_0\left(0; \frac{5a\pi}{2}\right)$. Данная линия есть архимедова спираль (см. рис. 228 на стр. 479).

Решение. Находим

$$dx\sin\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}-dy\cos\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}+\\+\left(x_0\cos\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}+y_0\sin\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right)\frac{x_0\,dx+y_0\,dy}{a\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=0.$$

Сюда надо подставить

$$x_0=0,\quad y_0=\frac{5a\pi}{2},\quad \sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{5a\pi}{2},$$

$$\sin\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}=\sin\frac{5\pi}{2}=1,\qquad \cos\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}=\cos\frac{5\pi}{2}=0;$$

получаем

$$dx+\frac{5\pi}{2}\,dy=0.$$

Искомое уравнение касательной есть

$$(X-x_0)+\frac{5\pi}{2}(Y-y_0)=0 \text{ или } X+\frac{5}{2}\pi Y-\frac{25}{4}\pi^2 a=0.$$

Уравнение нормали. В уравнении касательной (3) коэффициенты при X, Y суть частные производные $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$. Значит, эти частные производные являются направляющими коэффициентами нормали к линии AB в точке M_0. Уравнение нормали есть

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0, y_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{4}$$

Пример 3. Найти уравнение нормали к линии

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(декартов лист; см. рис. 106, стр. 227) в точке

$$M_0\left(\frac{2}{3}a, \frac{4}{3}a\right).$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение, находим

$$(x_0^2 - ay_0)\,dx + (y_0^2 - ax_0)\,dy = 0.$$

Отсюда прочитываются значения

$$F'_x(x_0, y_0) = x_0^2 - ay_0 = -\frac{8}{9}a^2,$$

$$F'_y(x_0, y_0) = y_0^2 - ax_0 = \frac{10}{9}a^2.$$

Искомое уравнение нормали есть

$$\frac{X - \frac{2}{3}a}{-\frac{8}{9}a^2} = \frac{Y - \frac{4}{3}a}{\frac{10}{9}a^2}$$

или

$$15X + 12Y - 26a = 0.$$

Пример 4. Составить уравнение нормали к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в произвольной его точке $M(x, y)$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0.$$

Отсюда прочитываем частные производные $F'_x(x, y) = \frac{x}{a^2}$, $F'_y(x, y) = \frac{y}{b^2}$; уравнение нормали есть

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}}. \tag{5}$$

Если ни одна из начальных координат x, y не равна нулю, т. е. если точка M не совпадает ни с одной из вершин эллипса, то уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{a^2X}{x} - \frac{b^2Y}{y} = c^2\ (= a^2 - b^2).$$

§ 170а. Задачи к § 170

В задачах 1—3 составить уравнения касательной и нормали к линии.

1. $x^3+xy-y^3=2x$ **в точке (2; 0). Есть ли у этой линии особые точки?**

2. $y^3=x^2$ **в точке (—8; 4). Изобразить эту линию. Есть ли у нее особые точки?**

3. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **(астроида) в произвольной точке. Есть ли у этой линии особые точки?**

4. Имеются ли особые точки у улитки Паскаля (§ 84)?

§ 171. Общий вид уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности S (рис. 233), заданной уравнением

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

причем функция $F(x, y, z)$ обладает в окрестности точки M_0 непрерывными частными производными $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$.

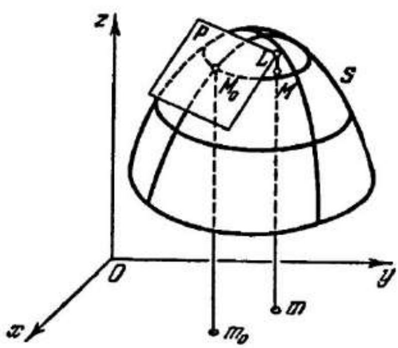


Рис. 233.

Требуется найти уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0.

Случай 1. *Хотя бы одна из частных производных*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0),\ F'_y(x_0, y_0, z_0),\ F'_z(x_0, y_0, z_0)$$

отлична от нуля. Не нарушая общности, можно считать, что отлична от нуля производная $F'_z(x_0, y_0, z_0)$. Действительно, если $F'_z(x_0, y_0, z_0)=0$, то одна из производных $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, скажем $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, непременно отлична от нуля, и мы просто переименуем ординаты в аппликаты и наоборот.

Итак, пусть $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$. Тогда в силу теоремы § 169 поверхность S в некоторой окрестности точки M_0 представляется уравнением вида $z=f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ обладает в точке m_0 полным дифференциалом.

Следовательно (§ 166), поверхность S имеет в точке M_0 касательную плоскость P.

Чтобы составить уравнение этой плоскости, продифференцируем равенство (1), имея в виду, что точка M_0 принимается за начальную. Получится соотношение

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\,dx + F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\,dy + F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\,dz = 0. \quad (2)$$

Здесь dx, dy суть дифференциалы *независимых* переменных x, y, т. е. dx представляет некоторое приращение абсциссы, а dy — некоторое приращение ординаты; что касается dz, то это — дифференциал функции $z = f(x,\ y)$, т. е. соответствующее приращение аппликаты касательной плоскости (§ 167). Таким образом,

$$dx = \Delta X = X - x_0, \quad dy = \Delta Y = Y - y_0,$$
$$dz = \Delta Z = Z - z_0,$$

где X, Y, Z — координаты произвольной точки L касательной плоскости P.

Подставив эти выражения в (2), получим

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) +$$
$$+ F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(Z - z_0) = 0. \quad (3)$$

Это и есть искомое уравнение касательной плоскости P.

Переименование координат не влияет на вид уравнения (3). Поэтому оно остается в силе, если хотя бы одна (любая) из производных $F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ отлична от нуля.

Случай 2. *Все три частные производные* $F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *равны нулю.*

В этом случае уравнение (1), как правило, не представляет (в окрестности точки M_0) ни дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, ни дифференцируемых функций $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$. Поверхность S в рассматриваемом случае, как правило, не обладает в точке M_0 касательной плоскостью, а вид ее вблизи точки M_0 отличается теми или иными особенностями (см. ниже пример 2).

Те точки поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$, где три частные производные $F'_x(x,\ y,\ z)$, $F'_y(x,\ y,\ z)$, $F'_z(x,\ y,\ z)$ одновременно равны нулю, наряду с точками, где функция $F(x,\ y,\ z)$ недифференцируема, называются *особыми*.

Точки же, где функция $F(x,\ y,\ z)$ обладает отличным от нуля полным дифференциалом, называются *обыкновенными*.

В итоге приходим к следующему правилу.

Правило. Чтобы составить уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$ в обыкновенной ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, достаточно продифференцировать уравнение этой линии (считая точку M_0 начальной) и заменить дифференциалы dx, dy, dz соответствующими разностями $(X - x_0)$, $(Y - y_0)$, $(Z - z_0)$ (X, Y, Z — текущие координаты касательной плоскости).

Уравнения нормали. В уравнении (3) коэффициенты при X, Y, Z суть частные производные $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$. Значит, эти частные производные являются направляющими коэффициентами нормали к поверхности S в точке M_0. Уравнения нормали суть

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{4}$$

Пример 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в произвольной точке однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{5}$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} - \frac{z\,dz}{c^2} = 0. \tag{6}$$

Уравнение касательной плоскости есть

$$\frac{x(X-x)}{a^2} + \frac{y(Y-y)}{b^2} - \frac{z(Z-z)}{c^2} = 0. \tag{7}$$

Коэффициенты $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$ не могут равняться нулю одновременно, так как точка (0, 0, 0) на поверхности (5) не лежит. Стало быть, все точки однополостного гиперболоида обыкновенные. Учитывая равенство (5), можно переписать уравнение (7) в виде

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 1. \tag{7a}$$

Уравнения нормали суть

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z-z}{-\frac{z}{c^2}}. \tag{8}$$

Пример 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в произвольной точке поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{9}$$

(конус второго порядка).

Решение. Дифференцируя данное уравнение, снова получаем соотношение (6). Стало быть, уравнение (7) по-прежнему представляет касательную плоскость, а уравнения (8) — нормаль. Однако теперь на данной поверхности имеется особая точка. Это — точка (0, 0, 0) — вершина конуса; здесь все три коэффициента $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$ равны нулю. В этой точке поверхность (9) не имеет ни касательной плоскости, ни нормали.

§ 171а. Задачи к § 171

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

1. $z^2 = xy$ в точке $M(a, a, a)$. Имеются ли особые точки на этой поверхности? Каков ее вид?
2. $az = xy$ в точке $M(a, a, a)$. Имеются ли особые точки на этой поверхности? Каков ее вид?
3. $xy^2 + z^3 = 12a^3$ в точке $(a, 2a, 2a)$. Имеются ли особые точки на этой поверхности?
4. $x^n + y^n + z^n = a^n$ $(a > 0)$ в произвольной точке $M(x; y; z)$. Имеются ли особые точки на этой поверхности?
5. $x^2 + xy + y^2 = 7a^2$ в точке $(2a, -3a, 3a)$. Каков вид этой поверхности?

§ 172. Производная по направлению

Постановка вопроса. В этом параграфе, говоря о «точке M», мы понимаем слово «точка» в буквальном (геометрическом) смысле. Тогда значение какой-либо функции $f(M)$ (скажем, температуры) определяется *положением* точки M в некоторой области D геометрического (физического) пространства — безотносительно к тому, установлена ли какая-либо система координат или нет.

Если будет введена некоторая система координат, то функция $f(M)$ станет функцией одной, двух или трех переменных — координат точки M, и тогда можно будет искать (обыкновенную или частную) производную $f'_x(M)$ в некоторой точке M_0. Однако *данная* функция $f(M)$ в *данной* точке M_0 будет иметь, как правило, *различные* производные $f'_x(M_0)$ в зависимости от направления оси Ox.

Поэтому необходимо обобщить понятие частной производной, сделав его независимым от выбора системы координат. А так как по своему геометрическому (физическому) смыслу частная производная $f'_x(M)$ есть скорость изменения функции $f(M)$ по отношению к смещению точки M вдоль оси, равнонаправленной с осью Ox (§ 154), то нам надо рассмотреть скорость изменения функции $f(M)$ по отношению к смещению точки M (из начального положения M_0) вдоль *произвольно* заданной оси.

С этой целью проведем через точку M_0 (рис. 234) произвольную ось, т. е. прямую $T'T$ с установленным на ней положительным направлением (от T' к T). На этой оси установим свою систему координат с началом в точке M_0 (I, § 146). Единицу масштаба установим общую для всех направлений (значит, если область D

будет отнесена к какой-либо системе координат, то на осях будет установлена та же единица масштаба). Координату точки M, произвольно взятой на оси $T'T$, будем обозначать буквой t. Так как координата t_0 точки M_0 равна нулю, то приращение Δt при переходе из M_0 в M есть

$$\Delta t = t - t_0 = t.$$

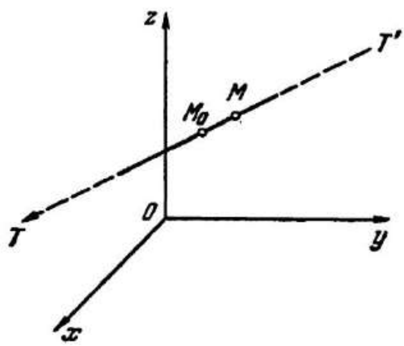


Рис. 234.

Замечание 1. Параметрические уравнения прямой $T'T$ по отношению к любой прямоугольной системе $Oxyz$ суть (I, § 146)

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt.$$

Здесь l, m, n — координаты масштабного вектора $\boldsymbol{a}$; а так как $|\boldsymbol{a}| = 1$, то

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы, которые ось $T'T$ образует с осями Ox, Oy, Oz.

Таким образом, уравнения прямой $T'T$ суть

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma. \qquad (1)$$

Определение. Пусть отношение $\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$ стремится к некоторому пределу b, когда точка M, оставаясь на оси $T'T$, стремится к точке M_0 (будь то со стороны положительных значений $M_0M = t$ или со стороны отрицательных значений). Тогда число b называется *производной* (в точке M_0) от функции $f(M)$ *по направлению* оси $T'T$ и обозначается $f'_t(M_0)$ или $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{M=M_0}$, или, короче, $\frac{\partial f}{\partial t}$:

$$b = \frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta t}.$$

Замечание 2. Из определения следует, что частные производные $f'_x(M)$, $f'_y(M)$, $f'_z(M)$ суть производные по направлениям соответствующих осей координат.

Замечание 3. Если ось $T'T$ заменить противоположно направленной осью TT', то производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ сохранит абсолютную величину, *но получит противоположный знак*. Действительно, значения $f(M_0)$, $f(M)$ зависят только от положения точек M_0, M и не меняются при замене оси $T'T$ осью TT'. Но координата $t = M_0M$ точки M меняет свой знак на противоположный.

Пример 1. На плоскости P (плоскость рис. 235) дан отрезок $AB=2a$. Определим функцию $f(M)$ в области P формулой

$$u=f(M)=\frac{1}{8}(AM^2+BM^2). \tag{2}$$

Возьмем точку M_0 на пересечении перпендикуляра AC к прямой AB с прямой OT, проведенной через середину O отрезка AB под углом 60° к прямой BA. Значение функции $f(M)$ в точке M_0 есть

$$f(M_0)=\frac{1}{8}(AM_0^2+BM_0^2)=$$
$$=\frac{1}{8}(2AM_0^2+AB^2)=\frac{5}{4}a^2.$$

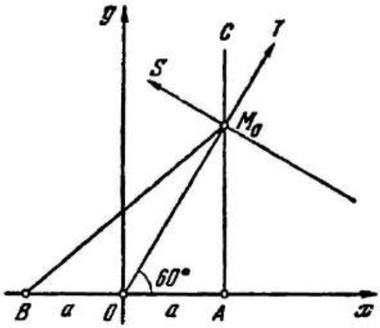


Рис. 235.

Вычислим производную $f'_t(M_0)$ по направлению оси OM_0. Для этого введем систему координат xOy, как указано на рис. 235 (принципиально нет необходимости применять координатный метод, но это значительно облегчает расчеты). Формула (2) принимает теперь вид

$$u=f(M)=\frac{1}{8}[(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2]=\frac{1}{4}(x^2+y^2+a^2), \tag{3}$$

а координаты точки M_0 будут

$$x_0=a, \quad y_0=a\sqrt{3}.$$

Координаты x, y произвольной точки оси OM_0 выражаются по формулам (1)

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+t\cos\alpha=a+t\cos 60^\circ=a+\frac{1}{2}t, \\ y&=y_0+t\cos\beta=a\sqrt{3}+t\cos 30^\circ=a\sqrt{3}+t\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставив эти выражения в (3), получим

$$f(M)=\frac{1}{4}\left[\left(a+\frac{1}{2}t\right)^2+\left(a\sqrt{3}+t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2\right]=$$
$$=\frac{1}{4}[(2a+t)^2+a^2]. \tag{5}$$

Согласно определению искомая производная $f'_t(M)$ есть предел отношения $\frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$. А это не что иное, как обыкновенная производная функции (5) по аргументу t в точке $t_0=0$

$$f'_t(M_0)=f'_t(t_0)=\frac{1}{2}(2a+t_0)=a+\frac{1}{2}t_0=a.$$

Замечание 4. По направлению оси M_0O производная от функции $f(M)$ в точке M_0 равна $-a$ (см. замечание 3).

Пример 2. Вычислить производную от функции $f(M)$ примера 1 в точке $M_0(a, a\sqrt{3})$ по направлению оси M_0S, составляющей с лучом BA (осью Ox) угол 150° (рис. 235).

Решение. Обозначив координату точки M, смещающейся вдоль оси OS, буквой s и рассуждая, как в примере 1, получим вместо (4) и (5) следующие выражения:

$$x=a-s\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y=a\sqrt{3}+\frac{1}{2}s, \tag{4a}$$

$$f(M)=\frac{1}{4}\left[\left(a-s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{3}+\frac{1}{2}s\right)^2+a^2\right]=\frac{1}{4}(5a^2+s^2). \tag{5a}$$

Дифференцируя по аргументу s при начальном значении $s_0=0$, получаем

$$f'_s(M_0)=f'_s(s_0)=\frac{1}{2}s_0=0.$$

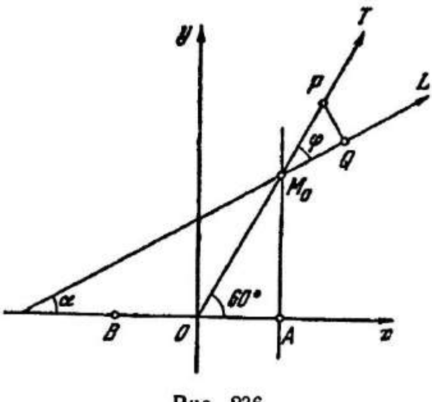


Рис. 236.

Производная от функции $f(M)$ по направлению оси SM_0 в точке M_0 тоже равна нулю.

Пример 3. Найти производную от функции

$$f(M)=\frac{1}{8}(AM^2+BM^2)$$

в точке M_0 (см. рис. 236, а также рис. 235 примера 1) по направлению оси M_0L, составляющей с лучом BA угол α.

Решение. Обозначив координату точки M на оси M_0L буквой l, получим

$$x=a+l\cos\alpha, \qquad y=a\sqrt{3}+l\sin\alpha,$$

$$f(M)=\frac{1}{4}[(a+l\cos\alpha)^2+(a\sqrt{3}+l\sin\alpha)^2+a^2].$$

Дифференцируя по l при начальном значении $l_0=0$, получаем

$$f'_l(M_0)=f'_l(l_0)=\frac{1}{2}[(a+l_0\cos\alpha)\cos\alpha+(a\sqrt{3}+l_0\sin\alpha)\sin\alpha]=$$
$$=a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right). \qquad (6)$$

Формула (6) устанавливает зависимость производной $f'_l(M_0)$ от направления оси M_0L. Чтобы уяснить геометрический смысл этой зависимости, преобразуем выражение (6) следующим образом:

$$f'_l(M_0)=a(\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha)=a\cos(60^\circ-\alpha).$$

Из рис. 236 усматриваем, что

$$60^\circ-\alpha=\varphi,$$

где $\varphi=\angle LM_0T$ есть угол, который ось OM_0T образует с осью M_0L.

Следовательно,

$$f'_l(M_0)=a\cos\varphi.$$

В частности, полагая $\varphi=0$, мы снова получаем

$$f'_l(M_0)=a.$$

Полагая $\varphi=90^\circ$, получаем вновь формулу

$$f'_s(M_0)=0$$

и т. д.

Отложим от точки M_0 по направлению оси OT отрезок $M_0P=f'_l(M_0)=a$. Спроектировав его на ось OL, получим отрезок $M_0Q=a\cos\varphi=f'_l(M_0)$.

Стало быть, *производная $f'_l(M_0)$ по направлению произвольной оси M_0L есть алгебраическая проекция вектора $\overrightarrow{M_0P}$ на направление этой оси.*

§ 173. Градиент

Предварительное замечание. Перед тем как приступить к чтению дальнейшего, учащийся должен внимательно прочесть пример 3 предыдущего параграфа; дело в том, что свойство, обнаруженное там для *частного вида* функции $f(M)$ *в одной* из точек M, оказывается общим свойством всех дифференцируемых функций.

Определение. Вектор $\boldsymbol{b}$ называется *градиентом функции $f(M)$ в точке M_0*, если проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на любую ось $T'T$ равна производной $f'_t(M)$, взятой по направлению этой оси:

$$f'_t(M_0)=\text{пр.}_{T'T}\,\boldsymbol{b}. \qquad (1)$$

Градиент $\boldsymbol{b}$ функции $f(M)$ обозначается $\operatorname{grad} f(M_0)$:

$$\operatorname{grad} f(M_0) = \boldsymbol{b}.$$

Соотношение (1) можно переписать в виде

$$f'_t(M_0) = |\boldsymbol{b}| \cos\varphi = |\operatorname{grad} f(M_0)| \cos\varphi, \tag{2}$$

где φ есть угол между градиентом и осью $T'T$ (I, § 89, теорема 3).

Вместо (2) можно написать

$$f'_t(M_0) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_t = \operatorname{grad} f(M_0)\, \boldsymbol{e}_t,$$

где $\boldsymbol{e}_t$ — орт оси $T'T$.

Теорема 1. Если функция $u = f(M)$ точки M выражается хотя бы в одной системе координат функцией $u = f(x, y, z)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то функция $u = f(M)$ обладает в точке M_0 градиентом $\operatorname{grad} f(M_0)$, причем координаты градиента суть $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$:

$$\operatorname{grad} f(M_0) = f'_x(M_0)\,\boldsymbol{i} + f'_y(M_0)\,\boldsymbol{j} + f'_z(M_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Доказательство. Проведем через точку M_0 (см. рис. 234 на стр. 494) произвольную ось $T'T$ и обозначим буквами α, β, γ углы, которые эта ось образует с осями координат Ox, Oy, Oz. Прямую $T'T$ представим параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma. \tag{3}$$

Здесь t — координата произвольной точки M на оси $T'T$, где за начало координат принята точка M_0 (ее координата $t_0 = 0$).

Найдем производную $f'_t(M_0)$ по направлению оси $T'T$.

Вдоль оси $T'T$ функция $f(M)$ зависит только от одной переменной t через посредство промежуточной функции

$$u = f(x, y, z)$$

и вспомогательных функций (3). Согласно определению § 172 искомая производная $f'_t(M_0)$ есть обыкновенная производная этой сложной функции по аргументу t (в точке $t_0 = 0$). Так как функция $f(x, y, z)$ по условию дифференцируема, то

$$du = f'_x(M_0)\, d(x_0 + t\cos\alpha) + f'_y(M_0)\, d(y_0 + t\cos\beta) + \\ + f'_z(M_0)\, d(z_0 + t\cos\gamma)$$

или

$$du = [f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma]\, dt.$$

Следовательно,

$$f_t'(M_0)=\frac{du}{dt}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma. \qquad (4)$$

Обозначим буквой e_t орт оси $T'T$:

$$e_t=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},$$

а буквой b — вектор, координаты которого суть $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$:

$$b=\{f_x'(M_0),\ f_y'(M_0),\ f_z'(M_0)\}.$$

Тогда равенство (4) примет вид

$$f_t'(M_0)=\frac{du}{dt}=be_t,$$

т. е. вектор b, координаты которого суть $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$, обладает тем свойством, что его проекция на произвольную ось $T'T$ равна производной $f_t'(M_0)$, взятой по направлению этой оси.

А это и означает (по определению градиента), что вектор $b\,\{f_x'(M_0),\ f_y'(M_0),\ f_z'(M_0)\}$ есть градиент функции $f(M)$ в точке M_0.

Пример 1. Найти градиент функции

$$f(x,\ y)=\frac{1}{8}(x^2+y^2-a^2)$$

в произвольной точке $M(x,\ y)$.

Решение. Имеем

$$f_x'(x,\ y)=\frac{1}{4}x,\quad f_y'(x,\ y)=\frac{1}{4}y,$$

$$\operatorname{grad} f(x,\ y)=\frac{1}{4}xi+\frac{1}{4}yj.$$

Пример 2. Найти производную от функции

$$U=x^2+y^2+z^2$$

в точке M_0 (4; 2; 1) по направлению вектора {2; 1; 2}.

Решение. Находим градиент

$$\operatorname{grad} U=\{2x_0,\ 2y_0,\ 2z_0\}=\{8,\ 4,\ 2\}.$$

Орт данного направления есть

$$e_t=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Следовательно,

$$f'_l(M_0) = \operatorname{grad} Ue_l = 8 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

Следствие из теоремы 1. Пусть функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда производную $f'_l(M_0)$ по направлению любой оси $T'T$ можно найти следующим построением.

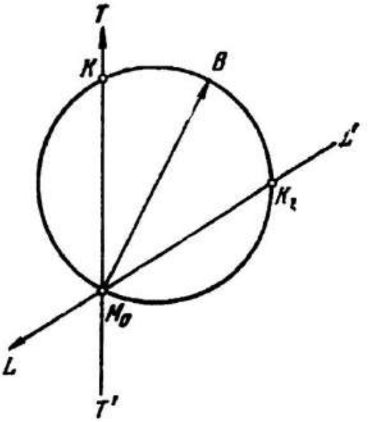


Рис. 237.

На векторе $\overrightarrow{M_0B} = \operatorname{grad} f(M_0)$, как на диаметре, строим (рис. 237) сферу [если функция $f(M)$ определена в трехмерной области] или окружность [если функция $f(M)$ определена в плоской области]. Через точку M_0 проводим ось $T'T$ и отмечаем вторую ее точку пересечения K со сферой (с окружностью). Алгебраическая величина направленного отрезка M_0K на оси $T'T$ представляет искомое значение $f'_l(M_0)$.

На рис. 237 значение $f'_l(M_0)$ положительно, а значение $f'_l(M_0)$, соответствующее оси $L'L$, отрицательно (так как направление отрезка M_0K_l и оси $L'L$ противоположны).

Теорема 2. Производная $f'_l(M_0)$, взятая по направлению любой оси $T'M_0T$, по модулю не превосходит градиента

$$|f'_l(M_0) \leqslant |\operatorname{grad} f'(M_0)|, \tag{5}$$

причем равенство

$$f'_l(M_0) = |\operatorname{grad} f'(M_0)| \tag{6}$$

(при не равном нулю градиенте) имеет место в том единственном случае, когда ось $T'M_0T$ равнонаправлена с градиентом, а равенство

$$f'_l(M_0) = -|\operatorname{grad} f'(M_0)| \tag{7}$$

— в том единственном случае, когда ось $T'M_0T$ имеет противоположное направление.

Короче (но менее точно): градиент указывает направление наибольшей скорости роста функции $f(M_0)$, а длина градиента численно выражает эту наибольшую скорость.

Доказательство. Согласно определению градиента имеем равенство

$$f'_l(M_0) = |\operatorname{grad} f(M_0)| \cos\varphi, \tag{8}$$

где φ — угол между градиентом и осью $T'T$.

Но $|\cos\varphi| \leqslant 1$. Поэтому из (8) тотчас же вытекает неравенство (5). Далее, если $|\operatorname{grad} f(M_0)| \neq 0$, то, как видно из той же формулы (8), равенство

$$|f'_l(M_0)| = |\operatorname{grad} f'(M_0)|$$

возможно только при $|\cos\varphi| = 1$. Если $\cos\varphi = +1$, то ось $T'T$ равнонаправлена с градиентом; в этом случае из формулы (8) вытекает равенство (6). Если $\cos\varphi = -1$, то ось $T'T$ имеет направление, противоположное градиенту; в этом случае имеет место равенство (7).

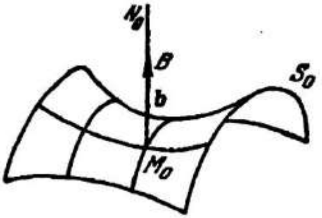


Рис. 238.

Теорема 3. Градиент функции $f(M)$ в точке M_0, где он отличен от нуля, направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня (или линии уровня) в сторону возрастания функции $f(M)$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{M_0B} = \boldsymbol{b}$ (рис. 238) есть градиент функции $f(M)$ в точке M_0. Рассмотрим поверхность уровня S_0, на которой лежит точка M_0. Так как по условию вектор $\boldsymbol{b}$ отличен от нуля, то по меньшей мере одна из его координат $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ отлична от нуля (т. е. точка M_0 обыкновенная). Значит (§ 171), поверхность S_0 обладает в точке M_0 нормалью M_0N_0 и направляющие коэффициенты этой нормали суть $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен с нормалью M_0N_0.

Согласно теореме 2 производная $f'(M)$, взятая по направлению градиента $\boldsymbol{b}$, имеет положительное значение. Стало быть, на оси, равнонаправленной с градиентом, функция $f(M)$ является возрастающей. Иными словами, градиент указывает направление возрастания функции $f(M)$.

Аналогично для случая функции точки на плоскости.

Следствие. Производная $f'(M_0)$ по направлению любой оси, лежащей в касательной плоскости поверхности уровня, равна нулю. Для случая функции точки на плоскости: производная $f'(M_0)$ по направлению касательной к линии уровня равна нулю.

