П.С. МОДЕНОВ, А.С. ПАРХОМЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов механико-математических и физических специальностей высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

517.3
М 74
УДК 516

Петр Сергеевич Моденов, Алексей Серапионович Пархоменко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

М., 1976 г., 384 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко.*
Техн. редактор *В. Д. Элькинд.*
Корректор *А. Л. Ипатова.*

Сдано в набор 12/V 1975 г. Подписано к печати 14/XI 1975 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. № 3. Физ. печ. л. 12. Усл. печ. л. 20,16. Уч.-изд. л. 22,22. Тираж 70 000 экз. Цена книги 76 коп. Заказ № 27.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136. Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

М $\dfrac{20203-003}{053(02)-76}$ 17-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК (задачи 1—290)

§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора (задачи 1—31) 11
§ 2. Радиус-вектор (задачи 32—44) 14
§ 3. Прямоугольные и аффинные координаты точек на плоскости и в пространстве (задачи 45—59) 16
1. Координаты точек на плоскости (задачи 45—52) 16
2. Координаты точек в пространстве (задачи 53—59) . . . 17
§ 4. Расстояние между двумя точками. Длина вектора; направляющие косинусы (задачи 60—79) 18
1. Расстояние между двумя точками на плоскости (задачи 60—67) 18
2. Расстояние между двумя точками в пространстве. Длина вектора. Направляющие косинусы (задачи 68—79) . . . 18
§ 5. Деление отрезка в данном отношении (задачи 80—113) . 20
1. Деление отрезка в данном отношении на прямой (задачи 80—89) 20
2. Деление отрезка в данном отношении на плоскости (задачи 90—108) 21
3. Деление отрезка в данном отношении в пространстве (задачи 109—113) 23
§ 6. Полярные координаты. Сферические и цилиндрические координаты (задачи 114—130) 24
1. Полярные координаты на плоскости (задачи 114—123) . 24
2. Сферические и цилиндрические координаты (задачи 124—130) 25
§ 7. Скалярное произведение векторов; угол между векторами (задачи 131—154) 26
§ 8. Векторы на ориентированной плоскости. Площадь треугольника (задачи 155—174) 28
1. Векторы на ориентированной плоскости (задачи 155—170) 28
2. Площадь треугольника (задачи 171—174) 30
§ 9. Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведение (задачи 175—212) 31
§ 10. Скалярное, векторное и смешанное произведение в аффинных координатах (задачи 213—255) 35

1. Скалярное произведение векторов на плоскости (задачи 213—236) 35
2. Скалярное произведение векторов в пространстве; векторное и смешанное произведение (задачи 237—255) . . 38
§ 11. Барицентрические координаты (задачи 256—290) 40
1. Барицентрические координаты на прямой (задачи 256—261) 40
2. Барицентрические координаты на плоскости (задачи 262—279) 41
3. Барицентрические координаты в пространстве (задачи 280—290) 44

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ (задачи 291—362)

§ 1. Уравнения линий на плоскости (задачи 291—341) 48
§ 2. Уравнения поверхностей и линий в пространстве (задачи 342—362) 54

ГЛАВА III

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ (задачи 363—490)

§ 1. Составление уравнения прямой по различным ее заданиям (задачи 363—380) 57
§ 2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (задачи 381—395) 59
§ 3. Взаимное расположение трех прямых на плоскости. Пучок прямых (задачи 396—403) 61
§ 4. Расположение точек относительно прямой (задачи 404—415) 62
§ 5. Условие перпендикулярности двух прямых (задачи 416—429) 63
§ 6. Углы между двумя прямыми. Угол от одной прямой до другой (задачи 430—449) 65
§ 7. Расстояние от точки до прямой (задачи 450—477) 67
§ 8. Метрические задачи на прямую в аффинных координатах (задачи 478—490) 70

ГЛАВА IV

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ (задачи 491—657)

§ 1. Составление уравнений прямых и плоскостей (задачи 491—523) 72
§ 2. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости (задачи 524—544) 76
§ 3. Взаимное расположение трех плоскостей. Пучок плоскостей. Связка плоскостей (задачи 545—555) 81
§ 4. Расположение точек относительно плоскости (задачи 556—566) 84
§ 5. Перпендикулярность прямых и плоскостей (задачи 567—589) 85

§ 6. Углы между прямыми и между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью (задачи 590—602) 87
§ 7. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя прямыми (задачи 603—622) 89
§ 8. Векторные уравнения прямой и плоскости (задачи 623—651) 91
§ 9. Метрические задачи на прямую и плоскость в аффинных координатах (задачи 652—657) 93

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ (задачи 658 — 696)

§ 1. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве (задачи 658—682) 95
1. Преобразование аффинных координат на плоскости (задачи 658—672) 95
2. Преобразование аффинных координат в пространстве (задачи 673—682) 97
§ 2. Преобразование прямоугольных координат на плоскости и в пространстве (задачи 683—696) 99
1. Преобразование прямоугольных координат на плоскости (задачи 683—688) 99
2. Преобразование прямоугольных координат в пространстве (задачи 689—696) 101

ГЛАВА VI

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА (задачи 697 — 940)

§ 1. Окружность (задачи 697—728) 103
§ 2. Эллипс, гипербола, парабола (задачи 729—758) 108
§ 3. Фокусы и директрисы линий второго порядка. Уравнение линии второго порядка в полярных координатах (задачи 759—804) 111
1. Фокусы, директрисы, эксцентриситет (задачи 759—796) 111
2. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (задачи 797—804) 115
§ 4. Определение типа и расположения линии второго порядка по ее общему уравнению. Применение инвариантов (задачи 805—827) 115
§ 5. Касательные к линиям второго порядка (задачи 828—874) 119
§ 6. Центр, диаметры, асимптоты линий второго порядка (задачи 875—926) 123
§ 7. Метрические задачи на линии второго порядка в аффинных координатах (задачи 927—940) 130

ГЛАВА VII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА (задачи 941 — 1152)

§ 1. Сфера (задачи 941—974) 134
§ 2. Цилиндры и конусы второго порядка (задачи 975—995) 138
§ 3. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды (задачи 996—1040) 141
§ 4. Определение типа и расположения поверхности второго

порядка по ее общему уравнению. Применение инвариантов (задачи 1041—1070) 147
§ 5. Касательная плоскость. Прямолинейные образующие (задачи 1071—1103) 155
§ 6. Центр. Диаметральные плоскости; плоскости симметрии и оси симметрии (задачи 1104—1128) 160
§ 7. Плоские сечения поверхностей второго порядка (задачи 1129—1152) 164

ГЛАВА VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА (задачи 1153 — 1289)

§ 1. Аффинные преобразования (задачи 1153—1205) 169
1. Аффинные преобразования плоскости (задачи 1153—1191) 169
2. Аффинные преобразования пространства (задачи 1192—1205) 174
§ 2. Аффинные преобразования линий второго порядка (задачи 1206—1227) 176
§ 3. Изометрические преобразования (задачи 1228—1255) . . . 178
1. Изометрические преобразования плоскости (задачи 1228—1239) 178
2. Изометрические преобразования пространства (задачи 1240—1255) 180
§ 4. Инверсии (задачи 1256—1289) 186
1. Инверсии плоскости (задачи 1256—1279) 186
2. Инверсии пространства (задачи 1280—1289) 190

ГЛАВА IX

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (задачи 1290 — 1594)

§ 1. Проективная прямая (задачи 1290—1345) 193
1. Проективные координаты на проективной прямой (задачи 1290—1304) 193
2. Проективные преобразования проективной прямой (задачи 1305—1323) 195
3. Инволюции на проективной прямой (задачи 1324—1345) 198
§ 2. Проективная плоскость (задачи 1346—1387) 201
1. Проективные координаты на проективной плоскости (задачи 1346—1375) 201
2. Ангармоническое отношение. Гармонизм (задачи 1376—1387) 207
§ 3. Проективные преобразования проективной плоскости (задачи 1388—1438) 209
1. Коллинеации (задачи 1388—1416) 209
2. Корреляции. Поляритет (задачи 1417—1438) 215
§ 4. Линии второго порядка на проективной плоскости (задачи 1439—1514) 219
1. Линии второго порядка (задачи 1439—1472) 219
2. Полюсы и поляры (задачи 1473—1514) 224
§ 5. Проективное пространство (задачи 1515—1594) 229
1. Проективные координаты в проективном пространстве. Гармонизм (задачи 1515—1538) 229

2. Коллинеации (задачи 1539—1562) 235
3. Корреляции. Поляритет (задачи 1563—1568) 241
4. Поверхности второго порядка в проективном пространстве (задачи 1569—1594) 244

ГЛАВА X

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (задачи 1595 — 1766)

§ 1. Векторные пространства (задачи 1595—1610) 250
§ 2. Точечные аффинные пространства (задачи 1611—1632) . . . 252
§ 3. Евклидовы пространства (задачи 1633—1675) 256
1. Векторные евклидовы пространства (задачи 1633—1651) 256
2. Точечные евклидовы пространства (задачи 1652—1675) 259
§ 4. Линейные операторы (задачи 1676—1721) 261
1. Линейные операторы в произвольном векторном пространстве (задачи 1676—1705) 261
2. Линейные операторы в евклидовом векторном пространстве (задачи 1706—1718) 266
3. Изометрические преобразования в точечном евклидовом пространстве (задачи 1719—1721) 268
§ 5. Линейные, билинейные и квадратичные функции (задачи 1722—1742) 268
1. Линейные функции (задачи 1722—1725) 268
2. Билинейные функции (задачи 1726—1733) 269
3. Квадратичные функции (задачи 1734—1742) 270
§ 6. Поверхности второго порядка (задачи 1743—1766) 272
1. Поверхности второго порядка в точечном аффинном пространстве (задачи 1743—1756) 272
2. Поверхности второго порядка в точечном евклидовом пространстве (задачи 1757—1766) 278
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ 286

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время изложение аналитической геометрии все более проникается методами линейной алгебры. Современные курсы аналитической геометрии начинаются с изложения векторной алгебры и векторного введения координат. Затем следует линейная часть геометрии (прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве). После изложения теории линий и поверхностей второго порядка большое внимание уделяется вопросу линейных геометрических преобразований (изометрические, аффинные и проективные преобразования плоскости и пространства). При таком построении курса становится естественным рассмотрение многомерных векторных и точечных пространств как обобщение двумерного и трехмерного случаев.

Новое построение курса аналитической геометрии привело к изменению программы этой дисциплины и введению объединенного курса алгебры и аналитической геометрии. Такое построение курса принято сейчас в университетах и в педагогических институтах. Предлагаемый сборник задач написан в соответствии с новыми программами курса аналитической геометрии и объединенного курса аналитической геометрии и алгебры.

По сравнению с имеющимися сборниками задач по аналитической геометрии нами введены новые разделы (ориентация, барицентрические координаты, метрические задачи в аффинных координатах), значительно расширен и введен новый материал, посвященный геометрическим преобразованиям (изометрические преобразования, инверсия); в главе IX — Проективная геометрия — главное место занимают задачи на проективные преобразования; содержание задач, связанных с понятиями инволюции, гомологии, классификации проективных преобразований и др., выходит за пределы традиционного изложения этого материала. В главе X о многомерных пространствах основное внимание уделено геометрическим вопросам, поскольку задачи, связанные с чисто алгебраическим материалом (определители, системы линейных уравнений, матрицы и др.), нашли свое отражение в сборниках задач по линейной алгебре. В дополнение к настоящему пособию авторы рекомендуют в первую очередь «Сборник задач по линейной алгебре» И. В. Проскурякова.

Ввиду того, что за последние годы вышло несколько полных курсов аналитической геометрии, написанных в соответствии с новыми программами, авторы из педагогических соображений не считали целесообразным давать перед каждой главой сборника задач список основных определений, формул и теорем. Вместо этого перед каждым параграфом, а иногда и перед каждым пунктом даны указания соответствующих глав и параграфов из следующих учебников:

Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, «Наука», 1968.

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1971.

Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, «Наука», 1974.

Моденов П. С., Аналитическая геометрия, изд-во МГУ, 1969.

Постников М. М., Аналитическая геометрия, «Наука», 1973.

В указаниях эти книги кратко именуются фамилиями их авторов.

Задачник разбит на большое число параграфов и пунктов, чтобы преподаватели и студенты могли легче ориентироваться в материале, выбирая те или иные задачи в зависимости от порядка изложения теоретического материала.

В оглавлении рядом с названием каждой главы, параграфа и пункта указаны номера задач.

Задачи, имеющие теоретическое значение, и задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

К небольшой части задач, особенно в первых главах, даны указания.

В задачах на доказательство ответы, естественно, не приводятся.

В некоторых задачах даются определения тех понятий, которые связаны с этой задачей, но имеются не во всех учебниках.

При составлении задачника нами использована следующая литература:

Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, «Наука», 1968.

Атанасян Л. С., Атанасян В. А., Сборник задач по геометрии, «Просвещение», 1973.

Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1962.

Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия, ч. I и II, Гостехиздат, 1946.

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1971.

Глаголев Н. А., Проективная геометрия, ОНТИ, 1936.

Делоне Б. Н., Райков Д. А., Аналитическая геометрия, т. I, Гостехиздат, 1947; т. II, Гостехиздат, 1948.

Дьедонне Ж., Линейная алгебра и элементарная геометрия, «Наука», 1972.

Кокстер Г. М. С., Введение в геометрию, «Наука», 1966.

Кокстер Г. М. С., Действительная проективная плоскость, Физматгиз, 1959.

Моденов П. С., Аналитическая геометрия, изд-во МГУ, 1969.

Постников М. М., Аналитическая геометрия, «Наука», 1973.

Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, «Наука», 1974.

Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, тт. I, II, ИЛ, 1954.

Авторы

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК

§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора

Александров, гл. II, §§ 2, 4.
Моденов, гл. II, § 11; гл. IV, §§ 30—37.
Постников, гл. I, § 3, пп. 1—6.

1. Векторы $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

2. В трапеции $ABCD$ отношение основания $\overline{AD}$ к основанию $\overline{BC}$ равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

3*. Доказать: для того, чтобы направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы совпадали середины отрезков $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

4. В треугольнике ABC проведены медианы $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$. Представить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. В треугольнике ABC проведены медианы $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

6. Точки E и F служат серединами сторон $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

7. Точки E и F служат серединами диагоналей $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}{2}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$

8. Точки K и L служат серединами сторон $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

9*. В плоскости треугольника ABC найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна $\mathbf{0}$.

10*. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\mathbf{0}$.

11. На стороне $\overline{AD}$ параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $\overline{AK}=\frac{1}{5}\overline{AD}$, а на диагонали $\overline{AC}$ — отрезок $\overline{AL}=\frac{1}{6}\overline{AC}$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны и найти отношение $\dfrac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{LB}}$.

12*. 1) Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том же отношении λ стороны $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ параллелограмма $ABCD$, то четырехугольник $KLMN$ есть параллелограмм.

2) Если $\lambda \neq 1$ и четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, то и четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

13*. Дан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M, для которой

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\mathbf{0}.$$

14*. К точке M приложены три ненулевых вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, сумма которых равна нулю. Зная углы α, β, γ между векторами $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, найти отношения модулей этих векторов $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|$.

15*. К точке M, лежащей в плоскости треугольника ABC, приложены три ненулевых вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, направленных по лучам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, причем сумма этих векторов равна нулю. Найти отношение модулей этих векторов $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|$, если:

1) точка M является центром окружности, описанной около треугольника ABC;

2) точка M является центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

3) точка M является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC.

16*. Найти точку M, лежащую в плоскости треугольника ABC, если сумма трех ненулевых векторов с равными модулями, приложенных к этой точке и направленных по лучам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, равна нулю.

17*. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна **0**.

18. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки пространства в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

19. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, началом которого служит середина E ребра $\overline{OA}$, а концом — середина F ребра $\overline{BC}$.

20. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$ с началом в середине E ребра $\overline{OA}$ и концом в точке F пересечения медиан треугольника ABC.

21. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

22. Из точки O выходят два вектора, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

23. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

24. В трапеции $ABCD$ отношение основания $\overline{BC}$ к основанию $\overline{AD}$ равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

25. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Принимая за базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$, найти в этом базисе координаты векторов, совпадающих с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней, для которых вершина A' служит началом.

26. Дан тетраэдр $OABC$. Принимая за базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты: 1) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; 2) вектора $\overrightarrow{DE}$, соединяющего середину D ребра $\overline{OA}$ с серединой E ребра $\overline{BC}$; 3) вектора, соединяющего середину D ребра $\overline{OA}$ с точкой F пересечения медиан грани BOC; 4) вектора $\overrightarrow{AE}$, соединяющего вершину A с серединой ребра $\overline{BC}$; 5) вектора $\overrightarrow{OM}$, соединяющего вершину O с точкой пересечения M медиан грани ABC.

27. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 5, 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{6, -4, -2\}$, $\boldsymbol{c}=\{0, -5, 7\}$, $\boldsymbol{d}=\{-20, 27, -35\}$. Подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

28. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\boldsymbol{c}$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

1) $\boldsymbol{a}=\{5, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1, 4, 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1, -1, 6\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{6, 4, 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{-9, 6, 3\}$, $\boldsymbol{c}=\{-3, 6, 3\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{6, -18, 12\}$, $\boldsymbol{b}=\{-8, 24, -16\}$, $\boldsymbol{c}=\{8, 7, 3\}$.

29. Показать, что, каковы бы ни были три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и три числа α, β, γ, векторы $\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{b}-\alpha\boldsymbol{c}$, $\beta\boldsymbol{c}-\gamma\boldsymbol{a}$ компланарны.

30*. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{2, 5, 14\}$, $\boldsymbol{b}=\{14, 5, 2\}$. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость Oxy при направлении проектирования, параллельном вектору $\boldsymbol{b}$.

31. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, -2, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{4, 0, 3\}$, $\boldsymbol{d}=\{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\boldsymbol{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\boldsymbol{c}$.

§ 2. Радиус-вектор

Постников, гл. 2, § 1.

32. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_4$ четвертой его вершины.

33. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_1'$ четырех вершин A, B, C, A' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиусы-векторы четырех остальных его вершин.

34. Даны радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ точек A и B. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки C, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ. Найти также радиус-вектор $\boldsymbol{r}'$ середины M отрезка $\overline{AB}$.

35. Даны радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вершин треугольника ABC. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки пересечения его медиан.

36*. Доказать, что если $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ — три ребра параллелепипеда, а $\overline{OD}$ — его диагональ, то точка M пересечения прямой OD с плоскостью, проходящей через точки A, B, C, является точкой пересечения медиан треугольника ABC и делит отрезок $\overrightarrow{OD}$ в отношении $1:2$.

37*. В треугольнике ABC проведена биссектриса $\overline{AD}$ внутреннего угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

38. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр $\overrightarrow{CH}$ на гипотенузу $\overline{AB}$. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и длины катетов $|\overline{BC}| = a$ и $|\overline{CA}| = b$.

39*. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вершин треугольника ABC и длины a, b, c сторон, противолежащих этим вершинам, найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра круга, вписанного в этот треугольник.

40*. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вершин треугольника ABC и его внутренние углы, найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ основания перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC.

41*. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ трех последовательных вершин A, B, C трапеции $ABCD$, найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_4$ четвертой вершины D, радиус-вектор $\boldsymbol{r}'$ точки пересечения диагоналей и радиус-вектор $\boldsymbol{r}''$ точки пересечения боковых сторон, если отношение основания $\overline{AD}$ к основанию $\overline{BC}$ равно λ.

42*. Доказать, что отрезки прямых, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам; доказать также, что в той же точке пересекаются отрезки прямых, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, и делятся этой точкой в отношении $3:1$ (считая от вершин).

43. В точках M_1, M_2, ..., M_n, имеющих соответственно радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{r}_n$, помещены массы m_1, m_2 ..., m_n. Найти радиус-вектор центра тяжести этой системы материальных точек.

44*. Доказать, что каково бы ни было конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (на прямой, на плоскости или в пространстве), существует и притом только одна такая точка M, что $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\mathbf{0}$.

§ 3. Прямоугольные и аффинные координаты точек на плоскости и в пространстве

Александров, гл. III, § 1; гл. IV, § 1, п. 1.
Моденов, гл. II, §§ 9, 10.
Постников, гл. 2, § 1, пп. 1, 4.

1. Координаты точек на плоскости

45. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин, принимая за начало координат вершину A, за положительное направление оси абсцисс — направление стороны $\overrightarrow{AB}$, за положительное направление оси ординат — направление диагонали $\overrightarrow{AE}$, а за единицу масштаба по обеим осям — сторону шестиугольника.

46. Основание $\overline{AD}$ равнобочной трапеции $ABCD$ равно 8, высота равна 3, а углы, прилежащие к этому основанию, равны $\frac{\pi}{4}$. Принимая за ось абсцисс основание AD, а за ось ординат ось симметрии трапеции, направленную от большего основания к меньшему, найти в этой прямоугольной системе координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения ее боковых сторон.

47. Относительно прямоугольной системы координат дана точка $M=(x, y)$. Найти точку, симметричную точке M:

1) относительно начала координат;
2) относительно оси абсцисс;
3) относительно оси ординат;
4) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов;
5) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

48. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис — векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника.

49. В трапеции $ABCD$ отношение основания $\overline{AD}$ к основанию $\overline{BC}$ равно 3. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы — основание $\overrightarrow{AD}$ и боковую сторону $\overrightarrow{AB}$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения боковых сторон.

50. Даны две смежные вершины $A=(-1, 3)$, $B=(2, 1)$ параллелограмма $ABCD$. Найти две другие его вершины при условии, что диагональ AC параллельна оси Ox, а диагональ BD параллельна оси Oy.

51. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A=(-2, 1)$, $B=(1, 3)$, $C=(4, 0)$. Найти четвертую его вершину D. Система координат аффинная.

52*. Даны две точки $A=(-3, 1)$ и $B=(2, -3)$. На прямой AB найти точку M так, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок $\overline{AM}$ был втрое больше отрезка $\overline{AB}$ (система координат аффинная).

2. Координаты точек в пространстве

53. Относительно прямоугольной системы координат дана точка $M=(x, y, z)$. Найти координаты точки, симметричной с точкой M: 1) относительно начала координат; 2) относительно плоскости Oxy; 3) относительно оси Oz.

54. Относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ дана точка $M=(x, y, z)$. Найти ее ортогональную проекцию: 1) на ось Ox; 2) на плоскость Oyz.

55. Определить расстояния d_x, d_y, d_z точки $M=(x, y, z)$ от осей координат Ox, Oy, Oz (система координат прямоугольная).

56. В третьем октанте найти точку, зная, что ее расстояния до осей Ox, Oy, Oz равны соответственно 5; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{13}$. Система координат прямоугольная.

57. Вершина A параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ принята за начало координат, а три ребра $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ — за базисные векторы. Найти в этой системе координаты всех вершин параллелепипеда.

58. Вершина O тетраэдра $OABC$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — за базисные векторы. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

59*. Даны две точки $A=(1, 2, 3)$, $B=(7, 2, 5)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок $\overline{AM}$ был вдвое длиннее отрезка $\overline{AB}$. Система координат аффинная.

§ 4. Расстояние между двумя точками. Длина вектора; направляющие косинусы

Александров, гл. IV, § 1, п. 2; § 2, п. 2.
Моденов, гл. II, § 12.
Постников, гл. 2, § 1, п. 4.

Во всех задачах этого параграфа система координат является прямоугольной.

1. Расстояние между двумя точками на плоскости

60. Дана окружность с центром в точке $(6, 7)$ и радиусом 5. Из точки $(7, 14)$ к этой окружности проведены касательные. Найти их длины.

61. Дана окружность радиуса 10 с центром $(-4, -6)$. Найти точки ее пересечения с биссектрисами координатных углов.

62. Найти центр M и радиус r окружности, описанной около треугольника с вершинами $(-2, -2)$, $(2, 6)$, $(5, -3)$.

63. Зная две противоположные вершины ромба $A=(8, -3)$ и $C=(10, 11)$, найти две другие его вершины при условии, что длина стороны ромба равна 10.

64. Найти центр окружности, проходящей через точку $(-4, 2)$ и касающейся оси Ox в точке $(2, 0)$.

65. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(2, -1)$ и касающейся обеих осей координат.

66. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $(6, 0)$ и $(24, 0)$ и касающейся оси Oy.

67. Дан прямоугольный треугольник AOB: $O=(0, 0)$, $A=(4, 0)$, $B=(0, 3)$. Найти центр M и радиус r окружности, касающейся оси Ox, проходящей через точку B и имеющей центр на прямой AB.

2. Расстояние между двумя точками в пространстве. Длина вектора. Направляющие косинусы

68. Даны четыре точки $A=(1, 2, 3)$, $B=(5, 2, 3)$, $C=(2, 5, 3)$, $D=(1, 2, -1)$. Найти центр и радиус сферы, проходящей через эти точки.

69*. На плоскостях координат найти точки, которые вместе с началом координат служили бы вершинами правильного тетраэдра с ребром, равным единице, лежащего в первом октанте.

70. Найти точку M, отстоящую от точки $A=(-4, 0, 1)$ на расстояние 9, зная направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OM}$: $^2/_3$, $-{}^2/_3$, $^1/_3$.

71. Вершины треугольника находятся в точках $A=(2, -1, 3)$, $B=(4, 0, 1)$, $C=(-10, 5, 3)$. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла ABC.

72. Луч образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, а с осью Oz — тупой угол. Найти этот угол.

73. Вычислить координаты вектора, длина которого равна 8, зная, что он образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$, с осью Oz — угол $\frac{\pi}{3}$, а с осью Oy — острый угол.

74. Найти координаты вектора, длина которого равна 5, а углы α, β, γ, образуемые им с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz, связаны соотношением

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5.$$

75. Найти углы φ_1, φ_2, φ_3, образуемые вектором $\{6, 2, 9\}$ с плоскостями координат Oyz, Ozx, Oxy.

76. Луч, выходящий из начала координат, образует с осями координат углы α, β, γ. Найти направляющие косинусы проекции этого луча на плоскость Oxy.

77*. Доказать, что если плоскость отсекает на осях координат отрезки, длины которых равны a, b и c, то длина перпендикуляра p, опущенного на эту плоскость из начала координат, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

78. Из одной точки проведены векторы $\boldsymbol{a}=\{-3, 0, 4\}$ и $\boldsymbol{b}=\{5, -2, -14\}$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

79*. Два луча, выходящие из начала координат, образуют с осями координат углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла между этими лучами.

§ 5. Деление отрезка в данном отношении

Александров, гл. I, § 6; гл. III, § 3.
Моденов, гл. I, § 5.
Постников, гл. 2, § 1, п. 3.

1. Деление отрезка в данном отношении на прямой

80. На оси координат даны три точки: $A=(2)$, $B=(7)$, $C=(4)$. Найти: 1) отношение, в котором точка C делит отрезок $\overrightarrow{AB}$; 2) точку D, делящую отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-\frac{2}{3}$; 3) середину E отрезка $\overline{CD}$; 4) отношение, в котором точка E делит отрезок $\overrightarrow{AB}$.

81*. Точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ. В каком отношении делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ точка M', симметричная точке M относительно середины отрезка $\overline{AB}$.

82*. Пусть точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\lambda \neq 1$, точка D делит тот же отрезок в отношении $-\lambda$, а точка E является серединой отрезка $\overline{CD}$.

1) Найти отношение, в котором точка E делит отрезок $\overrightarrow{AB}$.

2) Доказать, что при любом $\lambda \neq 1$ точка E лежит вне отрезка $\overline{AB}$.

83. На оси координат даны три точки $O=(0)$, $E=(1)$, $M=(x)$. Найти отношение, в котором точка O делит направленный отрезок $\overrightarrow{ME}$.

84*. На прямой даны три точки. Точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\lambda \neq 0$. Найти отношение, в котором каждая из точек A, B, C делит направленный отрезок, определяемый двумя другими.

85*. Пусть $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$, $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=\mu$, $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu$ $(\mu \neq \nu)$. Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overrightarrow{PQ}$.

86*. Пусть $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$, $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=\mu$, $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\nu$. Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overrightarrow{AB}$.

87. Даны три точки $A=(1)$, $B=(2)$, $C=(4)$. Найти точку D так, чтобы четверка точек A, B, C, D была гармонической.

88. Доказать, что если пара точек C, D гармонически разделяет пару A, B, то

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

где x, y, z — соответственно координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

89. Доказать, что если отрезок AB делится точкой O пополам, а точками C и D гармонически, то $a^2=cd$, где a, c, d — координаты точек A, C, D в системе координат с началом в точке O.

2. Деление отрезка в данном отношении на плоскости

90. Один из концов отрезка $\overline{AB}$ находится в точке $A=(2, 3)$, его серединой служит точка $M=(1, -2)$. Найти другой конец отрезка. Система координат аффинная.

91. Даны середины сторон треугольника $(2, 4)$, $(-3, 0)$, $(2, 1)$. Найти его вершины. Система координат аффинная.

92. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$: $A=(-4, -7)$ и $B=(2, 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M=(3, 1)$. Найти две другие вершины параллелограмма. Система координат аффинная.

93. На осях Ox и Oy отложены соответственно отрезки $|\overline{OA}|=8$, $|\overline{OB}|=4$. Найти отношение, в котором основание перпендикуляра, опущенного на прямую AB из начала координат, делит отрезок $\overrightarrow{AB}$. Система координат прямоугольная.

94. Вершины треугольника ABC находятся в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти точку (x_0, y_0) пересечения медиан этого треугольника. Система координат аффинная.

95. Даны три последовательные вершины трапеции $A=(-2, -3)$, $B=(1, 4)$, $C=(3, 1)$. Найти четвертую ее вершину D при условии, что основание $\overline{AD}$ в пять раз больше основания $\overline{BC}$. Найти также точку M пересечения диагоналей и точку S пересечения боковых сторон трапеции. Система координат аффинная.

96. Дана точка $A=(2, 4)$. Найти точку B при условии, что точка C пересечения прямой AB с осью ординат делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении, равном $\frac{2}{3}$, а точка D пересечения прямой AB с осью абсцисс делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-\frac{3}{4}$. Система координат аффинная.

97. Даны две точки $A=(9, -1)$ и $B=(-2, 6)$. В каком отношении делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ точка C пересечения прямой AB с биссектрисой второго и четвертого координатных углов? Система координат прямоугольная.

98. Найти две точки, A и B, зная, что точка $C=(-5, 4)$ делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\frac{3}{4}$, а точка $D=(6, -5)$ — в отношении $\frac{2}{3}$. Система координат аффинная.

99. В треугольнике с вершинами $A=(5, 4)$, $B=(-1, 2)$, $C=(5, 1)$ проведена медиана $\overline{AD}$. Найти ее длину. Система координат прямоугольная.

100. Дан треугольник с вершинами $A=(4, 1)$, $B=(7, 5)$, $C=(-4, 7)$. Вычислить длину биссектрисы $\overline{AD}$ угла BAC. Система координат прямоугольная.

101*. Найти центр M и радиус r круга, вписанного в треугольник с вершинами $(9, 2)$, $(0, 20)$, $(-15, -10)$. Система координат прямоугольная.

102. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых $C_1=(2, 5)$ и $C_2=\left(\frac{22}{3}, \frac{31}{3}\right)$, а радиусы соответственно равны 3 и 7. Система координат аффинная.

103*. Даны три последовательные вершины трапеции $A=(-1, -2)$, $B=(1, 3)$, $C=(9, 9)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина ее основания $\overline{AD}$ равна 15. Система координат прямоугольная.

104. В трех точках $A=\left(7, \frac{3}{2}\right)$, $B=(6, 7)$ и $C=(2, 4)$ помещены массы, соответственно равные 3; 5; 2. Определить центр тяжести этой системы точек. Система координат аффинная.

105. Найти координаты центра тяжести однородного стержня, согнутого под прямым углом, если длины его частей $|\overline{OA}|=2$, $|\overline{OB}|=5$, принимая за начало координат точку O, а за положительные направления осей Ox и Oy соответственно направления $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

106*. Найти координаты центра тяжести проволочного треугольника, длины сторон которого 3, 4 и 5, направляя ось абсцисс по меньшему, а ось ординат по большему катету треугольника.

107*. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A=(1, 2)$, $B=(-3, 1)$, $C=(-1, -5)$, $D=(3, -1)$ выпуклый. Система координат аффинная.

108*. Проверить, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A=(4, 4)$, $B=(5, 7)$, $C=(10, 10)$, $D=(12, 4)$ является выпуклым, и найти центр тяжести четырехугольной однородной пластинки с вершинами в точках A, B, C, D.

3. Деление отрезка в данном отношении в пространстве

109. Даны две вершины треугольника: $A=(-4, -1, 2)$ и $B=(3, 5, -16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны $\overline{AC}$ лежит на оси Oy, а середина стороны $\overline{BC}$ на плоскости Oxz. Система координат аффинная.

110. Найти отношение, в котором плоскость Oyz делит отрезок $\overrightarrow{AB}$: $A=(2, -1, 7)$ и $B=(4, 5, -2)$. Система координат аффинная.

111*. Даны две точки $A=(8, -6, 7)$ и $B=(-20, 15, 10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-нибудь из осей координат.

112*. Даны четыре точки:

$$A=(-3, 5, 15),\ B=(0, 0, 7),$$

$$C=(2, -1, 4),\ D=(4, -3, 0).$$

Установить, пересекаются ли прямые AB и CD, и если пересекаются, то найти точку их пересечения. Система координат аффинная.

113*. Три последовательные вершины трапеции находятся в точках $A=(-3, -2, -1)$, $B=(1, 2, 3)$, $C=(9, 6, 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина основания $\overline{AD}$ равна 15. Система координат прямоугольная.

§ 6. Полярные координаты. Сферические и цилиндрические координаты

Александров, гл. IV, §§ 4, 5.
Моденов, гл. II, §§ 18, 19.
Постников, гл. 2, § 1, п. 5.

1. Полярные координаты на плоскости

114. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна 1. Приняв за полюс вершину A, за положительное направление полярной оси — направление вектора $\overrightarrow{AB}$, а за положительное направление отсчета углов — направление кратчайшего поворота от $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{AC}$, определить в этой системе полярные координаты вершин шестиугольника.

115. Вычислить расстояние между двумя данными точками:

1) $A=\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$ и $B=\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$;

2) $C=\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ и $D=\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$;

3) $E=\left(3, \frac{11\pi}{18}\right)$ и $F=\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$.

116*. Даны полярные координаты точек $A=\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B=\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка $\overline{AB}$.

117. Относительно полярной системы координат дана точка $A=\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$. Найти: 1) точку B, симметричную точке A относительно полюса; 2) точку C, симметричную точке A относительно полярной оси.

118. Относительно полярной системы координат даны точки $A=\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B=\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$, $C=\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $D=(5, \pi)$, $E=(5, 0)$. Какие координаты будут иметь эти точки, если повернуть полярную ось вокруг полюса в положительном направлении на угол $3\pi/4$?

119. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

120. Относительно полярной системы координат даны точки $A=\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B=\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C=\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D=\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$. Найти координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

121. Зная прямоугольные координаты точек $A=(-1,1)$, $B=(0,2)$, $C=(5,0)$, $D=(-8, -6)$, найти их координаты в полярной системе координат, соответствующей данной прямоугольной.

122. Зная полярные координаты точки: $r=10$, $\varphi=\pi/6$, найти ее прямоугольные координаты, если полюс находится в точке (2, 3), а полярная ось параллельна оси Ox.

123. Полюс полярной системы координат находится в точке (3, 5), а положительное направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси Oy. Найти в этой системе полярные кооринаты точек $M_1=(9, -1)$ и $M_2=(5, 5-2\sqrt{3})$.

2. *Сферические и цилиндрические координаты*

124. Найти сферические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A=(-8, -4, 1)$, $B=(-2, -2, -1)$, $C=(0, -4, 3)$, $D=(1, -1, -1)$, $E=(0, 1, 0)$.

125. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч $\overrightarrow{OM}$ образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, и что третья координата точки $z=-1$.

126. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту $\theta=45^\circ$ и долготу $\varphi=330^\circ$.

127*. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющей две точки A и B, лежащие на шаре радиуса r, зная широту и долготу этих точек $A=(\varphi_1, \theta_1)$, $B=(\varphi_2, \theta_2)$.

128. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A=(3, -4, 5)$, $B=(1, -1, -1)$, $C=(-6, 0, 8)$.

129. Найти цилиндрические координаты точки M, зная, что луч $\overrightarrow{OM}$ составляет с осями координат углы $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{4}$ и что длина отрезка $\overline{OM}$ равна 1.

130. Найти угол α вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная цилиндрические координаты r, φ, z точки M.

§ 7. Скалярное произведение векторов; угол между векторами

Александров, гл. IV, § 2.
Моденов, гл. IV, §§ 38,39.
Постников, гл. I, § 5, пп. 1—5.

В задачах этого параграфа, в которых встречаются координаты, система координат предполагается прямоугольной.

131. Дан равносторонний треугольник ABC, длины сторон которого равны 1. Вычислить выражение

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

132. В треугольнике ABC даны длины его сторон $|\overline{BC}|=5$, $|\overline{CA}|=6$, $|\overline{AB}|=7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

133. В треугольнике ABC проведены медианы $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$. Вычислить $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

134. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что: 1) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$; 2) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

135*. В треугольнике ABC точка D делит сторону $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = \lambda$. Выразить длину отрезка $\overline{CD}$ через длины a, b, c сторон треугольника и число λ.

136*. Найти сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на стороны равностороннего треугольника ABC.

137*. Пусть r — радиус окружности, описанной около правильного n-угольника.

Найти: 1) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника, выходящих из одной его вершины;

2) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника.

138. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

139. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ два ребра перпендикулярны к противоположным им ребрам, то перпендикулярны и противоположные ребра третьей пары.

140*. Доказать, что если A, B, C, D — четыре произвольные точки (на плоскости или в пространстве), а P и Q — середины отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, то

$$|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+|\overline{CD}|^2+|\overline{DA}|^2=|\overline{AC}|^2+|\overline{BD}|^2+4|\overline{PQ}|^2.$$

141*. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Представить вектор $\boldsymbol{b}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{x}$ был коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{y}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$.

142*. Даны два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})=1$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})=0$.

143*. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})=1, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})=0, \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})=0.$$

144*. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\boldsymbol{a}$.

145*. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{n}$.

146*. Вычислить длину d диагонали $\overline{OD}$ параллелепипеда, зная длины $|\overline{OA}|=a$, $|\overline{OB}|=b$, $|\overline{OC}|=c$ трех его ребер, выходящих из одной точки O, и углы $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$ между ними. Найти также косинусы углов, образуемых диагональю $\overrightarrow{OD}$ с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

147. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящим из этой вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами.

148. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14, 2, 5\}$ на прямую с направляющим вектором $\{2, -2, 1\}$.

149. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{8, 4, 1\}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\{2, -2, 1\}$.

150*. Даны три вектора:

$$\boldsymbol{a}=\{8,\ 4,\ 1\},\quad \boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\},\quad \boldsymbol{c}=\{1,\ 1,\ 9\}.$$

Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

151*. Даны два вектора: $\boldsymbol{a}=\{8,\ 4,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ тупой угол.

152. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A=(1,\ 2,\ 3)$, $B=(3,\ 0,\ 4)$, $C=(2,\ 1,\ 3)$.

153. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A=(1,\ 2,\ 3)$, а концы выходящих из нее ребер — в точках $B=(9,\ 6,\ 4)$, $D=(3,\ 0,\ 4)$, $A'=(5,\ 2,\ 6)$. Найти длину d диагонали $\overline{AC'}$ этого параллелепипеда и угол, образуемый $\overrightarrow{AC'}$ с ребром $\overrightarrow{AB}$.

154. Вычислить углы φ_1, φ_2, φ_3, образованные противоположными ребрами тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A=(3,\ -1,\ 0)$, $B=(0,\ -7,\ 3)$, $C=(-2,\ 1,\ -1)$, $D=(3,\ 2,\ 6)$.

§ 8. Векторы на ориентированной плоскости. Площадь треугольника

Александров, гл. IV, § 3; гл. VII, § 1; гл. IX, § 1.
Моденов, гл. II, § 14; гл. IV, § 40.
Постников, гл. 1, § 4.

В задачах этого параграфа, в которых встречаются координаты, система координат предполагается прямоугольной.

1. Векторы на ориентированной плоскости

155*. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{x,\ y\}$. Найти вектор $\boldsymbol{a}'$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, равный ему по длине и направленный так, чтобы упорядоченная пара векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ имела положительную ориентацию.

156. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}_1=\{4,5\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{2,0\}$, $\boldsymbol{b}_1=\{2,-1\}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}_2$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{b}_1$ и направленный так, чтобы ориентированные параллелограммы, построенные на парах векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, имели одинаковые площади.