Это непосредственно следует из теоремы 3 и формулы (8).

Графический способ разыскания градиента. Чтобы определить направление и длину градиента функции $f(M)$

в точке M_0, проведем (рис. 239) нормаль M_0N_0 к соответствующей линии (поверхности) уровня L_0 и найдем точку M_1, где эта нормаль пересечет ближайшую линию уровня L_1.

По доказанному искомый градиент направлен по нормали M_0N_0 в сторону возрастания функции $f(M)$; длина же градиента есть производная $f'(M_0) = \lim\limits_{M_1 \to M_0} \dfrac{f(M_1) - f(M_0)}{M_0M_1}$. Поэтому, если отрезок M_0M_1 достаточно мал, то $|\operatorname{grad} f(M_0)| \approx \left|\dfrac{f(M_1) - f(M_0)}{M_0M_1}\right|$. Значит, для разыскания длины градиента достаточно разделить разность числовых пометок при линиях L_0, L_1 на длину отрезка M_0M_1.

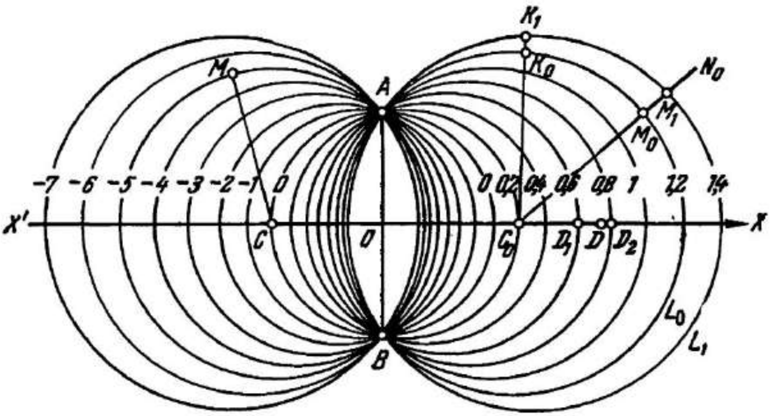


Рис. 239.

Пример 3. На рис. 239 изображена функция $u = f(M)$, определенная (во всей плоскости, за исключением прямой AB) следующим образом. Через фиксированные точки A, B и переменную точку M проводится окружность. Ее центр C лежит на оси симметрии $X'X$ отрезка AB. За единицу масштаба принимается отрезок $OA = \frac{1}{2}AB$. Функция $u = f(M)$ есть абсцисса OC центра C.

Найдем градиент функции $f(M)$ в точках M_0, K_0, D. Проводим нормаль M_0N_0 к линии уровня $f(M) = 1{,}2$, на которой лежит M_0. В пересечении с ближайшей линией уровня $f(M) = 1{,}4$ получаем точку M_1. Так как $f(M_1) > f(M_0)$, то градиент равнонаправлен с вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$. Измерив M_0M_1, получим $M_0M_1 \approx 0{,}3$. Следовательно, длина градиента есть

$$\left|\frac{f(M_1) - f(M_0)}{M_0M_1}\right| \approx \frac{1{,}4 - 1{,}2}{0{,}3} \approx 0{,}7.$$

Точка K_0 лежит на той же линии уровня $f(M)=1{,}2$, что и точка M_0. Однако возле K_0 линии уровня гуще, чем возле M_0; в соответствии с этим здесь градиент (он равнонаправлен с вектором $\overrightarrow{K_0K_1}$) длиннее:

$$|\operatorname{grad} f(K_0)| \approx \frac{1{,}4-1{,}2}{0{,}15} \approx 1{,}3.$$

Так как на рис. 239 нет линии уровня, проходящей через точку D, то мы проводим нормаль D_1DD_2 к ближайшей линии уровня $f(M)=0{,}8$ и находим градиент в точке D_2; он равнонаправлен с вектором $\overrightarrow{D_1D_2}$ и численно равен

$$\frac{f(D_2)-f(D_1)}{D_1D_2} = \frac{0{,}8-0{,}6}{0{,}3} \approx 0{,}7.$$

§ 173а. Задачи к §§ 172—173

1. Функция точки $u=f(M)$ в пространстве задана соотношением

$$f(M)=OM,$$

где O — неподвижная точка. Каковы направление и длина градиента в произвольной точке пространства?

2. Выразить функцию $f(M)=OM$ аналитически и найти координаты градиента в точке $M(x,\ y,\ z)$.

3. Функция точки $u=\varphi(M)$ на плоскости задана соотношением

$$\varphi(M)=F_1M^2+F_2M^2,$$

где F_1F_2 — фиксированный отрезок, принимаемый за единицу масштаба. Построить сеть линий уровня и определить графически градиент в какой-либо точке M_0. Выразить функцию $\varphi(M)$ аналитически и найти координаты градиента в произвольной точке плоскости.

4. Найти градиент функции $f(x,\ y)=y$ в произвольной точке M.

5. Найти производную от функции $f(x,\ y)=x^2-y^2$ в точке (3; 4) по направлению оси, составляющей с осью Ox угол 30°.

6. Найти ту ось, по направлению которой функция $\varphi(x,\ y,\ z)= y\cos z - x\sin z$ обладает наименьшей производной в точке (0; 0; 0).

7. Найти производную функции $z=x^3-3x^2y+3xy^2$ в точке M_1 (3; 1) по направлению, ведущему от точки M_1 к точке M_2 (6; 5).

8. Потенциал v электрического заряда e в точке M, отстоящей от заряда на расстояние r, имеет значение $v=\frac{e}{r}$. Найти направление и численную величину градиента в произвольной точке пространства. Указать физический смысл вектора grad v.

9. Линии уровня функции $u=f(M)$ суть эллипсы с фокусами в фиксированных точках F_1, F_2. Значение функции $f(M)$ в произвольной точке M равно длине большой оси соответствующего эллипса. Каково направление градиента в произвольной точке плоскости? Какова длина градиента в точке M_0, делящей отрезок F_1F_2 в отношении —2:1?

10. Выразить аналитически функцию $f(M)$, рассмотренную в предыдущей задаче, найти координаты ее градиента в произвольной точке и проверить результат графически.

§ 174. Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть функция $u=f(x, y)$ обладает частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x, y)$ в некоторой области D. Тогда величины $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ сами являются функциями переменных x, y и могут иметь производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Эти производные называются *вторыми производными* или *производными второго порядка* от функции $f(x, y)$.

В отличие от вторых частных производных $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ и т. д. частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ называются *первыми* (или частными производными первого порядка).

Обозначения. Ниже указаны различные обозначения вторых производных:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}=f''_{xx}(x, y)=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

(и первый и второй раз дифференцирование производится по x);

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u''_{xy}=f''_{xy}(x, y)=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}$$

(обратить внимание на порядок записи букв x, y; первый раз дифференцирование производится по x, а второй — по y);

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=u''_{yx}=f''_{yx}(x, y)=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}$$

(первый раз дифференцируется по y, второй — по x);

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}=f''_{yy}(x, y)=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

(и первый и второй раз дифференцируется по y).

Вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ называются *чистыми*, вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ — *смешанными*.

Аналогично определяются и обозначаются вторые частные производные от функций трех, четырех и т. д. переменных.

Пример 1. Найти вторые частные производные от функции $u=x^3y^2+2x^2y-6$ в произвольной точке $M(x, y)$.

Решение. Находим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2+4xy;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y+2x^2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2+4xy)=6xy^2+4y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2+4xy)=6x^2y+4x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y+2x^2)=6x^2y+4x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y+2x^2)=2x^3.$$

Замечание 1. Сопоставляя выражения смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, замечаем, что эти производные оказались равными друг другу. Это не случайное совпадение, ибо имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Смешанные частные производные $f''_{xy}(x_0, y_0)$, $f''_{yx}(x_0, y_0)$ равны между собой при условии, что они непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Доказательство опускаем ввиду его громоздкости. Заметим только, что упомянутое условие на практике обычно соблюдается, так что фактически имеется не четыре отличные друг от друга производные, а только три.

Теорема 1 следующим образом обобщается на случай функции от любого числа переменных.

Теорема 2. *Смешанные частные производные, отличающиеся друг от друга только порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности в рассматриваемой точке.*

Пример 2. Найти вторые частные производные от функции

$$u=x^2y^3+2x^4z^2-3xyz.$$

Решение[1]). Из выражения первой частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3+8x^3z^2-3yz$$

находим три вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^3+24x^2z^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=6xy^2-3z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=16x^3z-3y.$$

[1]) В § 176 будет дано практическое правило, облегчающее вычисление частных производных второго и высших порядков.

Таким же образом найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=6xy^2-3z,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x^2y,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-3x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=16x^3z-3y,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=-3x,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=4x^4.$$

Среди этих девяти частных производных имеется только шесть отличных друг от друга, так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}.$$

Определение 2. Частные производные (первого порядка) от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* и обозначаются f'''_{xxx}, f'''_{yyy} (*чистые производные*), f'''_{xxy}, f'''_{xyy} и т. д. (*смешанные производные*) или $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}$ и т. д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высоких порядков.

Теорема 2 остается в силе для производных любого порядка.

Пример 3. Частные производные третьего порядка от функции $u=x^3y^2+2x^2y-6$ (ср. пример 1) суть

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=6y^2,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=12xy+4,$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=6x^2.$$

Отличных друг от друга частных производных третьего порядка оказалось только четыре (вместо восьми).

§ 175. Полные дифференциалы высших порядков

Определение. Полный дифференциал, взятый от полного дифференциала $df(x, y)$ функции $u=f(x, y)$, называется *вторым (полным) дифференциалом* функции $f(x, y)$ и обозначается d^2u или $d^2f(x, y)$.

При разыскании второго дифференциала функции $f(x, y)$ считается, что каждое из приращений Δx, Δy *независимых* переменных x, y *сохраняет* одно и то же значение в любой точке $M(x, y)$ и при обоих последовательных дифференцированиях (ср. § 90).

В отличие от второго полного дифференциала d^2u, полный дифференциал du называют *первым* полным дифференциалом функции $u=f(x, y)$.

Пример 1. Найти второй полный дифференциал функции $u=x^3y^2$.

Решение. Находим первый полный дифференциал

$$du=3x^2y^2\,dx+2x^3y\,dy.$$

Дифференцируем еще раз, считая dx, dy постоянными. Получим

$$d(du)=d^2u=d(3x^2y^2)\,dx+d(2x^3y)\,dy=$$
$$=3(2xy^2\,dx+2x^2y\,dy)\,dx+2(3x^2y\,dx+x^3\,dy)\,dy=$$
$$=6xy^2\,dx^2+12x^2y\,dx\,dy+2x^3\,dy^2.$$

Функция $f(x, y)$, обладающая в точке $M_0(x_0, y_0)$ вторым дифференциалом, называется *дважды дифференцируемой* (в точке M_0).

Замечание 1. Из определения второго дифференциала непосредственно следует, что если функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке M_0, то она непременно обладает в этой точке всеми частными производными второго порядка (обратное предложение *без дополнительных условий* несправедливо). Сверх того, можно доказать, что смешанные производные $f''_{xy}(x_0, y_0)$, $f''_{yx}(x_0, y_0)$ дважды дифференцируемой функции равны друг другу (даже в том случае, если они разрывны в точке M_0).

Общее выражение полного дифференциала. Рассмотрим дважды дифференцируемую функцию $u=f(x, y)$ независимых переменных x, y. Имеем

$$du=u'_x\,dx+u'_y\,dy. \tag{1}$$

Дифференцируем еще раз (считая dx, dy постоянными). Получаем

$$d(du)=d^2u=d(u'_x)\,dx+d(u'_y)\,dy=$$
$$=(u''_{xx}\,dx+u''_{xy}\,dy)\,dx+(u''_{yx}\,dx+u''_{yy}\,dy)\,dy.$$

А так как $u''_{yx}=u''_{xy}$, то

$$d^2u=u''_{xx}\,dx^2+2u''_{xy}\,dx\,dy+u''_{yy}\,dy^2. \tag{2}$$

Замечание 2. В противоположность выражению $u'_x\,dx+$ $+u'_y\,dy$ первого полного дифференциала, выражение (2) *не является инвариантным.* Это значит, что если переменные x, y сами будут функциями одного или нескольких аргументов v, t, ..., то выражение (2), как правило, *не будет представлять* второго дифференциала сложной функции $f[x(v, t, \ldots), y(v, t, \ldots)]$.

Пример 2. Пусть переменные x, y являются функциями от аргумента t, причем $x=t^2$, $y=t^3$. Тогда переменная $u=x^3y^2$ будет сложной функцией от t и представится формулой

$$u=(t^2)^3(t^3)^2=t^{12}.$$

Отсюда

$$du = 12t^{11}\,dt,$$
$$d^2u = 132t^{10}\,dt^2. \qquad (3)$$

Между тем по формуле (2) мы получили бы для d^2u следующее выражение (ср. пример 1):

$$6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2 =$$
$$= 6t^2\,(t^3)^2\,[d\,(t^2)]^2 + 12\,(t^2)^2\,t^3\,d\,(t^2)\,d\,(t^3) + 2\,(t^2)^3\,[d\,(t^3)]^2 =$$
$$= 6t^8\,(2t\,dt)^2 + 12t^7\,(2t\,dt)\,(3t^2\,dt) + 2t^6\,(3t^2\,dt)^2 = 114t^{10}\,dt^2.$$

Замечание 3. Чтобы получить инвариантную форму второго полного дифференциала, надо продифференцировать соотношение

$$du = u'_x\,dx + u'_y\,dy, \qquad (4)$$

считая, что переменные x, y являются функциями одного или нескольких аргументов v, t, ... А тогда и дифференциалы dx, dy будут функциями от v, t, ...:

$$\left.\begin{aligned} dx &= x'_v\,(v,\ t,\ \ldots)\,dv + x'_t\,(v,\ t,\ \ldots)\,dt + \ldots; \\ dy &= y'_v\,(v,\ t,\ \ldots)\,dv + y'_t\,(v,\ t,\ \ldots)\,dt + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(дифференциалы dv, dt, ... теперь рассматриваются как постоянные величины).

Вследствие этого из (4) мы получим следующее выражение:

$$d^2u = d\,(u'_x)\,dx + d\,(u'_y)\,dy + u'_x d^2x + u'_y\,d^2y, \qquad (6)$$

где вторые дифференциалы d^2x, d^2y можно найти из формул (5).

Из (6) получаем

$$d^2u = u''_{xx}\,dx^2 + 2u_{xy}\,dx\,dy + u''_{yy}\,dy^2 + u'_x\,d^2x + u'_y\,d^2y. \qquad (7)$$

Это выражение инвариантно, т. е. оно представляет второй дифференциал функции как в том случае, когда x, y — независимые переменные [тогда $d^2x = d^2y = 0$, и получается формула (2)], так и в том случае, когда x, y зависят от любого числа аргументов.

Пример 3. Пусть $u = x^3y^2$, где $x = t^2$, $y = t^3$ (ср. пример 2). Тогда два последних члена формулы (6) дают в сумме

$$u'_x\,d^2x + u'_y\,d^2y = 3x^2y^2\,d^2x + 2x^3y\,d^2y = 3\,(t^2)^2\,(t^3)^2\,d^2\,(t^2) +$$
$$+ 2\,(t^2)^3t^3\,d^2\,(t^3) = 3t^{10}\,2dt^2 + 2t^9 6t\,dt^2 = 18t^{10}\,dt^2.$$

Сумма трех первых членов формулы (7) есть (см. пример 2) $114t^{10}\,dt^2$. В итоге получаем

$$d^2u = 114t^{10}\,dt^2 + 18t^{10}\,dt^2 = 132t^{10}\,dt^2,$$

что согласуется с формулой (3).

Замечание 4. Полные дифференциалы третьего, четвертого и т. д. порядков (d^3u, d^4u и т. д.) определяются последовательно таким же образом, как полный дифференциал второго порядка. Функция $u = f(x, y)$, обладающая полным дифференциалом n-го порядка, называется *n-кратно дифференцируемой*.

Считая, что x, y — независимые переменные и поступая так же, как при выводе формулы (2), мы последовательно получим следующие общие выражения для $d^3u = d^3f(x, y)$, для d^4u и т. д.:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\,dy^3, \qquad (8)$$

$$d^4u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\,dx^4 + 4\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}\,dx^3\,dy + 6\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\,dx^2\,dy^2 + 4\,\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3}\,dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\,dy^4 \qquad (9)$$

и т. д.

Бросается в глаза, что числовые множители равны соответствующим биномиальным коэффициентам. Доказать эту закономерность можно по способу математической индукции.

Замечание 5. Все вышесказанное распространяется на функции трех, четырех и т. д. аргументов.

§ 176. Техника повторного дифференцирования

Вычислив частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, мы можем по формуле

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 \qquad (1)$$

найти второй дифференциал функции $u = f(x, y)$ (где x, y — независимые переменные).

Однако на практике обычно оказывается более удобным прямой путь, основывающийся на определении второго дифференциала (§ 175). А именно, сначала мы находим выражение первого дифференциала, как объяснено в § 163, а потом из найденного выражения тем же способом получаем выражение второго дифференциала. При этом, если переменные x, y принимаются за независимые, то величины dx, dy считаются постоянными.

Этот путь оказывается более удобным даже тогда, когда конечной нашей целью является разыскание вторых производных.

В этом случае мы *сначала* непосредственным вычислением находим выражение второго дифференциала в виде

$$p\,dx^2 + 2q\,dx\,dy + r\,dy^2, \tag{2}$$

где p, q, r — некоторые функции от аргументов x, y; затем из выражения (2) прочитываем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r.$$

Тем же способом получаем выражения для частных производных высших порядков.

Пример 1. Найти частные производные первого, второго и третьего порядков от функции

$$u = x^3 y^2.$$

Решение. Находим первый дифференциал

$$du = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy. \tag{3}$$

Отсюда, считая dx, dy постоянными, получаем, как в примере 1 § 175,

$$d^2u = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2. \tag{4}$$

Дифференцируем (4), снова считая dx, dy постоянными:

$$d^3u = d\,(6xy^2)\,dx^2 + d\,(12x^2y)\,dx\,dy + d\,(2x^3)\,dy^2 =$$
$$= (6y^2\,dx^3 + 12xy\,dx^2\,dy) + (24xy\,dx^2\,dy + 12x^2 dx\,dy^2) + 6x^2\,dx\,dy^2$$

или

$$d^3u = 6y^2\,dx^3 + 3\cdot 12xy\,dx^2\,dy + 3\cdot 6x^2\,dx\,dy^2. \tag{5}$$

Из выражения (3) прочитываем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y.$$

Из формулы (4), сопоставляя ее с формулой (1), прочитываем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^3.$$

Наконец, из формулы (5), сопоставляя ее с формулой (8) § 175, находим

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6y^2, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 6x^2, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Пример 2. Дана функция $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Найти выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ в произвольной точке $M(x, y)$, не лежащей на оси Oy.

Решение. Во всякой точке (x, y), не лежащей на оси Oy, функция $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ является дважды дифференцируемой, в чем убеждаемся при последовательном дифференцировании. Находим

$$dz = d\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Отсюда

$$d^2z = \frac{(x^2+y^2)\,d\,(x\,dy-y\,dx)-(x\,dy-y\,dx)\,d\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\,(dx\,dy-dy\,dx)-(x\,dy-y\,dx)\,(2x\,dx+2y\,dy)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2xy\,dx^2+2\,(y^2-x^2)\,dx\,dy-2xy\,dy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Отсюда прочитываем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Теперь находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{-4x^2y^2-(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}=-\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}.$$

§ 176а. Задачи к §§ 174—176

В задачах 1—6 найти полный дифференциал второго порядка и вторые частные производные следующих функций:

1. $u=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$. 2. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. $u=\operatorname{acrtg}\frac{y}{x}$. 4. $u=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

5. $u=\frac{x-y}{x+y}$. 6. $z=\sin^2(ax+by)$.

7. Найти полный дифференциал и частные производные третьего порядка от функции $u=x^3+x^2y+y^3$.

8. То же для функции $u=\frac{y}{x}$.

9. Дана функция $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

10. Дана функция $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; вычислить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

11. Дана функция

$$y=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Доказать, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

12. Дана функция

$$u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y),$$

где φ и ψ — дважды дифференцируемые функции; $\psi'(y)$ — производная от $\psi(y)$. Доказать, что $(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$.

§ 177. Экстремум функции нескольких переменных

Понятие экстремума (максимума или минимума) функции нескольких переменных аналогично понятию экстремума функции $f(x)$ и содержит его как частный случай.

Определение. Говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 *максимум (минимум)*, если значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди значений функции $f(M)$ в некоторой окрестности точки M_0 (в некотором круге, если $f(M)$ — функция двух переменных, в некотором шаре, если $f(M)$ — функция трех переменных).

Ср. § 102 (определение и замечания 1 и 2).

В случае функции двух переменных наличие максимума в точке M_0 означает геометрически, что соответствующая точка K_0 поверхности $z=f(M)$ (рис. 240, *а*) лежит выше всех соседних точек; наличие минимума означает, что точка K_0 (рис. 240, *б*) лежит ниже всех соседних.

Теорема. Если функция $z=f(x, y)$, обладающая в точке $M_0(x_0, y_0)$ частными производными $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, имеет в этой точке экстремум, то обе эти частные производные равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0. \tag{1}$$

Доказательство. Для определенности положим, что функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 максимум (рис. 240, *а*). Это значит, что в любой точке $M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, достаточно близкой к точке M_0, значение функции $f(x, y)$ не превосходит $f(x_0, y_0)$.

Будем рассматривать сначала только такие точки M, которые лежат на прямой ab, проведенной через точку M_0 параллельно оси Ox, т. е. только точки $M(x_0+\Delta x, y_0)$. Тогда величина z окажется функцией *только одной переменной* x:

$$z=f(x, y_0).$$

Эта функция обладает в точке $x=x_0$ производной, которая есть не что иное, как частная производная функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. С другой стороны, функция $f(x, y_0)$ имеет в точке $x=x_0$

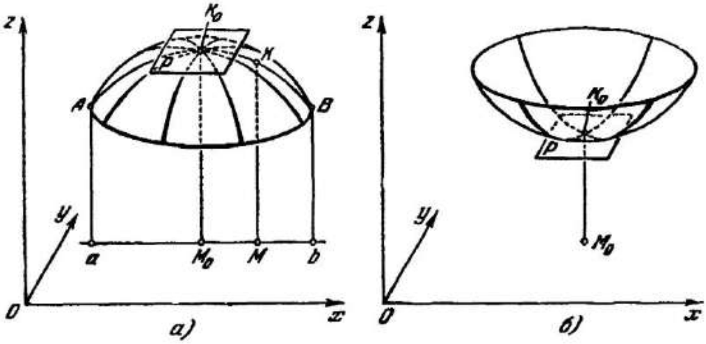


Рис. 240.

максимум [ибо в любой точке M, лежащей на прямой ab в достаточной близости от M_0, значение функции $f(x, y_0)$ не превосходит $f(x_0, y_0)$].

Следовательно (§ 102), частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ равна нулю.

Геометрически это означает следующее: если через точку K_0 (рис. 240, *а*) провести «фронтальное» сечение AB, то касательная к этому сечению в точке K_0 параллельна оси Ox.

Таким же образом доказывается, что $f'_y(x_0, y_0)=0$; геометрически это означает, что «профильное» сечение, проведенное через точку K_0, имеет в точке K_0 касательную, параллельную оси Oy. Стало быть, в точке M_0 касательная плоскость (если она существует; для этого надо, чтобы функция $f(x, y)$ была дифференцируемой) параллельна плоскости xOy.

Для случая, когда функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ минимум, доказательство ведется таким же образом.

Замечание 1. Доказанная теорема распространяется на функции от любого числа переменных.

Так, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных имеет место следующая теорема.

Если функция $f(x, y, z)$, обладающая в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ частными производными $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$, имеет в этой точке экстремум, то все эти три частные производные равны нулю.

Замечание 2. Доказанная теорема устанавливает *необходимое* условие наличия экстремума. Но это условие *не является* достаточным, т. е. может оказаться, что равенства (1) удовлетворяются, а функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ не имеет ни максимума, ни минимума. Рассмотрим, например, функцию

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2. \tag{2}$$

В точке $O(0; 0)$ эта функция равна нулю; во всех точках оси Ox, отличных от O, имеем

$$z = x^2 > 0;$$

во всех точках оси Oy, отличных от O, имеем

$$z = -y^2 < 0.$$

Таким образом, в любой близости от точки $(0; 0)$ есть такие точки, где $f(x, y) > f(0; 0)$, а есть и такие, где $f(x, y) < f(0; 0)$. Стало быть, в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y)$ заведомо не имеет ни максимума, ни минимума.

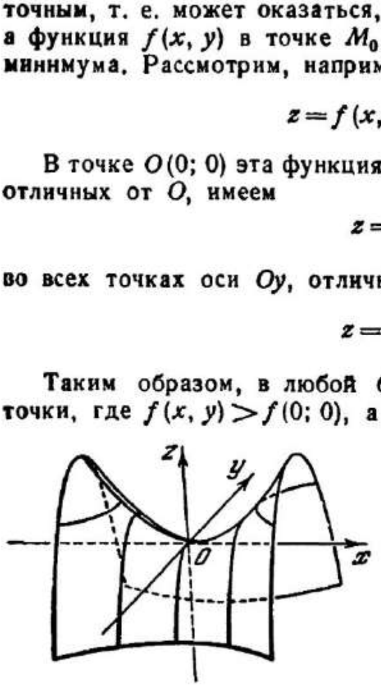


Рис. 241.

Между тем, мы имеем

$$f'_x(0; 0) = 0, \quad f'_y = (0; 0) = 0.$$

Геометрически: поверхность (2) (гиперболический параболоид, рис. 241) имеет в точке O горизонтальную касательную плоскость, но лежит не по одну сторону от этой плоскости, а по обе ее стороны[1]).

Замечание 3. Из теоремы следует, что если внутри области изменения аргумента M имеются точки экстремума функции $f(M)$, то они находятся либо в числе тех точек, где все частные производные функции $f(M)$ равны нулю, либо в числе тех точек, где функция $f(M)$ недифференцируема.

[1]) Аналогичный случай для кривой линии является исключительным (точка перегиба); для поверхности же он является «нормальным» (седлообразная фэрма поверхности).

§ 178. Достаточное условие экстремума (случай двух аргументов)

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, дважды дифференцируемую в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Если в этой точке функция $f(x, y)$ обладает экстремумом, то первый ее дифференциал $df(x, y)$, по доказанному в § 177, обращается в нуль:

$$df(x, y) = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy = 0. \tag{1}$$

Однако условие (1) отнюдь не достаточно для того, чтобы функция $f(x, y)$ обладала экстремумом в точке M_0. Чтобы судить о том, является ли значение $f(x_0, y_0)$ экстремальным, и если да, то имеет ли здесь место максимум или минимум, надо обратиться к дифференциалам высшего порядка.

Сообщим без доказательства следующие признаки наличия экстремума и его отсутствия.

Теорема 1. Пусть

$$a_{11}dx^2 + 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dy^2$$

есть второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, так что числа a_{11}, a_{12}, a_{22} суть значения вторых производных

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Если первый дифференциал $df(x, y)$ обращается в нуль в точке M_0, и при этом имеет место неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \tag{2}$$

то функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) экстремум: максимум, когда число a_{11} (или a_{22}) отрицательно, и минимум, когда a_{11} (или a_{22}) положительно.

Замечание 1. Числа a_{11}, a_{22} при наличии неравенства (2) всегда имеют одинаковые знаки.

Пример 1. Функция

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

имеет в точке $M_0(1;\ 1)$ экстремум, ибо первый дифференциал $df(x, y) = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$ в этой точке равен нулю, а второй дифференциал есть

$$d^2f(x, y) = 6x\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6y\,dy^2, \tag{3}$$

то есть

$$a_{11} = 6x_0 = 6, \quad a_{12} = -3, \quad a_{22} = 6y_0 = 6,$$

так что неравенство (2) удовлетворено.