157. Даны два вектора: $\boldsymbol{a}=\{3, 5\}$, $\boldsymbol{b}=\{1, 4\}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}'$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{b}$, равный ему по длине и направленный так, чтобы упорядоченные пары векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}'$ имели противоположную ориентацию.

158. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}'$ перпендикулярны друг к другу и образуют с вектором $\boldsymbol{a}$ острые углы. Установить, имеют ли пары $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}'$ одинаковую или противоположную ориентацию.

159*. Даны две упорядоченные пары лучей $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}^1$, $\vec{a}^2$. Лучи этих пар, имеющие один и тот же номер, образуют острый угол, а лучи с разными номерами перпендикулярны друг к другу. Установить, имеют ли эти пары лучей одинаковую или противоположную ориентацию.

160*. Найти кординаты вектора $\boldsymbol{a}'=\{x', y'\}$, являющегося ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ на прямую, наклоненную к оси Ox под углом φ.

161. Вектор $\boldsymbol{a}_1$ имеет длину d_1 и наклонен к базисному вектору $\boldsymbol{e}_1$ под углом φ_1; вектор $\boldsymbol{a}_2$ имеет длину d_2 и наклонен к $\boldsymbol{e}_1$ под углом φ_2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$.

162. Вектор $\boldsymbol{a}_1$ образует с базисным вектором $\boldsymbol{e}_1$ угол φ_1 и имеет длину d_1; вектор $\boldsymbol{a}_2$ образует с вектором $\boldsymbol{a}_1$ угол φ_2 и имеет длину d_2. Найти кординаты вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$.

163*. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$. Найти вектор $\boldsymbol{a}'=\{x', y'\}$, получающийся поворотом вектора $\boldsymbol{a}$ на угол φ.

164. Даны две точки $A=(2, 1)$ и $B=(5, 5)$. Найти конец вектора $\overrightarrow{AC}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{AB}$ поворотом на угол $\frac{5\pi}{6}$.

165. Даны две соседние вершины квадрата $A=(-3, 2)$ и $B=(2, 4)$. Найти две другие вершины.

166. Даны две противоположные вершины квадрата $A=(-3, 2)$, $B=(5, -4)$. Найти две другие его вершины C и D.

167. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $A=(2, 1)$, а один из концов его основания в точке $B=(7, -4)$. Найти другой его конец C, зная, что угол при вершине A равен $\arccos\frac{3}{5}$ и что треугольник ABC имеет положительную ориентацию.

168*. Концы основания равнобедренного треугольника находятся в точках $A=(-4, 2)$, $B=(4, -4)$. Найти координаты вершины C этого треугольника, зная, что углы при его основании равны $\operatorname{arctg} {}^5/_6$ и что треугольник ABC имеет положительную ориентацию.

169*. Дан центр $S(x_0, y_0)$ правильного n-угольника $A_1A_2\dots A_n$ и его вершина $A_1=(x_1, y_1)$. Найти остальные его вершины при условии, что упорядоченная пара векторов $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$ имеет положительную ориентацию.

170. Даны две вершины треугольника $A=(1, 2)$, $B=(3, 4)$ и тангенсы его внутренних углов $\operatorname{tg} A=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B=\frac{1}{3}$. Найти третью вершину C треугольника при условии, что треугольник ABC имеет положительную ориентацию.

2. *Площадь треугольника*

171*. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC точками P, Q, R разделены в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda,\quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu,\quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu.$$

Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC.

172*. Пусть P, Q, R — точки пересечения биссектрис внутренних углов A, B, C треугольника ABC со сторонами $|\overline{BC}|=a$, $|\overline{CA}|=b$, $|\overline{AB}|=c$. Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC.

173*. Пусть P, Q, R — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C треугольника ABC на противолежащие им стороны. Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC, зная его внутренние углы A, B, C. При каком условии треугольники ABC и PQR имеют одинаковую ориентацию?

174. Пусть P, Q, R — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами BC, CA, AB. Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC, зная длины его сторон a, b, c.

§ 9. Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведение

Александров, гл. IX, §§ 1, 3, 4.
Моденов, гл. IV, §§ 41 — 48.
Постников, гл. 1, § 4; § 6, п. 6.

Во всех задачах этого параграфа, где встречаются координаты, система координат предполагается прямоугольной.

175. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{0, 1, 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{1, 1, 0\}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имела положительную ориентацию.

176. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 1, 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{1, 0, 0\}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ угол $\frac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имела положительную ориентацию.

177. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{8, 4, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{1, 1, 1\}$. Найти вектор $\boldsymbol{d}$ длины 1, образующий с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равные углы, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ имели одинаковую ориентацию.

178. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{8, 4, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, -2, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{1, 1, 1\}$. Найти вектор $\boldsymbol{d}$ длины 1, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}$ имели противоположную ориентацию.

179. Из начала координат выходит луч, образующий с положительными направлениями осей Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, а с положительным направлением оси Oz тупой угол. Найти углы, образуемые с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz лучом, выходящим из начала координат, лежащим в плоскости Oyz, перпендикулярным к данному лучу и направленным так, чтобы положительный луч оси Ox, данный луч и искомый луч составляли упорядоченную тройку положительной ориентации.

180*. Даны три вектора: $\overrightarrow{OA}=\{8, 4, 1\}$, $\overrightarrow{OB}=\{2, -2, 1\}$, $\overrightarrow{OC}=\{4, 0, 3\}$, отложенные от одной точки O. Найти направляющие косинусы луча, выходящего из точки O и образующего с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ трехгранного угла $OABC$ равные острые углы. Установить, лежит ли этот луч внутри или вне трехгранного угла $OABC$.

181*. Даны три луча $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, не лежащие в одной плоскости. Внутри углов AOB, BOC и COA взяты соответственно лучи $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$. Установить, будут ли упорядоченные тройки лучей $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ иметь одинаковую или противоположную ориентацию.

182*. Даны две упорядоченные тройки лучей $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}^1$, $\vec{a}^2$, $\vec{a}^3$, в которых лучи с одинаковыми номерами образуют острый угол, а лучи с разными номерами перпендикулярны друг к другу. Установить, имеют ли эти тройки лучей одинаковую или противоположную ориентацию.

183. Даны два вектора: $\boldsymbol{a}=\{11, 10, 2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{4, 0, 3\}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имела положительную ориентацию.

184. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{8, 4, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, -2, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{4, 0, 3\}$. Найти четвертый вектор $\boldsymbol{d}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ имели одинаковую ориентацию.

185. Даны два луча. Первый луч составляет с осями координат углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, а второй — равные между собой тупые углы. Найти направляющие косинусы третьего луча, перпендикулярного к двум данным лучам и образующего с ними тройку положительной ориентации.

186. Из начала координат выходят два луча, $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, образующие с осями координат углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2. Найти направляющие косинусы луча $\overrightarrow{OM}$, выходящего из начала координат, перпендикулярного к обоим данным лучам и направленного так, чтобы тройка лучей $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM}$ имела положительную ориентацию.

187*. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A=(1, 2, 3)$, а концы выходящих из нее ребер — в точках $B=(9, 6, 4)$, $D=(3, 0, 4)$, $A'=(5, 2, 6)$. Найти угол φ между диагональю AC' и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

188*. Пусть A', B', C', D' — точки пересечения медиан граней BCD, CDA, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$. Найти отношение объема ориентированного тетраэдра $A'B'C'D'$ к объему ориентированного тетраэдра $ABCD$.

189. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A=(-1, 0, -1)$, $B=(0, 2, -3)$, $C=(4, 4, 1)$.

190. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A=(1, 2, 3)$ и концы выходящих из нее ребер $B=(9, 6, 4)$, $D=(3, 0, 4)$, $A'=(5, 2, 6)$.

191*. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|\overline{OA}|=a$, $|\overline{OB}|=b$, $|\overline{OC}|=c$ трех его ребер, выходящих из одной его вершины O, и углы $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$ между ними.

192*. Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ связаны соотношениями $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

193*. Доказать, что если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, то из равенств $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ вытекает соотношение $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ и обратно.

194. Доказать, что если $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

195*. Доказать, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

196*. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]+$ $+[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$.

197*. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD}=$ $=\boldsymbol{d}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы.

198*. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$. Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{n}$, параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

199.* В ориентированном пространстве даны два перпендикулярных друг другу вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$, причем $|\boldsymbol{n}|=1$. В плоскости, положительная ориентация которой определяется упорядоченной парой векторов $\boldsymbol{a}$, $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]$, найти вектор

$\boldsymbol{b}$, полученный из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом в этой плоскости на угол φ.

200*. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

201*. Доказать тождества:

1) $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}] = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;

2) $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

202*. Доказать тождества:

1) $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}$;

2) $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) =$
$= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$;

3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$;

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) \end{vmatrix}$;

5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \end{vmatrix}$.

203*. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство

$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]].$$

204*. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \alpha, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \beta, \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \gamma.$$

205*. 1) Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, имело решение.

2) Найти общее решение этого уравнения.

206*. Даны три некомпланарных вектора; $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$, где H — ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.

207*. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}.$$

208*. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,

$$V=\sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \end{vmatrix}}.$$

209*. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x})=\alpha$, $[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}]=\boldsymbol{b}$, где $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\neq 0$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})=0$.

210*. Решить относительно $\boldsymbol{x}$ систему уравнений $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}]=\boldsymbol{b}_1$, $[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}]=\boldsymbol{b}_2$, причем $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)\neq 0$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\neq 0$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)=(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)=0$.

211*. Найти векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из системы уравнений: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=p$, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]=\boldsymbol{b}$. Дано, что $\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$.

212*. Даны плоские углы $\angle BOC=a$, $\angle COA=b$, $\angle AOB=c$ трехгранного угла $OABC$.

1) Вычислить косинусы его внутренних двугранных углов A, B, C, противолежащих граням BOC, COA, AOB.

2) Даны внутренние двугранные углы A, B, C трехгранного угла $OABC$, противолежащие граням BOC, COA, AOB. Вычислить косинусы его плоских углов a, b, c.

3) Доказать, что

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

§ 10. Скалярное, векторное и смешанное произведение в аффинных координатах

Моденов, Дополнение II, пп. 1, 2.
Постников, гл. 1, § 5, п. 2.

1. Скалярное произведение векторов на плоскости

213*. Выразить через метрические коэффициенты $g_{11}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)$, $g_{12}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, $g_{22}=(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$ базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ длины базисных векторов, угол ω между ними и площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

214. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

215. Найти длину вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

216. Найти косинус угла φ между векторами $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

217. Найти косинусы углов α и β, которые вектор $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ образует с векторами базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} этого базиса.

218*. Найти косинус, синус и тангенс угла φ от вектора $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$ до вектора $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

219*. Найти косинус, синус и тангенс угла φ от базисного вектора $\boldsymbol{e}_1$ до вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

220. Определить длину вектора $\boldsymbol{a}=\{7, -8\}$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

221. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{7, -8\}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный так, чтобы пара векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ имела положительную ориентацию, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

222. Зная длины базисных векторов $|\boldsymbol{e}_1|=2$, $|\boldsymbol{e}_2|=3$ и угол между ними $\omega=\frac{\pi}{3}$, найти длину вектора $\{-4, 6\}$.

223. Длины базисных векторов аффинной системы координат $|\boldsymbol{e}_1|=4$, $|\boldsymbol{e}_2|=2$, а угол между ними $\omega=\frac{\pi}{3}$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A=(1, 3)$, $B=(1, 0)$, $C=(2, 1)$. Определить длины сторон AB и AC этого треугольника и угла A между ними.

224*. Длины базисных векторов аффинной системы координат: $|\boldsymbol{e}_1|=2$, $|\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$, а угол между ними $\omega=\frac{5\pi}{6}$. Относительно этой системы координат даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 2\}$. Найти угол от первого вектора до второго.

225*. Относительно аффинной системы координат дан треугольник ABC с вершинами в точках $A=(1, 1)$, $B=(5, 3)$, $C=(3, 5)$, длины сторон которого суть $|\overline{AB}|=\sqrt{52}$, $|\overline{AC}|=4$, $|\overline{BC}|=\sqrt{28}$. Определить длины единичных векторов этой системы координат и угол между ними.

226*. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A=(1, 0)$, $B=(0, 1)$, $C=(3, 2)$, прямым углом при вершине C и катетами $|\overline{CA}|=2$, $|\overline{CB}|=3$. Определить длины базисных векторов этой аффинной системы и угол между ними.

227*. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A=(1, 0)$, $B=(0, 1)$, $C=(3, 2)$, прямым углом при вершине C и катетами $|\overline{CA}|=2$, $|\overline{CB}|=3$. Определить длины сторон $\overline{A'B'}$ и $\overline{A'C'}$ треугольника $A'B'C'$ и угол A' между ними, если вершины этого треугольника имеют координаты $A'=(1, 1)$, $B'=(2, 2)$, $C'=(2, 4)$.

228*. Зная длины базисных векторов $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$ и угол ω между ними, найти:

1) длину вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$;

2) угол α между векторами $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$;

3) площадь S ориентированного параллелограмма, построенного на упорядоченной паре векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

4) угол α^* от вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{b}$.

229*. Найти косинусы углов α и β, которые вектор $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ образует с базисными векторами, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, а угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ равен ω.

230*. Найти косинус, синус и тангенс угла φ от базисного вектора $\boldsymbol{e}_1$ до вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, а угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен ω.

231*. Базисы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ называются взаимными, если $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}^1)=(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}^2)=1$, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}^2)=(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}^1)=0$. Зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, найти:

1) метрические коэффициенты g^{11}, g^{12}, g^{22} базиса $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, взаимного с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

2) координаты векторов $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

3) длины векторов $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$;

4) угол θ между векторами $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$.

232*. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{y_1, y_2\}$, первый из которых задан своими координатами в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а второй во взаимном с ним базисе $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$.

233*. Зная длины базисных векторов $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$ и угол ω между ними, найти:

1) координаты векторов $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ базиса, взаимного с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

2) длины векторов $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$;

3) угол между векторами $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$.

234*. 1) Найти векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, полученные поворотом на угол φ векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ соответственно, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

2) Рассмотреть частный случай $\varphi=+\frac{\pi}{2}$.

235*. Найти вектор $\boldsymbol{a}'$, полученный поворотом вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ на угол φ, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

236*. 1) Найти векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, полученные поворотом на угол φ векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ соответственно, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, а угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ равен ω.

2) Рассмотреть частный случай $\varphi=+\frac{\pi}{2}$.

2. Скалярное произведение векторов в пространстве; векторное и смешанное произведение

237*. Выразить через метрические коэффициенты $g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ длины базисных векторов, углы $\omega_{ij}=\widehat{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j}$ между ними и объем V ориентированного параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

238. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{y^1, y^2, y^3\}$, зная метрические коэффициенты $g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

239. Найти длину вектора $\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}$ в базисе с метрическими коэффициентами g_{ij}.

240. Найти угол φ между векторами $\{x^1, x^2, x^3\}$ и $\{y^1, y^2, y^3\}$ в базисе с метрическими коэффициентами g_{ij}.

241. Найти косинусы углов α_1, α_2, α_3, которые вектор $\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}$ образует с базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, зная метрические коэффициенты g_{ij} этого базиса.

242*. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, найти объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\{x^1, x^2, x^3\}$, $\{y^1, y^2, y^3\}$, $\{z^1, z^2, z^3\}$.

243*. Найти косинусы углов φ_1, φ_2, φ_3, образованных вектором $\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}$ с базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}=\omega_{23}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1}=\omega_{31}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega_{12}$.

244*. Найти объем V ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах

$$\boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}, \quad \boldsymbol{b}=\{y^1, y^2, y^3\}, \quad \boldsymbol{c}=\{z^1, z^2, z^3\},$$

если

$$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=1, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}=\omega_{23},$$

$$\widehat{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1}=\omega_{31}, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega_{12}.$$

245*. Зная углы $BOC=\omega_{23}$, $COA=\omega_{31}$, $AOB=\omega_{12}$, образуемые ребрами параллелепипеда, выходящими из вершины O, и углы $AOD=\varphi_1$, $BOD=\varphi_2$, $COD=\varphi_3$, образуемые диагональю $\overrightarrow{OD}$ с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти длины ребер OA, OB, OC, если длина диагонали $\overrightarrow{OD}$ равна d.

246*. Базисы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ называются взаимными, если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j)=\delta_i^j$ $(i, j=1, 2, 3)$, т. е.

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad i=j, \\ 0 & \text{при} \quad i\neq j. \end{cases}$$

Найти векторы $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ базиса, взаимного с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

247*. Найти скалярное произведение векторов, один из которых задан своими координатами x^1, x^2, x^3 в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, а другой — координатами y_1, y_2, y_3 в базисе $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$, взаимном с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

248*. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, найти метрические коэффициенты g^{ij} базиса $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$, взаимного с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

249*. Относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ с метрическими коэффициентами g_{ij} дан вектор $\boldsymbol{x}=\{x^1, x^2, x^3\}$. Найти координаты x_1, x_2, x_3 этого вектора в базисе, взаимном с данным.

250*. Длины векторов базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ равны 1, а углы между ними равны $\frac{\pi}{3}$. Найти длины векторов базиса $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$, взаимного с данным, и углы между ними.

251*. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, найти координаты векторов этого базиса во взаимном с ним базисе $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$.

252*. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ — взаимные базисы. Найти углы θ_i между векторами $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}^i$ $(i=1, 2, 3)$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

253*. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ — взаимные базисы. Найти углы θ_i между векторами $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}^i$ $(i=1, 2, 3)$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega_{12}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}=\omega_{23}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1}=\omega_{31}$.

254*. Доказать, что если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}=\omega_{23}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1}=\omega_{31}$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega_{12}$, то угол θ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется из соотношения

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} & \cos\alpha_1 \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} & \cos\alpha_2 \\ \cos\omega_{31} & \cos\omega_{32} & 1 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\theta \end{vmatrix}=0,$$

где α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3 — углы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно.

255*. Относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ даны координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}: \boldsymbol{a}=\{x^1, x^2, x^3\}$, $\boldsymbol{b}=\{y^1, y^2, y^3\}$. Найти координаты z_1, z_2, z_3 векторного произведения $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в базисе $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$, взаимном с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

§ 11. Барицентрические координаты

Александров, гл. XIV, § 4.
Постников, гл. 2, § 1, п. 6.

1. Барицентрические координаты на прямой

256*. Пусть λ_0, λ_1 — барицентрические координаты точки M прямой d относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$, т. е. λ_1 — координата точки M в системе координат с началом в точке A_0 и базисным вектором $\overrightarrow{A_0A_1}$, а $\lambda_0=1-\lambda_1$. Доказать, что если $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}$ — радиусы-векторы точек A_0, A_1, M относительно полюса O, то $\boldsymbol{r}=\lambda_0\boldsymbol{r}_0+\lambda_1\boldsymbol{r}_1$. Обратно: каковы бы ни были числа λ_0, λ_1, сумма которых равна 1, $\lambda_0+\lambda_1=1$, точка M, определяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{r}=\lambda_0\boldsymbol{r}_0+\lambda_1\boldsymbol{r}_1$, лежит на прямой d и имеет относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$ барицентрические координаты λ_0, λ_1. Если полюс O не лежит на прямой d, то λ_0, λ_1 — аффинные координаты точки M в системе координат с началом в точке O и базисом $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$.

257*. Пусть λ_0, λ_1 — барицентрические координаты точки M относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$. Доказать, что λ_0 является координатой точки M в системе координат с началом в точке A_1 и базисным вектором $\overrightarrow{A_1A_0}$, а $\lambda_1=1-\lambda_0$.

258*. Доказать, что если λ_0, λ_1 — барицентрические координаты точки M относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$, то

$$\lambda_0=\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{A_0A_1}}, \qquad \lambda_1=\frac{\overrightarrow{A_0M}}{\overrightarrow{A_0A_1}}.$$

259*. Пусть λ_0, λ_1 — барицентрические координаты точки M прямой A_0A_1 относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$. Найти отношение, в котором точка M делит отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$.

260. Пусть λ_0, λ_1 — барицентрические координаты точки M относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$. Доказать:

1) для того, чтобы точка M лежала внутри базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$, необходимо и достаточно, чтобы обе ее барицентрические координаты были положительны;

2) для того, чтобы точка M лежала на продолжении отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$ за точку A_0, необходимо и достаточно, чтобы было $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 < 0$; для того, чтобы точка M лежала на продолжении отрезка A_0A_1 за точку A_1, необходимо и достаточно, чтобы было $\lambda_0 < 0$, $\lambda_1 > 0$;

3) для того, чтобы точка M совпадала с точкой A_0, необходимо и достаточно, чтобы было $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$; для того, чтобы точка M совпадала с точкой A_1, необходимо и достаточно, чтобы было $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$.

261*. Пусть λ_0, λ_1 и μ_0, μ_1 — барицентрические координаты точек M_1, M_2 прямой A_0A_1 относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$. Найти барицентрические координаты точки M, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении k.

2. Барицентрические координаты на плоскости

262*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2 — барицентрические координаты точки M плоскости π относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$, т. е. λ_1, λ_2 — аффинные координаты точки M в системе координат с началом в точке A_0 и базисными векторами $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, а $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Доказать, что если $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}$ — радиусы-векторы точек A_0, A_1, A_2, M относительно полюса O, то $\boldsymbol{r} = \lambda_0\boldsymbol{r}_0 + \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2$. Обратно: каковы бы ни были числа λ_0, λ_1, λ_2, сумма которых равна 1, $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, точка M, определяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \lambda_0\boldsymbol{r}_0 + \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2$, лежит в плоскости π и относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ имеет барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2. Если полюс O не лежит в плоскости π, то λ_0, λ_1, λ_2 — аффинные координаты точки M в системе координат с началом O и базисными векторами $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$.

263*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2 — барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$. Доказать, что:

1) λ_2, λ_0 являются аффинными координатами точки M в системе координат с началом в точке A_1 и базисом $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_0}$, а $\lambda_1 = 1 - \lambda_0 - \lambda_2$;

2) λ_0, λ_1 являются аффинными координатами точки M в системе координат с началом в точке A_2 и базисом $\overrightarrow{A_2A_0}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$, а $\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$.

264*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2 — барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$.

Доказать, что:

1) если $\lambda_2 = 0$, то λ_0 и λ_1 являются барицентрическими координатами точки M на прямой A_0A_1 с базисным отрезком $\overrightarrow{A_0A_1}$;

2) если $\lambda_0 = 0$, то λ_1 и λ_2 являются барицентрическими координатами точки M на прямой A_1A_2 с базисным отрезком $\overrightarrow{A_1A_2}$;

3) если $\lambda_1 = 0$, то λ_0 и λ_2 являются барицентрическими координатами точки M на прямой A_0A_2 с базисным отрезком $\overrightarrow{A_0A_2}$.

265*. Доказать, что барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ равны отношениям площадей ориентированных треугольников $\overrightarrow{MA_1A_2}$, $\overrightarrow{A_0MA_2}$, $\overrightarrow{A_0A_1M}$ к площади ориентированного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$.

266*. Доказать, что барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ равны

$$\lambda_0 = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}, \quad \lambda_1 = \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)},$$

где $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}$ — соответственно радиусы-векторы точек A_0, A_1, A_2, M относительно полюса, не лежащего в плоскости базисного треугольника.

267*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2 — барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$. Доказать, что:

1) точка M лежит внутри базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$;

2) точки A_0 и M лежат по разные стороны от прямой A_1A_2 тогда и только тогда, когда $\lambda_0 < 0$; точки A_1 и M лежат по разные стороны от прямой A_0A_2 тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0$; точки A_2 и M лежат по разные стороны от прямой A_0A_1 тогда и только тогда, когда $\lambda_2 < 0$;

3) точка M лежит на прямой A_0A_1 тогда и только тогда, когда $\lambda_2 = 0$;

4) вершины A_0, A_1, A_2 базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ имеют соответственно следующие тройки барицентрических координат: $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$; $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$; $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

268*. Точка M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ имеет барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2. Найти отношение, в котором точка P пересечения прямой A_2M с прямой A_0A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$.

269*. Стороны $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_0}$ базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ разделены точками P и Q в отношениях, соответственно равных λ и μ. Найти барицентрические координаты точки M пересечения прямых A_0P и A_1Q.

270*. Относительно аффинной системы координат на плоскости заданы четыре точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Пусть λ_0, λ_1, λ_2 — барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$. Выразить координаты x и y точки M через ее барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 и обратно: выразить λ_0, λ_1, λ_2 через x и y.

271*. Относительно аффинной системы координат стороны треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ заданы уравнениями:

$$\begin{array}{ll} A_0x+B_0y+C_0=0 & (A_1A_2), \\ A_1x+B_1y+C_1=0 & (A_2A_0), \\ A_2x+B_2y+C_2=0 & (A_0A_1). \end{array}$$

Принимая треугольник $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ за базисный треугольник барицентрической системы координат, выразить барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 точки M через ее аффинные координаты x, y.

272*. Относительно аффинной системы координат даны четыре точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. При каком необходимом и достаточном условии эти точки служат вершинами выпуклого четырехугольника.

273*. Относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ заданы три точки своими барицентрическими координатами:

$$M_0(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2), \quad M_1(\mu_0, \mu_1, \mu_2), \quad M_2(\nu_0, \nu_1, \nu_2).$$

Доказать, что

$$S=s\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix},$$

где S и s — соответственно площади ориентированных треугольников $\overrightarrow{M_0M_1M_2}$ и $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$.

274*. Относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$ даны две точки своими барицентрическими координатами: $M_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и $M_2(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$. Найти барицентрические координаты точки M, делящей направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении k.

275*. Принимая треугольник $\overrightarrow{ABC}$ за базисный, найти барицентрические координаты точки пересечения его медиан.

276*. Зная длины a, b, c сторон $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ треугольника $\overrightarrow{ABC}$ и принимая этот треугольник за базисный, найти барицентрические координаты центра O окружности, вписанной в этот треугольник.

277*. Зная внутренние углы A, B, C треугольника $\overrightarrow{ABC}$, найти барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 центра O описанной вокруг него окружности.

278*. Зная внутренние углы A, B, C треугольника $\overrightarrow{ABC}$, найти барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2 точки H' пересечения его высот, принимая треугольник $\overrightarrow{ABC}$ за базисный.

279*. Доказать, что всякая прямая на плоскости в барицентрических координатах определяется однородным уравнением первой степени

$$a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0,$$

причем среди чисел a_0, a_1, a_2 есть, по крайней мере, два различных. Обратно: если среди чисел a_0, a_1, a_2 есть, по крайней мере, два различных, то уравнение

$$a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0$$

является уравнением прямой. Если $a_0 = a_1 = a_2 = a \neq 0$, то уравнению $a\lambda_0 + a\lambda_1 + a\lambda_2 = 0$ или $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ не удовлетворяют барицентрические координаты ни одной точки плоскости.

3. Барицентрические координаты в пространстве

280*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — барицентрические координаты точки M относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$, т. е. λ_1, λ_2, λ_3 — аффинные координаты точки M в системе координат с началом в точке A_0 и базисными векторами $\overrightarrow{A_0A_1}$,

$\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$, а $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$. Доказать, что если $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}$ — радиусы-векторы точек A_0, A_1, A_2, A_3, M относительно полюса O, то $\boldsymbol{r} = \lambda_0\boldsymbol{r}_0 + \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3$. Обратно: каковы бы ни были числа λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, сумма которых равна 1, $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, точка M, определяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \lambda_0\boldsymbol{r}_0 + \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3$, относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ имеет барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2, λ_3.

281*. Пусть λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — барицентрические координаты точки M относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$. Доказать, что:

1) λ_0, λ_2, λ_3 являются аффинными координатами точки M в системе координат с началом в точке A_1 и базисом $\overrightarrow{A_1A_0}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, а $\lambda_1 = 1 - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3$;

2) λ_0, λ_1, λ_3 являются аффинными координатами точки M в системе координат с началом в точке A_2 и базисом $\overrightarrow{A_2A_0}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, а $\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_3$;

3) λ_0, λ_1, λ_2 являются аффинными координатами точки M в системе координат с началом в точке A_3 и базисом $\overrightarrow{A_3A_0}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$, $\overrightarrow{A_3A_2}$, а $\lambda_3 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$.

282*. Доказать, что барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 точки M относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ равны отношениям объемов ориентированных тетраэдров $\overrightarrow{MA_1A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_0MA_2A_3}$, $\overrightarrow{A_0A_1MA_3}$, $\overrightarrow{A_0A_1A_2M}$ к объему ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$.

283*. Доказать, что:

1) если точка M с барицентрическими координатами λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 принадлежит грани $A_0A_1A_2$ базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$, то $\lambda_3 = 0$, а λ_0, λ_1, λ_2 являются барицентрическими координатами точки M на плоскости $A_0A_1A_2$ относительно базисного треугольника $\overrightarrow{A_0A_1A_2}$;

2) если точка M принадлежит ребру A_0A_1, то $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а λ_0 и λ_1 являются барицентрическими координатами точки M на прямой A_0A_1 относительно базисного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$.

284*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы:

1) точка M лежала внутри базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$;

2) точки M и A_0 лежали по разные стороны от плоскости $A_1A_2A_3$;

3) точка M лежала в плоскости $A_1A_2A_3$;
4) точка M лежала на прямой A_2A_3;
5) точка M совпадала с вершиной A_0.

285. Относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ заданы две точки $M_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $M_2(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ своими барицентрическими координатами. Найти барицентрические координаты точки M, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении k.

286*. Относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ заданы четыре точки своими барицентрическими координатами:

$$M_0(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad M_1(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3),$$
$$M_2(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad M_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

Доказать, что если V — объем ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{M_0M_1M_2M_3}$, а v — объем ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$, то

$$V = v\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

287*. Относительно аффинной системы координат заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости: $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка. Доказать, что если $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — барицентрические координаты точки M относительно базисного тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$, то

$$x = \lambda_0x_0 + \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3,$$
$$y = \lambda_0y_0 + \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \lambda_3y_3,$$
$$z = \lambda_0z_0 + \lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 + \lambda_3z_3;$$

$$\lambda_0 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad \lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

288*. Относительно аффинной системы координат грани тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} &A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0 && (A_1A_2A_3), \\ &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 && (A_0A_2A_3), \\ &A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 && (A_0A_1A_3), \\ &A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 && (A_0A_1A_2). \end{aligned}$$

Принимая тетраэдр $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ за базисный тетраэдр барицентрической системы координат, выразить барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 точки M через ее аффинные координаты x, y, z.

289*. Грани тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ заданы уравнениями

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро A_0A_1 и делящей объем данного тетраэдра пополам.

290*. Доказать, что если $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиусы-векторы вершин тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$, а s_0, s_1, s_2, s_3 — площади его граней, противолежащих этим вершинам, то радиус-вектор центра M сферы, вписанной в этот тетраэдр, определяется соотношением

$$\boldsymbol{r} = \frac{s_0\boldsymbol{r}_0+s_1\boldsymbol{r}_1+s_2\boldsymbol{r}_2+s_3\boldsymbol{r}_3}{s_0+s_1+s_2+s_3}.$$

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Александров, гл. IV, § 1, пп. 3, 4; § 4, пп. 1,3; гл. XV, §§ 1, пп. 6, 8, 9.

Моденов, гл. III, §§ 21—28; гл. X, §§ 139, 140.

Постников, гл. 2, § 2.

§ 1. Уравнения линий на плоскости

291. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A и B равна $2a^2$ при условии, что $a > c$.

292. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний которых от точек A и B равна $4a^2$.

293. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

294. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до трех вершин равностороннего треугольника постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит середина одной из сторон треугольника.

295*. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины C.

296* Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до трех вершин треугольника ABC равна a^2.

297*. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме их расстояний до двух других противоположных вершин его.

298*. Даны две различные точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до точек A и B равно k.

299. Даны два отрезка $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, лежащие на одной прямой и расположенные по разные стороны от точки O, причем $|\overline{OA}| = a$, $|\overline{OB}| = b$ и $a > b$. Найти геометрическое место точек, из которых отрезки $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ видны под равными углами.

300*. Найти геометрическое место точек, из которых к двум окружностям можно провести равные касательные.

301. Дана окружность с центром O и радиусом r и точка A, находящаяся на расстоянии a от точки O. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, равны отрезкам, соединяющим эти точки с точкой A.

302. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-16=0$, $x^2+y^2+8x-2=0$. Найти геометрическое место точек, из которых к этим окружностям можно провести равные касательные.

303*. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-27=0$, $x^2+y^2+2x-8=0$. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к большей окружности, вдвое длиннее касательных к меньшей окружности.

304. Найти геометрическое место точек, для которых квадрат расстояния до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых в $2\frac{1}{2}$ раза больше произведения их расстояний до этих точек.

305. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до осей координат постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит точка $(2, -1)$.

306*. Найти геометрическое место точек, призведение расстояний которых до двух противоположных сторон квадрата равно произведению их расстояний до двух других противоположных сторон.

307*. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух параллельных прямых вдвое больше расстояния до прямой, к ним перпендикулярной.

308*. Дан прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, причем $a > b$; найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух противоположных сторон прямоугольника равна сумме их расстояний до двух других противоположных сторон.

309. Написать в полярных координатах уравнение прямой, перпендикулярной к оси Ox и отсекающей на ее положительном луче отрезок длины a.

310. Написать в полярных координатах уравнение окружности радиуса a, принимая за начало координат точку O на окружности, а за положительное направление оси Ox направление проходящего через эту точку диаметра.

311. На каждом радиусе OA окружности с центром O и радиусом a откладывают от центра в направлении радиуса отрезок OM, равный расстоянию от точки A до фиксированного диаметра BC. Найти геометрическое место точек M.

312. Дана точка O и прямая l, находящаяся от точки O на расстоянии $|\overline{OA}|=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую l в переменной точке P. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM так, что $|\overline{OP}|\cdot|\overline{OM}|=b^2$. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.

313*. В окружности радиуса a проведен диаметр OA. Вокруг его конца O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке B. На продолжении хорды OB за точку B откладывается отрезок $\overline{BM}$, равный $\overline{AB}$. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.

314. Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, причем $|\overline{AB}|=c$; третья его вершина C перемещается по окружности радиуса b с центром в точке A. Какую линию описывает при этом точка D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC?

* * *

315*. Даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $a>c$.

316. Найти геометрическое место точек, делящих в отношении $\lambda\neq 1$ хорды окружности $x^2+y^2=a^2$, параллельные оси Oy.

317. Даны две точки: $A_1=(-a,\ 0)$, $A_2=(a,\ 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2, и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение которых равно b^2.

318*. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Точка M делит этот отрезок на два отрезка, длины которых a и b. Найти линию, описываемую точкой M при движении отрезка.

319. Дана окружность $x^2+y^2=a^2$. Во что обратится эта окружность, если, не меняя абсцисс ее точек, уменьшить их ординаты в k раз?

320. Даны две окружности с центром в начале координат O и радиусами a и b, причем $a>b$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий эти окружности соответственно в точках A и B. Через точки A и B проводятся прямые, перпендикулярные соответственно к осям Ox и Oy и пересекающиеся в точке M. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.

321*. Даны две точки F_1 и F_2, на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $c>a$.

322*. Даны точка F, прямая d и положительное число $e\neq 1$. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от точки F к расстоянию до прямой d равно e.

323*. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точки F и прямой d, отстоящей от точки F на расстояние p.

324. Даны две точки, $A_1=(-a,\ 0)$, $A_2=(a,\ 0)$, Найти геометрическое место точек пересечения прямых, отсекающих на оси ординат отрезки, произведение которых равно $-b^2$.

* * *

325. Вокруг точки O вращается луч с постоянной угловой скоростью ω. По этому лучу движется точка M с постоянной скоростью v. Составить уравнение линии, описываемой точкой M, в полярных координатах, если в начальный момент движения луч совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а точка M — с началом координат O.

326*. Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до точек F_1 и F_2 равно c^2, принимая за начало координат середину отрезка $\overline{F_1F_2}$, а за ось абсцисс прямую F_1F_2. Перейти к соответствующей системе полярных координат.

327. В прямоугольных треугольниках, образованных осями координат и пересекающими их прямыми, лежащих в первой и третьей четвертях и имеющих одну и ту же площадь $s>0$, опускаются перпендикуляры из начала координат на гипотенузу. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

328*. На окружности радиуса a взяты две диаметрально противоположные точки O и K и в точке K к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. На этом луче от точки O откладывается отрезок $\overline{OM}=\overline{AB}$. Написать уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, в полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox направление $\overrightarrow{OK}$.

329*. Даны точка O и прямая l на расстоянии a от точки O. Вокруг точки O вращается луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает прямую l в переменной точке B. На прямой OB от точки B в направлении луча откладывается отрезок $\overline{BM}$, $|\overline{BM}|=b$. Найти уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, в обобщенных полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox луч $\overrightarrow{OA}$, где A — основание перпендикуляра из точки O на прямую l.

330*. На окружности взяты две диаметрально противоположные точки O и A, причем $|\overline{OA}|=a$. Вокруг точки O вращается луч. Пусть B — переменная точка пересечения прямой, содержащей этот луч, с окружностью. На прямой OB от точки B в направлении луча откладывается отрезок $\overline{BM}$ длины b. Написать в обобщенных полярных и прямоугольных координатах уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, принимая за начало координат точку O и за положительное направление оси Ox направление $\overrightarrow{OA}$.

331. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из неподвижной точки на касательные к окружности.

332*. Дана окружность радиуса a и на ней две диаметрально противоположные точки O и A. Вокруг точки O вращается луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает окружность в переменной точке B. На этой прямой от точки B

в направлении луча откладывается отрезок $\overline{BM}$, равный диаметру окружности. Написать в обобщенных полярных и прямоугольных координатах уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox луч $\overrightarrow{OA}$.

333*. Дана точка O и прямая l. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, причем $|\overline{OA}|=a$. Вокруг точки O вращается луч и на прямой, содержащей этот луч, от точки B ее пересечения с прямой l откладывается отрезок $\overline{BM}=\overline{AB}$, причем точка M берется на продолжении отрезка $\overline{OB}$ за точку B для всех положений луча по одну сторону от OA и на отрезке $\overline{OB}$ для всех положений луча по другую сторону от OA. Написать уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, в обобщенных полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox луч $\overrightarrow{OA}$.

334. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найти линию, описываемую при этом движении отрезка основанием перпендикуляра, опущенного из точки пересечения прямых на отрезок (в обобщенных полярных и прямоугольных координатах).

* * *

335*. Дана окружность с центром O и радиусом a и две перпендикулярные прямые Ox и Oy. По окружности перемещается точка A и из нее опускаются перпендикуляры AB на Ox, AC на Oy и AM на BC. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой M при перемещении точки A по окружности, принимая за параметр угол t, образуемый лучом $\overrightarrow{OA}$ с осью $\overrightarrow{Ox}$. Написать уравнение этой линии в декартовых координатах.

336. На окружности взяты две диаметрально противоположные точки O и K и в точке K к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. Через точку A проведена прямая, параллельная касательной, а через точку B — прямая, параллельная диаметру OK. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой M пересечения этих прямых, принимая за начало координат точку O, за положительное направление оси Ox направление $\overrightarrow{OK}$ и за параметр угол φ, образуемый лучом $\overrightarrow{OA}$ с лучом $\overrightarrow{OK}$. Написать полученное уравнение в декартовых координатах.

337*. По оси Ox без скольжения катится окружность радиуса a. Составить параметрические уравнения линии, описываемой той точкой M катящейся окружности, которая в начальный момент находилась в начале координат, принимая за параметр t угол от радиуса $\overrightarrow{CM}$ окружности, идущего в точку M, до радиуса $\overrightarrow{CA}$, идущего в точку A касания.

338*. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь вне его. Найти параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга, принимая за начало координат центр неподвижного круга, а за параметр угол t между положительным направлением оси абсцисс и радиусом неподвижного круга, идущим в точку касания обоих кругов. В начальном положении точка касания кругов лежит на оси абсцисс.

339*. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь внутри него. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга. Выбор системы координат и обозначений такой же, как и в предыдущей задаче.

340. Показать, что:

1) при $R=4r$ гипоциклоида обращается в астроиду;

2) при $R=2r$ гипоциклоида обращается в диаметр неподвижного круга.

3) при $R=r$ эпициклоида обращается в кардиоиду.

341*. По окружности $x^2+y^2=r^2$ катится прямая, начальное положение которой $x=r$. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой M катящейся прямой, принимая за параметр угол t, образуемый с осью Ox радиусом, идущим в точку касания. В начальный момент движения точка занимает положение $(r,\ 0)$.

§ 2. Уравнения поверхностей и линий в пространстве

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

342. Написать уравнения: 1) плоскостей координат Oyz, Ozx, Oxy; 2) плоскостей, проходящих через точку $(a,\ b,\ c)$ и параллельных плоскостям координат Oyz, Ozx, Oxy; 3) плоскостей, делящих пополам двугранные углы между координатными плоскостями Oxz и Oyz.