Экстремум является минимумом, ибо $a_{11} > 0$.

Проверим это. Составим разность

$$f(x, y) - f(1;\ 1) = f(x, y) - 0 = x^3 + y^3 - 3xy + 1 \tag{4}$$

и докажем, что эта разность в достаточной близости от точки (1; 1) сохраняет положительный знак. Положим

$$x = 1 + \alpha, \quad y = 1 + \beta.$$

Разность (4) преобразуется к виду

$$f(x, y) - f(1;\ 1) = 3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3). \tag{5}$$

Первый член при всех ненулевых значениях α, β положителен, и притом не меньше чем $\frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. В самом деле, имеем

$$3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta)^2.$$

Здесь второе слагаемое неотрицательно. Следовательно,

$$3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \geqslant \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

Второй же член выражения (5) будет меньше чем $\frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ по абсолютной величине всякий раз, как

$$|\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

Действительно, в этом случае будем иметь

$$|\alpha^3| < \alpha^2, \quad |\beta^3| < \beta^2.$$

Значит, разность $f(x, y) - f(1;\ 1)$ положительна.

Замечание 2. Теорема 1 дает достаточное условие *наличия* экстремума. Следующая теорема дает достаточное условие *отсутствия* экстремума.

Теорема 2. Если первый дифференциал $df(x, y)$ обращается в нуль в точке $M_0(x_0, y_0)$ и при этом имеет место (при обозначениях теоремы 1) неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0,$$

то функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке M_0.

Пример 2. Рассмотрим снова функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

Первый ее дифференциал обращается в нуль также в точке $M_1(0; 0)$. Однако теперь имеем

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=-3, \quad a_{22}=0,$$

так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Следовательно, в точке M_1 функция $f(x, y)$ экстремума не имеет [поверхность $z=f(x, y)$ в соответствующей точке имеет седлообразный вид].

Проверим это. Составим разность

$$f(x, y)-f(0;\ 0)=x^3+y^3-3xy. \tag{6}$$

Легко видеть, что в любой окрестности точки M_1 есть точки двух типов: для одних разность (6) положительна, для других отрицательна. Так, если точку $M(x, y)$ взять на прямой $y=x$, то

$$f(x, y)-f(0;\ 0)=x^3+x^3-3x^2=x^2(2x-3).$$

Вблизи точки M_1 $\left(\text{при } x<\frac{3}{2}\right)$ эта разность отрицательна. Если же точку M взять на прямой $y=-x$, то разность (6) будет равна $3x^2$, а эта величина всегда положительна.

Таким образом, в любой окрестности точки $M_1(0; 0)$ есть и такие точки, где $f(x, y)>f(0; 0)$, и такие, где $f(x, y)<f(0; 0)$. Стало быть, в точке $M_1(0; 0)$ экстремума нет.

Замечание 3. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$, где первый дифференциал функции $f(x, y)$ равен нулю, имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

то функция $f(x, y)$ может иметь здесь экстремум (максимум или минимум), а может и не иметь. Этот случай требует дополнительного исследования (с привлечением дифференциалов высшего порядка).

§ 179. Разыскание наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D (включая ее границу). Тогда эта функция принимает в области D как наибольшее, так и наименьшее значения.

Для определенности положим, что требуется найти наибольшее значение. Если оно достигается в некоторой точке M_0, лежащей внутри области, то M_0 есть точка экстремума, и тогда она находится (§ 177, замечание 3) либо среди точек, где обе частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ равны нулю, либо среди точек, где функция $f(x, y)$ лишена хотя бы одной из упомянутых производных. Назовем точки того и другого типа *критическими*.

Правило. Для разыскания наибольшего значения функции $z=f(x, y)$ в области D поступаем следующим образом.

1) Находим все критические точки, т. е. решаем систему уравнений

$$f'_x(x, y)=0, \qquad f'_y(x, y)=0,$$

имея в виду, что точка (x, y) должна принадлежать области D, и к найденным точкам присоединяем те внутренние точки области D, где функция $f(x, y)$ лишена хотя бы одной из частных производных $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

2) Вычисляем значение $f(x, y)$ в каждой из критических точек.

3) Эти значения сравниваем с наибольшим значением функции $z=f(x, y)$ на границе области (вдоль этой границы величина z меняется в зависимости от *одного* аргумента, и наибольшее ее значение можно найти по способу, объясненному в § 96).

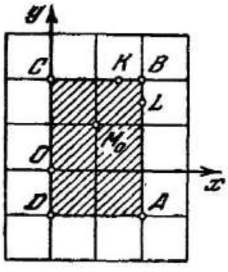


Рис. 242.

Аналогично находим наименьшее значение функции $f(x, y)$ в области D.

Замечание 1. Для функции $u=f(x, y, z)$ трех переменных план работы остается тем же, но на границе области величина u является функцией не одного, а *двух* аргументов, так что исследование усложняется. Однако во многих случаях из условия вопроса заранее ясно, что наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в одной из критических точек. Тогда третий этап исследования отпадает.

Это замечание относится и к функциям большего числа переменных.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z=f(x, y)=x^3+y^3-3xy$$

в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 242) с вершинами $A(2; -1)$, $B(2; 2)$, $C(0; 2)$, $D(0; -1)$.

Решение. 1) Функция $f(x, y)$ всюду обладает частными производными

$$f'_x(x, y)=3(x^2-y), \quad f'_y(x, y)=3(y^2-x).$$

Поэтому все критические точки суть решения системы уравнений

$$x^2-y=0, \quad y^2-x=0.$$

Эта система имеет два решения:

$$x_0=1, \quad y_0=1, \quad \text{и} \quad x_1=0, \; y_1=0.$$

Соответствующие точки $M_0(1;\,1)$, $O(0;\,0)$ обе принадлежат прямоугольнику $ABCD$.

2) Вычисляем соответствующие значения функции $f(x, y)$:

$$f(O)=0, \quad f(M_0)=-1. \tag{1}$$

3) Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ на границе прямоугольника $ABCD$. Ее удобно разбить на четыре участка AB, BC, CD, DA. На каждом из участков могут оказаться свои критические точки; сверх того, надо будет учесть концы этих участков, т. е. вершины A, B, C, D.

а) Найдем критические точки на участке AB. Здесь $x=2$, так что

$$z=f(2, y)=8+y^3-6y \qquad (-1\leqslant y\leqslant 2). \tag{2}$$

Из уравнения

$$z'_y=3y^2-6=0 \qquad (-1\leqslant y\leqslant 2) \tag{3}$$

находим критическое значение $y=\sqrt{2}$; оно единственное, так как второй корень $y=-\sqrt{2}$ лежит вне промежутка $(-1;\,2)$. Значение функции $f(x, y)$ в соответствующей точке $L\left(2;\,\sqrt{2}\right)$ находим по формуле (2):

$$f(L)=f\left(2;\sqrt{2}\right)=8-4\sqrt{2}\approx 2{,}3. \tag{4}$$

б) Найдем теперь критические точки на участке BC. Здесь $y=2$, так что

$$z=f(x, 2)=x^3+8-6x \qquad (0\leqslant x\leqslant 2).$$

Поступая, как в предыдущем случае, получим точку $K\left(\sqrt{2};\,2\right)$ и найдем

$$f(K)=f\left(\sqrt{2};\;2\right)=8-4\sqrt{2}\approx 2{,}3. \tag{5}$$

в) На участке CD, где

$$z=f(0, y)=y^3 \qquad (-1\leqslant y\leqslant 2),$$

получим точку $O(0;\,0)$, уже найденную ранее.

г) На участке DA, где

$$z=f(x,\,-1)=x^3-1+3x,$$

критических точек нет.

Остается вычислить значения $f(x, y)$ в вершинах A, B, C, D. Находим

$$\left.\begin{aligned} &f(A)=f(2;\,-1)=13, && f(B)=f(2;\,2)=4,\\ &f(C)=(0;\,2)=8, && f(D)=f(0,\,-1)=-1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Сопоставив значения (1), (4), (5) и (6), мы видим, что наибольшее значение функции $f(x, y)$ в данной области есть 13. Оно достигается в точке A (на границе области). Наименьшее значение есть -1. Оно достигается дважды: во внутренней точке $M_0(1; 1)$ и в граничной точке $D(0; -1)$.

Пример 2. Открытый прямоугольный ящик должен иметь данную емкость V. Найти размеры ящика, при которых на его изготовление уйдет наименьшее количество материала. Подсчитать это количество.

Решение. Пусть x — длина ящика, y — ширина, z — высота. По условию эти величины связаны соотношением

$$xyz = V. \tag{7}$$

Поверхность S ящика (четыре стенки и дно) составляет

$$S = xy + 2yz + 2zx$$

или в силу (7)

$$S = f(x, y) = xy + \frac{2V}{xy}(x+y) = xy + 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right). \tag{8}$$

Здесь x и y — независимые переменные, способные (теоретически) принимать произвольные значения. Поэтому искомое наименьшее значение $f(x, y)$, если оно существует, не может быть граничным. А в том, что оно существует, у нас сомнений нет (по смыслу задачи).

Стало быть, достаточно найти критические значения x, y. Опять-таки по смыслу задачи ясно, что искомые значения x, y не могут быть нулевыми; значит, в искомой точке (x, y) функция (8) непрерывна. Следовательно, критические значения x, y суть решения системы уравнений $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Для разыскания частных производных удобно воспользоваться полным дифференциалом:

$$df(x, y) = x\,dy + y\,dx - 2V\left(\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x^2}\right) =$$
$$= \left(y - \frac{2V}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{2V}{y^2}\right)dy = 0.$$

Получим систему уравнений

$$y = \frac{2V}{x^2}, \qquad x = \frac{2V}{y^2}.$$

Перемножив их, находим

$$xy = \frac{(2V)^2}{(xy)^2},$$

откуда

$$xy = (2V)^{2/3}.$$

Подставляя сюда сначала $y=\frac{2V}{x^2}$, а затем $x=\frac{2V}{y^2}$, находим единственную систему критических значений

$$x=(2V)^{1/3}, \quad y=(2V)^{1/3}.$$

При этих значениях x, y функция $S=f(x, y)$ принимает наименьшее значение. Из (7) находим

$$z=\frac{V}{xy}=\frac{1}{2}\frac{2V}{(2V)^{2/3}}=\frac{1}{2}(2V)^{1/3}.$$

Стало быть, ящик должен иметь квадратное основание, а высота его должна быть вдвое меньше стороны основания. Количество материала, потребное для изготовления ящика, находим по формуле (8):

$$S=2(V)^{2/3}+2V\left[\frac{1}{(2V)^{1/3}}+\frac{1}{(2V)^{1/3}}\right]=3(2V)^{2/3}.$$

Пример 3. Даны три точки M_1, M_2, M_3, не лежащие на одной прямой. Найти точку M_0, в которой функция

$$f(M)=M_1M^2+M_2M^2+M_3M^2, \tag{9}$$

где M — произвольная точка пространства, принимает наименьшее значение.

Решение. Задача значительно упростится, если заметить, что точка M_0, где функция $f(M)$ имела бы наименьшее значение, должна лежать в плоскости $M_1M_2M_3$. Действительно, если точка M не лежит в плоскости $M_1M_2M_3$, то ее проекция M' на эту плоскость находится ближе к каждой из точек M_1, M_2, M_3, чем точка M, и, следовательно, значение $f(M)$ не является наименьшим.

Далее заметим следующее. На плоскости $M_1M_2M_3$ точка M по условию может занимать *любое положение*. Но при удалении точки M в бесконечность функция $f(M)$ стремится к пределу $+\infty$, и потому мы можем поступить так. Возьмем какую-либо точку N, найдем значение $f(N)$ и окружим треугольник $M_1M_2M_3$ столь обширной областью D, чтобы как за ее пределами, так и на ее границе значения функции $f(M)$ превосходили $f(N)$. Тогда за пределами области D функция $f(M)$ заведомо не примет наименьшего значения. Среди тех значений, которые функция $f(M)$ принимает в области D (включая границу) непременно будет наименьшее. При этом точка M_0, где функция $f(M)$ принимает наименьшее значение, заведомо не будет принадлежать границе области D.

Поэтому достаточно вычислить значения функции в критических точках; сравнивать их с наименьшим значением функции $f(M)$ на границе области D нет никакой нужды.

Заметив это, отнесем треугольник $M_1M_2M_3$ к какой-либо прямоугольной системе координат. Формула (9) примет вид

$$f(x, y)=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+\\+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2. \qquad (9a)$$

Из системы уравнений

$$f'_x=2(x-x_1)+2(x-x_2)+2(x-x_3)=0,$$
$$f'_y=2(y-y_1)+2(y-y_2)+2(y-y_3)=0$$

находим единственную критическую точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \qquad (10)$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3}{3}. \qquad (10a)$$

Стало быть, функция $f(M)$ принимает наименьшее значение в точке пересечения медиан треугольника $M_1M_2M_3$ [1, § 86, формула (23), стр. 202].

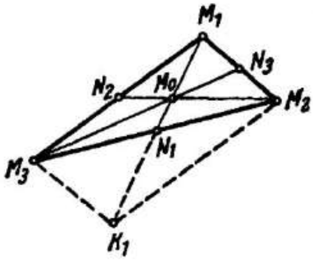


Рис. 243.

Чтобы получить значение $f(M_0)$, достаточно подставить выражения (10) в формулу (9a). Но чтобы выяснить геометрический смысл результата, придется выполнить громоздкие преобразования. Поэтому предпочтительно обратиться к геометрическим соображениям.

Продолжим медиану M_1N_1 (рис. 243), отложим отрезок $N_1K_1=M_1N_1$ и соединим точку K_1 с точками M_2, M_3. Получим параллелограмм $M_1M_2K_1M_3$. По известной теореме элементарной геометрии

$$M_1K_1^2+M_2M_3^2=2M_1M_2^2+2M_1M_3^2.$$

Но

$$M_1K_1=2M_1N_1=2\cdot\frac{3}{2}M_1M_0=3M_1M_0.$$

Следовательно,

$$9M_1M_0^2=2M_1M_2^2+2M_1M_3^2-M_2M_3^2.$$

Таким же образом получим

$$9M_2M_0^2=2M_2M_3^2+2M_2M_1^2-M_3M_1^2,$$
$$9M_3M_0^2=2M_3M_1^2+2M_3M_2^2-M_1M_2^2.$$

Сложив эти три равенства и разделив на 9, будем иметь

$$f(M_0)=M_1M_0^2+M_2M_0^2+M_3M_0^2=\frac{1}{3}(M_1M_2^2+M_2M_3^2+M_3M_1^2). \qquad (11)$$

Замечание 2. Функция $f(M)$ *не имеет наибольшего значения*, если точка M может занимать любое положение. Если же речь идет о наибольшем значении функции $f(M)$ в какой-либо ограниченной области (включая границу), то такое значение непременно будет существовать, но оно будет достигаться *на границе* области.

§ 179а. Задачи к § 179

В задачах 1—3 найти наибольшее и наименьшее значения данной функции в указанной области.

1. $z=x^2+2xy-4x+8y$ в четырехугольнике с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 2)$, $D(0;\ 2)$.

2. $z=x^2-y^2$ в круге радиуса $R=2$ с центром в точке $(0;\ 0)$.

3. $z=x^2y(4-x-y)$ в треугольнике с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(6;\ 0)$, $C(0;\ 6)$.

4. Найти наименьшую поверхность прямоугольного параллелепипеда с данным объемом V (ср. § 179, пример 2).

5. Найти наибольшую величину произведения четырех неотрицательных чисел с данной суммой a.

6. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC=CB=a$. Найти точку M, где сумма квадратов расстояний до трех сторон треугольника имеет наименьшую величину.

7. На трех взаимно перпендикулярных отрезках $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, как на ребрах, построен прямоугольный параллелепипед. Найти наименьший объем тетраэдра $OA'B'C'$, образованного гранями трехгранного угла O и плоскостью P, проведенной через вершину D, противоположную вершине O.

8. Найти наибольший объем тела, образуемого вращением треугольника с данным периметром $2p$ около одной из его сторон.

9. В пространстве даны четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, не лежащие в одной плоскости. Найти такую точку M_0, чтобы сумма квадратов ее расстояний до точек M_1, M_2, M_3, M_4 имела наименьшую величину. Сравнить эту величину с суммой квадратов ребер тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$ (ср. пример 3 § 179).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 11а

1. В исключительном случае, когда A совпадает с O, величина AM — постоянная; в остальных случаях — переменная.

2. Замкнутый промежуток $(|d-R|,\ d+R)$.

3. Промежуток $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$; концы $\alpha_1=-\frac{\pi}{4}$, $\alpha_2=\frac{\pi}{4}$ не включены.

4. Бесконечный промежуток $(a,\ \infty)$; конец a включен.

5. Замкнутый промежуток $(a;\ a\sqrt{3})$.

6. Для точек $x=3{,}5$ и $x=3$ данный промежуток окрестностью не служит; для точки $x=2{,}5$ служит.

7. Промежуток $(-10;\ -6)$.

§ 13а

1. Радиус R есть функция площади S; область изменения аргумента — промежуток $(0,\ \infty)$.

2. Величина n не является функцией аргумента τ, так как каждому значению τ соответствует множество значений n (например, значению $\tau=6$ соответствует не только значение $n=12$, но также $n=32$ (делители 1, 2, 4, 8, 16, 32) или $n=243$ (делители 1, 3, 9, 27, 81, 243) и т. д.

3. Площадь S есть функция длины x. Эту функцию можно выразить формулой

$$S=x\,(30-x). \tag{1}$$

Область изменения аргумента — промежуток $(15;\ 30)$.

4. Величина x является функцией площади S; эту функцию можно выразить формулой

$$x=15+\sqrt{225-S} \qquad (0\leqslant S\leqslant 225) \tag{2}$$

[решить уравнение (1) и взять больший корень]. Из формулы (2) видно, что область изменения аргумента S есть замкнутый промежуток $(0;\ 225)$.

5. Не является, так как при одном и том же периметре площадь треугольника может иметь бесчисленное множество различных значений.

6. S есть функция от p $\left[S=\left(\frac{p}{4}\right)^2\right]$.

7. Область изменения аргумента — замкнутый промежуток

$$(a-\sqrt{a^2-b^2},\ \ a+\sqrt{a^2-b^2}).$$

8. Величины r_2 и r_2-r_1 переменные; величина r_2+r_1 постоянная.

§ 14a

1. Зависимость τ от n представляется следующей таблицей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
τ	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

График изображен на рис. 244.

Замечание. Значения τ можно вычислять по формуле

$$\tau = (l_1+1)(l_2+1)\ldots(l_k+1),$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — показатели степени, с которыми простые множители

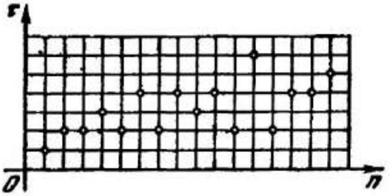


Рис. 244.

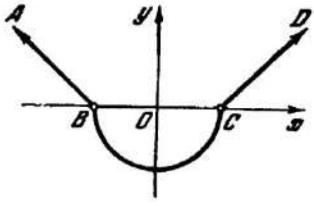


Рис. 245.

числа n входят в его разложение на простые множители. Например, разложение числа 12 есть $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Здесь $l_1 = 2$, $l_2 = 1$; значит,

$$\tau = (l_1+1)(l_2+1) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Простой же формулы, которая выражала бы τ непосредственно через n, не существует.

2. $y = 2 - \sqrt{25 - x^2} \qquad (-5 \leqslant x \leqslant 5)$.

3. $y = \begin{cases} -2 - x & \text{при } x \leqslant 0, \\ -2 + x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ или $y = \begin{cases} -2 - x & \text{при } x < 0, \\ -2 + x & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

4. Величина y — неявная функция от x.
5. См. рис. 245, где $OC = a$.
6.

x (м)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
P (т)	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,75	4,5	5,25	6,0
Точки графика	0	A_1	A_2	A_3	A	B_1	B_2	B_3	B	C_1	C_2	C_3	C

График — на рис. 246. Аналитическое выражение:

$$P=\begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{при } 0\leqslant x<2, \\ x-1 & \text{при } 2\leqslant x<4, \\ 1{,}5x-3 & \text{при } 4\leqslant x\leqslant 6. \end{cases}$$

7. Зависимость h от t представляется таблицей:

t (*сек*)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
h (*см*)	125	120	105	80	45	0	45	80	105	120	125	120	105	80	45	0

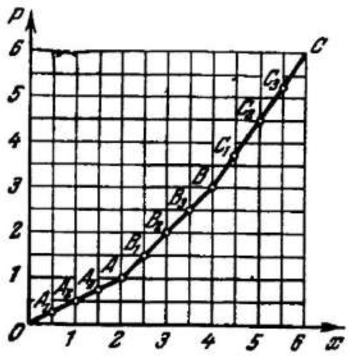


Рис. 246.

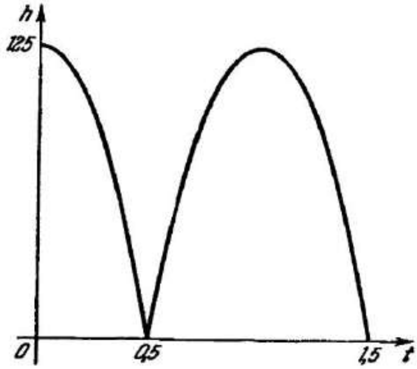


Рис. 247.

График — на рис. 247. **Аналитически:**

$$h=\begin{cases} 125-500t^2 & \text{при } \quad 0\leqslant t\leqslant 0{,}5, \\ 500\,[(t-0{,}5)-(t-0{,}5)^2] & \text{при } \; 0{,}5<t\leqslant 1{,}5. \end{cases} \tag{1}$$

Пояснение. Шарик достигает земли через $t=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}=0{,}5$ *сек*. До этого момента его высота h выражается через t формулой

$$h=h_0-\frac{1}{2}gt^2=125-500t^2.$$

Так как удар упругий, то, достигнув земли, шарик подскакивает вверх с начальной скоростью v_0, достигнутой в момент падения, т. е. со скоростью $v_0=\sqrt{2gh_0}=500$ *см/сек*.

Пусть t_1 — время, отсчитываемое с момента удара; тогда до следующего удара высота h выражается формулой

$$h=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=500\,(t_1-t_1^2). \tag{2}$$

Следующий же удар происходит в момент, когда $h=0$, т. е. при $t_1=1$. А так как $t_1=t-0{,}5$, то формула (2) принимает вид

$$h=500\,[(t-0{,}5)-(t-0{,}5)^2]$$

и имеет место с момента $t=0{,}5$ до $t=1+0{,}5=1{,}5$.

8.

$$h=\begin{cases} 125-500\,t^2 & \text{при}\quad 0\leqslant t<0{,}5, \\ 500\,[(t-0{,}5)-(t-0{,}5)^2] & \text{при}\ 0{,}5\leqslant t<1{,}5, \\ 500\,[(t-1{,}5)-(t-1{,}5)^2] & \text{при}\ 1{,}5\leqslant t\leqslant 2{,}5. \end{cases}$$

§ 15а

1. Область существования функции $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

2. Область существования функции состоит из двух промежутков $x\leqslant-\sqrt{3}$ и $x\geqslant\sqrt{3}$; точки $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ входят в область существования функции.

3. Данная формула не может представлять y как функцию x, так как ни при каком значении величины x выражение $\sqrt{-x^2-3}$ не имеет смысла.

4. $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$.

Замечание. В отличие от задачи 1 точки $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ не входят в область существования функции, ибо при этих значениях знаменатель данного выражения обращается в нуль.

5. Область существования — промежуток $(-\infty,\ \infty)$, лишенный точки $x=-2$.

6. Область существования — промежуток $(-\infty,\ \infty)$.

7. Область существования — замкнутый промежуток $(-1;\ 5)$.

Пояснение. При $x<-1$ формула не имеет смысла, так как теряет смысл первый ее член; при $x>5$ формула не имеет смысла, так как теряет смысл второй член.

8. $x\geqslant5$. 9. Формула не имеет смысла ни при каких значениях x, ибо первый член имеет смысл только при $x\leqslant1$, а второй — только при $x\geqslant5$.

10. Область существования — промежуток $(-\infty,\ \infty)$, лишенный точек $x=0$ и $x=2$.

11. $x>15$. 12. $x<15$. 13. $3<x<5$.

14. Формула не имеет смысла, так как первый член имеет смысл только при $x<3$, а второй — только при $x>5$.

15. Область существования — промежуток $(3;\ 5)$, лишенный концов.

Замечание. Сопоставляя с результатом предыдущей задачи, мы видим, что выражения

$$\lg\frac{3-x}{x-5}\quad \text{и}\quad \lg(3-x)-\lg(x-5)$$

нельзя приравнять между собой, ибо второе не имеет смысла ни при каком значении x, тогда как первое имеет смысл в промежутке $(3;\ 5)$.

Между тем из алгебры известно, что

$$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b. \tag{A}$$

На первый взгляд может показаться, что здесь налицо противоречие На самом деле противоречия нет, так как в формуле (А) предполагается что оба числа a и b — положительны, тогда как величины $3-x$ и $x-5$ не могут быть положительными обе сразу. Точно так же нельзя применить формулу (А) к случаю $a=-12$, $b=-7$ и т. п.

16. Область существования — промежуток $(-\infty, \infty)$.

17. Область существования — совокупность замкнутых промежутков $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right)$, $\left(-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right)$ и т. д.

18. Промежуток $(-\infty, \infty)$, лишенный точек $x = k\pi$ и $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 16а

1. $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$. 2. $F(0) > F(1)$. 3. $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $\frac{5}{13}$. 5. $b + a$. 6. $f(x+2) = x^2 + 4x + 5$. 7. $\frac{f(a+3)}{f(a)} = 8$. 8. $f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. 9. $f(t) = \frac{t}{1+t}$, $f(t-1) = \frac{t-1}{t}$. 10. $\frac{f(a) - f(b)}{1 + f(a) f(b)} = \frac{3a - 3b}{2ab + a + b + 5}$. 11. $\frac{f(a) - f(b)}{1 + f(a) f(b)} = \operatorname{tg}(a - b)$. 12. а) x; б) $\frac{x+y}{(x+1)(y-1)}$; в) $\frac{x+y}{xy+1}$.

§ 20а

1. С течением времени подъем тела сменяется падением; поэтому h не является монотонной функцией от t.

2. Наибольшей своей высоты тело достигает в момент $t = \frac{1}{2} T$, а затем оно падает. Поэтому в промежутке $\left(0, \frac{3}{4} T\right)$ функция h от t не монотонна: в течение промежутка $\left(0, \frac{1}{2} T\right)$ она возрастает, а в течение промежутка $\left(\frac{1}{2} T, \frac{3}{4} T\right)$ убывает.

3. В промежутке $\left(0, \frac{3}{7} T\right)$ функция монотонна (она возрастает) (ср. решение задачи 2).

4. Не является, так как на концах промежутка $(0, l)$, в котором изменяется x по условию задачи, площадь обращается в нуль; значит, вблизи от точки $x = 0$ она возрастает, а вблизи от $x = l$ убывает.

5. Функция, обратная функции S, выражает зависимость стороны прямоугольника от его площади. Но прямоугольник имеет две стороны (в общем случае не равные друг другу). Значит, обратная функция не однозначна (а двузначна).

Аналитически прямая функция выражается формулой

$$S = x(l - x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{1}$$

а обратная — формулой

$$x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4S}}{2} \qquad \left(0 \leqslant S \leqslant \frac{l^2}{4}\right). \tag{2}$$

Область изменения аргумента S обратной функции есть промежуток $\left(0, \frac{l^2}{4}\right)$. Область существования функции, заданной формулой (2), совпадает с областью изменения аргумента; за пределами промежутка $\left(0, \frac{l^2}{4}\right)$ формула (2) не имеет смысла.

6. Не может, так как если значение функции во внутренней точке x_1 промежутка (a, b) будет больше, чем $f(a)$, то значение $f(b)$ по условию будет меньше, чем $f(x_1)$. Согласно определениям 1 и 2 § 18 функция $f(x)$ в промежутке (a, b) не является ни возрастающей, ни убывающей (проверьте графически).

7. Графики изображены на рис. 248 (A_1B_1 — прямая функция, A_2B_2 — обратная функция). Обе функции однозначны. Обратная функция выражается формулой

$$y=2+\sqrt{4+x} \qquad (-4\leqslant x\leqslant 0).$$

Область изменения ее аргумента — промежуток $(-4; 0)$.

8. Графики изображены на рис. 249 (OA_1 — прямая функция, OA_2 — обратная), обе функции однозначны. Обратная функция выражается формулой

$$y=2-\sqrt{4+x} \qquad (-4\leqslant x\leqslant 0).$$

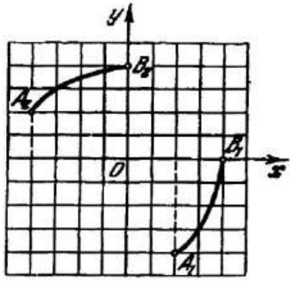


Рис. 248.

Обе функции монотонны (обе убывающие).

9. Данная функция однозначна, но не монотонна в промежутке (0; 4). Последний можно разбить на два промежутка (0; 2) и (2; 4), в каждом из

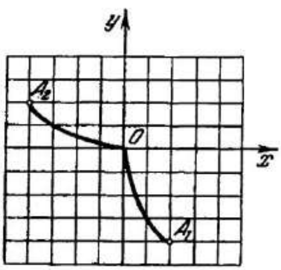


Рис. 249.

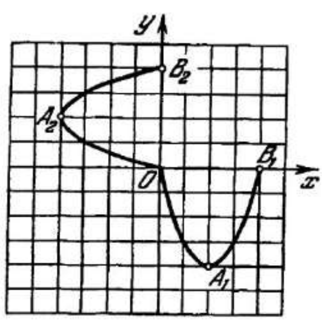


Рис. 250.

которых функция $y=x^2-4x$ монотонна (ср. задачи 7 и 8). Обратная функция двузначна и представляется формулой

$$y=2\pm\sqrt{4+x} \qquad (-4\leqslant x\leqslant 0).$$

Графики прямой и обратной функций (OA_1B_1 и OA_2B_2 на рис. 250) получаются совмещением графиков рис. 248 и 249.

10. Графиком данной функции является дуга A_1OB_1 (рис. 251); обратная функция

$$y=\arcsin x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

изображается дугой A_2OB_2. Данная функция возрастающая, поэтому обратная функция однозначна.

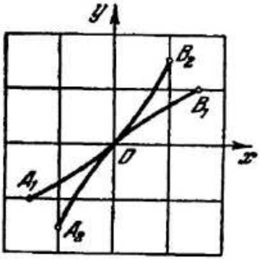


Рис. 251.

11. Функция $y=\cos x$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (дуга $A_1C_1B_1$ на рис. 252) не монотонна: в промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ она возрастает, а в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ убывает. Поэтому обратная функция ($A_2C_2B_2$) двузначна; она выражается формулой

$$y=\pm\arccos x \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant 1\right).$$

12. $y=2(x+1) \quad (-\infty<x<\infty)$. **13.** $y=\sqrt[5]{x} \quad (-\infty<x<\infty)$.

14. $y=\log_2 x \quad (0<x<\infty)$. **15.** $y=\pm\sqrt{1+(x-1)^2} \quad (-\infty<x\leqslant 1)$. Эта функция (рис. 253) двузначна, так как прямая функция была немонотонной; в промежутке $(-\infty, -1)$ она возрастала, а в промежутке $(1, \infty)$ убывала.

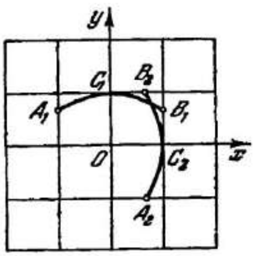


Рис. 252.

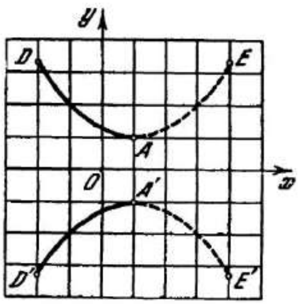


Рис. 253.

Замечание. График обратной функции получается из равносторонней гиперболы $y^2-(x-1)^2=1$, если от каждой из ее ветвей (DAE, $D'A'E'$) оставить лишь ту часть (AD, $A'D'$), которая лежит слева от вершины (A, A').

16. $y=\sqrt[3]{1-x^3} \quad (-\infty<x<\infty)$.

Замечание. Обратная функция в данном случае совпадает с прямой; общий их график (постройте его) симметричен относительно прямой $y=x$.

17. $y=(1-2x)^2$. **18.** $f[\varphi(x)]=1-(1-2x)^2=4(x-x^2)$. Область существования — промежуток $(-\infty, \infty)$.

19. $f[\varphi(x)]=1-2(1-x^2)=2x^2-1$. Область существования — промежуток $(-\infty, \infty)$.

20. $f[\varphi(x)]=x^2-2x, \quad \varphi[f(x)]=x^2-2,$
$\varphi[\varphi(x)]=x-2, \quad f[f(x)]=x^4-2x^2.$

Область существования каждой функции есть промежуток $(-\infty, \infty)$.

21. Находим $\varphi(0)=-1$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=3$, $f[\varphi(0)]=f[-1]=0$, $f[\varphi(1)]=-1$, $f[\varphi(2)]=0$, $f[\varphi(3)]=3$, $f[\varphi(4)]=8$.

Замечание. Такой порядок вычислений часто бывает более рациональным, чем подстановка значений аргумента в формулу для $f[\varphi(x)]$.

22. Область изменения аргумента x есть промежуток $(0, \infty)$ (при отрицательных значениях x формула $u=\sqrt{x}$ не имеет смысла). Зависимость y от x можно представить формулой $y=\frac{(\sqrt{x})^2}{2}$ или формулой $y=\frac{x}{2}$; но при этом надо дополнительно указать область изменения аргумента, т. е. окончательно формула будет иметь вид

$$y=\frac{x}{2} \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

Пояснение. Если переменная x обозначает площадь квадрата, то переменная $u=\sqrt{x}$ выражает сторону квадрата и не может принимать отрицательных значений. Величина y есть половина площади и тоже не может иметь отрицательных значений. Между тем в формуле $y=\frac{x}{2}$, если она рассматривается сама по себе, аргумент x может принимать любые значения.

23. $f[\varphi(x)]=x \qquad (0<x<\infty)$,
$\varphi[f(x)]=x \qquad (-\infty<x<\infty)$,
$\varphi[\varphi(x)]=\lg\lg x \qquad (1<x<\infty)$.

24. $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]=x \qquad (-\infty<x<\infty)$.

25. Промежуток изменения аргумента функции $\varphi(x)$ есть $(-1; 1)$;

$$f[\varphi(x)]=x \qquad (-1<x<1),$$
$$\varphi[f(x)]=x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

§ 22а

1. $f(x)=-\frac{2}{3}x+9$; график — прямая линия, проведенная через точки (9; 3) и (3; 7).

Решение. Имеем $f(x)=ax+b$, где a и b — постоянные (но пока неизвестные) величины (§ 21, п. 1). По условию $f(9)=9a+b=3$, $f(3)=3a+b=7$. Из этой системы уравнений находим $a=-\frac{2}{3}$, $b=9$.

2. $f(0)=9$, $f(1)\approx 8{,}3$, $f(4)\approx 6{,}3$, $f(12)=1$.

3. $f(x)=0{,}7x+7{,}5$, $f(0)=7{,}5$, $f(-1)=6{,}8$, $f(-2)=6{,}1$, $f(-3)=5{,}4$, $f(-4)=4{,}7$.

4. $y=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x+\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}$.

Пояснение. Поступая, как в решении задачи 1, находим

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad b=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}.$$

5. Все графики — параболы (ср. теорему в I, § 66).

6. $f(x)=0{,}1x^2-1{,}05x+4{,}9$.

Решение. Имеем $f(x)=ax^2+bx+c$ (§ 21, п. 4). По условию $f(2)=4a+2b+c=3{,}2$, $f(4)=16a+4b+c=2{,}3$, $f(8)=64a+8b+c=2{,}9$. Отсюда находим $a=0{,}1$, $b=-1{,}05$, $c=4{,}9$. Ср. решение задачи 1.

7. См. рис. 254. 8. См. рис. 255. 9. См. рис. 256. 10. См. рис. 257.

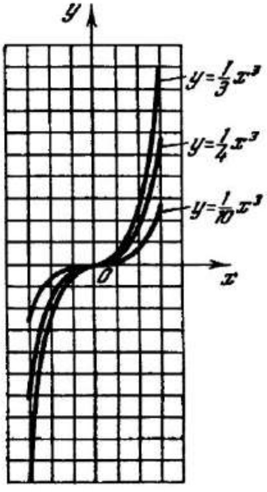


Рис. 254.

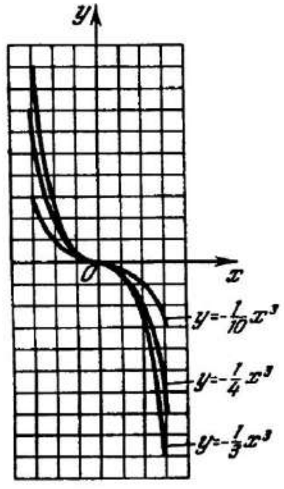


Рис. 255.

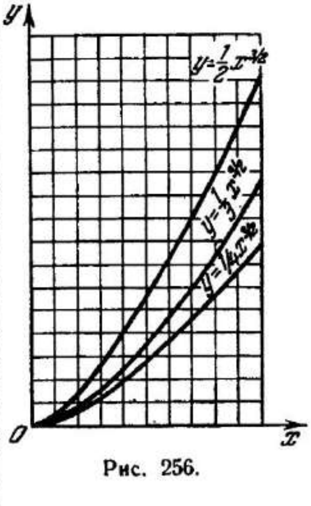


Рис. 256.

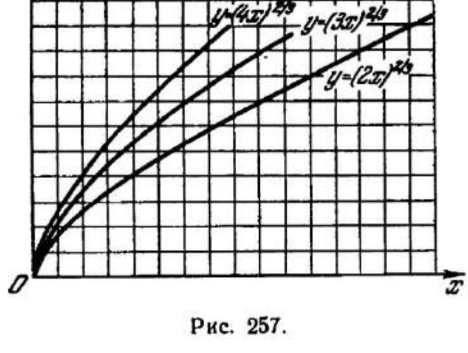


Рис. 257.

11. $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$. Пояснение. Графики уравнений $y = x^3$ (кубическая парабола BOC на рис. 258) и $y = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}$ (прямая DE) имеют три общие точки A_1, A_2, A_3.

12. $x_1 = 1{,}4$ (рис. 259).

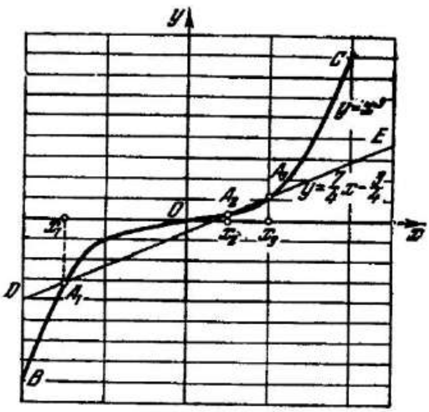


Рис. 258.

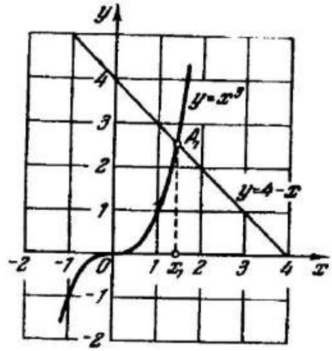


Рис. 259.

§ 24а

1. Графики изображены на рис. 260. Взаимно обратными являются функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$, а также функции $y = 2^{-x}$ и $x = -\log_2 x$.

2. $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = 2{,}32$, $\log_2 6 = 2{,}58$, $\log_2 7 = 2{,}81$.

3. $\log_3 4 = 1{,}26$, $\log_3 5 = 1{,}46$, $\log_3 6 = 1{,}62$, $\log_3 7 = 1{,}77$, $\log_3 8 = 1{,}89$.

4. Данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 4$ (точный корень).

5. Данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (оба корня точные).

6. $x_1 = 0{,}5$ (точный корень), $x_2 = 5$ ($x_2 = 4{,}8$ с точностью до 0,1).

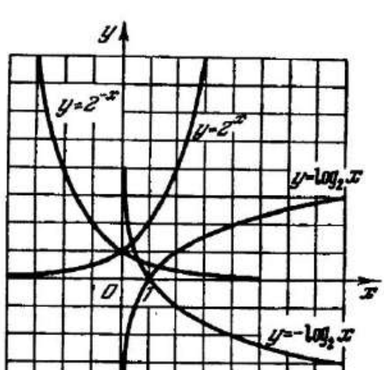


Рис. 260.

§ 32а

1. $y_n = 2n - 1$. **2.** $y_n = n^2$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $N = 2$ (или $N = 3$, или $N = 4$ и т. д.). **5.** $y_n = \frac{4n+1}{n}$, $\lim \frac{4n+1}{n} = 4$. Пояснение. Общий член можно представить в виде $y_n=\frac{4n+1}{n}=4+\frac{1}{n}$. **6.** а) $N=15$; можно также ответить: $N=16$ или $N=17$ и т. д.; б) $N=100$ (или $N=101$, 102 и т. д.); в) $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ $\left(\text{или } N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\ \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+2 \text{ и т. д.}\right)$. **7.** $b=\lim\frac{n}{n+2}=1$. **8.** а) $N=18$ (или $N=19$, 20 и т. д.); б) $N=35$ (или $N=36$, 37 и т. д.); в) $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ $\left(\text{или } \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1,\ \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+2 \text{ и т. д.}\right)$.

9. $0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ -\frac{1}{10}$; $\lim\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$.

10. 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; 1; 0. Последовательность не имеет предела.

11. $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{4},\ \frac{3\pi}{5},\ \frac{4\pi}{6},\ \frac{5\pi}{7},\ \frac{6\pi}{8}$, $\lim\alpha_n=\pi$.

$\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{4},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{2\pi}{6},\ \frac{2\pi}{7},\ \frac{2\pi}{8}$, $\lim\beta_n=0$.

§ 34а

1. 0. **2.** -2. **3.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(1-2\cos^2 x)\sin x=\left(1-2\cos^2\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1$. **5.** 2. **Указание.** Представить числитель в виде $1-\cos^2 x$ (ср. пример 2 § 33).

§ 42а

1. Да. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Нет, так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{1-\alpha}=1$. **5.** Да. **6.** Да, так как $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=3^0-1=0$. **7.** Да, так как $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ (§ 37, пример 8). **8.** Нет, так как при $x\to\infty$ предел функции 3^x не существует $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0\right)$. **9.** Да. **10.** Да, так как величина $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x\to\infty$ (ср. предыдущий вопрос). **11.** Да. **12.** Нет. **13.** Да. **14.** Да, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\lg x=+\infty$ [1]). **15.** Нет (ср. выше вопрос 8). **16.** Нет (как и в предыдущем вопросе). **17.** Да (ср. выше вопрос 8). **18.** Да, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^{-5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}=\infty$. **19.** Нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-3}=0$. **20.** Да.

---

[1]) Заметим, что выражение $\lim\limits_{x\to-\infty}\lg x$ бессмысленно, так как функция $\lg x$ для отрицательных значений x не определена.

§ 44а

1. 1. Пояснение. Можно последовательно применить свойство 5 и (дважды) свойство 1. Но проще сделать так:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{1^2+1}{1}=1.$$

Действительно, функция $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ элементарная; как показывает выкладка, она определена в точке $x=1$. Значит (§ 38), она непрерывна в точке $x=1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$.

2. 2. Пояснение. Свойство 5 неприменимо, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$. Попытка применить свойство 5 дала бы неопределенность $0:0$. Решение можно получить так (ср. § 44, пример 2):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

3. $2a$. **4.** $3a^2$. Пояснение. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=a^2+a^2+a^2$.

5. $2\sqrt{a}$. Указание. Полезно представить числитель в виде $(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2$.

6. 2. Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos\frac{x}{2}=2$.

7. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Указание. Попытавшись применить свойство 5, получаем неопределенность $0:0$. Тогда представляем $\cos 2x$ в виде $\cos^2 x-\sin^2 x=$ $=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$. После упрощения применяем свойство 4.

8. ∞. Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x^2-2x}=\frac{2}{0}=\infty$.

9. 0. Пояснение. Применив последовательно свойства 3 и 1, получаем $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2^x+1)\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2^x+1)\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}2^x+1\right)\times$ $\times\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=(0+1)\,0=0$. К частному $\frac{2^x+1}{x}$ при $x\to-\infty$ свойство 5 (где по условию v должно иметь *конечный* предел), строго говоря, неприменимо. Однако если ввести условное равенство $\frac{1}{\infty}=0$ (ср. § 44, замечание 2), то, применив свойство 5, получим верный результат

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(2^x+1)}{\lim\limits_{x\to-\infty}x}=\frac{1}{(-\infty)}=0.$$

10. $\frac{2}{3}$. Пояснение. Попытка непосредственно применить свойство 5 приводит к выражению $\frac{\infty}{\infty}$. Оно неопределенно (заменить его числом 1 нельзя!). Но если предварительно разделить числитель и знаменатель на x, то условия свойства 5 будут соблюдены. Выкладка идет так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\frac{\left(2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}{\left(3-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{3}.$$

11. 0. Указание. Можно разделить числитель и знаменатель на x^3, после чего применить свойство 5.

12. $\frac{2}{3}$. Замечание. Если в числителе и знаменателе оставить только старшие члены ($6x^3$ и $9x^3$), а остальные отбросить, то результат будет тем же. То же в задачах 10, 11. Законность этого приема в случае, когда в числителе и знаменателе стоят любые многочлены, доказывается с помощью приема, разъясненного в примерах 10 и 11. **13.** 2 (ср. замечание к задаче 12).

14. 0,5. Решение. $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$; применять свойство 5 пока нельзя. Но, разделив числитель и знаменатель на n, будем иметь $\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=0{,}5.$

15. 0. Указание. Поступив, как в задаче 14, получим $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Знаменатель стремится к бесконечности, так как оба его члена, стремясь к бесконечности, *имеют одинаковые знаки* (положительные).

Сумма двух бесконечно больших величин противоположных знаков может стремиться к конечному пределу (как в задаче 14), в частности к нулю (как выражение $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$), но может стремиться и к бесконечности или не иметь предела.

16. $+\infty$. Указание. После преобразования, объясненного в задаче 14, разделить числитель и знаменатель на x^2.

17. 1. **18.** $\frac{1}{4a\sqrt{a+b}}$. **19.** а) 2; б) -2. Пояснение. При $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, при $x<0$ имеем $\sqrt{x^2}=-x$. Следовательно,

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to-0}\left(\frac{-x\sqrt{4+x}}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-0}(-\sqrt{4+x})=-2.$$

20. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Пояснение. Данную функцию можно представить в виде $\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$. Учесть пояснение к предыдущей задаче.

Другой способ: представить данную функцию в виде

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$$

§ 50а

1. $\ln 1000 \approx 6.9078$. 2. $\ln 0,01 \approx -4,6052$. 3. $\ln \sqrt[3]{10} \approx 0,7675$.

12. e^2. Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2=$ $=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$ (вследствие непрерывности квадратичной функции).

13. e^3. Указание. Положить $n=3m$. 14. $\frac{1}{e}$. Указание. Положить $n=-m$. 15. $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Указание. Положить $n=-3m$; далее сравнить решение задачи 12. 16. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Указание. Положить $x=-2y$.

17. e^{-4}. Указание. Положить $x=-\frac{1}{4}z$; представить $(1+z)^{-\frac{4}{z}-1}$ в виде $(1+z)^{-\frac{4}{z}}(1+z)^{-1}$. 18. e^{-k}.

§ 52а

1. Да. 2. Да. 3. Нет, так как

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha^2-3\alpha}{2\alpha^2+5\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

4. Да, так как $\ln(1+\alpha^2)\approx\alpha^2$ и $\operatorname{tg}^2\alpha\approx\alpha^2$. 5. Нет, так как $\ln(1-\alpha^2)\approx-\alpha^2$. 6. Нет. 10. 1. 11. 0. 12. ∞. 13. 1. Указание. Положим $\arcsin\alpha=\beta$; тогда $\alpha=\sin\beta$. 14. 4. Решение. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=4.$$ 15. $\frac{1}{2}$. 16. π.

§ 53а

1. $\frac{1}{2}$. 2. 2. 3. 1. 4. 4. 5. 2. 6. 3. 7. 2. 8. 2. 9. 2. 10. 3. 11. 1 (главная часть $\operatorname{tg}\alpha$). 12. а) 3; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$.

13. $\frac{1}{2}$. Пояснение. Хорда $=2R\sin\frac{\alpha}{2}$; стрелка $=R(1-\cos\alpha)$, где α — центральный угол, опирающийся на рассматриваемую дугу. Величина

$R\sin\frac{\alpha}{2}$ имеет первый порядок, величина $R(1-\cos\alpha)$ — второй (относительно α).

14. 2. Пояснение. Обозначим через n число сторон многоугольника. Тогда рассматриваемая разность есть

$$2Rn\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)=2\pi R\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha},\quad \text{где}\quad \alpha=\frac{\pi}{n}.$$

15. 2. **16.** ∞. Пояснение. Главная часть числителя $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$. Знаменатель $\sin 3x\approx 3x$. **17.** $-\frac{1}{3}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** ∞. Указание. Можно воспользоваться формулой (4) § 52. **20.** $\frac{1}{\lg e}\approx 2{,}3026$. Указание. Можно положить $10^x-1=\alpha$ и воспользоваться формулой (1) § 50.

§ 63а

1. $4x-12x^3$. **2.** $4x-6$. **3.** $96x+60$. **4.** $1-x+x^2-x^3$. **5.** $2x-10$. **6.** $6t^5-24t^3+24t$. **7.** 0. **8.** $2a$. **9.** $7t^6-10t^4+3t^2$. **10.** $3{,}4\cos t$. **11.** 6. **12.** $f'(-\pi)=-3$. **13.** a^2. **14.** 0. **15.** $\frac{\pi}{4}$, 0, $-\frac{\pi}{4}$. Пояснение. Находим производную функцию $y'=1-\frac{x}{2}$; в точке $x=0$ имеем $y'(0)=1$; следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_0=1$, откуда $\alpha_0=\frac{\pi}{4}$.

16. Данная линия (синусоида) пересекает ось абсцисс в точках $x=2k\pi$ (k — целое число) под углом $\frac{\pi}{4}$, а также в точках $x=(2k+1)\pi$ (k — целое число) под углом $-\frac{\pi}{4}$.

17. $y=\frac{1}{2}x-\frac{p}{8}$. Пояснение. Угловой коэффициент касательной равен значению производной $y'=\left(\frac{x^2}{2p}\right)'=\frac{x}{p}$ в точке $x_0=\frac{p}{2}$. Прямая, проходящая через точку $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{8}\right)$ и имеющая угловой коэффициент $\frac{1}{2}$, представляется уравнением $y-\frac{p}{8}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$ (I § 38). **18.** $y=2x-4\pi$.

§ 64а

1. $\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{3}-2x$. **2.** $\frac{1}{3}+\frac{4}{x^3}$. **3.** $6x+\frac{6}{x^3}$. **4.** $-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$. **5.** $-\frac{1}{2u^3}+\frac{3}{u^2}$. **6.** $1-\sqrt{\frac{a}{x}}$. **7.** $\frac{2}{3x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $-4\frac{1}{8}$. **10.** -9000. Указание. Раскрыть скобки в числителе и представить дробь в виде суммы трех дробей.

§ 72а

1. $6x\,\Delta x$. 2. $6x\,\Delta x$. 3. $(64x^3-9x^2+\sqrt{2})\,\Delta x$. 4. $\left(2ax-\frac{3b}{x^4}\right)\Delta x$. 5. $\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
6. $\frac{a\Delta x}{2\sqrt{x}}-\frac{b\Delta x}{2\sqrt{x^3}}$. 7. $\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{3}-2x\right)\Delta x$. 8. $a\,\Delta x$. 9. $2(x-a)\,\Delta x$.
10. $mx(3ax+2b)\,\Delta x$. 11. 0. 12. 1,20 *см*². Пояснение. Имеем $S=6x^2$, $\Delta S=6\,[(x+\Delta x)^2-x^2]$. При $x=10{,}00$ и $\Delta x=0{,}01$ получаем

$$\Delta S=6\,(10{,}01^2-10{,}00^2)=6\cdot 0{,}2001=1{,}2006\approx 1{,}20\ (\text{см}^2).$$

С помощью дифференцирования:

$$dS=d\,(6x^2)=12x\,\Delta x=12\cdot 10\cdot 0{,}01=1{,}20\ (\text{см}^2).$$

13. На 0,1%. Решение. Зависимость объема v куба от его стороны x выражается формулой $v=x^3$. Увеличение Δv объема куба приближенно выражается формулой $\Delta v\approx dv=3x^2\Delta x$. В процентном отношении это увеличение составляет $100\frac{\Delta v}{v}\approx 100\frac{3x^2\,\Delta x}{x^3}=300\frac{\Delta x}{x}$. По условию имеем $300\frac{\Delta x}{x}\approx 0{,}3$. А искомое процентное отношение представляется выражением $100\frac{\Delta x}{x}$; следовательно, оно составляет 0,1%.

14. На 0,15%. Указание. В процентном отношении удлинение радиуса r составляет $100\frac{\Delta r}{r}$, а увеличение площади $100\frac{\Delta s}{s}$ (см. решение задачи 13).

§ 75а

1. $dy=d\,(13x^2+8x)^{-2}=-2\,(13x^2+8x)^{-3}\,d\,(13x^2+8x)=-2\,(13x^2+8x)^{-3}\times$ $\times(26x+8)\,dx$, $y'=-\frac{4\,(13x+4)}{(13x^2+8x)^3}$.

2. $dy=d\,(4x^3-0{,}6x)^3=3\,(4x^3-0{,}6x)^2\,(12x^2-0{,}6)\,dx$,
$y'=3x^2\,(4x^2-0{,}6)^2\,(12x^2-0{,}6)$.

3. $dy=-4x\,(a^2-x^2)\,dx$, $y'=-4x\,(a^2-x^2)$.

4. $ds=d\sqrt{6t}=\frac{d\,(6t)}{2\sqrt{6t}}=\sqrt{\frac{3}{2t}}\,dt$, $y'=\sqrt{\frac{3}{2t}}$.

5. $dz=\frac{(u+6)\,du}{\sqrt{u^2+12u}}$, $z'_u=\frac{u+6}{\sqrt{u^2+12u}}$. 6. $dx=\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^4-1}}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{2t^3}{\sqrt{t^4-1}}$.

7. $dx=\frac{a}{b}\cos\frac{t}{b}\,dt$, $\frac{dx}{dt}=\frac{a}{b}\cos\frac{t}{b}$. 8. $dx=-2\frac{a}{b}\cos\frac{t}{b}\sin\frac{t}{b}\,dt$, $\frac{dx}{dt}=-\frac{a}{b}\sin\frac{2t}{b}$. 9. $-(a^4-t^4)^{-3/4}t^3\,dt$. 10. $-az\,(a^2+z^2)^{-3/2}\,dz$.

11. $\frac{dx}{\sqrt{1+4x}\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}$. 12. $-\frac{3}{2a}\sin\frac{2x}{a}\left(\cos\frac{x}{a}+\sin\frac{x}{a}\right)dx$.

13. $d\frac{1}{(1+\cos 2\varphi)^3}=d\frac{1}{8\cos^6\varphi}=\frac{3\sin\varphi\,d\varphi}{4\cos^7\varphi}$. 14. $d\left[3\cos\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2\right]=$ $=-3\sin\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2 d\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2=-\frac{6\varphi}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2 d\varphi$. 15. $(y-a)\,(2ay-y^2)^{-3/2}\,dy$.

16. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2ax+b^2}}(x^2+2ax+b^2)'=\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax+b^2}}$. 17. $f'(x)=$ $=\sqrt{2p}\,(x^{3/2})'=\dfrac{3}{2}\sqrt{2px}$. 18. $\varphi'(x)=\dfrac{d}{dx}[3(a^2+x^2)^{-3}]=-9(a^2+x^2)^{-4}\times$ $\times\dfrac{d}{dx}(a^2+x^2)=\dfrac{-18x}{(a^2+x^2)^4}$. 19. $F'(t)=\dfrac{d}{dt}[(1+\sqrt{t})^{-2}]=-2(1+\sqrt{t})^{-3}\times$ $\times\dfrac{d}{dt}(1+\sqrt{t})=\dfrac{-1}{(1+\sqrt{t})^3\sqrt{t}}$. 20. $f'(x)=-2\sin 8x$.

21. $$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{d}{dt}\sin^2\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin t\right)=$$
$$=\frac{1-\sin t}{4\sqrt{\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}}.$$ 22. $\dfrac{dr}{d\varphi}=\dfrac{1}{2}\cos\varphi$. 23. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\cos x+2\sin x}{2\sqrt{5}\sqrt{3\sin x-2\cos x}}$.

24. $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. 25. $\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$.

§ 77a

1. $d[(2x+3)(x^2+3x-1)]=(2x+3)\,d(x^2+3x-1)+(x^2+3x-1)\,d(2x+3)=$ $=(6x^2+18x+7)\,dx$. 2. $2(x+2)(2x^2+8x+1)\,dx$. 3. $d[(3t-1)^2(t-1)^3]=$ $=(3t-1)^2\,d(t-1)^3+(t-1)^3\,d(3t-1)^2=3(3t-1)^2(t-1)^2\,d(t-1)+2(t-1)^3\times$ $\times(3t-1)\,d(3t-1)=3(3t-1)(t-1)^2(5t-3)\,dt$. 4. $\dfrac{2y^2+1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$. 5. $\dfrac{2u^2-u+1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$.

6. $$d\frac{\sqrt{y+a}}{y}=\frac{y\,d\sqrt{y+a}-\sqrt{y+a}\,dy}{y^2}=\frac{1}{y^2}\left[y\frac{d(y+a)}{2\sqrt{y+a}}-\sqrt{y+a}\,dy\right]=$$
$$=\frac{1}{y^2}\left[\frac{y\,dy}{2\sqrt{y+a}}-\sqrt{y+a}\,dy\right]=-\frac{(y+2a)\,dy}{2y^2\sqrt{y+a}}.$$ 7. $a^2(a^2+y^2)^{-3/2}\,dy$.

8. $$d\frac{\sin^3 2t}{t}=\frac{t\,d\sin^3 2t-\sin^3 2t\,dt}{t^2}=\frac{1}{t^2}(3t\sin^2 2t\,d\sin 2t-\sin^3 2t\,dt)=$$
$$=\frac{1}{t^2}\left(6t\sin^2 2t\cos 2t-\sin^3 2t\right)dt=\frac{\sin^2 2t}{t^2}(6t\cos 2t-\sin 2t)\,dt.$$

9. $\left(\sin 2x\cos^2\dfrac{x}{2}+2x\cos 2x\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}x\sin 2x\sin x\right)dx$. 10. $\left[\dfrac{x^3}{(1+x)^2}\right]'=$ $=\dfrac{(1+x)^2 3x^2-x^3 2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{3x^2(1+x)-2x^3}{(1+x)^3}=\dfrac{x^2(3+x)}{(1+x)^3}$. 11. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3}=$ $=\dfrac{(x+2)^3 2(x+1)-(x+1)^2 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=\dfrac{2(x+1)(x+2)-3(x+1)^2}{(x+2)^4}=\dfrac{1-x^2}{(x+2)^4}$.

12. $-\dfrac{2a}{(x-a)^2}$. 13. $\dfrac{a^2-4x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^7}}$. 14. $\dfrac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$. 15. $2a^6t\,(a^4+t^4)^{-3/2}$.

16. $\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 17. $\left(\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x\,(x\sin x)'-x\sin x\,(\cos^2 x)'}{\cos^4 x}=$

$$=\frac{\cos^3 x\,(x\cos x+\sin x)+2x\sin^2 x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{\cos x\sin x+x\,(1+\sin^2 x)}{\cos^3 x}.$$ **18.** 0.

19. $\frac{4}{3}a$.

§ 78а

1. $\frac{2}{\cos^2(2x+3)}=2\sec^2(2x+3)$. **2.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$. **3.** $\operatorname{tg}2\varphi\sqrt{\sec 2\varphi}$.
4. $\frac{2}{3}\sec^2\frac{2t+1}{3}=\frac{2}{3\cos^2\frac{2t+1}{3}}$. **5.** $2\operatorname{tg}^2 2x$. **6.** $2\sin^2\frac{t}{2}$. **7.** $\operatorname{cosec}\varphi\,(1-\varphi\operatorname{ctg}\varphi)$.
8. $\frac{\sec 2x\,(2x\operatorname{tg}2x-1)}{x^2}$. **9.** $\frac{3x\,(1+\operatorname{tg}^2 3x)-\operatorname{tg}3x}{x^2}$. **10.** $\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{1+2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}}$.
11. $6x\operatorname{tg}^2 x^2\sec^2 x^2$. **12.** $-\frac{2}{3}x\,(1+x^2)^{-2/3}\operatorname{cosec}^2(1+x^2)^{1/3}$. **13.** $\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$.
14. $-6\sec^2 6x$. Замечание. Данная в условии задачи функция может быть преобразована к виду $-\operatorname{tg}6x$.

§ 79а

1. $\frac{M\,dx}{x}$. Замечание. Так как $\lg 2x=\lg x+\lg 2$, то функции $\lg 2x$ и $\lg x$ разнятся друг от друга на постоянную величину; поэтому их дифференциалы тождественны. **2.** $\frac{M\,dx}{x}$. **3.** $\frac{dx}{x}$. **4.** $\frac{dx}{x}$. **5.** $\frac{a\,dx}{ax+b}$.
6. $\frac{2\,dx}{(2x-1)\ln 3}$. **7.** $\operatorname{ctg}x\,dx$. **8.** $\frac{dx}{\sin x}$. **9.** $\frac{3}{x}$. **10.** $\frac{3(\ln x)^2}{x}$. **11.** $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.
12. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. **13.** $\frac{2M\,(3x+2)}{3x^2+4x-7}$. **14.** $-\operatorname{tg}x$. **15.** $\frac{1}{\cos x}$ $(=\sec x)$.
16. $$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x(x+a)}}.$$ **17.** $\frac{dx}{x\ln x}$. **18.** $\ln x$.
19. $$\frac{d}{dx}(x^2\log_3 x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\ln x}{\ln 3}\right)=\frac{2x\ln x+x}{\ln 3}=\frac{2x\lg x+Mx}{\lg 3}.$$
20. $\frac{x\ln x-x+1}{x(\ln x)^2}\ln 2=\frac{x\lg x-M(x-1)}{x(\lg x)^2}\lg 2$. **21.** $3x^2\ln x$. **22.** 2,62849.

§ 80а

1. $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$. **2.** $5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. **3.** $\frac{2+x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$.
4. $-\frac{a}{x^2-a^2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. **5.** $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$.
6. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$.

§ 81а

1. $de^{(3x+5)^2}=e^{(3x+5)^2}d(3x+5)^2=6(3x+5)e^{(3x+5)^2}dx$.

2. $4(e^{2x}-1)e^{2x}dx$. 3. $d\ln\frac{e^x}{1+e^x}=d[\ln e^x-\ln(1+e^x)]=d[x-\ln(1+e^x)]=$ $=\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\frac{dx}{1+e^x}$.

4. $d\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{(e^t+e^{-t})\,d(e^t-e^{-t})-(e^t-e^{-t})\,d(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{4dt}{(e^t+e^{-t})^2}$.

5. $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\frac{x}{a}-\sin\frac{x}{a}\right)dx$. 6. $-2e^{-x}\sin x\,dx$. 7. $d\ln(e^{-x}+xe^{-x})=$ $=d\ln[e^{-x}(1+x)]=d[\ln e^{-x}+\ln(1+x)]=d[-x+\ln(1+x)]=-\frac{x\,dx}{1+x}$.

8. $0{,}4e^{0,4x}$. 9. $3^x\ln 3$. 10. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^x}\right)=\frac{d}{dx}(2^{-x})=-2^{-x}\ln 2$. 11. $10^x(1+x\ln 10)$.

12. $e^{2x}-e^{-2x}$. 13. $\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$. 14. $e^{\sin x}\cos x$. 15. $6xe^{3x^2+5}$.

16. $\frac{d}{dx}(e^{ax}-e^{-ax})^2=\frac{d}{dx}(e^{2ax}-2+e^{-2ax})=2a(e^{2ax}-e^{-2ax})$. 17. 45°. 18. -1.

§ 83а

1. $\frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$. 3. $\frac{6}{9x^2+4}$. 4. $\frac{1}{1+x^2}$.

Замечание. Данная функция разрывна при $x=-1$. В остальных точках ее производная совпадает с производной $(\operatorname{arctg} x)$. Совпадение вызвано тем, что в каждом из промежутков $(-\infty;\ -1)$, $(-1,\ \infty)$ разность $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}-$ $-\operatorname{arctg} x$ постоянна: она равна $\frac{3\pi}{4}$ при $-\infty<x<-1$ и $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ при $-1<x<\infty$. Действительно, полагая $\operatorname{arctg} x=\alpha$, имеем

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right).$$

При $-\infty<x<-1$ угол α меняется в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, значит, $\alpha+\frac{3\pi}{4}$ не выходит из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}=$ $=\alpha+\frac{3\pi}{4}=\operatorname{arctg} x+\frac{3\pi}{4}$. Если же $-1<x<\infty$, то из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ не выходит угол $\alpha-\frac{\pi}{4}$. В этом случае $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}=\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}$. 5. $\frac{1}{1+x^2}$.

Замечание. Данная функция разнится от $\operatorname{arctg} x$ на постоянную в каждом из промежутков $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$. Действительно, полагая $\operatorname{arctg} x=\alpha$, имеем

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=-1:\frac{2x}{1-x^2}=-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда заключаем, что величина $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)$ равна $2\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}$ при $-\infty<x<0$ и $2\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}$ при $0<x<\infty$ (ср. задачу 4).

6. $\frac{1}{1+x^2}$. 7. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 8. $\sqrt{a^2-x^2}$. 9. $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}=$
$=\frac{4(3\cos x+5)}{16\sin^2 x+25\cos^2 x+30\cos x+9}=\frac{4(3\cos x+5)}{(3\cos x+5)^2}=\frac{4}{3\cos x+5}$. 10. $\arcsin x$.
11. $x\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$. 12. $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$. 13. $\frac{\sqrt{ab}}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$. 14. $\frac{1}{1-\sin^4 x}$.
15. $d\operatorname{arcsec}x=\frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. Пояснение. $d\operatorname{arcsec}x=d\arccos\left(\frac{1}{x}\right)=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\left(-\frac{dx}{x^2}\right)=\frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

16. $d\operatorname{arccosec}x=-\frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (ср. пояснение к задаче 15).

§ 86а

1. Дуга параболы $y-1=-(x+1)^2$, проектирующаяся на ось Ox отрезком $(-7;5)$. 2. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{b}{a}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 3. Гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 4. Равностороннюю гиперболу $x^2-y^2=a^2$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$. 5. Окружность $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+$ $+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{\pi}{6}$, $\alpha_3=\frac{\pi}{2}$. 6. $\pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}$. 7. Угловые коэффициенты касательных в точках $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ будут равны $1-\sqrt{2}$ и 1. Касательная в точке $\varphi=\pi$ существует; она совпадает с осью Ox. Пояснение. Параметрические уравнения кардиоиды суть

$$x=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\ y=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

Из них находим

$$x'=-a(\sin\varphi+\sin 2\varphi),$$
$$y'=a(\cos\varphi+\cos 2\varphi).$$

Угловые коэффициенты касательных в точках $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ находятся по формуле $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'}{x'}$. Для точки $\varphi=\pi$ эта формула непригодна, так как обе производные x', y' равны нулю. Однако касательная в точке $\varphi=\pi$ существует (ср. замечание 1 в § 85). Действительно, так как при $\varphi=\pi$ имеем $x=0$, $y=0$, то приращения Δx, Δy соответственно равны x, y. Следовательно,

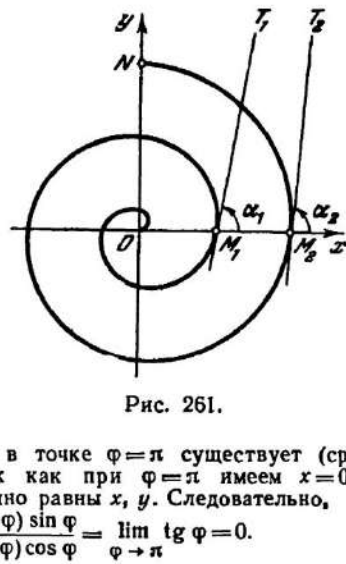


Рис. 261.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\pi}\frac{y}{x}=\lim_{\varphi\to\pi}\frac{a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}{a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}=\lim_{\varphi\to\pi}\operatorname{tg}\varphi=0.$$

8. $x=a\varphi\cos\varphi$, $y=a\varphi\sin\varphi$. Касательные M_1T_1 и M_2T_2 (рис. 261) образуют угол $\alpha\approx 4^\circ 30'$. Пояснение. Имеем $\operatorname{tg}\alpha_1=2\pi$, $\operatorname{tg}\alpha_2=4\pi$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{2\pi}{1+8\pi^2}$. 9. $f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 10. $f'\left(\frac{5}{3}a\right)=-\frac{5}{4}$.

§ 87а

1. $\frac{5}{4}$. 2. $\frac{11}{4}$. 3. $\frac{4}{11}$. 4. $(2x-3y)\,dx+(2y-3x)\,dy=0$; $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-3x}{3y-2x}$. 5. $\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$. 6. $x\,dy\,(x^2+y^2+1)+y\,dx\,(x^2+y^2-1)=0$. 7. $(x\sqrt{x^2+y^2}+cy)\,dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-cx)\,dy=0$. 8. $(y+x)\,dx+(y-x)\,dy=0$. 9. $y\,(x\ln y-y)\,dx=x\,(y\ln x-x)\,dy$. Указание. Предварительно прологарифмировать обе части уравнения. 10. 0.

§ 93а

1. $56x^6-60x^3+4$. 2. $2\cos 2x$. 3. $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 4. $2\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}$. 5. $-\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 6. $e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$. 7. $\frac{a\,(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$. 8. $x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$. 9. $\frac{10}{27}$. 10. $\frac{4}{e}$. 11. $\left(\ln\frac{2}{\pi}\right)^2-\frac{4}{\pi}$. Решение. Из соотношения $y=f(x)=x^{\cos x}$ находим $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^0=1$. С помощью логарифмического дифференцирования получаем $y'=y\left(-\sin x\ln x+\right.$ $\left.+\cos x\,\frac{1}{x}\right)$, откуда

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\,\frac{2}{\pi}\right)=-\ln\frac{\pi}{2}=\ln\frac{2}{\pi}.$$

Повторное дифференцирование дает

$$y''=y'\left(-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x\right)+y\left(-\cos x\ln x-\frac{2}{x}\sin x-\frac{1}{x^2}\cos x\right).$$

Отсюда находим, что $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\ln\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{4}{\pi}\right)=$ $=\left(\ln\frac{2}{\pi}\right)^2-\frac{4}{\pi}$. 12. 0. 13. $16a\sin 2\varphi$. 14. $\frac{120}{(1-x)^6}$. 15. $9t^3$. 16. $-\frac{1}{3t^5}$. 17. $-\frac{8}{a}$; $-\frac{8}{9a}\sqrt{3}$. 18. $-\frac{4}{a}$.

19. 0. Пояснение. Переменные x, y связаны соотношением $x+y=a$. 20. $\frac{-2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$. 21. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{81}{32a}$; $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{162}{125a}$. 22. $-\frac{72}{(x+2y)^3}$. 23. $\frac{a^{2/3}}{3x\,(xy)^{1/3}}$. 24. $\frac{m\,(m+n)\,y}{n^2x^2}$. Указание. Соотношение

$mx^{m-1}y^n\,dx+nx^my^{n-1}\,dy=0$ можно представить в виде $my\,dx+nx\,dy=0$. 25. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. 26. $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$. Указание. Соотношение $dy=xe^y\,dy+e^y\,dx$ выгодно представить (учитывая данное уравнение) в виде $dy=\frac{e^y}{2-y}\,dx$. 27. $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. Указание. Результат первого дифференцирования $dy=\frac{dx+dy}{\cos^2(x+y)}$ удобно представить в виде $dy=(dx+dy)\,(1+y^2)$, откуда $dy=(-y^{-2}-1)\,dx$. 28. $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$. 29. $-3\frac{b^6x}{a^4y^5}$. 30. $\frac{-2(3y^2+5)(y^2+1)}{y^8}$.

§ 97а

1. Наибольшее значение $f(10)=145$, наименьшее $f(6)=-15$.

2. Наибольшее значение $f(5)=66$, наименьшее $f(-4)=f(2)=-15$.

3. Наибольшее значение $f(-1)=25$, наименьшее $f(0)=f(4)=0$. Указание. Внутри данного промежутка производная $f'(x)$ равна нулю в точках $x=0$, $x=2$. Сопоставляются значения

$$f(0)=0,\quad f(2)=16,\quad f(4)=0,\quad f(-1)=25.$$

4. Наибольшее значение 5, наименьшее (-27). Решение. Решаем уравнение $f'(x)=(x+3)\,3(x-1)^2+(x-1)^3=0$. Представим его в виде $(x-1)^2[3(x+3)+(x-1)]=0$. Находим корни $x=1$, $x=-2$. Оба лежат внутри данного промежутка. Сопоставляем значения $f(-3)=0$, $f(-2)=-27$, $f(1)=0$, $f(2)=5$. 5. 2,5 и 0. Указание. Сопоставляем $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$. 6. $f(1-\sqrt{2})\approx 7$ и $f(1)=1$. Решение. $f'(x)=$ $=\frac{(2x-5)(x^2+1)-(x^2-5x+6)\,2x}{(x^2+1)^2}=5\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$. Решаем уравнение $x^2-2x-1=0$. Лишь один его корень $(x_1=1-\sqrt{2})$ лежит внутри данного промежутка. Сопоставляем значения $f(-1)=6$, $f(1)=1$ и $f(x_1)$. Вычисление $f(x_1)$ облегчится, если учесть, что $x_1^2-2x_1-1=0$ и, следовательно, $x_1^2=2x_1+1$. Получаем $f(x_1)=\frac{(2x_1+1)-5x_1+6}{2x_1+2}=\frac{7-3x_1}{2(x_1+1)}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}=$ $=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}\approx 7$. 7. $f(2)=0{,}2$ и $f(0)=-1$.

8. Наименьшее значение $f(0)=-1$, наибольшего нет, так как правый конец исключен из промежутка $(0;\ 2)$. 9. Наименьшее значение $f(-3-2\sqrt{3})=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\approx 0{,}93$ (о способе вычисления см. решение задачи 6). Наибольшего значения нет. Пояснение. Функция $f(x)$ в данном незамкнутом промежутке не ограничена (так как $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=+\infty$).

10. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ и $f(\pi)=-1$. 11. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=0{,}25$; $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=$ $=f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-0{,}75$. 12. $f(-1)=f(1)=2$ и $f(0)=0$. Пояснение. В точке $x=0$ функция $f(x)$ недифференцируема. Поэтому наряду со значениями $f(-2)=f(2)=3\sqrt[3]{4}-4\approx 0{,}76$ и $f(-1)=f(1)=2$ надо учесть значение $f(0)=0$.

13. $f(-2a)=2a\sqrt[3]{2}$ и $f(0)=0$. 14. $r=h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\approx\sqrt[3]{\frac{1000}{3,14}}$ *см* $\approx$ $\approx 6,8$ *см* (r — радиус, h — высота) (ср. § 97, пример 4).

15. $r:h=2:3$. Пояснение. Объемное количество материала, идущего на стенки, есть $2\pi crh$, где c — толщина стенок, r — радиус дна, h — высота. Объемное количество материала, идущего на дно, есть $1,5\pi cr^2$. При данной толщине c общее количество материала пропорционально $2rh+1,5r^2$. Здесь величины r и h связаны соотношением $\pi r^2h=V$, где V (объем бака) есть постоянная величина. Дальше задача решается по образцу примера 4 § 97.

16. На высоте $\frac{R}{\sqrt{2}}\approx 0,7R$. Решение. Пусть h — высота лампы S над столом и α — угол, образуемый лучом SM с поверхностью стола. Требуется найти наименьшее значение величины $f=\frac{\sin\alpha}{R^2+h^2}$. Величины h и α связаны соотношением $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{R}$. Примем за аргумент величину h; тогда $f=\frac{h}{\sqrt{(R^2+h^2)^3}}$. По физическому смыслу задачи функция $f(h)$ в промежутке $(0, \infty)$ должна обладать наибольшим значением, и последнее принимается внутри промежутка $(0; \infty)$. Поэтому достаточно решить уравнение $\frac{df}{dh}=\frac{R^2-2h^2}{\sqrt{(R^2+h^2)^5}}=0$. Внутри промежутка $(0, \infty)$ это уравнение имеет единственный корень $h=\frac{R}{\sqrt{2}}$.

17. На расстоянии $\sqrt{a(a+h)}$ (среднее геометрическое между высотами нижнего и верхнего края). Решение. Обозначим буквами A и B нижнюю и верхнюю точки вертикального края картины, а буквой C ту точку прямой AB, которая находится на уровне глаза O. Тогда $CA=a$, $CB=a+h$. Обозначив через x искомое расстояние OC и через φ угол, под которым видна картина, имеем: $\varphi=\angle COB-\angle COA=\operatorname{arcctg}\frac{x}{a+h}-\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$. Искомое значение x должно находиться внутри промежутка $(0; \infty)$. Решаем уравнение $\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{a+h}{(a+h)^2+x^2}+\frac{a}{a^2+x^2}=0$. Оно имеет единственный положительный корень $x=\sqrt{a^2+ah}$.

18. Искомый угол $\varphi\approx 66°$. Решение. Дуга остающегося сектора есть $2\pi a-a\varphi$, где a — радиус данного круга. Эта дуга становится окружностью основания воронки. Следовательно, радиус r основания связан с φ соотношением

$$2\pi r=2\pi a-a\varphi. \qquad (1)$$

Объем V воронки выражается формулой

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h, \qquad (2)$$

где высота h связана с r соотношением

$$r^2+h^2=a^2. \qquad (3)$$

Вместо того чтобы выражать V через φ, лучше принять за аргумент высоту h:

$$V=\frac{1}{3}\pi(a^2-h^2)h \qquad (0<h<a). \tag{4}$$

Отыскав значение h, при котором функция (4) принимает наибольшее значение, можно будет найти соответствующее значение φ.

По смыслу задачи ясно, что своего наибольшего значения функция $V(h)$ достигает внутри промежутка $(0; a)$. Из уравнения $\frac{dV}{dh}=0$ находим, что $h^2=\frac{a^2}{3}$; из (3) находим $r=a\sqrt{\frac{2}{3}}$; из (1) находим $\varphi=2\pi\left(1-\frac{r}{a}\right)=$ $=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

19. $R=r$. Решение. Из соотношений $Q=i^2R$ и $i=\frac{E}{r+R}$ (где E есть э. д. с. гальванического элемента) находим $Q=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$ $\quad(0<R<\infty)$. Искомое значение R будет находиться внутри промежутка $(0; \infty)$. Из уравнения $\frac{dQ}{dR}=\frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}=0$ находим, что $R=r$.

20. Искомая длина $x=6$ *м*. Решение. Сечение колоды, проведенное на расстоянии x от большего основания, имеет диаметр $D=D_1-\frac{x}{H}(D_1-D_2)=2-\frac{x}{9}$ $(0<x<9)$. Если рассечь здесь колоду и вырезать квадратную балку с наибольшим поперечным сечением из более толстой части, то сечение будет квадратом, вписанным в круг диаметра D. Площадь этого квадрата $S=\frac{1}{2}D^2=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{9}\right)^2$. Объем балки $V=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{9}\right)^2x$.

Решив уравнение $\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{9}\right)^2-\frac{x}{9}\left(2-\frac{x}{9}\right)=\left(2-\frac{x}{9}\right)\left(1-\frac{x}{6}\right)=0$, найдем корни $h_1=18$, $h_2=6$. Из них только второй лежит внутри данного промежутка $(0; 9)$. Сопоставив значение $V(6)=5\frac{1}{3}$ со значениями $V(9)=4\frac{1}{2}$ и $V(0)=0$, убеждаемся в том, что балка длиной в 6 *м* будет иметь наибольший объем.

§ 100а

1. $\xi=\sqrt[3]{\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}}$. **2.** $\xi=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$. **3.** $\xi=\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$.

4. $\xi=\frac{1}{\ln 2}$. **5.** В отношении 1:1. Пояснение. Угловой коэффициент касательной в искомой точке $x=\xi$, $y=\xi^2$ есть 2ξ; угловой коэффициент хорды есть b. Следовательно, $\xi=\frac{b}{2}$ [это — геометрическая форма теоремы Лагранжа применительно к функции $f(x)=x^2$]. Отношение, в котором вертикаль c делит хорду AB, равно отношению, в котором точка ξ делит отрезок $(0, b)$.

6. $1:(\sqrt{3}-1)$. Пояснение. Абсцисса точки касания $\xi=\frac{b}{\sqrt{3}}$. Ср. пояснение к задаче 5.

7. $(\sqrt{ab}-a):(b-\sqrt{ab})$ при условии, что обе точки A, B лежат на одной и той же ветви данной гиперболы. В противном случае искомой точки C нет $\left(\text{теорема Лагранжа неприменима, так как в точке } x=0 \text{ функция } y=\frac{1}{x} \text{ не определена}\right)$.

8. Ровно 4 раза (по одному разу внутри каждого из промежутков (0; 2), (2; 3), (3; 5), (5; 8)). Пояснение. Ни в одном из этих промежутков производная $f'(x)$ не может обращаться в нуль дважды, так как уравнение $f'(x)=0$, будучи уравнением четвертой степени, не может иметь более 4 корней.

§ 104а

1. Производная $f'(x)=2x+3$ отрицательна при $x<-\frac{3}{2}$ [в частности, в промежутке $(-5;-2)$] и положительна при $x>-\frac{3}{2}$ [в частности в промежутке (2; 5)]. **2.** Промежутки монотонности $(-\infty; 0)$, (0; 1), $(1; \infty)$. В первом $f(x)$ возрастает, во втором убывает, в третьем снова возрастает. Указание. $f'(x)=6x(x-1)$. При $x<0$ оба сомножителя $6x$ и $x-1$ отрицательны; при $0<x<1$ первый положителен, а второй отрицателен, при $x>1$ оба положительны.

3. Функция $f(x)$ монотонна (она возрастает) во всем промежутке $(-\infty, \infty)$. Производная $f'(x)=6x^2+3$ всюду положительна.

4. Функция $\varphi(x)$ *разрывна* в точке $x=0$. В каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ она монотонна (убывает).

5. Промежутки монотонности $(-2; -1)$; $(-1; 3)$, (3; 4). В первом функция $f(x)$ возрастает.

6. Промежутки монотонности $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, (0; 1), (1; 2). В первом функция $\varphi(x)$ убывает.

7. $(-\infty, -\sqrt{2})$ (убывает), $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$.

8. $(-\infty; 0)$ (убывает), $(0; \infty)$. **9.** Всюду убывает. **10.** $(-\infty; -1)$ (убывает), $(-1; 0)$, (0; 5), $(5; \infty)$. Указание. $f'(x)=12x(x+1)(x-5)$. **11.** $(-\infty; -2)$ (убывает); $(-2; 0)$, (0; 3), $(3; \infty)$. **12.** $(-\infty; 0)$ (убывает); $(0; \infty)$. Указание. Имеем $f'(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}-1)e^{-x}$. Сомножитель $\frac{1}{2}e^{-x}$ всегда положителен.