343. Написать уравнение плоскости, зная длину p перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат, и углы α, β, γ этого перпендикуляра с осями координат.

344. Написать уравнение поверхности шара радиуса R: 1) с центром в начале координат; 2) с центром в точке (a, b, c).

345. Написать уравнение круглого цилиндра радиуса r, ось которого совпадает с осью Oz.

346. Составить уравнение круглого конуса, основанием которого служит окружность $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, а вершина находится в точке $(0, 0, h)$.

347. Написать уравнение круглого конуса, вершина которого находится в начале координат, ось совпадает с осью Oz, а образующая составляет с осью угол φ.

348. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении прямой $y=kx+b$, $z=0$ вокруг оси Ox.

349. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении параболы $z=ax^2$, $y=0$ вокруг ее оси.

350. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$, $z=0$:
1) вокруг его большой оси, 2) вокруг его малой оси.

351. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$: 1) вокруг ее действительной оси, 2) вокруг ее мнимой оси.

352. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении параболы $y^2=2px$, $z=0$ вокруг ее оси.

353*. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении окружности $(x-a)^2+z^2=b^2$, $a>b>0$, вокруг оси Oz.

354*. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении линии $y=f(x)$, $z=0$ вокруг оси Ox.

355*. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении линии $F(x, y)=0$ вокруг оси Ox.

356*. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении прямой $x=a$, $z=ky$ вокруг оси Oz.

357*. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении линии $x=f(z)$, $y=g(z)$ вокруг оси Oz.

358. Пусть $M=(x, y, z)$ — произвольная точка сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$; M' — ее проекция на плоскость Oxy. Написать параметрические уравнения сферы, принимая за параметры угол u луча $\overrightarrow{OM}$ с плоскостью Oxy (широта) и угол v луча $\overrightarrow{OM'}$ с положительным направлением оси Ox (долгота).

359*. Поверхность, получающаяся при вращении окружности $(x-a)^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$, $y=0$ вокруг оси Oz, называется тором. Пусть $M=(x, y, z)$ — произвольная точка тора; C — центр окружности, по которой плоскость, проходящая через ось Oz и точку M, пересекает тор; M' — проекция точки M на плоскость Oxy; u — угол, образованный лучом $\overrightarrow{CM}$ с лучом $\overrightarrow{CA}$, исходящим из точки C и одинаково направленным с лучом $\overrightarrow{OC}$; v — угол луча $\overrightarrow{OC}$ с положительным направлением оси Ox. Написать параметрические уравнения поверхности тора, принимая за параметры числа u и v.

360*. Дана окружность $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. Вокруг оси Oz вращается полуплоскость, пересекающая эту окружность в переменной точке A. В полуплоскости, проходящей через ось Oz и точку A, вокруг точки A вращается луч $\overrightarrow{AM}$ так, что угол v, образуемый лучом $\overrightarrow{AM}$ с продолжением луча $\overrightarrow{OA}$ за точку A, остается все время вдвое меньше угла, образованного $\overrightarrow{OA}$ с положительным направлением оси Ox. В начальный момент движения направления лучей $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AM}$ совпадают с положительным направлением оси Ox. Написать параметрические уравнения поверхности, описываемой вращающим лучом, принимая за параметры расстояние u точки $M=(x, y, z)$ поверхности до точки A и угол v.

361. Центр C окружности радиуса r, плоскость которой перпендикулярна к оси Oz, перемещается по оси Oz с постоянной скоростью v. По этой подвижной окружности равномерно перемещается точка M так, что луч $\overrightarrow{CM}$ вращается с постоянной скоростью ω. Составить параметрические уравнения линии, описываемой точкой M, при условии, что в начальный момент движения $M=(r, 0, 0)$ (винтовая линия).

362*. Написать параметрические уравнения линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$ и круглого цилиндра $x^2+y^2-rx=0$, выбирая в качестве параметра угол φ, образуемый проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки M линии на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox (линия Вивиани).

ГЛАВА III

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Составление уравнения прямой по различным ее заданиям

Александров, гл. V, §§ 1, 3, 4.
Моденов, гл. V, §§ 50—58.
Постников, гл. 3, § 1, пп. 1, 2.

363. Написать уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 4;

2) проходящей через точку (2, 3) и имеющей угловой коэффициент, равный —5;

3) проходящей через точку (3, —2) параллельно оси Oy;

4) проходящей через точку (3, —5) параллельно вектору $\{-4, 2\}$;

5) проходящей через две точки (2, 3) и (—4, —6);

6) отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 3 и —5. Система координат аффинная.

364. Найти угловой коэффициент k и отрезки a и b, отсекаемые на осях Ox и Oy прямой $x+2y+1=0$. Система координат аффинная.

365. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (3, —2) и параллельной вектору $\{-2, 3\}$; написать общее уравнение этой прямой. Система координат аффинная.

366. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Система координат аффинная.

367. Дан треугольник ABC: $A=(-2, 3)$, $B=(4, 1)$, $C=(6, -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A. Система координат аффинная.

368. Дан треугольник ABC: $A=(4, 4)$, $B=(-6, -1)$, $C=(-2, -4)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C. Система координат прямоугольная.

369. Основания равнобочной трапеции равны 10 и 6, а угол при основании равен $\frac{\pi}{3}$. Принимая за ось абсцисс большее основание трапеции, за начало координат его середину, а за положительное направление оси ординат вектор, идущий из середины большего основания в середину меньшего основания, написать в этой системе координат уравнения всех сторон трапеции. Система координат прямоугольная.

370. Через точку $(2, -1)$ провести прямую, отрезок которой, заключенный между осями координат, делился бы в данной точке пополам. Система координат аффинная.

371. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x+5y=0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Система координат прямоугольная.

372*. Через точку $M=(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, была равна 3. Система координат прямоугольная.

373. Вершина D параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой K, лежащей на стороне $\overline{BC}$ и делящей отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении $2:3$. Вершина B соединена с точкой L стороны $\overline{CD}$, делящей отрезок $\overrightarrow{DC}$ в отношении $3:5$. В каком отношении точка M пересечения прямых DK и BL делит направленные отрезки $\overrightarrow{DK}$ и $\overrightarrow{BL}$?

374. Даны две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Найти геометрическое место середин отрезков, высекаемых данными прямыми на прямых, параллельных оси ординат. Система координат аффинная.

375*. В треугольнике ABC углы A и B при его основании AB острые и боковые стороны $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ не равны между собой. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на основании данного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.

376*. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

377*. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x-y=0$, $5x-y=0$ и уравнение $3x-y=0$ одной из его медиан.

Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка (3, 9), и найти координаты его вершин. Система координат аффинная.

378*. Даны уравнения $3x-2y+1=0$, $x-y+1=0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x-y-1=0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Система координат аффинная.

379*. Дано уравнение $x-2y+7=0$ стороны треугольника и уравнения $x+y-5=0$, $2x+y-11=0$ медиан, выходящих из вершин треугольника, лежащих на данной прямой. Составить уравнения двух других сторон треугольника. Система координат аффинная.

380*. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu.$$

Пусть A', B', C' — точки пересечения пар прямых BQ и CR, CR и AP, AP и BQ.

1) Найти отношение площади ориентированного треугольника $A'B'C'$ к площади ориентированного треугольника ABC.

2) Чему равно это отношение в случае $\lambda=\mu=\nu=2$?

§ 2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Александров, гл. V, § 2.
Моденов, гл. V, § 59.
Постников, гл. 3, § 1, п. 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат является аффинной.

381. Даны две прямые $Ax+By+C=0$; $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

382. Даны две прямые: $x=x_1+a_1t$, $y=y_1+b_1t$; $x=x_2+a_2t$, $y=y_2+b_2t$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

383. Определить взаимное расположение пар прямых:

1) $2x+3y-1=0$; $4x+6y-7=0$;

2) $x=5+4t$, $y=-2-2t$; $x=1-2t$, $y=7+t$;

3) $3x+9y+5=0$; $x=2+3t$, $y=-t$.

384. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-3y=0$ и $2x+5y+6=0$ и одну из его вершин $C=(4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

385. Даны вершины треугольника: $A=(-1, 2)$, $B=(3, -1)$ и $C=(0, 4)$. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину A и параллельной стороне BC.

386. Через точку $M=(2, 5)$ провести прямую, равноудаленную от точек $P=(-1, 2)$ и $Q=(5, 4)$.

387. Даны середины $M_1=(2, 3)$, $M_2=(-1, 2)$ и $M_3=(4, 5)$ сторон треугольника. Составить уравнения сторон.

388. Составить уравнение прямой, параллельной двум параллельным прямым $x+y-1=0$, $x+y-13=0$ и равноудаленной от них.

389. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(-4, -5)$.

390. Доказать: для того, чтобы прямая $Ax+By+C=0$ была параллельна прямой M_1M_2, проходящей через точки $M_1=(x_1, y_1)$ и $M_2=(x_2, y_2)$, необходимо и достаточно, чтобы $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.

391. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1=0$, $x-2y-10=0$ и точка пересечения его диагоналей $M=(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

392. Даны две смежные стороны параллелограмма

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

и точка пересечения его диагоналей $M=(x_0, y_0)$. Написать уравнения двух других его сторон.

393.* Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M=(1, 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P=(3, 0)$, $Q=(6, 6)$, $R=(5, 9)$, $S=(-5, 4)$.

394. Даны уравнения сторон параллелограмма $ABCD$: $3x+4y-12=0$ (AB), $5x-12y-6=0$ (AD) и середина $E=\left(-2, \frac{13}{6}\right)$ стороны $\overline{BC}$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

395. Дано уравнение $3x+4y-12=0$ стороны AB параллелограмма $ABCD$, уравнение $x+12y-12=0$ диагонали AC и середина $E=\left(-2, \frac{13}{6}\right)$ стороны $\overline{BC}$. Найти уравнения сторон BC, CD и AD.

§ 3. Взаимное расположение трех прямых на плоскости. Пучок прямых

Александров, гл. V, § 5.
Моденов, гл. V, §§ 60, 61.
Постников, гл. 3, § 1, п. 3.

Во всех задачах этого параграфа, кроме двух последних, система координат предполагается аффинной. В задачах 402 и 403 система координат предполагается прямоугольной.

396*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ образовывали треугольник.

397*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ имели единственную общую точку.

398. Найти взаимное расположение трех прямых в каждом из следующих случаев:

1) $x+2y+3=0$, $2x+3y+5=0$, $x-y+7=0$;
2) $2x+5y-4=0$, $7x+y-20=0$, $3x+2y-8=0$.
3) $x-y-2=0$, $3x+5y+4=0$, $6x-6y+1=0$;
4) $2x+3y-1=0$, $4x+6y+5=0$, $10x+15y-7=0$.

399*. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB соответственно в точках P, Q и R. Доказать, что прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку.

400*. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda, \qquad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu, \qquad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu.$$

При каких необходимых и достаточных условиях:

1) прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку;
2) прямые AP, BQ и CR параллельны.

401*. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Написать уравнение его медианы, проведенной из точки пересечения первой и второй сторон.

402*. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Составить уравнение высоты треугольника, опущенной из точки пересечения первых двух сторон на третью его сторону.

403*. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Написать уравнения биссектрис внутреннего угла треугольника, образованного первой и второй прямыми.

§ 4. Расположение точек относительно прямой

Александров, гл. V, § 6.
Моденов, гл. V, § 62.
Постников, гл. 3, § 1, п. 4.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

404. Даны две прямые $2x + 3y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$ и пять точек $P = (3, 1)$, $Q = (2, 2)$, $R = (-2, 1)$, $S = (1, -1)$, $T = (4, 0)$. Обозначая через AMB тот из четырех углов, образованных данными прямыми, в котором лежит точка P, а через CMD — угол, ему вертикальный, установить, в каких углах лежат остальные четыре точки.

405. Две параллельные прямые $2x - 5y + 6 = 0$ и $2x - 5y - 7 = 0$ делят плоскость на три области: полосу, заключенную между этими прямыми, и две области вне этой полосы. Установить, каким областям принадлежат точки $A = (2, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 8)$, $E = (7, 1)$, $F = (-4, 6)$.

406. Даны две точки $A = (-3, 1)$ и $B = (5, 4)$ и прямая $x - 2y + 1 = 0$. Установить, пересекает ли данная прямая отрезок $\overline{AB}$ или его продолжение за точку A или за точку B.

407*. Даны две точки $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ и прямая $Ax + By + C = 0$, причем $Ax_1 + By_1 + C \neq Ax_2 + By_2 + C \neq 0$. В каком отношении точка пересечения данной прямой с прямой M_1M_2 делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$?

408. Даны четыре точки: $A = (5, 3)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 0)$, $D = (2, 4)$. Установить, принадлежит ли точка M пересечения прямых AB и CD отрезкам $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ или их продолжениям.

409*. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C=0$, $Ax+By+D=0$?

410. Даны три прямые: $Ax+By+C=0$, $Ax+By+D=0$, $Ax+By+E=0$. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вторая прямая лежала в полосе, образованной первой и третьей прямыми.

411*. Дан треугольник ABC: $A=(3, 1)$, $B=(-2, 4)$, $C=(1, 0)$ и прямая $x-7y+5=0$. Установить, пересекает ли прямая стороны треугольника или их продолжения.

412*. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями $2x-y+2=0$ (AB), $x+y-4=0$ (BC), $2x+y=0$ (CA). Определить положение точек $M=(3, 1)$, $N=(7, -6)$, $P=(3, 2)$ относительно данного треугольника.

413*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$.

414*. Даны пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка $M_0=(x_0, y_0)$, не принадлежащая ни одной из данных прямых. Найти направления сторон того из четырех углов, образованных данными прямыми, в котором лежит данная точка M.

415*. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями $3x-y+4=0$ (AB), $2x-y+1=0$ (BC), $x-2y=0$ (CA). Определить положение прямой $2x-y+3=0$ относительно данного треугольника.

§ 5. Условие перпендикулярности двух прямых

Александров, гл. V, §§ 7, 9.
Моденов, гл. V, §§ 65, 66.
Постников, гл. 3, § 1, п. 5.

Во всех задачах этого параграфа система координат является прямоугольной.

416. Даны вершины треугольника $A=(4, 6)$, $B=(-4, 0)$ и $C=(-1, -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

417. Даны две вершины треугольника $A=(-6, 2)$, $B=(2, -2)$ и точка $H=(1, 2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

418. Даны две стороны треугольника

$$x+3y-1=0, \qquad 3x+5y-6=0$$

и точка пересечения его высот $(0, 0)$. Найти третью сторону треугольника.

419. Зная вершину $A=(3, -4)$ треугольника ABC и уравнения двух его высот $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$, написать уравнение стороны BC.

420. В треугольнике ABC известны: сторона AB, заданная уравнением $4x+y-12=0$, высота BH, заданная уравнением $5x-4y-15=0$, и высота AH, заданная уравнением $2x+2y-9=0$. Найти вершину C этого треугольника.

421. Найти общую вершину M двух равнобедренных треугольников AMB и CMD, зная концы их оснований $A=(0, 0)$, $B=(0, 1)$, $C=(-2, 1)$, $D=(1, 1)$.

422. Дано уравнение стороны прямоугольника $2x+3y-6=0$ и точка пересечения его диагоналей $(5, 7)$. Написать уравнения остальных сторон прямоугольника, зная, что одна из них проходит через точку $(-2, 1)$.

423. Найти проекцию точки $(-5, 6)$ на прямую $7x-13y-105=0$.

424. Найти точку, симметричную точке $M=(-2, 9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$.

425. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x+3y-10=0$, $x-2y+3=0$ перпендикуляров, восставленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

426*. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15, 10)$ и $(10, 5)$, зная, что прямая $x+2y=0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

427*. Вершина треугольника находится в точке $(-2, 9)$, а биссектрисами двух его углов служат прямые $2x-3y+18=0$, $y+2=0$. Написать уравнение стороны треугольника, противолежащей данной вершине.

428*. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1, 1)$, $(2, 8)$ и точки $(4, -3)$, $(-15, 14)$ на ее боковых сторонах.

429*. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9, -1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

§ 6. Углы между двумя прямыми. Угол от одной прямой до другой

Александров, гл. V, § 9.
Моденов, гл. V, §§ 65, 66.
Постников, гл. 3, § 1, п. 5.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

430*. Доказать: если три прямые, образующие треугольник, занумерованы числами 1, 2, 3, то три угла — угол от первой прямой до второй, угол от второй прямой до третьей и угол от третьей прямой до первой — являются одновременно либо внутренними углами треугольника, либо внешними его углами.

431*. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x-y+6=0$, $x-y+4=0$, $x+2y=0$.

432. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x+3y=0$; его вершина находится в точке $(2, 6)$; тангенс угла при основании равен $\frac{3}{2}$. Написать уравнения боковых сторон треугольника.

433. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7, 15)$, а середина его основания в точке $(1, 3)$. Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

434*. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x-5y+1=0$, а боковой стороной — прямая $12x-y-23=0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(3, 1)$.

435. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x+3y=0$, а боковой стороной — прямая $5x-12y=0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(2, 6)$.

436*. Зная уравнения двух сторон треугольника ABC: $2x+3y-6=0$ (AB), $x+2y-5=0$ (AC) и внутренний угол при вершине B, равный $\frac{\pi}{4}$, написать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

437*. Концы основания равнобедренного треугольника находятся в точках $A=(-3, 4)$, $B=(6, -2)$; тангенс угла при основании равен $\frac{3}{2}$. Найти координаты вершины C, зная, что начало координат и точка C лежат по разные стороны от прямой AB.

438*. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x+2y=0$, а боковой стороной—прямая $x-y+6=0$. Написать уравнения: 1) прямой, проходящей через точку пересечения двух данных сторон треугольника параллельно третьей его стороне; 2) высоты, опущенной из точки пересечения данных сторон на третью сторону треугольника; 3) медианы, проведенной из точки пересечения данных сторон.

439*. Даны две прямые: $x+3y=0$ и $x-y+8=0$. Найти третью прямую так, чтобы вторая из данных прямых была биссектрисой угла между первой из данных прямых и искомой прямой.

440*. Даны две вершины треугольника ABC: $A=(1, 2)$, $B=(3, 4)$ и тангенсы внутренних углов при этих вершинах $\operatorname{tg} A=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B=\frac{1}{3}$. Найти третью вершину треугольника, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и начало координат.

441*. Дана вершина $C=(-3, 2)$ треугольника ABC, тангенсы его внутренних углов $\operatorname{tg} A=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B=\frac{4}{3}$ и уравнение $2x-y-2=0$ стороны AB. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

442*. Зная уравнение стороны треугольника $x+7y-6=0$ и уравнения биссектрис

$$x+y-2=0, \qquad x-3y-6=0,$$

выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противолежащей данной стороне.

443*. Даны уравнения сторон треугольника $3x+y-3=0$, $3x+4y=0$ и уравнение $x-y+5=0$ биссектрисы одного из внутренних углов этого треугольника. Составить уравнение третьей стороны.

444*. Даны две точки $A=(3, 3)$ и $B=(0, 2)$. На прямой $x+y-4=0$ найти точку M, из которой отрезок $\overline{AB}$ виден под углом $\frac{\pi}{4}$.

445*. Даны две пересекающиеся не взаимно перпендикулярные прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. Доказать, что угол между векторами $\boldsymbol{n}_1=\{A_1, B_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{A_2, B_2\}$ равен тому из углов между данными прямыми, внутри которого лежат точки, принадлежащие полуплоскостям, определяемым данными прямыми, для координат точек которых левые части данных уравнений имеют противоположные знаки.

446*. Найти косинус того угла между двумя прямыми $x+5y=0$, $10x+2y+1=0$, в котором лежит точка $(1, 1)$.

447*. Даны две пересекающиеся не взаимно перпендикулярные прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка (x_0, y_0), не принадлежащая ни одной из этих прямых. Найти косинус того угла φ между данными прямыми, в котором лежит данная точка.

448*. Три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ образуют треугольник. Найти косинус внутреннего угла этого треугольника, образованного первой и второй прямыми.

449*. Даны три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$, проходящие через одну точку. При каком необходимом и достаточном условии третья прямая проходит в остром угле, образованном двумя первыми?

§ 7. Расстояние от точки до прямой

Александров, гл. V, §§ 7, 8.
Моденов, гл. V, §§ 63, 64.
Постников, гл. 3, § 1, п. 5.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

450. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x+12y-1=0$ и отстоящих от нее на расстояние 5.

451. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$12x-16y-48=0, \qquad 3x-4y+43=0.$$

452. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми

$$x+2y=0, \qquad 2x-11y+30=0.$$

453. Найти касательные к окружности с центром $(1, 1)$ и радиусом 3, параллельные прямой $5x-12y=0$.

454*. Написать уравнения касательных к окружности с центром $(1, 1)$ и радиусом 2, проведенных из точки $(7, -1)$.

455*. Найти общие касательные к двум окружностям, центры которых находятся в точках $(1, 1)$ и $(2, 3)$, а радиусы соответственно равны 2 и 4.

456*. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром (1, 9) и радиусом 5, зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x-7y=0$.

457. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x+2y+6=0$, а боковой стороной — прямая $2x+$ $+y=0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что ее расстояние от точки пересечения данных сторон равно $\sqrt{5}$.

458*. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x+7y=0$, $x-y-4=0$, внутри которого лежит точка (1, 1).

459*. Даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=$ $=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка (x_0, y_0), не принадлежащая ни одной из этих прямых. Написать уравнение биссектрисы того угла между данными прямыми, в котором лежит данная точка.

460*. Написать уравнения сторон прямоугольника, зная уравнения его диагоналей $7x-y+4=0$, $x+y-2=0$ и внутреннюю точку (3, 5) одной из его сторон.

461. Даны две прямые $3x+4y-2=0$, $5x-12y-4=0$ и точка (1, 1). Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния до данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

462*. Доказать, что внутри треугольника, образованного прямыми $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$, $2x-2y+5=0$, существует точка, равноудаленная от первых двух прямых и отстоящая от третьей прямой на расстояние $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Найти эту точку.

463*. Внутри треугольника ABC со сторонами $2x+y-$ $-22=0$ (AB), $2x-y+18=0$ (CB), $x-2y-6=0$ (CA) найти точку, расстояния которой до прямых AB, BC и CA пропорциональны числам 20, 12, 15.

464*. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку (—1, 3) и касающейся прямых $7x+y=0$, $x-y+8=0$.

465*. Найти центр C и радиус r круга, вписанного в треугольник со сторонами $3x-4y-2=0$, $4x-3y-5=0$, $5x+12y+27=0$.

466. Найти центр C и радиус r круга, вписанного в треугольник со сторонами $x+y+12=0$, $7x+y=0$, $7x-$ $-y+28=0$.

467*. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$3x-4y=0, \qquad 4x-3y=0, \qquad 5x+12y-10=0.$$

468*. Написать уравнение биссектрисы наибольшего из внутренних углов треугольника со сторонами

$$3x-4y-2=0, \qquad 4x-3y-5=0. \qquad 5x+12y+27=0.$$

469*. Составить уравнение биссектрисы острого угла между двумя прямыми $x-3y=0$, $3x-y+5=0$.

470*. Даны две пересекающиеся не взаимно перпендикулярные прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. Написать уравнение биссектрисы острого угла между ними.

471*. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M=(1, 6)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах: $P=(3, 0)$ на стороне AB, $Q=(6, 6)$ на стороне BC, $R=(5, 9)$ на стороне CD.

472*. Составить уравнения сторон квадрата, зная его центр $(1, 6)$ и по точке на двух непараллельных сторонах: $(4, 9)$ на стороне AB, $(-5, 4)$ на стороне BC.

473*. Написать уравнения сторон квадрата, зная по точке на каждой из них: $P=(2, 1)$ на стороне AB, $Q=(0, 1)$ на стороне BC, $R=(3, 5)$ на стороне CD, $S=(-3, -1)$ на стороне DA.

474*. Вершины острых углов прямоугольных треугольников перемещаются по двум параллельным прямым, а вершина прямого угла — по прямой, к ним перпендикулярной. Какую линию описывает при этом основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника?

475*. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до катетов CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равна расстоянию до его гипотенузы AB.

476*. Дана вершина $(3, 5)$ равнобедренного треугольника, уравнение $x-2y+12=0$ его основания и площадь $s=15$. Составить уравнения боковых сторон.

477. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Найти длину высоты треугольника, опущенной на третью его сторону.

§ 8. Метрические задачи на прямую в аффинных координатах

478*. Найти тангенс угла α от оси Ox до прямой $y=kx+b$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

479*. Найти тангенс угла α от оси Ox до прямой $y=kx+b$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega$.

480*. Найти тангенс угла φ от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

481*. Найти тангенс угла φ от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega$.

482*. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

483*. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega$.

484*. 1) Найти косинус, синус и тангенс угла φ от прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$ до прямой $A_2x+B_2y+C_2=0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

2) Какой вид примут эти формулы в случае

$$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega?$$

485*. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_0, y_0) на прямую

$$Ax+By+C=0,$$

если

$$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega.$$

486*. Зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, составить уравнения семейства прямых:

1) перпендикулярных к оси Ox;

2) перпендикулярных к оси Oy;

3) рассмотреть частный случай:

$$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega.$$

487*. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax+By+C=0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

488*. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax+By+C=0$, если $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega$.

489*. Найти расстояние d от точки $(2, 1)$ до прямой $10x+56y-37=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

490*. 1) Составить уравнения биссектрис углов между координатными осями, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

2) Рассмотреть частный случай $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}=\omega$.

ГЛАВА IV

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Составление уравнений прямых и плоскостей

Александров, гл. X, § 1, пп. 1, 5; § 4.
Моденов, гл. VI, §§ 68, 69, 71—75, 77, 78, 81.
Постников, гл. 3, § 2, пп. 1, 2; § 3, п. 1.

491. Дана точка $A=(1, 2, 3)$.

1) Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A и параллельных координатным плоскостям.

2) Составить уравнения прямых, проходящих через точку A и параллельных осям координат.

3) Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A и через оси координат.

4) Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и точку A.

Система координат аффинная.

492. Дана точка $A=(1, 2, 3)$.

1) Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные плоскости.

2) Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на оси координат.

3) Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку A и перпендикулярных к осям координат.

Система координат прямоугольная.

493. В пространстве дана прямая $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=5$. Найти направляющий вектор этой прямой. Система координат аффинная.

494. 1) Составить уравнения прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 2 и 3.

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и параллельной оси Oz. Система координат аффинная.

495. Написать уравнения прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3. Система координат аффинная.

496. 1) Написать уравнения плоскостей, проходящих через ось Oz и делящих пополам двугранные углы, образованные координатными плоскостями Oxz и Oyz.

2) Написать уравнения биссектрисы угла между положительными направлениями осей Ox и Oy.

Система координат прямоугольная.

497. Представить прямую $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oy. Система координат аффинная.

498. Найти ортогональные проекции прямой $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ на координатные плоскости Oyz, Ozx, Oxy. Система координат прямоугольная.

499. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(0, y_1, z_1)$, $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью. Система координат аффинная.

500*. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $y+2z=0$ и пересекающей прямые $x=1-t$, $y=t$, $z=4t$ и $x=2-t$, $y=4+2t$, $z=1$. Система координат аффинная.

501*. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(3, -1, -4)$, пересекающей ось Oy и коллинеарной плоскости $y+2z=0$. Система координат аффинная.

502. Составить параметрические уравнения и общее уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ и параллельной векторам $\{-5, 6, 4\}$ и $\{2, -1, 0\}$. Система координат аффинная.

503. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям $x=2+3u-4v$, $y=4-v$, $z=2+3u$. Система координат аффинная.

504*. В плоскости, проходящей через три точки $A=(2, 1, 3)$, $B=(2, 4, 0)$, $C=(-3, 0, 4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти: 1) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u=5$, $v=3$; 2) плоскостные координаты u и v точки пересечения данной плоскости с осью Oz. Система координат аффинная.

505*. В плоскости $2x+3y-4z+12=0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

1) Найти пространственные координаты x, y, z точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u=1$, $v=1$.

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA.

3) Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой пересечения данной плоскости с плоскостью $5x+3z-8=0$. Система координат аффинная.

506. В тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x+3y-5z+10=0$, вписан куб так, что одна из его вершин лежит в начале координат, три ребра, выходящих из этой вершины, направлены по осям координат, а вершина, противоположная началу координат, лежит в данной плоскости. Определить длину ребра куба. Система координат прямоугольная.

507. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 5 и —7, и проходящей через точку (1, 1, 2). Система координат аффинная.

508. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (1, 2, 3), параллельной прямой $x=y=z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки. Система координат аффинная.

509. Найти объем тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью, проходящей через точку (3, 5, —7) и отсекающей на осях координат равные отрезки. Система координат прямоугольная.

510. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудаленной от точек (2, 7, 3) и (—1, 1, 0). Система координат аффинная.

511. Даны вершины тетраэдра: $A=(2, 1, 0)$, $B=(1, 3, 5)$, $C=(6, 3, 4)$, $D=(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую AB и равноудаленной от вершин C и D. Система координат аффинная.

512*. Даны четыре вершины тетраэдра: $A=(3, 5, -1)$, $B=(7, 5, 3)$, $C=(9, -1, 5)$, $D=(5, 3, -3)$. Написать уравнения плоскостей, равноудаленных от всех вершин тетраэдра. Система координат аффинная.

513. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2+3t$, $y=-1+6t$, $z=4t$ и коллинеарной прямой $x=-1+2t$, $y=3t$, $z=-t$. Система координат аффинная.

514. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (—2, 3, 0) и через прямую $x=1$, $y=2+t$, $z=2-t$. Система координат аффинная.

515*. Даны три прямые:

$$x=3+t, \quad y=-1+2t, \quad z=4t;$$

$$x=-2+3t, \quad y=-1, \quad z=4-t;$$

$$\left.\begin{aligned} x-3y+z&=0,\\ x+y-z+4&=0. \end{aligned}\right\}$$

Написать уравнения прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой. Система координат аффинная.

516*. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (1, 2, 3) и пересекающей прямые

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{3}.$$

Система координат аффинная.

517*. Показать, что прямые $x=1+2t$, $y=2t$, $z=t$ и $x=11+8t$, $y=6+4t$, $z=2+t$ пересекаются, и написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними. Система координат прямоугольная.

518. Написать уравнения биссектрисы тупого угла между прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2y-\ \ 5&=0,\\ y-4z+14&=0 \end{aligned}\right\}$$

и ее ортогональной проекцией на плоскость

$$x+y+1=0.$$

Система координат прямоугольная.

519*. Через прямую $2x=y=2z$ провести плоскость p так, чтобы данная прямая была биссектрисой угла, образуемого линиями пересечения плоскости p с плоскостями $y=0$ и $x+y=0$. Система координат прямоугольная.

520. Составить уравнения проекции прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$$

из точки $(1, 2, 1)$ на плоскость $y-2z+4=0$. Система координат аффинная.

521. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке (3, 4, 5); концы его основания лежат на осях Ox и Oy, а плоскость треугольника параллельна оси Oz. Найти угол при вершине треугольника и написать уравнение его плоскости. Система координат прямоугольная.

522*. Найти геометрическое место точек, делящих в одном и том же отношении отрезки с концами на двух скрещивающихся прямых.

523*. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра $ABCD$ и через середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

§ 2. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости

Александров, гл. X, § 1, п. 4; §§ 3, 6.
Моденов, гл. VI, §§ 76, 79, 80.
Постников, гл. 3, § 2, п. 3; § 3, п. 2.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

524. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскость $Ax+By+Cz+D=0$: 1) была параллельна плоскости Oxy; 2) пересекала плоскость Oxy; 3) совпадала с плоскостью Oxy.

525. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскость $Ax+By+Cz+D=0$: 1) пересекала ось Oz; 2) была параллельна ей; 3) проходила через ось Oz.

526. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$: 1) пересекала плоскость Oxy; 2) была параллельна ей; 3) лежала в этой плоскости.

527. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+{}$ $+C_2z+D_2=0$: 1) пересекала плоскость Oxy; 2) была параллельна ей; 3) лежала в этой плоскости.

528. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$: 1) скрещивалась с осью Oz; 2) пересекала ось Oz; 3) была параллельна ей; 4) совпадала с осью Oz.

529. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$: 1) скрещивалась с осью Oz; 2) пересекала ось Oz; 3) была ей параллельна; 4) совпадала с осью Oz.

530. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $2x+3y+4z-12=0, \quad 3x-6y+1=0;$
2) $3x-2y-3z+5=0, \quad 9x-6y-9z-5=0;$
3) $2x-y-z-3=0, \quad 10x-5y-5z-15=0.$

531*. Даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

532. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $\left.\begin{aligned} x&=1+u+v, \\ y&=2+u, \\ z&=3+u-v; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=3+2u, \\ y&=2-2u+4v, \\ z&=1+u+3v; \end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} x&=1+u+v, \\ y&=2+u, \\ z&=3+u-v; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=1+4u, \\ y&=3u+v, \\ z&=4+2u+2v; \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x&=1+u+v, \\ y&=2+u, \\ z&=3+u-v; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=-1+2u+v, \\ y&=u+2v, \\ z&=1+3v. \end{aligned}\right\}$

533*. Даны две плоскости своими параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+a_1u+a_2v, \\ y&=y_1+b_1u+b_2v, \\ z&=z_1+c_1u+c_2v; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=x_2+a_3u+a_4v, \\ y&=y_2+b_3u+b_4v, \\ z&=z_2+c_3u+c_4v. \end{aligned}\right\}$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

534. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

	Прямая	Плоскость
1)	$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$,	$3x+5y-z-2=0$;
2)	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$,	$3x-3y+2z-5=0$;
3)	$\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$,	$x+2y-4z+1=0$;
4)	$\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$,	$3x-y+2z-5=0$.

535*. Дана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: 1) пересекала данную плоскость; 2) была ей параллельна; 3) лежала в плоскости.

536*. Даны плоскость и прямая своими параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+a_1u+a_2v,\\ y&=y_0+b_1u+b_2v,\\ z&=z_0+c_1u+c_2v; \end{aligned}\right\}$$

$$x=x_1+a_3t,\quad y=y_1+b_3t,\quad z=z_1+c_3t.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_1-x_0\\ b_1 & b_2 & b_3 & y_1-y_0\\ c_1 & c_2 & c_3 & z_1-z_0 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: 1) пересекала данную плоскость; 2) была параллельна плоскости; 3) лежала в плоскости.

537. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

Прямая	Плоскость
1) $\left.\begin{aligned} 3x+5y-7z+16&=0,\\ 2x-y+z-6&=0;\end{aligned}\right\}$	$5x-z-4=0;$
2) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+6z-10&=0,\\ x+y+z+5&=0;\end{aligned}\right\}$	$y+4z+17=0;$
3) $\left.\begin{aligned} x+2y+3z+8&=0,\\ 5x+3y+z-16&=0;\end{aligned}\right\}$	$2x-y-4z-24=0.$

538*. Дана прямая:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

и плоскость

$$A_3x+B_3y+C_3z+D=0.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная прямая: 1) пересекала данную плоскость; 2) была параллельна плоскости; 3) лежала в плоскости.

539. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1) $\left.\begin{aligned} &x=1+2t, && y=7+t, && z=3+4t;\\ &x=6+3t, && y=-1-2t, && z=-2+t;\end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} &x=1+2t, && y=2-2t, && z=-t;\\ &x=-2t, && y=-5+3t, && z=4;\end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} &x=2+4t, && y=-6t, && z=-1-8t;\\ &x=7-6t, && y=2+9t, && z=12t;\end{aligned}\right\}$

4) $\left.\begin{aligned} &x=1+9t, && y=2+6t, && z=3+3t;\\ &x=7+6t, && y=6+4t, && z=5+2t.\end{aligned}\right\}$

540*. Даны две прямые:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) скрещивались; 2) пересекались; 3) были параллельны; 4) совпадали.

541. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1) $x=9t, \quad y=5t, \quad z=-3+t;$

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-3z-9&=0, \\ x-2y+z+3&=0; \end{aligned}\right\}$$

2) $x=t, \quad y=-8-4t, \quad z=-3-3t;$

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=0, \\ 2x-y+2z&=0; \end{aligned}\right\}$$

3) $x=3+t, \quad y=-1+2t, \quad z=4;$

$$\left.\begin{aligned} x-3y+z&=0, \\ x+y-z+4&=0; \end{aligned}\right\}$$

4) $x=-2+3t, \quad y=-1, \quad z=4-t;$

$$\left.\begin{aligned} 2y-z+2&=0, \\ x-7y+3z-17&=0. \end{aligned}\right\}$$

542*. Даны две прямые:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

и

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0. \end{aligned}\right\}$$

Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы, эти прямые: 1) скрещивались; 2) пересекались; 3) были параллельны; 4) совпадали.

543. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1) $\left.\begin{aligned} x+z-1 &= 0, \\ 3x+y-z+13 &= 0; \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x-2y+3 &= 0, \\ y+2z-8 &= 0; \end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} 2x+3y &= 0, \\ x+z-8 &= 0; \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} z-4 &= 0, \\ 2x+3z-7 &= 0; \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x+y+z-1 &= 0, \\ y+4z &= 0; \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} 2x+3y+6z-6 &= 0, \\ 3x+4y+7z &= 0; \end{aligned}\right\}$

4) $\left.\begin{aligned} 3x+y-2z-6 &= 0, \\ 41x-19y+52z-68 &= 0; \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} 22x-9y+25z-37 &= 0, \\ 19x-10y+27z-31 &= 0. \end{aligned}\right\}$

544*. Даны две прямые:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} A_3x+B_3y+C_3z+D_3 &= 0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямые: 1) скрещивались; 2) пересекались; 3) были параллельны; 4) совпадали.

§ 3. Взаимное расположение трех плоскостей. Пучок плоскостей. Связка плоскостей

Александров, гл. X, § 5.
Моденов, гл. VI, §§ 82—84.
Постников, гл. 3, § 2, п. 3; гл. 4, § 2, пп. 1, 2.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

545. Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:

1) $2x-4y+5z-21=0, \quad x-3z+18=0,$
$$6x+y+z-30=0;$$

2) $x+2y-3z=0, \quad 3x+6y-9z+10=0,$
$$2x+4y-6z-1=0;$$

3) $3x-y+2z+1=0, \quad 7x+2y+z=0,$
$$15x+8y-z-2=0;$$

4) $5x-2y+4=0, \quad 3x+z-5=0,$
$$8x-2y+z+7=0;$$

5) $6x+2y+12z-3=0, \quad 5y-7z-10=0,$
$$3x+y+6z+12=0.$$

546*. Даны три плоскости:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

Пусть r и R — ранги матриц:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы:

1) три плоскости имели единственную общую точку;

2) три плоскости были попарно различны и имели единственную общую прямую;

3) плоскости попарно пересекались и линия пересечения каждых двух плоскостей была параллельна третьей плоскости (т. е. чтобы плоскости образовывали «призму»);

4) две плоскости были параллельны, а третья плоскость их пересекала;

5) три плоскости были попарно параллельны;

6) две плоскости совпадали, а третья их пересекала;

7) две плоскости совпадали, а третья плоскость была им параллельна;

8) три плоскости совпадали.

547. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 1, 0)$ и через прямую $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$.

548. Через линию пересечения плоскостей $6x-y+z=0$, $5x+3z-10=0$ провести плоскость, параллельную оси Ox.

549. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $2x-z=0$, $x+y-z+5=0$ и параллельной прямой $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

550. Даны уравнения граней тетраэдра $x+2y-3z-6=0$, $2y+5z-4=0$, $3x+z+1=0$, $x+2y=0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух его граней и параллельную линии пересечения третьей и четвертой грани.

551. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-4=0$, $3x+z-5=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки.

552*. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2, 3, 1)$ и пересекающей прямые

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0,\\ x-y+z+4&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x+3y-1&=0,\\ y+z-2&=0.\end{aligned}\right\}$$

553*. Показать, что три плоскости $x+2y-z-4=0$, $3x-2y+3z-6=0$, $4y-3z+3=0$ образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельной ее третьей грани.

554*. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$, образуют тетраэдр?

555*. Даны четыре плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$. С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\\ A_4 & B_4 & C_4\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти четыре плоскости принадлежали: 1) одной связке; 2) одной собственной связке; 3) одной несобственной связке.

§ 4. Расположение точек относительно плоскости

Александров, гл. X, § 7.
Моденов, гл. VI, § 85.
Постников, гл. 3, § 2, п. 4.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

556. Определить положение точек $A=(2, 5, 1)$, $B=(2, 1, 0)$, $C=(0, 0, 1)$, $D=(0, 1, -9)$, $E=(-1, -3, 0)$ относительно плоскости $2x+2y+z+2=0$.