13. Всюду возрастает. **14.** Всюду возрастает. **15.** $(-\infty; 1)$ (убывает); $(1; \infty)$ (возрастает). **16.** Убывает в $(-\infty; 0)$, возрастает в $(0; \infty)$. Указание. При $x<0$ имеем $f(x)=-x$; при $x>0$ имеем $f(x)=x$. Значит, в первом случае $f'(x)=-1$, во втором $f'(x)=1$. Производную от функции $|\varphi(x)|$ [абсолютное значение функции $\varphi(x)$] можно представить единой формулой следующим образом: функцию $|\varphi(x)|$ можно представить в виде $\sqrt{[\varphi(x)]^2}$; дифференцируя, находим $\frac{d}{dx}|\varphi(x)|=\frac{1}{2\sqrt{[\varphi(x)]^2}}2\varphi(x)\varphi'(x)=\frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}\varphi'(x)$. Множитель $\frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ равен $+1$, если $\varphi(x)>0$, и -1, если $\varphi(x)<0$. В данном примере $f'(x)=\frac{x}{|x|}(=\pm 1)$. Имеем также $f'(x)=\frac{|x|}{x}$.

17. Всюду возрастает. Указание. При $x<0$ имеем $f(x)=x|x|=x(-x)=-x^2$; следовательно, $f'(x)=-2x$, а так как $x<0$, то $f'(x)>0$. При $x>0$ имеем $f(x)=x^2$; $f'(x)=2x>0$. Другой способ. $f'(x)=x\frac{d}{dx}|x|+|x|\frac{d}{dx}x=x\frac{|x|}{x}+|x|\cdot 1=2|x|>0$ (ср. указание к задаче 18).

18. В промежутке $(-\infty;\ 0)$ убывает; в промежутке $(0;\ \infty)$ возрастает. Указание. $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{|x|}\frac{d}{dx}|x|=\frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$.

19. Возрастает во всей области изменения аргумента, т. е. в промежутке $(0;\ \infty)$.

20. Промежутки монотонности: $(-\infty;\ -1)$ (убывает), $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ \infty)$. Пояснение. $f'(x)=\frac{d}{dx}\ln|x^2-1|=\frac{1}{|x^2-1|}\frac{d}{dx}|x^2-1|=\frac{1}{|x^2-1|}\frac{|x^2-1|}{x^2-1}\frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$.

21. $f(3)=-27$ (мин.). 22. $f(-\sqrt{2})=-4$ (мин.); $f(0)=0$ (макс.); $f(\sqrt{2})=-4$ (мин.). 23. $f(0)=0$ (мин.). 24. Нет экстремумов. Пояснение. Производная $f'(x)=3(x-2)^2$ не меняет знака при переходе через критическую точку $x=2$. 25. $f(-1)=1\frac{5}{12}$ (мин.); $f(0)=2$ (макс.); $f(3)=-9\frac{1}{4}$ (мин.). Указание. $f'(x)=x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x-3)(x+1)$. 26. $f(0)=0$ (макс.); $f\left(\frac{4}{7}\right)=-\frac{4^4\cdot 3^3}{7^7}\approx-0{,}008$ (мин.). Пояснение. $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)$. 27. $f(-1)=-2$ (макс.); $f(1)=2$ (мин.). График — на рис. 262. 28. $f(-1)=f(1)=\sqrt{2}$ (мин.). 29. $f(-\sqrt{6})=-\frac{\sqrt{6}}{12+5\sqrt{6}}=2\sqrt{6}-5\approx-0{,}1$ (мин.);

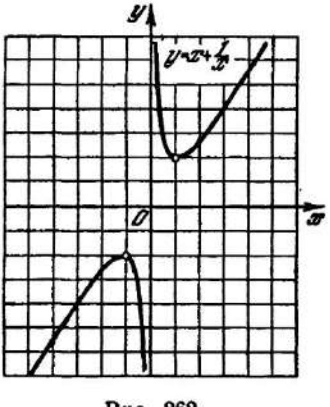


Рис. 262.

$f(\sqrt{6})=\frac{\sqrt{6}}{12-5\sqrt{6}}=-(2\sqrt{6}+5)\approx-9{,}9$ (макс.). 30. $f(0)=0$ (макс.); $f(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx-4{,}8$ (мин.) (ср. § 104, пример 2). 31. $f(-1)=0$ (мин.); $f(0)=1$ (макс.); $f(1)=0$ (мин.). 32. $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$ (макс.); $f(0)=1$ (мин.); $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$ (макс.). (ср. пример 1 § 96).

33. Максимум при $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}62$; $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx 0{,}30$.

Замечание. Функция $f(x)$ определена только в промежутке $-1<x\leqslant 1$. Поэтому из двух корней уравнения $f'(x)=\frac{-x^2-x+1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=0$

только один $\left(x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ является критической точкой. График функции $f(x)$ изображен на рис. 263 сплошной линией; пунктиром изображен график функции $-x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Взятые вместе, эти графики составляют линию, называемую *строфоидой*.

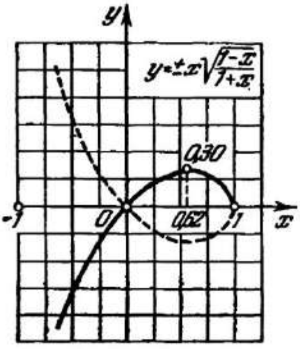


Рис. 263.

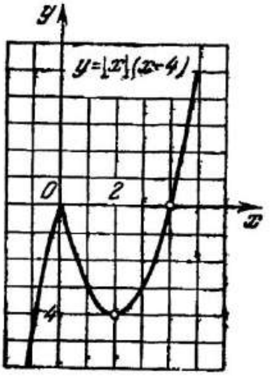


Рис. 264.

34. $f(0)=0$ (макс.); $f(2)=-4$ (мин.). Замечание. В точке $x=0$ функция недифференцируема. График — на рис. 264.

35. $f\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}$ (мин.).

§ 105а

1. $f(-3)=-6$ (макс.); $f(3)=6$ (мин.). Решение. Находим $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}$; $f''(x)=\frac{18}{x^3}$. Критические точки $x_1=-3$, $x_2=3$. Имеем $f''(-3)=\frac{18}{(-3)^3}<0$, поэтому $f(-3)$ — максимум; так как $f''(3)=\frac{18}{3^3}>0$, то $f(3)$ — минимум.

2. $f(1{,}8)=\frac{25}{3}$ (мин.); $f(9)=\frac{1}{3}$ (макс.). Решение. $f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{4}{(3-x)^2}$; $f''(x)=\frac{18}{x^3}+\frac{8}{(3-x)^3}$. Критические точки $x_1=\frac{9}{5}$, $x_2=9$. Имеем $f''(1{,}8)=\frac{18}{1{,}8^3}+\frac{8}{1{,}2^3}>0$; $f''(9)=\frac{18}{9^3}-\frac{8}{6^3}=-\frac{1}{81}<0$.

3. $f(0)=0$ (мин.). **4.** $f(0)=0$ (макс.); $f(1)=\ln 4-\frac{\pi}{2}\approx-0{,}18$ (мин.). **5.** $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{M}{e}\approx-0{,}16$ (мин.). Пояснение. Введя натуральный логарифм, имеем: $f(x)=Mx\ln x$ $(M\approx 0{,}434)$; $f'(x)=M(\ln x+1)$; $f''(x)=\frac{M}{x}$.

Критические значения находим из уравнения $\ln x = -1$, откуда $x = \frac{1}{e}$.
6. $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$ (макс.); $f(1) = 0$ (мин.). 7. $f(0) = 0$ (мин.); $f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$ (макс.). 8. $f(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$ (мин.). 9. $f(1) = e \approx 2{,}72$ (мин.). 10. $f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}$ (макс.); $f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}$ (мин.).
11. $f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = 2{,}5$ (макс.); $f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$ (мин.); $f\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = 2{,}5$ (макс.); $f\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -2$ (мин.). Пояснение. Имеем $f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$; $f''(x) = -2(\sin x + 2\cos 2x)$. Критические точки (в промежутке $0 < x < 2\pi$) суть: 1) корни $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ уравнения $\cos x = 0$; 2) корни $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. Определяем знаки второй производной: $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$; $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 < 0$; $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0$. 12. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (мин.); $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ (макс.).

§ 107а

1. В промежутке $\left(-0{,}3;\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ линия вогнута вверх; в промежутке $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3};\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — вниз; в промежутке $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3};\ 2{,}3\right)$ — вверх. В точках $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ — перегиб. Решение. Имеем $y = 4x^2 - 4x^3 + x^4 = [x(x-2)]^2$, $y' = 8x - 12x^2 + 4x^3 = 4x(1-x)(2-x)$, $y'' = 8 - 24x + 12x^2 = 4(2 - 6x + 3x^2)$. Критические точки по первой производной $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Критические точки по второй производной $x_1' = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}42$, $x_2' = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 1{,}58$.

Данный промежуток разбивается на три промежутка, указанные в ответе. В первом производная y'' положительна [достаточно вычислить $y''(0)$]; в третьем положительна. По признаку § 106 (замечание) дуги AB и DF вогнуты вверх, а дуга BD — вниз (рис. 265).

По точкам $A\,(-0{,}3;\ 0{,}48)$, $O\,(0;\ 0)$, $B\,(0{,}42;\ 0{,}44)$, $C\,(1;\ 1)$, $D\,(1{,}58;\ 0{,}44)$, $E\,(2;\ 0)$, $F\,(2{,}3;\ 0{,}48)$ график будет построен с большей точностью, чем без учета характера вогнутости (ср. пример 1 § 105).

Замечание. Для вычисления $y(x_1')$ удобно подставить в выражение $[x(x-2)]^2$ точное значение $x_1'=1-\sqrt{1/_3}$; получаем $y(x_1')=$
$$=\left(\left[1-\sqrt{1/_3}\right)\left(-1-\sqrt{1/_3}\right)\right]^2=\left[\left(\sqrt{1/_3}+1\right)\left(\sqrt{1/_3}-1\right)\right]^2=\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{9}$$

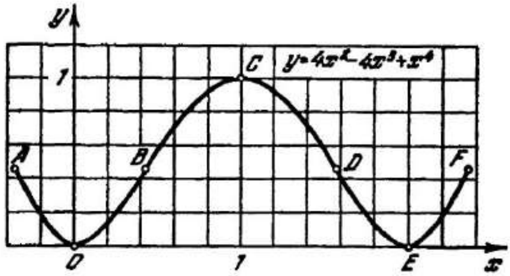


Рис. 265.

2. В промежутках $(-5;\ -2)$ и $(2;\ 5)$ линия вогнута вниз; в промежутке $(-2;\ 2)$ — вверх. График (рис. 266) строится по опорным точкам B, B' (точки максимума), D (точка минимума) и C, C' (точки перегиба).

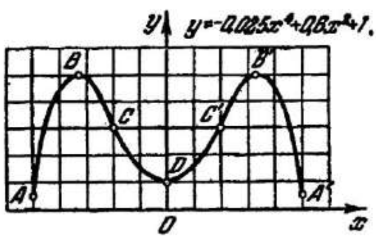


Рис. 266.

3. Точки перегиба (рис. 267) $O\,(0;\ 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B'\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Дуги $D'B'$, OB вогнуты вниз; дуги $B'O$, BD — вверх. Опорные точки графика: O, A, A', B, B', D, D'. Для большей точности можно построить еще точки $C\left(1;\ \frac{4}{17}\right)$ и $C'\left(-1;\ -\frac{4}{17}\right)$. Построение линии облегчается ввиду ее симметрии относительно точки $O\,(0;\ 0)$.

4. Точка перегиба (рис. 268) $C\left(\sqrt[3]{2};\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$; слева от C линия вогнута вниз; справа — вверх. Опорные точки $O\,(0;\ 0)$, $A\left(\sqrt[3]{0{,}5};\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{0{,}5}\right)$, $B\,(1;\ 1)$, C и концы данного промежутка. Для большей точности можно построить еще какую-либо точку F между O и A.

5. Линия изображена на рис. 269. Опорные точки: O (точка перегиба), B, D (экстремумы), A, E — концы промежутка, в котором данная функция определена.

6. В промежутках $(-5;\ -3)$, $(-1;\ 1)$, $(3;\ 5)$ линия вогнута вниз; в остальных — вверх. Перегиб в точках ± 1, ± 3, ± 5, где линия пересекает ось Ox. Точки перегиба, точки экстремума 0, ± 2, ± 4 и концы ± 6 данного промежутка являются опорными при построении графика.

7. График изображен на рис. 270. Для построения удобно написать уравнение в виде $y=2\,(1-\cos 2x)$.

8. На рис. 271 изображена дуга DD', соответствующая одному периоду $(-\pi;\ \pi)$. В точках O, C, C', D, D' — перегиб; в точках A, A', B, B' —

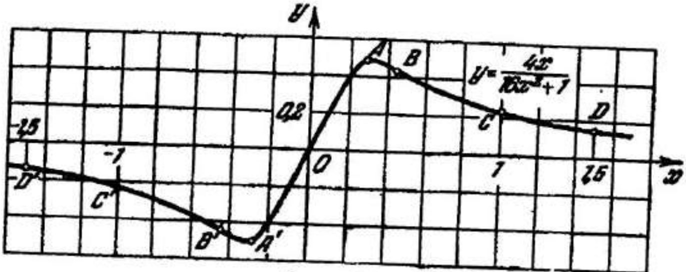


Рис. 267.

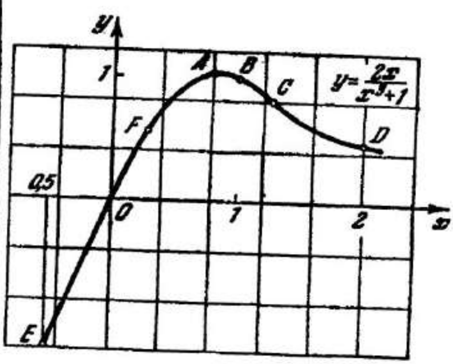


Рис. 268.

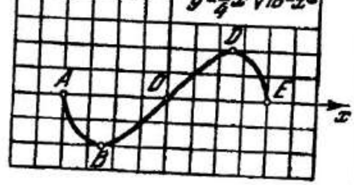


Рис. 269.

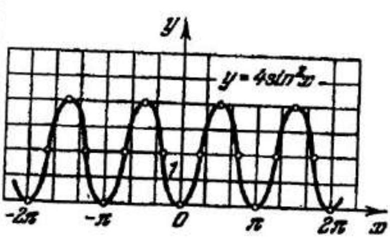


Рис. 270.

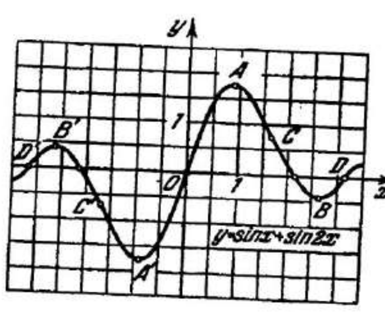


Рис. 271.

экстремумы. Пояснение. Для разыскания экстремумов надо решить уравнение $y' = \cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$. Одно решение будет $\cos x = \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}593$, $x_{1,2} \approx \pm 53°40' \approx \pm 0{,}94$ *рад*. Значение функции $y_{1,2} = \pm(\sin 53°40' + \sin 107°20') \approx \pm 1{,}76$. Получаем точки $A\,(0{,}94;\ 1{,}76)$, $A'\,(-0{,}94;\ -1{,}76)$.

Другое решение уравнения $y' = 0$ будет: $\cos x = \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \approx -0{,}843$. Следовательно, $x_{3,4} \approx \pm 147°30' \approx \pm 2{,}57$ *рад*. Значение функции $y_{3,4} \approx \approx \pm(\sin 147°30' + \sin 295°) \approx \mp 0{,}37$ *рад*. Получаем точки $B\,(2{,}57;\ -0{,}37)$, $B'\,(-2{,}57;\ 0{,}37)$. Для разыскания точек перегиба надо решить уравнение

$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x(1 + 8\cos x) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения: $\sin x = 0$, $1 + 8\cos x = 0$. Первое дает точки $O\,(0;\ 0)$, $D\,(\pi;\ 0)$, $D'\,(-\pi;\ 0)$. Из второго находим $x = \pm 97°10' \approx \pm 1{,}70$. Получаем точки $C\,(1{,}70;\ 0{,}74)$, $C'\,(-1{,}70;\ -0{,}74)$.

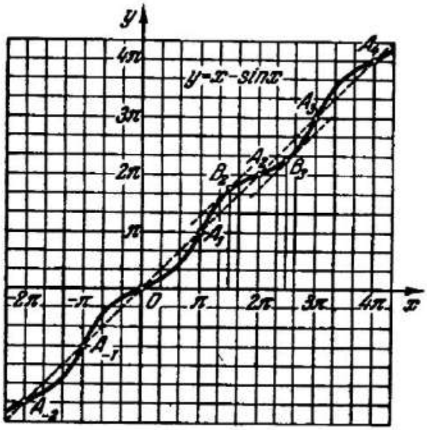


Рис. 272.

9. График — на рис. 272. Пояснение. Первая производная $y' = 1 - \cos x$ не может принимать отрицательных значений: функция y возрастает в любом промежутке. В точках

$$x = 2k\pi\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где $y' = 0$, касательные горизонтальны. Вторая производная $y'' = \sin x$ обращается в нуль в точках $x = n\pi\ (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ и меняет знак при переходе через каждую из этих точек. В соответствующих точках график пересекает прямую $y = x$ (пунктирная линия) и имеет перегиб. Чтобы построить график, удобно воспользоваться точками $B_{\pm 1}$, $B_{\pm 2}$, $B_{\pm 3}$, ... (на рис. 272 отмечены точки B_2, B_3), где график наиболее удален от прямой $y = x$. Для разыскания такой точки, скажем, на дуге A_1A_2 учтем, что касательная в этой точке должна быть параллельна хорде A_1A_2 (§ 99, замечание 1), т. е. в точке B_2 производная $y' = (x - \sin x)' = 1$. Следовательно, $\cos x = 0$. В промежутке $(\pi;\ 2\pi)$ единственная точка, удовлетворяющая этому уравнению, есть $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Общее выражение для абсцисс точек B_k есть $x_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

10. Точка перегиба $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$. Слева график вогнут вниз, справа вверх; экстремумов нет. Надо построить несколько опорных точек справа от точки перегиба, скажем точки $x = 60°$, $72°$, $84°$. Соответствующие значения $\lg \operatorname{tg} x$ берем из таблиц. Для точек слева от $\frac{\pi}{4}$ можно использовать тождество $\lg \operatorname{tg} x = -\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Учтем также, что $\lim\limits_{x \to +0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} y = +\infty$, так что прямые $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ суть асимптоты (определение асимптоты см. I, § 59, а также § 109).

11. Максимум в точке $x_B=1$ (рис. 273); перегиб в точке $x_C=2$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$ (см. § 101, пример 3, стр. 263, прямая Ox — асимптота). Опорные точки $A(-1; -e)$, $O(0; 0)$, $B(1; e^{-1})$, $C(2; 2e^{-2})$, $D(4; 4e^{-4})$.

12. Минимум — в точке $x_O=0$ (рис. 274), максимум — в точке $x_D=2$. Перегиб — в точках $x_C=2-\sqrt{2}$, $x_E=2+\sqrt{2}$. Прямая Ox — асимптота. Опорные точки O, C, D, E, а также $A(-1; e)$ и какая-либо точка, очень близкая

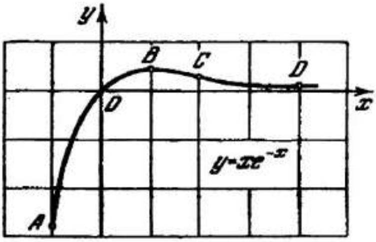


Рис. 273.

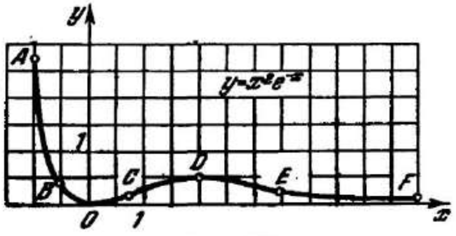


Рис. 274.

к оси Ox, скажем точка $F(6; 36e^{-6})$. Для большей точности строим еще какую-либо точку на дуге AO, например точку $B(-0{,}5; 0{,}25\sqrt{e})$. Для вычисления $y_C\approx 0{,}59^2e^{-0{,}59}$ можно воспользоваться таблицей функции e^x или логарифмированием по основанию 10 ($\lg y_C=2\lg 0{,}59-0{,}59M$ и т. д). Аналогично при вычислении других ординат.

§ 111a [1])

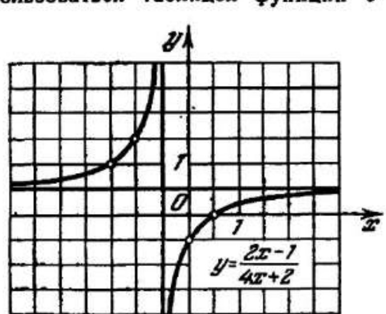


Рис. 275.

1. См. рис. 275. Пояснение. Вертикальная асимптота $4x+2=0$, т. е. $2x+1=0$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+2}=\frac{1}{2}$. Следовательно, имеется единственная невертикальная асимптота $y=\frac{1}{2}$ (общая для двух бесконечных ветвей). Данная линия — второго порядка $(4xy+2y-2x+1=0)$. Поскольку она явно не представляет пару прямых, это — гипербола (другие линии второго порядка асимптот не имеют).

2. См. рис. 276. Пояснение. Вертикальных асимптот нет. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}=0$, то ось Ox — единственная асимптота (для двух бесконечных

[1]) На графиках отмечены точки, которые можно принять за опорные для построения.

ветвей). В точке A $(0;\ a)$ — максимум, в точках $C_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}};\ \frac{3}{4}a\right)$, $C_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}};\ \frac{3}{4}a\right)$ — перегиб. Линия симметрична относительно оси Oy (функция y четная). Опорные точки A, C_1, C_2, $B_1(2a;\ 0{,}2a)$, $B_2(-2a;\ 0{,}2a)$. Отрезок a играет роль единицы масштаба и может быть выбран как угодно (все построенные линии будут подобны друг другу; ср. I, §§ 60 и 65).

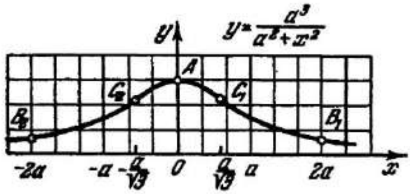


Рис. 276.

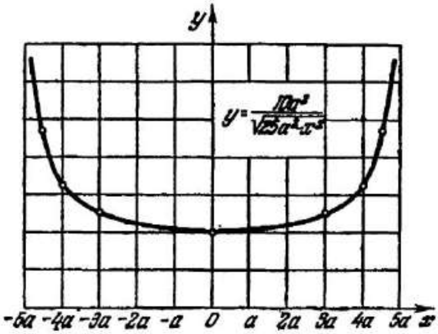


Рис. 277.

3. См. рис. 277. Пояснение. Данная функция определена только внутри промежутка $(-5a;\ 5a)$ и имеет бесконечный разрыв на его концах. Значит, график располагается в вертикальной полосе между асимптотами

$$x+5a=0,$$
$$x-5a=0.$$

Вследствие этого невертикальных асимптот заведомо нет. Данная функция четная; значит, график симметричен относительно оси Oy.

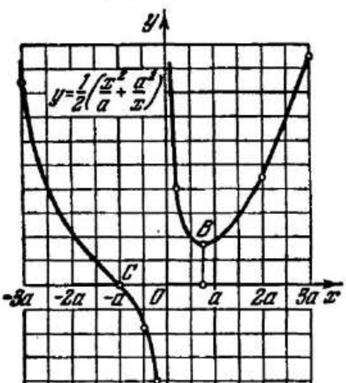


Рис. 278.

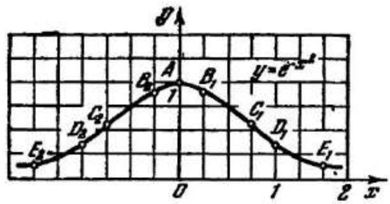


Рис. 279.

4. См. рис. 278. Вертикальная асимптота $x=0$. Невертикальных нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a}+\frac{a^2}{x^2}\right)=\infty$. В точке $B\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}a;\ \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}a\right)$ — минимум; в точке $C(-a;\ 0)$ — перегиб.

5. См. рис. 279. Пояснение. Вертикальных асимптот нет, ибо данная функция всюду непрерывна. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$, то ось Ox — единственная асимптота. Так как данная функция четная, то график симметричен относительно оси Oy.

6. См. рис. 280. Вертикальные асимптоты $x \pm 1 = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{2}$, то прямая $y = \frac{1}{2}$ — единственная невертикальная асимптота.

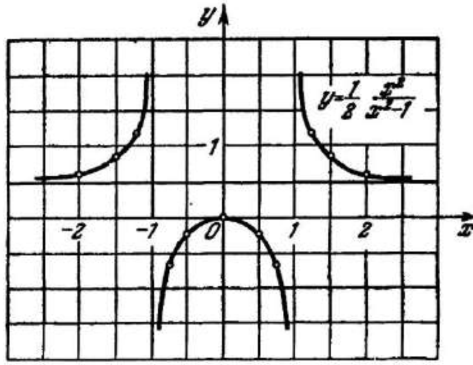


Рис. 280.

7. См. рис. 281. Пояснение. Вертикальных асимптот нет. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$, то горизонтальных асимптот тоже нет. Ищем наклонные асимптоты. Находим $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{2x(x^2 + 1)}$. Сохраняя в числителе и знаменателе только старшие члены (§ 53, замечание 3), получаем $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ $(= a)$.

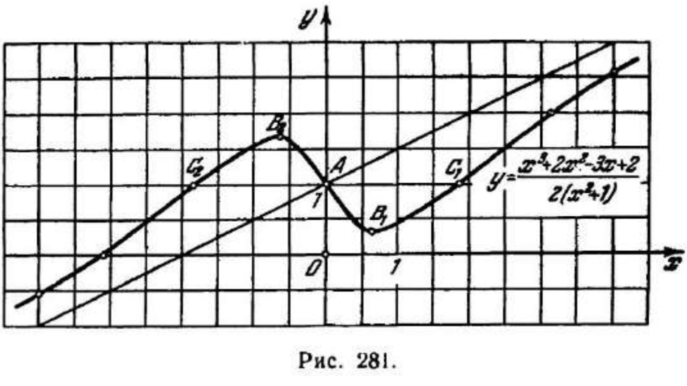


Рис. 281.

Ищем свободный член. Находим $\lim\limits_{x \to \infty} \left(y - \frac{1}{2} x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4x + 2}{2(x^2 + 1)} = 1$ $(= b)$.

Стало быть, прямая $y=\frac{1}{2}x+1$ есть асимптота (одна для двух бесконечных ветвей).

Из уравнения $y'=\frac{x^4+6x^2-3}{2(x^2+1)^2}=0$ находим $x_{1,2}=\pm\sqrt{-3+\sqrt{12}}\approx\pm 0{,}68$ и получаем точки $B_1\,(0{,}68;\ 0{,}41)$ (мин.) и $B_2\,(-0{,}68;\ 1{,}59)$ (макс.). С помощью уравнения $y''=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}=0$ находим точки перегиба $A\ (0;\ 1)$, $C_1(\sqrt{3};1)$, $C_2(-\sqrt{3};\ 1)$. Справа от точки C_2 график вогнут вниз, слева от C_1 — вверх.

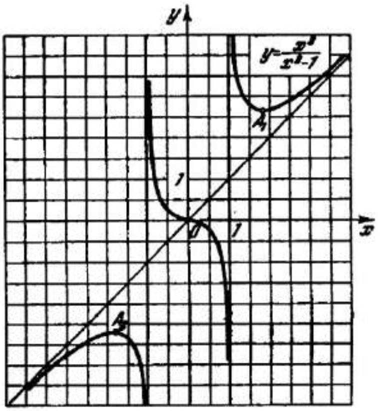


Рис. 282.

Замечание. Если разделить (с остатком) многочлен x^3+2x^2-3x+2 на многочлен x^2+1, то данное уравнение примет вид $y=\frac{1}{2}x+1-\frac{2x}{x^2+1}$ или $y-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{2x}{x^2+1}$. Так как правая часть стремится к нулю при $x\to\infty$, то (§ 111, теорема 2) прямая $y=\frac{1}{2}x+1$ есть асимптота. Этот прием применим ко всякой рациональной функции (т. е. ко всякому частному двух многочленов). Он упрощает также вычисление первой и второй производных.

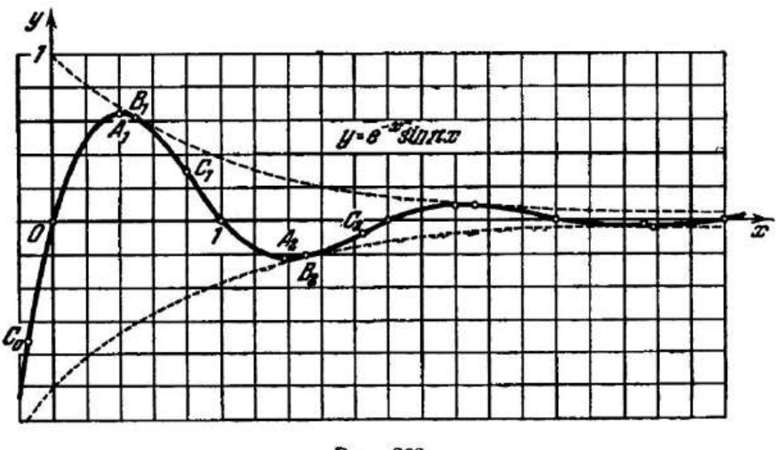


Рис. 283.

8. См. рис. 282. Асимптоты $x\pm 1=0$, $y=x$. Данная функция нечетная; график симметричен относительно точки $O\ (0;\ 0)$, которая является точкой перегиба. В точке $A_1(\sqrt{3};\ 1{,}5\sqrt{3})$ — минимум; в точке $A_2(-\sqrt{3};\ -1{,}5\sqrt{3})$ — максимум.

9. См. рис. 283, где пунктиром начерчены линии $y=e^{-x}$ и $y=-e^{-x}$; график поочередно касается этих линий в точках, где $\sin \pi x = \pm 1$, т. е. при $x=\pm 0{,}5$; $\pm 1{,}5$; $\pm 2{,}5$ и т. д. На рис. 283 отмечены две такие точки $B_1(0{,}5;\ e^{-0{,}5})$ и $B_2(1{,}5;\ -e^{-1{,}5})$. Так как в точках $B_{\pm 1}, B_{\pm 2}, \ldots$ график имеет тот же наклон, что кривые $y=\pm e^{-x}$, то данная функция здесь не имеет экстремумов. Для разыскания последних решаем уравнение $y' = e^{-x}(\pi \cos \pi x - \sin \pi x) = 0$; получаем $\operatorname{tg} \pi x = \pi$ и, значит, $\pi x \approx 1{,}26 + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следовательно, $x \approx 0{,}40 + k$. На рис. 283 отмечены точки $A_1(0{,}4;\ e^{-0{,}4}\sin 1{,}26)$ (макс.) и $A_2(1{,}4;\ -e^{-1{,}4}\sin 1{,}26)$ [1]).

Дальнейшими опорными точками будут служить точки пересечения с осью Ox; они определяются из уравнения $e^{-x}\sin \pi x = 0$, которое дает $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Наконец, точки перегиба определяются из уравнения $y'' = e^{-x}[(1-\pi^2)\sin \pi x - 2\pi \cos \pi x] = 0$; отсюда $\operatorname{tg} \pi x = \frac{2\pi}{1-\pi^2} \approx -0{,}710$. Следовательно, $\pi x \approx 2{,}52 + k\pi$, откуда $x \approx 0{,}80 + k$. На рис. 283 отмечены точки перегиба $C_1(0{,}80;\ e^{-0{,}80}\sin 2{,}52)$, $C_2(1{,}80;\ -e^{-1{,}80}\sin 2{,}52)$ [2]).

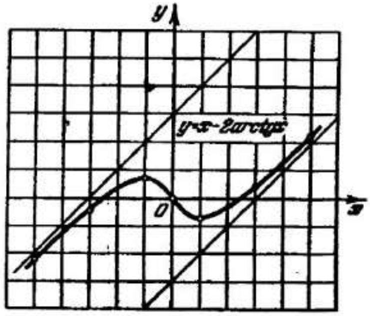


Рис. 284.

Ось Ox — единственная асимптота; график последовательно переходит с одной ее стороны на другую.

10. См. рис. 284. Пояснение. Для разыскания невертикальных асимптот находим $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\operatorname{arctg} x\right)$. Так как $\operatorname{arctg} x$ при $x \to \pm\infty$ стремится к $\pm\frac{\pi}{2}$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = 1\ (=a)$. Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2\operatorname{arctg} x) = -2\,\frac{\pi}{2} = -\pi\ (=b)$.

Значит, прямая $y=x-\pi$ есть асимптота правой бесконечной ветви. Таким же образом найдем, что прямая $y=x+\pi$ есть асимптота левой бесконечной ветви. Экстремумы при $x=\pm 1$; перегиб при $x=0$.

§ 112а

1. Асимптоты: $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x-1$. Максимум в точке $x=-3$; $y_{\text{макс}} = -\frac{27}{8}$. Точка перегиба $x=0$, $y=0$ (см. рис. 285).

2. Асимптота $x=0$. Минимум в точке $x=1$; $y_{\text{мин}} = \frac{3}{2}$. Точка перегиба $x=-\sqrt[3]{2}$, $y=0$ (см. рис. 286).

---

[1]) Ордината y_2 точки A_2 получается из ординаты y_1 точки A_1 умножением на $-e^{-1} \approx -0{,}368$ и вообще $y_n = -y_{n-1}e^{-1}$.

[2]) Ординаты y_n точек $\ldots, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \ldots$ тоже подчинены закону $y'_n = -y'_{n-1}e^{-1}$.

3. Асимптота $y=0$. Минимум в точке $x=-1$; $y_{\text{мин}}=-\sqrt[3]{4}$; максимум в точке $x=1$, $y_{\text{макс}}=\sqrt[3]{4}$. Точка перегиба $x=0$, $y=0$ (см. рис. 287).

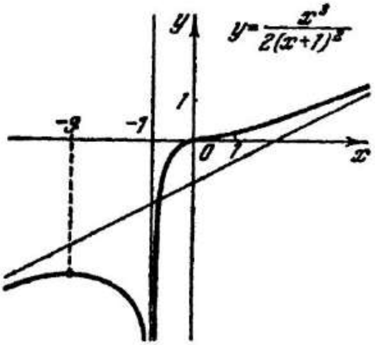


Рис. 285.

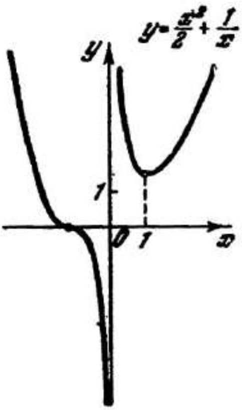


Рис. 286.

4. Асимптоты: $y=x$, $y=x+2\pi$. Максимум в точке $x=-1$, $y_{\text{макс}}=$ $=\frac{3}{2}\pi-1$; минимум в точке $x=1$, $y_{\text{мин}}=\frac{\pi}{2}+1$. Точка перегиба $x=0$, $y=\pi$ (см. рис. 288).

§ 114а

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-2x:\frac{1}{x}\right)=-2$. 2. 16. 3. 5. 4. 0,5. 5. 1. 6. ∞. Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\sin x}=\frac{2}{0}=\infty$.

7. 2. Указание. Применить правило Лопиталя трижды. 8. 1. 9. $\frac{1}{6}$. 10. $-\frac{1}{3}$. 11. $-\infty$. Пояснение. Правило Лопиталя здесь неприменимо (знаменатель стремится к нулю, а числитель — к π).

§ 116а

1. 0. 2. $+\infty$. 3. $+\infty$. 4. 0. 5. $+\infty$. 6. 0. Решение.

$$\lim_{x\to+0}(\sqrt{x}\ln x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{x^{-1/2}}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}\right)=0.$$

7. 2. Замечание. Результат легко получается без применения правила Лопиталя, на основании эквивалентности $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx\frac{x}{2}$.

8. $\frac{1}{\pi}$. Замечание. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\operatorname{ctg}\pi x=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\operatorname{tg}\pi x}$. Дальше можно либо применить правило Лопиталя, либо положить $x-3=u$ и искать $\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}(3\pi+\pi u)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}\pi u}$. См. предыдущее замечание. 9. $+\infty$. Указание. Лучше всего положить $\frac{1}{x^2}=z$ и искать $\lim\limits_{z\to+\infty}\frac{e^z}{z}$.

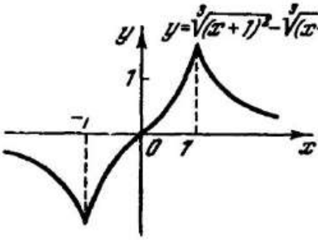


Рис. 287.

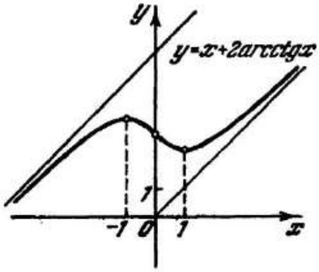


Рис. 288.

10. a. Пояснение. Можно представить данное выражение в виде $\dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x+a}}$ и применить правило Лопиталя. Еще скорее придем к цели, если воспользуемся эквивалентностью $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\approx\frac{a}{x}$.

11. 0. Решение. $\lim\limits_{x\to 1-0}[\ln x\ln(1-x)]=\lim\limits_{x\to 1-0}\left[\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left[\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{-\ln^2(1-x)(1-x)}}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x)\ln^2(1-x)}{x}.$$ Так как $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$, то задача сводится к вычислению

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\ln^2(1-x)=\lim_{x\to 1-0}\left[\dfrac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim_{x\to 1-0}\left[\dfrac{\frac{-2\ln(1-x)}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left[\dfrac{-2\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}}\right].$$

Применяя еще раз правило Лопиталя, получим в результате нуль.

Другое решение. Введем обозначение $1-x=z$. Задача сводится к разысканию $\lim\limits_{z\to 0}[\ln(1-z)\ln z]$. Воспользуемся эквивалентностью $\ln(1-z)\approx -z$. Тогда достаточно найти $\lim\limits_{z\to 0}(-z\ln z)=\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{-\ln z}{\frac{1}{z}}\right)=$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}}\right]=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0.$$

12. $\frac{1}{2}$. Правило Лопиталя применяется дважды. **13.** 0. Правило Лопиталя применяется дважды. **14.** $-\frac{1}{3}$. Правило Лопиталя применяется трижды. **15.** $\frac{1}{6}$. **16.** 1. **17.** $\frac{1}{e}$. **18.** e^2. **19.** $e^{-\frac{1}{8}}$. **20.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **21.** e^2.

§ 121а

1. 0,2623 (с точностью до $0{,}8\cdot 10^{-4}$). **2.** 8-й порядок. **3.** 0,7165. **4.** 0,2588. **5.** 0,5736. **6.** $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}}x^4$; $\sqrt{1,2}=1{,}0955$ (с точностью до $0{,}7\cdot 10^{-4}$). **7.** $\ln\frac{2}{3}=-0{,}4055$. Пояснение. Имеем $\ln\frac{2}{3}=\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\ldots-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^n}-\frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}\times$ $\times\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^{n+1}$. Так как ξ заключено между 0 и $-\frac{1}{3}$, то $\xi>-\frac{1}{3}$; значит, $1+\xi>\frac{2}{3}$. Поэтому

$$\frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

При $n=9$ остаток заведомо меньше, чем $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^{10}}<10^{-4}$. **8.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{e}+\sqrt{\frac{1}{e}}\right)=$ $=1{,}12763$; $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}$. Указание. Так как $0<\xi<\frac{1}{2}$, то $1<e^{\xi}<2$ и $\frac{1}{2}<e^{-\xi}<1$. Следовательно, $\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}<\frac{3}{2}$. **9.** $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right]+$ $+\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\left[\frac{1}{(1+\xi)^{2m+1}}+\frac{1}{(1-\xi)^{2m+1}}\right]$; $\ln 2=0{,}6931$. Указание. В выражении $\frac{1}{(1+\xi)^{2m+1}}+\frac{1}{(1-\xi)^{2m+1}}$ первое слагаемое увеличивается, если число ξ заменить его нижней границей 0, а второе увеличивается, если заменить ξ его верхней границей $\frac{1}{3}$. Следовательно, остаточный член заведомо меньше чем

$$\frac{1}{(2m+1)\,3^{2m+1}}\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2m+1}\right]=\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{3^{2m+1}}+\frac{1}{2^{2m+1}}\right).$$

Здесь первое слагаемое мало по сравнению со вторым. Поэтому достаточно проследить, чтобы $\frac{1}{(2m+1)\,2^{2m+1}}$ стало меньше чем 10^{-4}. Это впервые достигается при $2m+1=11$. Требуемая степень точности достигается суммированием пяти членов (ср. § 119, пример 3).

10. Формула Тейлора 3-го порядка:

$$x^5=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5\xi(x-1)^4$$

(ξ — некоторое число, лежащее между 1 и x). Формула Тейлора 5-го порядка:

$$x^5=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5.$$

Остаточный член равен нулю. Таковы же все формулы Тейлора более высоких порядков. В частности, формула 12-го порядка тоже содержит 6 (не равных нулю) членов.

§ 124а

1. $\alpha_1=-2{,}66$; $\alpha_2=0{,}52$; $\alpha_3=2{,}15$. 2. $\alpha_1=-3{,}4$; $\alpha_2=2{,}9$.

§ 125а

1. Единственный корень $\alpha=2{,}09$. Пояснение. При графическом решении лучше применить второй способ.

2. $\alpha=2{,}741$. Пояснение. Если за первоначальный промежуток изоляции принять промежуток (2; 3) (как в примере 2 § 125), то требуемой степени точности можно достичь на третьем шаге.

§ 126а

1. $\alpha=2{,}0946$. Пояснение. Требуемой степени точности можно достигнуть на втором шаге (сравните с решением того же уравнения по способу хорд). 2. $\alpha=0{,}44$. 3. $\alpha=2{,}506$.

§ 127а

1. $\alpha=1{,}0448$. Пояснение. Требуемой степени точности можно достигнуть на втором шаге.

2. $\alpha=2{,}0945515$. Пояснение. Этой степени точности и даже более высокой (до 10^{-9}) можно достигнуть на втором шаге, если за начальный промежуток изоляции принять промежуток (2; 2,1).

§ 129а

1. $7X-Y-15=0$. 2. $\sqrt{3}X-2Y+a\left(1-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)=0$. 3. $3X-Y+2a=0$, $3X-Y-2a=0$; $Y=0$. 4. $X\sqrt{3}-Y+a\left(2-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)=0$; $Y-2a=0$.

5. $8X+16Y+1=0$. Указание. Точка касания определяется из условия параллельности касательной и прямой $x+2y-3=0$. 6. $4X+Y-4a=0$. 7. $Y=2\pi(x-a)$. 8. $\frac{4a}{\sqrt{17}}\approx 0{,}970a$. 9. Если циклоиду представить уравнениями $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, то уравнение касательной будет $\frac{X-a(t-\sin t)}{1-\cos t}=\frac{Y-a(1-\cos t)}{\sin t}$. Точка $E(at,\ 2a)$ лежит на этой касательной.

§ 130а

1. $4X+6Y+7=0$. 2. $2Y+X=0$. 3. $\pm 96X+36\sqrt{3}Y+5\sqrt{3}a=0$. 4. $\pm X+\sqrt{\frac{2}{e}}Y+\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)=0$. 5. $(4-\pi)X+(4+\pi)Y-a\pi\sqrt{2}=0$. 6. $X-\sqrt{3}Y=0$. 7. $119X-140Y-342a=0$. 8. Имеем $|MP_1|=|MP|\cos\alpha$, где α — острый угол, образуемый нормалью MN с осью Oy или, что то же, острый угол, образуемый касательной с осью Ox. Следовательно,

$$|MP_1|=|y|\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=a.$$

§ 131а

1. $x_C=-\frac{11}{2}a$; $y_C=\frac{16}{3}a$; $R=\frac{13\sqrt{13}}{6}a\approx 7{,}81a$. 2. $x_C=-2a$; $y_C=3a$; $R=2\sqrt{2}a\approx 2{,}83a$. 3. $x_C=\frac{3\sqrt{2}}{8}a\approx 0{,}53a$; $y_C=-\frac{3\sqrt{2}}{4}a\approx -1{,}06a$;

$$R=\frac{5\sqrt{10}}{8}a\approx 1{,}98a.$$

4. $x_C=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\approx -0{,}71$; $y_C=-\sqrt{2}\approx -1{,}41$; $R=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}60$.

5. Центр кривизны C лежит на оси гиперболы на расстоянии a от вершины A. 6. $R=2p\sqrt{2}$. 7. $R=\frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. 8. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}\left[\text{в точке } \left(-\frac{a\ln 2}{2},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right]$. 9. $\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{NQ}=NT=x_T-x_N=-a\left(1+e^{2x/a}\right)$; $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{MC}=$ $=x_C-x=-a\left(1+e^{2x/a}\right)$.

Следовательно, $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{NQ}=\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{MC}$. А так как векторы $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{MC}$ коллинеарны, то $|\overrightarrow{NQ}|=|\overrightarrow{MC}|$. 10. $\text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{MD}=\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{NM}=y$;

$$\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{MC}=y_C-y=\left[1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]:\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=$$

$$=\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}:\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=y.$$

Сопоставляя эти выражения, заключаем, что $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{MD}=\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{MC}$. Следовательно, точки D и C совпадают.

§ 133а

1. Эволюта $A'B'$ (рис. 289) цепной линии AB представляется уравнениями $x_C = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$, $y_C = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Указание. Выражение $1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$ можно представить в виде $\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$.

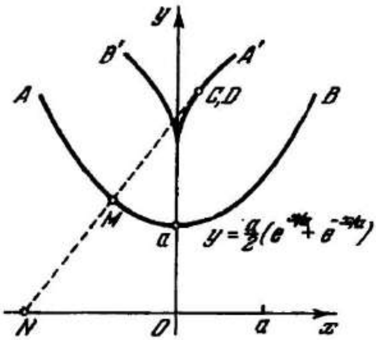


Рис. 289.

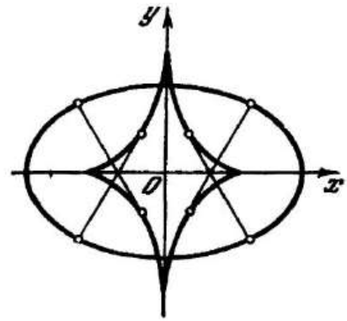


Рис. 290.

2. $(ax_C)^{2/3} + (by_C)^{2/3} = c^{4/3}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ (см. рис. 290). Решение. Дифференцируя уравнение эллипса

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

получаем

$$b^2x\,dx + a^2y\,dy = 0. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) и полагая $d^2x = 0$ (т. е. принимая x за аргумент), получаем

$$a^2y\,d^2y + b^2dx^2 + a^2dy^2 = 0. \tag{3}$$

Подставляя сюда $dy = -\frac{b^2x}{a^2y}dx$, получаем

$$a^2y\,d^2y + \left(b^2 + \frac{b^4x^2}{a^2y^2}\right)dx^2 = 0. \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем соответственно

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Следовательно,

$$x_C = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = \left(1 - \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4b^2}\right)x; \tag{5}$$

$$y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \left(1 - \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^4}\right)y. \tag{6}$$

Чтобы исключить x, y из уравнений (5), (6) и (1), подставим в (5) вместо y^2 выражение $\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$. После упрощений получим

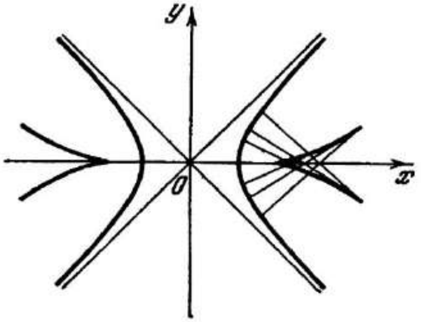


Рис. 291.

$$x_C = \frac{c^2}{a^4}x^3 \tag{7}$$

и аналогично

$$y_C = -\frac{c^2}{b^4}y^3. \tag{8}$$

Разрешив эти уравнения относительно x, y и подставив в (1), получаем уравнение эволюты.

Другое решение. Вычисления значительно упростятся, если представить эллипс параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Тогда получим

$$x_C = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a}\cos t,$$

$$y_C = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{b}\sin t,$$

или

$$x_C = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,$$

$$y_C = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t.$$

Из этих уравнений можно исключить параметр t, пользуясь тождеством $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

3. $(ax_C)^{2/3} - (by_C)^{2/3} = c^{4/3}$ $(c^2 = a^2 + b^2)$ (см. рис. 291). Указание. Гиперболу можно представить параметрическими уравнениями $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\operatorname{tg} t$.

4. Эволюта кардиоиды

$$x = a(1 + \cos t)\cos t; \quad y = a(1 + \cos t)\sin t \tag{9}$$

представляется уравнениями

$$x_C = \frac{a}{3}(\cos t - \cos^2 t + 2); \quad y_C = \frac{a}{3}\sin t\,(1 - \cos t). \tag{10}$$

Указание. Из рис. 292, где $OA = 2a$, видно, какое преобразование координат приведет уравнения (10) к виду (9).

§ 135а

1. $K_A=\frac{a}{b^2}$; $K_B=\frac{b}{a^2}$. 2. $\frac{a}{b^2}$. 3. $\left(\frac{9}{32}p, \pm\frac{3}{4}p\right)$. 4. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0, \qquad (1)$$

откуда

$$dy=-\frac{2x+y}{x+2y}\,dx=-dx.$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем

$$(2x+y)\,d^2x+(x+2y)\,d^2y+2\,(dx^2+dx\,dy+dy^2)=0. \qquad (2)$$

Приняв x за аргумент, получаем $d^2x=0$ и, подставив в (2) значения $x=1$, $y=1$, $dy=-dx$, находим $3d^2y+2dx^2=0$, откуда $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{3}$. Подставив значения $y'=-1$, $y''=-\frac{2}{3}$ в формулу $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$, получаем $K=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

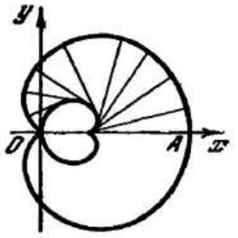


Рис. 292.

§ 143а

1. В точках $u=\pm a$ данная линия параллельна плоскости yOz; в точке $u=0$ — плоскости xOz. 2. В точках $u_1=-a$ и $u_2=2a$. 3. $u=-a$. 4. $X+Z=0$. 5. Циклоида $x=a\,(u-\sin u)$, $y=a\,(1-\cos u)$.

$$6.\quad \frac{X-a\,(u-\sin u)}{1-\cos u}=\frac{Y-a(1-\cos u)}{\sin u}=\frac{Z-4a\sin\frac{u}{2}}{2\cos\frac{u}{2}};\ \gamma=\frac{u}{2}.$$

7. Данная линия пересекает плоскость $y=z$ в четырех точках $A\,(a;\ a\sqrt{2};\ a\sqrt{2})$, $B\,(a;\ -a\sqrt{2};\ -a\sqrt{2})$, $C\,(-a;\ a\sqrt{2};\ a\sqrt{2})$, $D\,(-a;\ -a\sqrt{2};\ -a\sqrt{2})$. В каждой из этих точек касательная образует с осью Oz угол 60°. Пояснение. Дифференцируя уравнения данной линии, получаем $x\,dx+z\,dz=0$, $y\,dy+z\,dz=0$. Направляющие коэффициенты касательной соответственно пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz.

8. В обеих точках искомый угол удовлетворяет соотношению $|\cos\gamma|=$ $=\sqrt{\frac{3}{7}}$. 9. $h=2\pi a\operatorname{tg}5°$.

10. Эвольвента окружности основания. Решение. Уравнения касательной к винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$ в произвольной точке M суть

$$\frac{X-a\cos t}{-\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{\cos t}=\frac{Z-at}{1}. \qquad (1)$$

Касательная пересекает плоскость основания в некоторой точке N, где $Z=0$.

Из уравнений (1), полагая $Z=0$, находим две остальные координаты точки N

$$X=a\cos t+at\sin t;\quad Y=a\sin t-at\cos t. \qquad (2)$$

Когда точка M описывает винтовую линию, точка N описывает на плоскости линию, представляемую уравнениями (2), где t рассматривается как параметр. Параметрические уравнения (2) представляют (§ 133) эвольвенту окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

11. Эллипс с полуосями $4a$, $3a$. 12. Эллипс, подобный годографу вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$. Коэффициент подобия $\frac{2\pi}{T}$. 13. $\frac{\pi a\sqrt{57}}{T}$.

14. Траектория

$$x=v_0t\cos\varphi\cos\psi;\quad y=v_0t\cos\varphi\sin\psi;$$

$$z=v_0t\sin\varphi-\frac{1}{2}gt^2$$

представляет параболу, лежащую в плоскости $x\sin\psi-y\cos\psi=0$ (в чем убеждаемся, совершив поворот системы координат на угол ψ около оси Oz). Скорость $v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_0^2\cos^2\varphi+(v_0\sin\varphi-gt)^2}$. Ускорение $w=|\boldsymbol{w}|=g$.

15. $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}''$. 16. $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\frac{d^2r}{dt^2}$. 17. $\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{\sqrt{\boldsymbol{r}^2}}$. 18. $-\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{\boldsymbol{r}^2})^3}$.

§ 149a

1. $z=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Область D изменения аргументов изображена на рис. 293. Радиусы OP, OQ в область D не включаются (если ограничиться «настоящими» треугольниками), дуга $\overset{\frown}{PQ}$ включается.

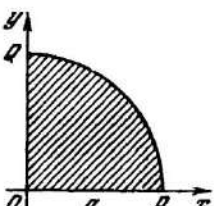


Рис. 293.

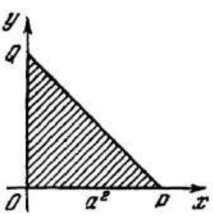


Рис. 294.

2. $z=\frac{xy}{x+y}$; область D изображена на рис. 294; отрезки OP, OQ в область D не включаются.

3. Область D изображена на рис. 295. Поверхность, изображающая функцию, есть верхняя половина эллипсоида вращения $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. Линии уровня — эллипсы, подобные эллипсу $ABA'B'$; их оси лежат на соответствующих осях координат.

4. Область D определяется неравенством $x+y \geqslant 0$ (полуплоскость, заштрихованная на рис. 296). Линии уровня — прямые, параллельные uv; их сеть сгущается по мере приближения к uv.

Данная функция изображается верхней половиной параболического цилиндра $z^2 = a(x+y)$. Пояснение. При повороте осей Ox, Oy на $45°$ около оси Oz координаты x, y преобразуются по формулам

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),$$

и поверхность $z^2 = a(x+y)$ представится уравнением $z^2 = ax'\sqrt{2}$.

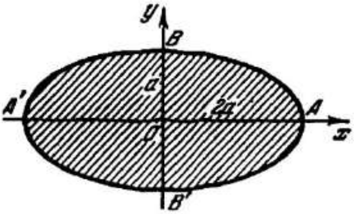


Рис. 295.

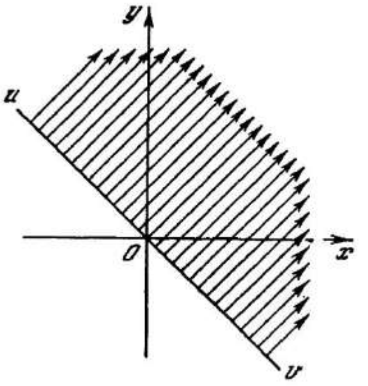


Рис. 296.

5. Область существования — вся плоскость xOy, за исключением точки $O(0; 0)$. Линии уровня — окружности с центром O; их сеть сгущается по мере приближения к O. Поверхность $z = \dfrac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ получается вращением верхней ветви гиперболы $xz = a^2$ около оси Oz.

6. Внутренность круга радиуса a с центром в начале координат.

7. $z = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

8. Линии уровня — прямые, перпендикулярные к прямой F_1F_2. Прямая $z=0$ делит отрезок F_1F_2 пополам; прямые $z = \pm c$ делят F_1F_2 в отношениях $5:3$ и $3 \cdot 5$.

9. Область D — все пространство, за исключением сферической поверхности радиуса OA с центром в точке O. Искомая поверхность уровня есть сфера радиуса $\dfrac{OA}{\sqrt{2}}$ с центром в точке O. Функция u представляется формулой

$$u = \frac{a^2}{a^2-(x^2+y^2+z^2)},$$

где $a = |OA|$.

10. Поверхности уровня — сферы с общим центром в середине отрезка AB.

§ 151a

1. 2. Решение. $\lim\limits_{\substack{xy \to 0 \\ y \to 2}} \left(y \dfrac{\sin xy}{xy} \right) = 2 \lim\limits_{xy \to 0} \dfrac{\sin xy}{xy} = 2$. **2.** Предел не существует. **3.** 0. **4.** ∞.

§ 153а

1. α и β несравнимы. 2. α имеет высший порядок относительно β. 3. α и β несравнимы. 4. α имеет высший порядок относительно β.

§ 155а

1. $f'_x(1;\ 3)=-18$; $f'_y(1;\ 3)=-26$. 2. $f'_x(2;\ 4)=-\frac{3}{4}$; $f'_y(2;\ 4)=\frac{3}{8}$. 3. $f'_x(0;\ 2)=-\frac{1}{2}$; $f'_y(0;\ 2)=0$. 4. $u'_x(1;\ 2;\ -1)=-\frac{1}{6\sqrt{6}}$, $u'_y(1;\ 2;\ -1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, $u'_z(1;\ 2;\ -1)=\frac{1}{6\sqrt{6}}$. 5. 1:0:4

6. $$S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)};\quad \frac{\partial S}{\partial\alpha}=\frac{c^2\sin\beta}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=$$
$$=\frac{c^2\sin\beta}{2}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{c^2\sin\beta}{2}\frac{\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2=\frac{1}{2}b^2.$$

§ 163а

1. $d_xu=\frac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_yu=\frac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_zu=\frac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$. 2. $du=\frac{3x^2\,dx+6y^2dy-3z^2dz}{x^3+2y^3-z^3}$. 3. $du=y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz$. 4. $du=\frac{2(s\,dt-t\,ds)}{(s-t)^2}$. 5. $du=(x\,dy+y\,dx)\sin(x+y)+xy\cos(x+y)(dx+dy)$. 6. $du=0$. Данная функция есть постоянная величина, равная $\frac{\pi}{2}$. 7. $du=\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$. 8. $\frac{\partial u}{\partial t}=s\cos(st)$; $\frac{\partial u}{\partial s}=t\cos(st)$. 9. $u'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$; $u'_y=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. 10. $u'_x=yz(xy)^{z-1}$; $u'_y=xz(xy)^{z-1}$; $u'_z=(xy)^z\ln(xy)$. 11. $u'_x=yz^{xy}\ln z$; $u'_y=xz^{xy}\ln z$; $u'_z=xyz^{xy-1}$. 12. $f'_x(2;\ 1)=\frac{1}{2}$; $f'_y(2;\ 1)=0$. 13. $\varphi'_x(1;\ 2;\ 0)=1$; $\varphi'_y(1;2;\ 0)=\frac{1}{2}$; $\varphi'_z(1;\ 2;\ 0)=\frac{1}{2}$.

§ 164а

1. $\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x)$. 2. $\frac{dz}{dx}=x^y\left[\varphi'(x)\ln x+\frac{y}{x}\right]$. 3. $\frac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{1+y'^2}\right)=2x\sqrt{1+y'^2}+\frac{x^2y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}$. 4. $\frac{\partial}{\partial y'}\left(x^2\sqrt{1+y'^2}\right)=x^2\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

§ 165а

1. Имеем

$$\Delta c = \sqrt{(11,75)^2+(5,2)^2} - \sqrt{12^2+5^2} \approx -0,151;$$

$$dc = d\sqrt{a^2+b^2} = \frac{a\,da + b\,db}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{5\cdot 0,2 - 12\cdot 0,25}{13} \approx -0,154.$$

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; отсюда $a\,da = b\,db + c\,dc - b\cos A\,dc - c\cos A\,db + bc\sin A\,dA \approx 20\cdot 1 + 30\,(-0,5) - [20\cdot(-0,5) + 30\cdot 1]\frac{\sqrt{2}}{2} + 20\cdot 30\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0,02 \approx -0,64$; $da \approx -\frac{0,64}{a} = -0,03$.

3. $\alpha+\beta$. 4. 0,15%. 5. а) $1+2x+3y$; б) $1+x+y$; в) xy.
6. а) 108,972; б) 2,95. 7. 10,2 $м^3$.

§ 169а

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{4}$. 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e-1}$. 3. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -5$.
4. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y\,(x+z)}$.

§ 170а

1. Касательная $X+Y=2$; нормаль $X-Y=2$. Особых точек нет [функция $f(x;\,y) = x_1^2 + xy - y^2 - 2x$ всюду дифференцируема; частные производные f'_x, f'_y обращаются в нуль обе сразу лишь в точке (0,8; 0,4), а она не лежит на данной линии].

2. Касательная $X+3Y=4$; нормаль $Y-3X=28$. Особая точка (0; 0).

3. Касательная $x^{-\frac{1}{3}}X + y^{-\frac{1}{3}}Y = a^{\frac{2}{3}}$; нормаль $x^{\frac{1}{3}}(X-x) = y^{\frac{1}{3}}(Y-y)$. Точки $(0;\ a)$, $(0;\ -a)$, $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$ особые, так как функция $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$ в этих точках недифференцируема.

4. Полюс улитки Паскаля является особой ее точкой.

§ 171а

1. Касательная плоскость $X+Y-2Z=0$. Нормаль $X-a = Y-a = -\frac{Z-a}{2}$. Точка (0; 0; 0) особая (вершина конуса второго порядка); каноническое уравнение получается после поворота осей Ox, Oy на 45° около оси Oz.

2. Касательная плоскость $X+Y-Z=a$. Нормаль $X-a = Y-a = -(Z-a)$. Данная поверхность (гиперболический параболоид) особых точек не имеет.

3. Касательная плоскость $X+Y+3Z=9a$. Нормаль $X-a = Y-2a = \frac{Z-2a}{3}$. Особых точек нет.

4. Касательная плоскость $x^{n-1}X + y^{n-1}Y + z^{n-1}Z = a^n$. Нормаль $\frac{X-x}{x^{n-1}} = \frac{Y-y}{y^{n-1}} = \frac{Z-z}{z^{n-1}}$. Особых точек нет.

5. Касательная плоскость $X-4Y=14a$. Нормаль $X-2a=\frac{Y+3a}{-4}=$ $=\frac{Z-3a}{0}$. Данная поверхность — гиперболический цилиндр.

§ 173а

1. Градиент равнонаправлен с вектором $\overrightarrow{OM}$; длина его равна 1 (в произвольной точке M):

$$\operatorname{grad} f(M)=\frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|}.$$

2. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (начало координат — в точке O). Координаты градиента суть $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$:

$$\operatorname{grad} f(M)=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. $\varphi(M)=2x^2+2y^2+\frac{1}{2}$ (начало координат в середине отрезка F_1F_2) $\operatorname{grad}\varphi(M)=4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}$.

4. $\operatorname{grad} y=\boldsymbol{j}$. 5. $f'_l(3;\ 4)=3\sqrt{3}-4$.

6. Градиент численно равен 1 и равнонаправлен с осью Oy. Искомая ось имеет противоположное направление; производная по этому направлению равна -1.

7. Искомая производная равна нулю, т. е. прямая M_1M_2 в точке M_1 касается соответствующей линии уровня. Пояснение. Находим проекцию градиента $12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}$ на вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

8. Градиент направлен к точке O, где находится заряд; численная его величина есть $\frac{e}{r^2}$; $\operatorname{grad} v$ есть напряженность электростатического поля, создаваемого зарядом e.

9. Градиент направлен по внешней нормали к эллипсу. В данной точке M_0 (как и во всякой точке, лежащей на прямой F_1F_2 вне отрезка F_1F_2) длина градиента равна 2.

Пояснение. Во всякой точке $M_0(a_0;\ 0)$, лежащей на продолжении отрезка F_1F_2, нормаль к соответствующему эллипсу направлена вдоль оси F_1F_2. По условию значение $f(M_0)$ есть $2|a_0|$. При переходе в соседнюю точку M_1 прямой F_1F_2 смещение $|M_0M_1|$ равно $|OM_1-OM_0|=|a_1-a_0|=$ $=|\Delta a|$, а соответствующее приращение функции $f(M)$ есть $2|\Delta a_0|$.

10. $f(M)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (ось абсцисс направлена вдоль отрезка $F_1F_2=2c$; начало координат в середине этого отрезка);

$$\operatorname{grad} f(M)=\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{x+c}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}\,\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}\,\boldsymbol{j}.$$

§ 176а

1. $d^2u = \dfrac{abc}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}(y^2dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2dy^2).$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}\ ;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}\,.$$

2. $d^2u = \dfrac{(y^2+z^2)\,dx^2 + (z^2+x^2)\,dy^2 + (x^2+y^2)\,dz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = -\frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

3. $d^2u = \dfrac{2xy\,dx^2 + 2\,(y^2-x^2)\,dx\,dy - 2xy\,dy^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$

4. $d^2u = 3\,\dfrac{(2x^2+y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (x^2+2y^2)\,dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$

5. $d^2u = \dfrac{-4y\,dx^2 + 4\,(x-y)\,dx\,dy + 4x\,dy^2}{(x+y)^3}\,.$

6. $d^2z = 2\cos 2\,(ax+by)\,(a^2\,dx^2 + 2ab\,dx\,dy + b^2\,dy^2).$

7. $d^3u = 6dx^3 + 6dx^2\,dy + 6dy^3$. Отсюда

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6;\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 2;\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 0;\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6.$$

8. $d^3u = -\dfrac{6y\,dx^3}{x^4} + \dfrac{6dx^2\,dy}{x^3}\,;$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\frac{6y}{x^4}\ ;\ \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x\,\partial y} = \frac{2}{x^3}\ ;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

9. 0. 10. 0.

§ 179а

1. $z_{\text{наиб}} = f\,(1;\ 2) = 17;\ z_{\text{наим}} = f\,(1;\ 0) = -3.$
2. $z_{\text{наиб}} = f\,(2;\ 0) = f\,(-2;\ 0) = 4;$
   $z_{\text{наим}} = f\,(0;\ 2) = f\,(0;\ -2) = -4.$

Указание. При разыскании наибольшего (наименьшего) граничного значения можно выразить одну из координат x, y граничной точки через другую координату (из уравнения окружности), но тогда надо учитывать значения функции на концах соответствующего промежутка. Если же обе координаты x, y выразить через подходящий параметр (скажем, через полярный угол), то достаточно найти критические точки.

3. $z_{наиб} = f(2; 1) = 4$; $z_{наим} = f(4; 2) = -64$.

4. $6V^{2/3}$; соответствующий параллелепипед есть куб с ребром $a = V^{1/3}$.

5. $\frac{1}{256}a^4$; число a разбивается на 4 равные части. Пояснение. Требуется найти наибольшее значение произведения $u = f(x, y, z) = xyz[a-(x+y+z)]$, где каждый сомножитель неотрицательный:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x+y+z \leqslant a.$$

Область D изменения аргумента есть тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$. Граница тетраэдра тоже входит в область D. На каждой грани один из четырех сомножителей равен нулю. Поэтому наибольшего значения функция $f(x, y, z)$ достигает внутри тетраэдра.

Составляем полный дифференциал

$$du = [a-(x+y+z)]\,d(xyz) - xyz\,(dx+dy+dz);$$

получаем уравнения

$$a-(x+y+z)=x; \quad a-(x+y+z)=y; \quad a-(x+y+z)=z,$$

откуда

$$x=y=z=\frac{a}{4}; \quad a-(x+y+z)=\frac{a}{4}.$$

6. Точка M лежит на высоте CD и делит ее в отношении $CM:MD=1:1$. Указание. Если оси Ox, Oy направить по катетам CA, CB, то задача сведется к разысканию точки, где функция $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x+y-a)^2}{2}$ имеет наименьшее значение.

7. $V_{наим} = \frac{9}{2}abc$. Указание. Направим оси Ox, Oy, Oz по ребрам OA, OB, OC. Отрезки OA', OB', OC', отсекаемые плоскостью P на осях Ox, Oy, Oz, обозначаем a_1, b_1, c_1. Они связаны соотношением

$$\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1} = 1, \tag{1}$$

выражающим, что точка $D(a, b, c)$ лежит на плоскости P. Требуется найти наименьшее значение величины

$$V = \frac{1}{6}a_1b_1c_1, \tag{2}$$

где a_1, b_1, c_1 связаны соотношением (1).

Дальнейшие вычисления облегчатся, если заметить, что при наименьшем значении величины $V = \frac{1}{6}a_1b_1c_1$ величина $\frac{abc}{6V} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} = \frac{a}{a_1}\frac{b}{b_1}\frac{c}{c_1}$ получает свое *наибольшее* значение. Тогда задача сводится к следующей: три положительные величины

$$\frac{a}{a_1} = u, \quad \frac{b}{b_1} = v, \quad \frac{c}{c_1} = w \tag{3}$$

связаны соотношением

$$u + v + w = 1. \tag{1a}$$

Требуется найти значения u, v, w, при которых произведение $S = uvw$ $[= uv(1-u-v)]$ имеет наибольшее значение.

Аналогичную задачу (для случая четырех сомножителей) мы уже решали (см. задачу 5). Единственное различие состоит в том, что в задаче 5 сомножители могли иметь и нулевые, а не только положительные значения. Но и в данной задаче, отвлекаясь от ее геометрического смысла, мы можем расширить область D изменения аргументов (внутренность треугольника, ограниченного прямыми $u=0$, $v=0$, $1-u-v=0$), присоединив к ней ее границу. Рассуждая, как в задаче 5, найдем, что в расширенной области D_1 функция S достигает наибольшего значения $S_{\text{наиб}}=\frac{1}{27}$ во *внутренней* точке $u=\frac{1}{3}$, $v=\frac{1}{3}$. Значит, в области D значение $\frac{1}{27}$ и подавно является наибольшим.

Подставив в (3) значения $u=\frac{1}{3}$, $v=\frac{1}{3}$, $w=\frac{1}{3}$, получим

$$a_1=3a, \quad b_1=3b, \quad c_1=3c.$$

Эти значения подставляем в (2).

8. $V_{\text{наиб}}=\frac{\pi}{12}p^3$. Треугольник равнобедренный; основание $\left(\text{в } 1\frac{1}{2} \text{ раза}\right.$ меньшее боковой стороны$\left.\right)$ служит осью вращения. Пояснение. Пусть сторона $c=AB$ треугольника ABC служит осью вращения; $h=CD$ — высота, опущенная из вершины C. Объем V тела вращения есть

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2\,|\,AD+DB\,|=\frac{1}{3}\pi h^2 c$$

(AD, DB — направленные отрезки, так что точка D может лежать и на продолжении стороны AB).

Используя формулу Герона, находим

$$h^2=\left(\frac{2S}{c}\right)^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{4}{3}\pi p\,\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{c}. \tag{4}$$

Можно принять за независимые переменные a, b и выразить через них сторону c. Но лучше ввести новые переменные

$$p-a=u, \quad p-b=v, \quad p-c=w. \tag{5}$$

Они связаны соотношением $u+v+w=p$.

Формула (4) принимает вид

$$V=\frac{4}{3}\pi p\,\frac{uvw}{p-w}=\frac{4}{3}\pi p\,\frac{uv\,[p-(u+v)]}{u+v}. \tag{4a}$$

По смыслу задачи каждая из величин u, v, $p-(u+v)=w$ положительна. Область D изменения аргументов есть внутренность треугольника, ограниченного прямыми $u=0$, $v=0$, $p-(u+v)=0$. Расширим эту область, присоединив к ней ее границу (см. пояснение к задаче 7).

При разыскании экстремальных значений рассматриваются только внутренние точки расширенной области, а в этих точках функция (4а) дифференцируема. Поэтому достаточно решить систему уравнений $V'_u=0$, $V'_v=0$; последняя сводится к системе

$$pu-(u+v)^2=0; \quad pv-(u+v)^2=0,$$

имеющей в области D единственное решение

$$u=v=\frac{p}{4}.$$

Подставляя эти значения в (4а), получаем $V_{\text{наиб}}=\frac{\pi}{12}p^3$. Стороны a, b, c треугольника ABC находятся из формул (5).

9. Точка M_0 — центр тяжести четырех равных масс, сосредоточенных в точках M_1, M_2, M_3, M_4. Искомая наименьшая величина вчетверо меньше суммы квадратов шести ребер тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$.

Пояснение. Рассуждая, как в примере 3 § 179, найдем для радиуса вектора $\boldsymbol{r}_0$ точки M_0 выражение

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$ — радиусы-векторы точек M_1, M_2, M_3, M_4.

Сумма $S_0=M_0M_1^2+M_0M_2^2+M_0M_3^2+M_0M_4^2$ представляется выражением

$$S_0=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)^2+(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)^2+(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_0)^2+(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_0)^2=$$

$$=\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_2^2+\boldsymbol{r}_3^2+\boldsymbol{r}_4^2-2(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)\boldsymbol{r}_0+4\boldsymbol{r}_0^2.$$

Подставив сюда выражение (6), получим

$$S_0=\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_2^2+\boldsymbol{r}_3^2+\boldsymbol{r}_4^2-\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left[3(\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_2^2+\boldsymbol{r}_3^2+\boldsymbol{r}_4^2)-2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_4)\right].$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равняется сумме квадратов шести ребер тетраэдра:

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2+(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)^2+(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4)^2+(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)^2+(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4)^2+(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4)^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица натуральных логарифмов [1]

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499

[1] О том, как найти $\ln x$, когда x не содержится среди аргументов таблицы, см. стр. 580.

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8215	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

Примечание. Натуральный логарифм числа, не содержащегося среди аргументов таблицы, находится следующим образом. Пусть ищется $\ln 753$. Имеем: $\ln 753 = \ln(7{,}53 \cdot 10^2) = \ln 7{,}53 + 2 \ln 10$. Первое слагаемое находим по таблице натуральных логарифмов, второе — по таблице III. Получаем: $\ln 753 = 2{,}0189 + 4{,}6052 = 6{,}6241$. Таким же образом находим $\ln 0{,}00753 = \ln(7{,}53 \cdot 10^{-3}) = 2{,}0189 - 6{,}9078 = -4{,}8889$.

2. Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным (таблица умножения на $M = \log e = 0{,}4342945\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	4,3430	8,6859	13,0288	17,3718	21,7147	26,0577	30,4006	34,7436	39,0865
1	0,4343	4,7772	9,1202	13,4631	17,8061	22,1490	26,4920	30,8349	35,1779	39,5208
2	0,8686	5,2115	9,5545	13,8974	18,2404	22,5833	26,9263	31,2692	35,6122	39,9551
3	1,3029	5,6458	9,9888	14,3317	18,6747	23,0176	27,3606	31,7035	36,0464	40,3894
4	1,7372	6,0801	10,4231	14,7660	19,1090	23,4519	27,7948	32,1378	36,4807	40,8237
5	2,1715	6,5144	10,8574	15,2003	19,5433	23,8862	28,2291	32,5721	36,9150	41,2580
6	2,6058	6,9487	11,2917	15,6346	19,9775	24,3205	28,6634	33,0064	37,3493	41,6923
7	3,0401	7,3830	11,7260	16,0689	20,4118	24,7548	29,0977	33,4407	37,7836	42,1266
8	3,4744	7,8173	12,1602	16,5032	20,8461	25,1891	29,5320	33,8750	38,2179	42,5609
9	3,9086	8,2516	12,5945	16,9375	21,2804	25,6234	29,9663	34,3093	38,6522	42,9952

3. Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным (таблица умножения на $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}302585\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	23,026	46,052	69,078	92,103	115,129	138,155	161,181	184,207	207,233
1	2,3026	25,328	48,354	71,380	94,406	117,431	140,458	163,484	186,509	209,535
2	4,6052	27,631	50,657	73,683	96,709	119,734	142,760	165,786	188,812	211,838
3	6,9078	29,934	52,959	75,985	99,011	122,037	145,062	166,089	191,115	214,140
4	9,2103	32,236	55,262	78,288	101,314	124,340	147,365	170,391	193,417	216,443
5	11,513	34,539	57,565	80,590	103,616	126,642	149,668	172,694	195,720	218,746
6	13,816	36,841	59,867	82,893	105,919	128,945	151,971	174,997	198,022	221,048
7	16,118	39,144	62,170	85,196	108,221	131,247	154,273	177,299	200,325	223,351
8	18,421	41,447	64,472	87,498	110,524	133,550	156,576	179,602	202,627	225,653
9	20,723	43,749	66,775	89,801	112,827	135,853	158,878	181,904	204,930	227,956

4. Показательная функция e^x (натуральные антилогарифмы)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3,0042	3,0344	3,0649	3,0957	3,1268	3,1582	3,1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3,4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3,7062	3,7434	3,7810	3,8190	3,8574	3,8962	3,9354	3,9749	4,0149
1,4	4,0552	4,0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4,3929	4,4371
1,5	4,4817	4,5267	4,5722	4,6182	4,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5,0028	5,0531	5,1039	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5,3656	5,4195
1,7	5,4739	5,5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,9299	5,9895
1,8	6,0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6,4237	6,4883	6,5535	6,6194
1,9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6,9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7,6906	7,7679	7,8460	7,9248	8,0045	8,0849
2,1	8,1662	8,2482	8,3311	8,4149	8,4994	8,5849	8,6711	8,7583	8,8463	8,9352
2,2	9,0250	9,1157	9,2073	9,2999	9,3933	9,4877	9,5831	9,6794	9,7767	9,8749
2,3	9,9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15,029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16,777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17,814	17,993
2,9	18,174	18,357	18,541	18,728	18,916	19,106	19,298	19,492	19,688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21,328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22,421	22,646	22,874	23,104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25,028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26,576	26,843
3,3	27,113	27,385	27,660	27,938	28,219	28,503	28,789	29,079	29,371	29,666
3,4	29,964	30,265	30,569	30,877	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33,784	34,124	34,467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3,6	36,598	36,966	37,338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3,7	40,447	40,854	41,264	41,679	42,098	42,521	42,948	43,380	43,816	44,256
3,8	44,701	45,150	45,604	46,063	46,525	46,993	47,465	47,942	48,424	48,911
3,9	49,402	49,899	50,400	50,907	51,419	51,935	52,457	52,985	53,517	54,055

5. Перевод градусной меры в радианную
(Длины дуг окружности радиуса 1)

Градусы	Радианы (дуга)	Градусы	Радианы (дуга)	Градусы	Радианы (дуга)	Минуты	Радианы (дуга)	Минуты	Радианы (дуга)
0	0,0000	35	0,6109	70	1,2217	0	0,0000	30	0,0087
1	0,0175	36	0,6283	71	1,2392	1	0,0003	31	0,0090
2	0,0349	37	0,6458	72	1,2566	2	0,0006	32	0,0093
3	0,0524	38	0,6632	73	1,2741	3	0,0009	33	0,0096
4	0,0698	39	0,6807	74	1,2915	4	0,0012	34	0,0099
5	0,0873	40	0,6981	75	1,3090	5	0,0015	35	0,0102
6	0,1047	41	0,7156	76	1,3265	6	0,0017	36	0,0105
7	0,1222	42	0,7330	77	1,3439	7	0,0020	37	0,0108
8	0,1396	43	0,7505	78	1,3614	8	0,0023	38	0,0111
9	0,1571	44	0,7679	79	1,3788	9	0,0026	39	0,0113
10	0,1745	45	0,7854	80	1,3963	10	0,0029	40	0,0116
11	0,1920	46	0,8029	81	1,4137	11	0,0032	41	0,0119
12	0,2094	47	0,8203	82	1,4312	12	0,0035	42	0,0122
13	0,2269	48	0,8378	83	1,4486	13	0,0038	43	0,0125
14	0,2443	49	0,8552	84	1,4661	14	0,0041	44	0,0128
15	0,2618	50	0,8727	85	1,4835	15	0,0044	45	0,0131
16	0,2793	51	0,8901	86	1,5010	16	0,0047	46	0,0134
17	0,2967	52	0,9076	87	1,5184	17	0,0049	47	0,0137
18	0,3142	53	0,9250	88	1,5359	18	0,0052	48	0,0140
19	0,3316	54	0,9425	89	1,5533	19	0,0055	49	0,0143
20	0,3491	55	0,9599	90	1,5708	20	0,0058	50	0,0145
21	0,3665	56	0,9774	91	1,5882	21	0,0061	51	0,0148
22	0,3840	57	0,9948	92	1,6057	22	0,0064	52	0,0151
23	0,4014	58	1,0123	93	1,6232	23	0,0067	53	0,0154
24	0,4189	59	1,0297	94	1,6406	24	0,0070	54	0,0157
25	0,4363	60	1,0472	95	1,6581	25	0,0073	55	0,0160
26	0,4538	61	1,0647	96	1,6755	26	0,0076	56	0,0163
27	0,4712	62	1,0821	97	1,6930	27	0,0079	57	0,0166
28	0,4887	63	1,0996	98	1,7104	28	0,0081	58	0,0169
29	0,5061	64	1,1170	99	1,7279	29	0,0084	59	0,0172
30	0,5236	65	1,1345	100	1,7453				
31	0,5411	66	1,1519	180	3,1416				
32	0,5585	67	1,1694	200	3,4907				
33	0,5760	68	1,1868	300	5,2360				
34	0,5934	69	1,2043	360	6,2832				

6. Перевод радианной меры в градусную

Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Градусы и минуты
1	57°18′	0,4	22°55′	0,06	3°26′	0,008	0°28′
2	114°35′	0,5	28°39′	0,07	4°01′	0,009	0°31′
3	171°53′	0,6	34°23′	0,08	4°35′	0,0001	0°00′
4	229°11′	0,7	40°06′	0,09	5°09′	0,0002	0°01′
5	286°29′	0,8	45°50′	0,001	0°03′	0,0003	0°01′
6	343°46′	0,9	51°34′	0,002	0°07′	0,0004	0°01′
7	401°04′	0,01	0°34′	0,003	0°10′	0,0005	0°02′
8	458°22′	0,02	1°09′	0,004	0°14′	0,0006	0°02′
9	515°40′	0,03	1°43′	0,005	0°17′	0,0007	0°02′
0,1	5°44′	0,04	2°18′	0,006	0°21′	0,0008	0°03′
0,2	11°28′	0,05	2°52′	0,007	0°24′	0,0009	0°03′
0,3	17°11′						

7. Греческий алфавит

Α α	альфа	Ν ν	ню (ни)
Β β	бэта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ τ	тау
Θ ϑ θ	тэта	Φ φ	фи
Ι ι	йота	Χ χ	хи
Κ κ	каппа	Υ υ	юпсилон (ипсилон)
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю (ми)	Ω ω	омега

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Марк Яковлевич Выгодский

Дифференциальное исчисление
(«Основы высшей математики, II»)

М., 1965 г., 592 стр. с илл.

Редактор *Д. П. Полозков*.

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*.
Корректор *А. Ф. Серкина*.

Сдано в набор 3/III 1965 г. Подписано к печати 31/VII 1965 г. Бумага 60×90 1/16. Физ. печ. л. 37. Условн. печ. л. 37. Уч.-изд. л. 33,65. Тираж 50 000 экз. Т-10715. Цена книги 1 р. 11 к. Заказ № 2484.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.