557. Даны две плоскости $2x+z=0$, $x+y+3z-5=0$ и точки $A=(2, 1, 1)$, $B=(1, 0, 3)$, $C=(0, 0, 1)$, $D=(-1, 5, 1)$, $E=(1, 4, -3)$. Установить, какие из точек B, C, D и E лежат в одном двугранном угле с точкой A, какие в смежных с ним углах и какие в угле, к нему вертикальном.

558. Даны две параллельные плоскости $3x+4y+2z-10=0$, $3x+4y+2z+5=0$ и точки $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 0, 0)$, $C=(5, 6, 1)$, $D=(-4, 0, 1)$. Определить положение данных точек относительно данных плоскостей.

559. Даны две точки $A=(-3, 1, 5)$ и $B=(5, 4, 2)$ и плоскость $2x-4y+z+14=0$. Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок $\overline{AB}$, его продолжение за точку A или за точку B?

560*. Даны две точки $M_1=(x_1, y_1, z_1)$, $M_2=(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная плоскость пересекала: 1) прямую M_1M_2; 2) отрезок $\overline{M_1M_2}$ в его внутренней точке; 3) продолжение отрезка $\overline{M_1M_2}$ за точку M_1; 4) продолжение отрезка $\overline{M_1M_2}$ за точку M_2.

561*. Даны две точки $M_1=(x_1, y_1, z_1)$, $M_2=(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$, причем $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq Ax_2+By_2+Cz_2+D\neq 0$.

В каком отношении точка M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$.

562. Даны две параллельные плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, $Ax+By+Cz+E=0$ $(D\neq E)$ и точка $M=(x_0, y_0, z_0)$. Через точку M проводится произвольная прямая, пересекающая данные плоскости соответственно в точках P и Q. Найти отношение $\dfrac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{PQ}}$.

563*. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D=0$, $Ax+By+Cz+E=0$.

564*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) лежала внутри тетраэдра, образованного плоскостями

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

565*. Грани тетраэдра заданы уравнениями $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) и вершина тетраэдра, противолежащая грани $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, лежали по разные стороны от этой грани.

566*. Найти направляющие векторы ребер трехгранного угла, образованного плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

и содержащего внутри себя точку (x_0, y_0, z_0).

§ 5. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Александров, гл. V, § 10; гл. X, §§ 8, 9.
Моденов, гл. VI, §§ 88, 89.
Постников, гл. 3, § 2, п. 5; § 3, п. 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

567. Написать уравнение плоскости, зная, что точка (2, 6, —4) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

568. Даны две точки: $A=(3, -2, 1)$, $B=(6, 0, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к прямой AB.

569. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 2, 3) и (4, 5, 7) и перпендикулярной к плоскости $x-y+2z-4=0$.

570. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x+3y+5z-10=0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy.

571. В пучке, определяемом плоскостями $2x+y-3z+2=0$ и $5x+5y-4z+3=0$, найти две перпендикулярные друг к другу плоскости, из которых одна проходит через точку (4, —3, 1).

572. В пучке, определяемом плоскостями $3x+y-2z-6=0$ и $x-2y+5z-1=0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим плоскостям.

573. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ и перпендикулярной к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

574. Написать параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (x_0, y_0, z_0) на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

575. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой

$$x=x_0+at, \quad y=y_0+bt, \quad z=z_0+ct.$$

576*. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1, z_1) на прямую $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

577. Написать уравнения и найти длину d перпендикуляра, опущенного из точки (—3, 13, 7) на прямую

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}.$$

578. Найти ортогональную проекцию точки (1, 3, 5) на прямую $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

579*. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

580. Найти ортогональную проекцию точки (1, 2, —3) на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

581. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки (9, 6, 4) на прямую $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{3}$.

582. Найти точку, симметричную точке (1, 2, 3) относительно плоскости $2x-3y+5z-68=0$.

583. Найти точку, симметричную точке (1, 2, 3) относительно прямой

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}.$$

584. Составить уравнения проекции прямой $x=3+5t$, $y=-1+t$, $z=4+t$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

585*. 1) Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}, \qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

и найти расстояние d между этими прямыми;

2) найти точки пересечения общего перпендикуляра к данным прямым с этими прямыми.

586. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $y=1$, $z+1=0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

587. Даны три плоскости: $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через линию пересечения двух первых плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.

588*. Даны две плоскости:

$$2x+3y+4z+6=0, \qquad (1)$$

$$2x-y+z-6=0. \qquad (2)$$

Найти плоскость (3) так, чтобы плоскость (2) делила пополам двугранные углы между плоскостями (1) и (3).

589*. К непересекающимся диагоналям граней куба, имеющих общее ребро, провести общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

§ 6. Углы между прямыми и между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью

Александров, гл. V, § 10; гл. X, § 9.
Моденов, гл. VI, §§ 88—90.
Постников, гл. 3, § 2, п. 5; § 3, п. 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

590. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

591. Через точку (1, 2, 3) провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

592. Через линию пересечения плоскостей $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$ провести плоскость, образующую угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.

593. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+7}{-2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z}{1}$$

и образующей угол $\frac{\pi}{3}$ с прямой $x-y+z=0$, $x-y+2z=0$.

594*. Найти тот угол между плоскостями $8x+4y+z+1=0$, $2x-2y+z+1=0$, в котором лежит точка (1, 1, 1).

595*. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) лежала в остром угле, образуемом двумя пересекающимися и не взаимно перпендикулярными плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

596*. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы все три внутренних угла призмы, образованной плоскостями

$$A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0, \qquad k=1,\ 2,\ 3,$$

были острыми.

597. Найти косинусы углов между прямыми

$$\left.\begin{array}{l}3x+y-z+1=0,\\ 3x-y+z=0\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l}x-\ y+1=0,\\ 2x+2y-5z+1=0.\end{array}\right\}$$

598. Через прямую $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{0}$ провести такую плоскость, чтобы острый угол между ее линиями пересечения с плоскостями Oxz и Oyz был равен $\frac{\pi}{3}$.

599. Найти угол между прямой $x+y-z=0$, $2x-3y+z=0$ и плоскостью $3x+5y-4z+2=0$.

600*. Показать, что три плоскости $11x+10y+2z=0$, $3x+4y=0$, $10x+11y+z+6=0$ образуют призму, и найти ее внутренний двугранный угол, образованный первой и второй плоскостями.

601*. Зная направляющие векторы ребер трехгранного угла $\{1, -3, 4\}$, $\{6, -7, 2\}$, $\{2, 5, -36\}$, найти направляющие косинусы луча, проходящего внутри этого трехгранного угла и образующего с его гранями равные углы.

602*. Трехгранный угол задан плоскостями $x-y-4z+13=0$, $3x+y-4z+7=0$, $3x-5y-4z+19=0$ и его внутренней точкой (1, 3, 5). Найти направляющие косинусы луча, выходящего из вершины этого трехгранного угла и образующего с его ребрами равные между собой острые углы. Установить, проходит ли этот луч внутри или вне трехгранного угла.

§ 7. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя прямыми

Александров, гл. X, §§ 8, 10.
Моденов, гл. VI, §§ 86, 87, 93, 94.
Постников, гл. 3, § 2, п. 5; § 3, п. 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

603. Даны вершины тетраэдра $A=(0, 0, 2)$, $B=(3, 0, 5)$, $C=(1, 1, 0)$ и $D=(4, 1, 2)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

604. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки (1, 2, 0) на расстояние $\sqrt{21}$.

605. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 1, 2, 3, и отстоящей от точки (3, 5, 7) на расстояние 4.

606. Найти расстояние d между двумя плоскостями: $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$.

607. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и отстоящих от нее на расстояние d.

608. Составить уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов между двумя плоскостями:

$$7x+y-6=0, \qquad 3x+5y-4z+1=0.$$

609*. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x-z-5=0$, $3x+5y-4z+1=0$, в котором лежит начало координат.

610*. Написать уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного плоскостью $2x-3y+6z-6=0$ с плоскостью Oyz.

611*. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x+4y+8z+8=0$, $x-2y+2z+2=0$, $3x+4y+12=0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.

612. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью

$$11x-10y-2z-57=0.$$

613*. Доказать, что три плоскости $x-2y+2z+3=0$ $2x+2y+z-6=0$, $5x+14y-2z-21=0$ образуют призму. Составить уравнения оси круглого цилиндра, вписанного в эту призму, и найти его радиус r.

614*. Грани тетраэдра заданы уравнениями $8x+4y+z-16=0$, $2x-2y+z+5=0$, $x+y+z+5=0$, $4x+3y=0$. Написать уравнение плоскости, делящей пополам внутренний двугранный угол между первой и второй плоскостями.

615*. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр с вершинами (1, 2, 3), (—2, 8, 9), (5, 0, 7), (3, 4, 2).

616*. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 0, 0), отстоящей от оси Oz на расстояние $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и образующей с осью Oz угол $\arccos\frac{2}{3}$.

617. Найти расстояние от точки (1, 3, 5) до прямой

$$2x+y+z-1=0,$$
$$3x+y+2z-3=0.$$

618. Найти расстояние от точки (1, 2, 5) до прямой

$$x=t, \quad y=1-2t, \quad z=3+t.$$

619. Написать уравнения и найти длину h высоты треугольника, образованного линиями пересечения плоскости $9x+12y+20z-60=0$ с плоскостями координат, проведенной из вершины, лежащей на оси Oz.

620. Найти расстояние между двумя прямыми:

1) $x=3+t,\quad y=1-t,\quad z=2+2t$
и
$x=-t,\quad y=2+3t,\quad z=3t$;

2) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z-4=0 \end{array}\right\}$ и $\left.\begin{array}{l} x+y+z-9=0, \\ 2x-y-z=0. \end{array}\right\}$

621. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

622. Найти расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

§ 8. Векторные уравнения прямой и плоскости

Постников, гл. 3, § 1, п. 2; § 2, пп. 1, 5; § 3, п. 3.

623. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ и коллинеарной вектору $\boldsymbol{a}$.

624. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ и компланарной векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

625. Составить параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ и прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$, не содержащую точки M_0.

626. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$.

627*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярной к прямой пересечения двух плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1)=D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2)=D_2$.

628*. Найти точку пересечения прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ с плоскостью $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{c}v$.

629*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t$: 1) скрещивались; 2) были компланарны; 3) пересекались; 4) были параллельны; 5) совпадали.

630*. Найти ортогональную проекцию точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

631*. Найти точку, симметричную точке $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ относительно прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

632*. Найти ортогональную проекцию точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$.

633*. Найти точку, симметричную точке $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ относительно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$.

634*. Найти ортогональную проекцию точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$.

635*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k)+D_k=0$, $k=1, 2, 3$, имели единственную общую точку.

636*. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки пересечения трех плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k)+D_k=0$, $k=1, 2, 3$.

637*. Дана прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: 1) пересекала плоскость; 2) была параллельна ей; 3) лежала в плоскости.

638. Через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$.

639. Через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t$ провести плоскость, коллинеарную прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t$, при условии, что $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\neq\boldsymbol{0}$.

640*. Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t$ при условии, что $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\neq\boldsymbol{0}$.

641*. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

642*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k)+D_k=0$, $k=1, 2, 3$, образовывали призму.

643*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k)+D_k=0$, $k=1, 2, 3$, имели единственную общую прямую.

644*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четыре плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k)+D_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$, образовывали тетраэдр.

645*. Вершины треугольника M_1, M_2, M_3 находятся в точках $M_1=(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2=(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3=(\boldsymbol{r}_3)$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ пересекала плоскость треугольника в его внутренней точке.

646*. Даны две плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1)+D_1=0$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2)+D_2=0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

647*. Найти расстояние от точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ до плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$.

648*. Найти расстояние от точки $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

649*. Найти расстояние d между двумя прямыми $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t$ при условии, что:

1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\neq\boldsymbol{0}$ (прямые скрещиваются или пересекаются);

2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]=\boldsymbol{0}$ (прямые параллельны или совпадают).

650*. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})+D=0$, пересекающей прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ и перпендикулярной к этой прямой, при условии, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\neq 0$.

651*. Доказать, что:

1) уравнение всякой прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ может быть записано в виде $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]=\boldsymbol{b}$, где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$;

2) уравнение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]=\boldsymbol{b}$ при условии $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$ определяет прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, проходящую через точку с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0=\dfrac{[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.

§ 9. Метрические задачи на прямую и плоскость в аффинных координатах

652*. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

653*. Найти углы между двумя плоскостями,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

654*. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

655*. Найти угол φ, образуемый прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

656*. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

657*. Найти объем v ориентированного тетраэдра $ABCD$, заданного своими вершинами:

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),\qquad B=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$C=(x_3,\ y_3,\ z_3),\qquad D=(x_4,\ y_4,\ z_4),$$

зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

§ 1. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве

Александров, гл. III, § 2; гл. VIII, § 1, пп. 1, 2.
Моденов, гл. VII, § 96—98.
Постников, гл. 1, § 3, п. 7; гл. 2, § 1, п. 2.

1. Преобразование аффинных координат на плоскости

658. Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если началом первой системы является вершина A параллелограмма $ABCD$, а базисом — векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$; началом второй системы является вершина C, а базисом — векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

659. Даны две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. Относительно первой системы начало второй системы находится в точке $O'=(-4, 2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A=(2, 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B=(0, 8)$. Принимая за базисные векторы второй системы векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

660. Даны две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. Координаты x и y произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты x' и y' относительно второй системы следующими формулами:

$$x=2x'-5y'+3,$$
$$y=-x'+2y'-2.$$

Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

661. Дан параллелограмм $OACB$. Рассмотрим две системы координат, принимая за начало обеих систем вершину параллелограмма O, за единичные векторы осей Ox и Oy первой системы соответственно стороны параллелограмма $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а за единичные векторы осей Ox' и Oy' второй системы соответственно векторы $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ (K и L — середины сторон $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$). Найти координаты вершин параллелограмма во второй системе.

662. В треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Выразить координаты x и y произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через ее координаты x', y' в системе с началом O' и базисными векторами $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$.

663. В трапеции $ABCD$ основание $\overline{AD}$ вдвое больше основания $\overline{BC}$; O — точка пересечения ее боковых сторон, O' — точка пересечения диагоналей. Выразить координаты x и y произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисом $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ через ее координаты в системе с началом O' и базисом $\overrightarrow{O'B}$, $\overrightarrow{O'C}$.

664*. Найти формулы перехода от аффинной системы координат Oxy, у которой $|e_1|=|e_2|=1$, $\widehat{e_1, e_2}=\omega$, к такой прямоугольной системе $Ox'y'$, положительными направлениями осей которой являются биссектрисы первого и второго координатных углов аффинной системы, а длины базисных векторов также равны 1.

665*. Найти формулы перехода от одной аффинной системы координат Oxy с координатным углом ω к другой аффинной системе координат $Ox'y'$, если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы, причем $|e_1|=|e_2|=|e_1'|=|e_2'|=1$.

666*. Базисы e_1, e_2 и e^1, e^2 двух аффинных систем координат с общим началом связаны соотношениями $(e_i, e^k) = \delta_i^k$, т. е. $(e_1, e^1)=(e_2, e^2)=1$, $(e_1, e^2)=(e_2, e^1)=0$. Найти формулы преобразования координат, если

$$|e_1|=|e_2|, \quad \widehat{e_1, e_2}=\omega.$$

667*. Относительно аффинной системы координат даны уравнения двух пересекающихся прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка $E=(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Принимая эти прямые соответственно за ось ординат и за ось абсцисс, а точку E за единичную точку новой системы координат $O'x'y'$, найти выражения новых координат x', y' произвольной точки через ее старые координаты x и y.

668*. Написать формулы преобразования координат, принимая за новые оси $O'x'$ и $O'y'$ прямые $2x+y-4=0$ и $x-y+2=0$, а за единичную точку — точку (3, 7).

669. Написать уравнение прямой $x-y-5=0$ в системе координат, осями которой служат прямые

$$2x-y+7=0 \text{ (ось } O'y'), \qquad x+y-4=0 \text{ (ось } O'x'),$$

а единичной точкой — точка (0, 0).

670*. Через точку $P=(-3, -5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+3y-15=0$, $4x-5y-12=0$ в точке P делился бы пополам.

671*. Дана точка (0, 2) пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$. Найти уравнение третьей стороны.

672*. Даны уравнения $4x+5y=0$, $x-3y=0$ медиан треугольника и его вершина $(2, -5)$. Составить уравнения сторон треугольника.

2. *Преобразование аффинных координат в пространстве*

673. Даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'=(2, 1, 3)$, а базисные векторы второй системы суть $e_1'=\{2, 4, 1\}$, $e_2'=\{0, 4, 4\}$, $e_3'=\{1, 1, 0\}$.

1) Написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе.

2) Выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе.

3) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов e_1, e_2, e_3 первой системы относительно второй.

674. Координаты x, y, z точек в системе $Oxyz$ выражаются через координаты x', y', z' в системе $O'x'y'z'$ соотношениями

$$\begin{aligned} x &= -2x' - y' - z' - 1, \\ y &= \qquad\; - y' - z', \\ z &= \quad\;\; x' + 3y' + z' + 1. \end{aligned}$$

1) Выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z.

2) Найти координаты начала O' и координаты базисных векторов e_1', e_2', e_3' второй системы относительно первой.

3) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов e_1, e_2, e_3 первой системы относительно второй.

675. Написать формулы преобразования координат, принимая за начало первой системы вершину параллелепипеда и за базис — три ребра, выходящие из этой вершины; за начало второй системы — противоположную вершину и за базис — три ребра, соответственно параллельные и направленные противоположно векторам первого базиса.

676. Найти координаты вершин тетраэдра $OABC$ в системе координат с началом в вершине O, базисными векторами которой являются медианы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ граней BOC, COA, AOB.

677. Найти координаты вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ в системе координат, началом которой служит вершина A, а базисными векторами — направленные отрезки, соединяющие вершину A с центрами граней $BCC'B'$, $DCC'D'$, $A'B'C'D'$.

678. Найти выражения прямоугольных координат x, y, z произвольной точки M через ее аффинные координаты x', y', z', если начала обеих систем совпадают, положительное направление оси Ox' есть биссектриса угла между положительными направлениями осей Ox и Oy, положительное направление оси Oy' — биссектриса угла между положительными направлениями осей Oy и Oz, ось Oz' перпендикулярна к осям Ox' и Oy' и ее положительное направление выбрано так, чтобы обе системы были одинаково ориентированы; базисные векторы e_1', e_2', e_3' аффинной системы таковы, что $|e_1'|=|e_2'|=|e_3'|=1$.

679. Выразить аффинные координаты x, y, z произвольной точки M через ее прямоугольные координаты x', y', z', если начала обеих систем совпадают, базисные векторы аффинной системы имеют длину 1 и углы между ними равны $\frac{\pi}{3}$; оси Ox и Ox' обеих систем совпадают, ось Oy' лежит в плоскости Oxy и угол между осями Oy и Oy' равен $\frac{\pi}{6}$; положительные лучи осей Oz и Oz' лежат по одну сторону от плоскости Oxy.

680*. Даны две системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ с общим началом O и одинаковыми по длине базисными векторами по всем осям обеих систем. Косинусы углов между осями первой системы суть соответственно

$$\cos \angle x_1Ox_2 = \omega_{12}, \quad \cos \angle x_2Ox_3 = \omega_{23}, \quad \cos \angle x_3Ox_1 = \omega_{31}.$$

Косинусы углов между осями первой и второй систем даны таблицей

	Ox'_1	Ox'_2	Ox'_3
Ox_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
Ox_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
Ox_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Написать формулы, связывающие координаты x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 одного и того же вектора в обеих системах.

681*. По отношению к аффинной системе координат $Oxyz$ координатные плоскости новой системы $O'x'y'z'$ заданы уравнениями

$$\begin{aligned} x+1&=0 \qquad (O'y'z'),\\ 2x-y&=0 \qquad (O'z'x'),\\ x+2y+3z-6&=0 \qquad (O'x'y'), \end{aligned}$$

а единичная точка E' новой системы имеет в старой системе координаты 1, 3, 5. Выразить новые координаты произвольной точки M через ее старые координаты.

682*. Относительно системы координат $Oxyz$ плоскость $O'x'y'$ задана уравнением $2x+3y-6z+6=0$, а плоскости $O'y'z'$ и $O'x'z'$ совпадают соответственно с плоскостями Oyz и Oxz. Написать выражения новых координат произвольной точки M через ее старые координаты, зная, что точка A в обеих системах имеет одни и те же координаты 2, 4, 6.

§ 2. Преобразование прямоугольных координат на плоскости и в пространстве

1. Преобразование прямоугольных координат на плоскости

Александров, гл. VIII, § 3, п. 1.
Моденов, гл. VII, § 99.

683. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке $O'=(-4,\ 2)$, угол от положительного направления оси Ox

до положительного направления оси $O'x'$ равен $\frac{2\pi}{3}$ и обе системы одинаково ориентированы.

684. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке $O'=(-3, -2)$, угол от оси Ox до оси Ox' равен $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и обе системы имеют противоположную ориентацию.

685. В системе Oxy дана точка $(6, -2)$; найти ее координаты в системе $O'x'y'$, получающейся из системы Oxy переносом начала в точку $O'=(3, -4)$ и поворотом на угол $-\arccos\frac{12}{13}$.

686. Даны две прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$. Начало второй системы находится в точке $O'=$ $=(2, 3)$. За положительное направление оси $O'x'$ принимается направление вектора $\overrightarrow{O'A}$, где $A=(6, 0)$ — точка пересечения осей Ox и $O'x'$; за положительное направление оси $O'y'$ принимается направление вектора $\overrightarrow{OB}$, где B — точка пересечения осей Oy и $O'y'$. Выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

687. За начало первой прямоугольной системы координат Oxy принимается вершина O прямоугольного треугольника AOB, а за положительные направления осей Ox и Oy — направления катетов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, причем $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=1$. За начало второй системы $O'x'y'$ принимается основание O' перпендикуляра, опущенного из точки O на гипотенузу AB, за положительное направление оси $O'x'$ — направление $\overrightarrow{O'O}$, а положительное направление оси $O'y'$ выбирается так, чтобы обе системы имели одинаковую ориентацию. Выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

688*. Относительно прямоугольной системы координат Oxy даны две взаимно перпендикулярные прямые:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Принимая эти прямые соответственно за оси $O'y'$ и $O'x'$, а за положительные направления осей $O'x'$ и $O'y'$ векторы $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$, найти выражения новых координат x', y' произвольной точки M через ее старые координаты x и y.

2. *Преобразование прямоугольных координат в пространстве*

Александров, гл. VIII, § 3, п. 2.
Моденов, гл. VII, § 100.

689*. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если обе системы имеют общее начало, а косинусы углов между осями координат даны таблицей:

	Ox'	Oy'	Oz'
Ox	$-\frac{11}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$
Oy	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{14}{15}$	$-\frac{1}{3}$
Oz	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

690. Даны две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O. Ось Ox' второй системы проходит в первом октанте и образует с осями Ox и Oy углы, равные $\frac{\pi}{3}$, ось Oy' лежит в плоскости Oxy и образует с положительным направлением оси Oy острый угол; ось Oz' направлена так, что обе системы одинаково ориентированы. Выразить координаты x, y, z произвольной точки относительно первой системы через ее координаты x', y', z' во второй.

691. Даны две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Начало второй системы находится в точке $O' = (2, 1, 2)$; ось $O'x'$ проходит через точку O, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке A. За положительное направление оси $O'x'$ принято направление $\overrightarrow{O'O}$, за положительное направление оси $O'y'$ — направление вектора $\overrightarrow{O'A}$; положительное направление оси $O'z'$ выбрано так, чтобы обе системы были одинаково ориентированы. Выразить координаты x, y, z произвольной точки относительно первой системы через ее координаты x', y', z' во второй.

692. Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой, $Ox'y'z'$, если

$$(\widehat{Ox, Ox'}) = \arccos\frac{1}{3}, \quad (\widehat{Ox, Oy'}) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$(\widehat{Ox, Oz'}) < \frac{\pi}{2}, \quad (\widehat{Oy, Ox'}) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right), \quad (\widehat{Oy, Oy'}) > \frac{\pi}{2},$$

причем обе системы имеют противоположную ориентацию.

693*. Найти формулы преобразования прямоугольных координат, если начала обеих систем различны, а концы соответствующих единичных векторов совпадают.

694*. Даны три плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$, каждые две из которых перпендикулярны друг к другу. Принимая эти плоскости за координатные плоскости $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ новой системы координат, а за положительные направления осей Ox', Oy', Oz' соответственно направления векторов $\{A_1, B_1, C_1\}$, $\{A_2, B_2, C_2\}$, $\{A_3, B_3, C_3\}$, найти выражения новых координат x', y', z' произвольной точки пространства через ее старые координаты x, y, z.

695*. Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения координатных плоскостей новой системы:

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z + 1 &= 0 \qquad (O'y'z'),\\ 2x - y + 2 &= 0 \qquad (O'z'x'),\\ x + 2y - z - 3 &= 0 \qquad (O'x'y'). \end{aligned}$$

Проверить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и написать выражения новых прямоугольных координат произвольной точки M через ее старые координаты при условии, что старое начало O имеет в новой системе положительные координаты.

696*. Относительно прямоугольной системы координат даны координатные плоскости

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \qquad (O'y'z'),\\ 2x - y - z + 1 &= 0 \qquad (O'z'x'),\\ y - z + 2 &= 0 \qquad (O'x'y') \end{aligned}$$

новой системы $O'x'y'z'$. Проверить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и написать выражения новых прямоугольных координат произвольной точки M через ее старые координаты, при условии, что точка, имеющая в старой системе координаты -1, -1, -1, будет в новой системе иметь положительные координаты.

ГЛАВА VI

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Окружность

Постников, гл. 4, § 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

697. Составить уравнение окружности с центром в точке $(a, 0)$ $(a \neq 0)$, касающейся оси Oy.

698. Составить уравнение окружности радиуса r, касающейся осей координат.

699. Составить уравнение окружности, для которой точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ являются концами ее диаметра.

700. Найти координаты центра C и радиус r каждой из следующих окружностей:

$$1)\quad x^2 + y^2 + x = 0;$$
$$2)\quad x^2 + y^2 + 3y = 0;$$
$$3)\quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0;$$
$$4)\quad 3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$$

701. Центр окружности находится в точке (a, b), а радиус окружности равен r. Составить параметрические уравнения этой окружности, принимая за параметр t угол от положительного направления оси Ox до радиуса $\overrightarrow{CM}$, где M — произвольная точка окружности.

702. Охарактеризовать неравенствами следующие множества точек:

1) множество всех внутренних точек окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2;$$

2) множество всех внешних точек этой окружности;

3) множество всех точек плоскости, лежащих внутри кольца, образованного окружностями

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r_1^2, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r_2^2.$$

703. Охарактеризовать геометрически множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $(x-3)^2+(y-3)^2<8,\ x>y;$
2) $x^2+y^2+x+y>0,\ y>2x;$
3) $x^2+y^2-2x<0,\ |y|<\frac{1}{4}.$

704*. Дана окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ и прямая, пересекающая эту окружность, но не проходящая через ее центр. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x, y) лежала на большей из двух дуг данной окружности, на которые ее рассекает данная прямая.

705. При каком необходимом и достаточном условии уравнение

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$$

определяет действительную окружность. Предполагая это условие выполненным, найти центр этой окружности и ее радиус.

706. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), не лежащие на одной прямой.

707. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M_1=(x_1, y_1)$ и $M_2=(x_2, y_2)$ и через начало координат при условии, что прямая M_1M_2 не проходит через начало координат.

708*. Найти квадрат длины отрезка $\overline{M_0A}$ касательной, проведенной из точки $M_0=(x_0, y_0)$, внешней по отношению к окружности $x^2+y^2+ax+by+c=0$, где A — точка касания.

709. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(1, 1)$, $(0, 2)$ и касающейся окружности

$$(x-5)^2+(y-5)^2=16.$$

710. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и касающейся окружности

$$(x-6)^2+(y-13)^2=25.$$

711. Составить уравнение окружности, проходящей через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), зная, что ее центр лежит на прямой $Ax+By+C=0$.

712*. Найти необходимое и достаточное условие того, что прямая $Ax+By+C=0$: 1) пересекает окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; 2) не пересекает эту окружность; 3) касается этой окружности.

713. Составить уравнение касательной к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в точке (x_0, y_0), лежащей на этой окружности.

714. Составить уравнения касательных к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, параллельных прямой

$$Ax+By+C=0.$$

715*. Составить уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и пересекающей ортогонально окружность $x^2+y^2=r^2$ при условии, что точка (x_0, y_0) лежит вне данной окружности.

716*. Степенью точки M относительно окружности с центром C и радиусом r называется число $\sigma=|\overline{CM}|^2-r^2$. Найти степень точки (x_0, y_0) относительно окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$.

717*. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых степени относительно двух неконцентрических окружностей

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$$

равны между собой.

718*. 1) Доказать, что геометрическое место точек, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны между собой, есть прямая. Эта прямая называется радикальной осью двух окружностей.

2) Доказать, что если окружности пересекаются, то их радикальная ось есть прямая, проходящая через точки пересечения этих двух окружностей; если окружности касаются, то их радикальной осью является общая касательная к этим двум окружностям в их общей точке.

3) Если окружности не пересекаются, то их радикальная ось не пересекается ни с одной из окружностей.

4) Если окружности лежат одна вне другой, то радикальная ось делит пополам отрезок каждой из четырех общих касательных к этим двум окружностям, ограниченный точками касания.

719*. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Доказать, что три радикальные оси данных окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной точке. Эта точка называется радикальным центром трех окружностей.

720. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на прямой $x+2y+2=0$ и которая пересекает ортогонально каждую из двух окружностей $x^2+y^2-6x=0$, $x^2+y^2+8x=0$.

721. Составить уравнение окружности, пересекающей ортогонально три окружности:

$$x^2+y^2+x+2y=0,$$
$$x^2+y^2+2x+2y+3=0,$$
$$x^2+y^2+3x+y-1=0.$$

722. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две действительные и пересекающиеся окружности

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$$

были ортогональны.

723. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $(1, -2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

724*. Окружность C задана уравнением $x^2+y^2=r^2$. Дана точка $M_0=(x_0, y_0)$, лежащая вне этой окружности. Из точки M_0 к окружности проведены две касательные M_0T_1 и M_0T_2 (T_1 и T_2 — точки прикосновения). Составить уравнение прямой T_1T_2.

725*. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=r^2$, проведенных к ней из внешней точки (x_0, y_0).

726. Дана окружность радиуса r и ее диаметр AB. В точке B к данной окружности проведена касательная t. Найти радиус окружности, которая касается прямой t и проходит через A, зная, что центр искомой окружности лежит на данной окружности.

727*. Дано уравнение семейства окружностей

$$C_p \equiv x^2+y^2-2p(x-a)=0, \qquad (1)$$

где $a\neq 0$ — фиксированное число, а p — параметр.

1) Найти все действительные значения параметра p, для каждого из которых уравнение (1) является уравнением действительной окружности; найти ее центр и радиус.

2) Доказать, что все окружности C_p имеют общую радикальную ось, и найти ее уравнение.

3) Доказать, что через каждую точку (x_0, y_0) плоскости, не лежащую на радикальной оси окружностей C_p и отличную от точек $O=(0, 0)$ и $A=(2a, 0)$, проходит окружность C_p и притом только одна. Найти для этой окружности значение параметра p.

4) Доказать, что если $p>2a$, то точка $A=(2a, 0)$ лежит внутри окружности C_p, а начало координат O — вне ее. Если же $p<0$, то наоборот.

5) Доказать, что степень σ любой точки $M=(a, b)$ радикальной оси относительно любой окружности C_p не зависит от p и равна квадрату длины отрезка $\overline{OM}=\overline{AM}$. Какой геометрический смысл этого результата?

6) Доказать, что если или $2a<p_1<p_2$ или $p_2<p_1<0$, то окружность C_{p_1} вложена внутрь окружности C_{p_2}.

7) Доказать, что если к любой окружности, проходящей через точки O и A, в любой ее точке T, не лежащей на радикальной оси, провести касательную TP (P — точка пересечения касательной с осью Ox), то окружность с центром P и радиусом $\overline{PT}$ есть окружность C_p. Каков геометрический смысл этого результата?

8) Доказать, что если M — любая точка окружности C_p, то отношение $|\overline{OM}|:|\overline{AM}|=k$ не зависит от M. Найти выражение k через параметр p.

9) Доказать, что любая окружность C_p пересекает ось Ox в точках D и F, гармонически сопряженных относительно точек O и A.

10) Во что переходят окружности C_p и окружности, проходящие через точки O и A при инверсии $\left(O, |\overline{OA}|^2\right)$.

728*. Пусть u_1 и u_2 — левые части уравнений неконцентрических окружностей:

$$u_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0,$$

$$u_2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0.$$

1) Доказать, что уравнение $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$, где λ_1 и λ_2 — числа, не равные нулю одновременно, определяет окружность, если $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$, и прямую, если $\lambda_1+\lambda_2=0$. Уравнение $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$ называется уравнением пучка окружностей, определяемого двумя данными окружностями $u_1=0$, $u_2=0$.

2) Найти центр C окружности пучка $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ $(\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0)$.

3) Доказать, что центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой.

4) Найти уравнение прямой l, входящей в пучок окружностей $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$.

5) Доказать, что прямая l, принадлежащая пучку $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$, является радикальной осью двух любых окружностей этого пучка.

6) Доказать, что если две окружности пучка пересекаются в точках A и B, то любая окружность пучка проходит через точки A и B, и обратно: любая окружность, проходящая через точки A и B, принадлежит этому пучку. Такой пучок называется эллиптическим, а точки A и B называются базисными точками эллиптического пучка.

7) Доказать, что если две окружности пучка касаются в точке A, то любые две окружности пучка касаются друг друга в этой точке. Такой пучок называется параболическим.

8) Доказать, что если две окружности пучка не пересекаются, то не пересекаются и никакие две окружности пучка. Такой пучок называется гиперболическим.

9) Доказать, что пучок окружностей является эллиптическим тогда и только тогда, когда он не содержит ни одной нулевой окружности.

Пучок является параболическим тогда и только тогда, когда он содержит только одну нулевую окружность.

Пучок окружностей является гиперболическим тогда и только тогда, когда он содержит две нулевые окружности. Нулевые окружности гиперболического пучка называются его предельными точками или точками Понселе.

§ 2. Эллипс, гипербола, парабола *)

Александров, гл. VI; гл. VIII, § 1, п. 3.

Моденов, гл. VIII, §§ 102—109, 112—117, 120—122, 125.

Постников, гл. 5, § 1.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

729. Составить уравнение линии второго порядка, оси которой совпадают с осями координат, зная, что она проходит через точки (2, 2), (3, 1).

*) См. также задачи 315—324.

730. Написать уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

731. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1, 2)$, асимптотами которой служат прямые

$$y = \pm \frac{1}{2} x.$$

732. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между длинами полуосей этого эллипса.

733*. Доказать, что если $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ — отрезки взаимно перпендикулярных прямых, соединяющих центр эллипса O с двумя его точками A и B, то $\frac{1}{|\overline{OA}|^2} + \frac{1}{|\overline{OB}|^2}$ есть величина постоянная.

734. Найти длину стороны равностороннего треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$ так, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы.

735. Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(1, 0)$ и $(9, 0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0, 3)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

736. Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, касающегося осей Ox и Oy соответственно в точках $(5, 0)$ и $(0, 3)$.

737. Составить уравнение параболы, зная, что вершина ее имеет координаты (a, b), параметр равен p и направление оси симметрии совпадает: 1) с положительным направлением оси Ox; 2) с отрицательным направлением оси Ox; 3) с положительным направлением оси Oy; 4) с отрицательным направлением оси Oy.

738. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1, 0)$, асимптотами которой являются прямые $x = 0$, $y = 1$.

739*. Написать уравнение равносторонней гиперболы, для которой ось Ox служит асимптотой, а точка $(1, 1)$ — вершиной.

740. Вычислить длины сторон равнобедренного треугольника ABC, вписанного в равностороннюю гиперболу с полуосями, равными a, зная, что вершина A совпадает с вершиной гиперболы и что угол при этой вершине равен $\frac{2\pi}{3}$.

741. Написать уравнение эллипса с вершинами (0, 6) и (0, —2), зная, что на оси Ox этот эллипс высекает хорду длины 6.

742. Написать уравнение линии второго порядка, для которой ось Ox является осью симметрии, ось Oy — касательной в вершине, зная, что линия проходит через две точки (2, 3) и (6, —3).

743. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот одно и то же для всех точек гиперболы.

744*. Найти геометрическое место центров окружностей, отсекающих на осях Ox и Oy хорды, соответственно равные $2a$ и $2b$.

745*. Две противоположные вершины параллелограмма находятся на гиперболе, а стороны параллелограмма параллельны асимптотам гиперболы. Доказать, что прямая, соединяющая две другие противоположные вершины параллелограмма, проходит через центр гиперболы.

746*. Найти наибольший радиус круга, лежащего внутри параболы $y^2=2px$ и касающегося параболы в ее вершине.

747*. Доказать, что четыре точки пересечения двух парабол, оси которых взаимно перпендикулярны, лежат на одной окружности.

748*. Через фиксированную точку A_0 оси параболы проводятся всевозможные хорды. Доказать, что произведение расстояний от концов хорды до оси параболы не зависит от направления хорды.

749. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке (2, 6), а ось параллельна оси Oy, зная, что на оси Ox эта парабола высекает хорду длины 6.

750. Написать уравнение равносторонней гиперболы, одна из вершин которой находится в точке (2, 2), действительная ось параллельна оси Oy при условии, что на оси Ox гипербола высекает хорду длины 8.

751*. Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x+y-1=0$ и $x-y+1=0$ суть соответственно большая и малая оси и длины полуосей которого $a=2$, $b=1$.

752*. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x+y+1=0$ и которая проходит через точки (0, 0), (0, 1).

753*. Написать уравнение гиперболы, зная ее ось $2x-y+2=0$, асимптоту $y=0$ и точку (1, 1).

754*. Написать уравнение гиперболы, зная, что ее асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(0,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 2)$.

755. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух противоположных сторон прямоугольника равно произведению их расстояний до двух других противоположных сторон его.

756*. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипса на его хорды, соединяющие концы перпендикулярных диаметров.

757*. Найти геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, боковые стороны которых проходят через фиксированные точки P и Q, а основания параллельны фиксирванной прямой d при условии, что прямые PQ и d не параллельны.

758. Доказать, что если две линии второго порядка, оси которых параллельны, пересекаются в четырех действительных точках, то эти точки лежат на одной окружности.

§ 3. Фокусы и директрисы линий второго порядка. Уравнение линии второго порядка в полярных координатах

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

1. *Фокусы, директрисы, эксцентриситет*

759. Найти фокусы F_1, F_2 и соответствующие им директрисы следующих линий:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-2y^2+8=0$; 3) $y=\frac{3}{4}x^2$.

760. Найти фокус и директрису параболы

$$3x^2+12x+16y-12=0.$$

761. Найти фокус F и директрису d параболы $y=ax^2$.

762. Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы $2xy=a^2$.

763. Написать уравнения эллипса и гиперболы с фокусами $(7,\ 0)$ и $(-7,\ 0)$, проходящих через точку $(-2,\ 12)$.

764. Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $(2,\ 0)$, соответствующую ему директрису $x=8$ и эксцентриситет $e=\frac{1}{2}$. Найти второй фокус и вторую директрису линии.

765. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2, 0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение $x=5$, зная, что линия проходит через точку $(10, 6)$. Найти второй фокус и вторую директрису этой линии.

766. Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке $(2, 0)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение $x=6$, зная, что линия проходит через точку $(-4, 8)$,

767. Найти длину хорды линии второго порядка, проходящей через ее фокус и перпендикулярной к фокальной оси:

1) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b$;

2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) параболы $y^2=2px$.

768. Найти отношение, в котором центр линии второго порядка делит отрезок ее фокальной оси, заключенный между фокусом и соответствующей директрисой.

769. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

770. Пусть две гиперболы имеют общие асимптоты. Доказать, что:

1) если эти гиперболы лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами, то их эксцентриситеты равны между собой;

2) если эти гиперболы лежат в разных парах вертикальных углов, образованных их асимптотами, то произведение их эксцентриситетов больше или равно 2, причем это произведение равно 2 только для равносторонних гипербол.

771. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

772. Найти эксцентриситет эллипса, зная, что стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы эллипса.

773. Найти эксцентриситет эллипса, зная, что в него можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной эллипса, принадлежащей фокальной оси, а противолежащая ей сторона проходит через фокус эллипса.

774. Зная эксцентриситет e эллипса, найти эксцентриситет e' гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды, т. е. хорды, проходящие через фокусы и перпендикулярные к фокальной оси.

775. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Написать уравнение гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды.

776. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=a^2$. Написать уравнение эллипса, имеющего с этой гиперболой общие фокальные хорды.

777. Дана парабола $y^2=2px$. Написать уравнение параболы с параметром p', имеющей общий фокус с данной параболой, при условии, что оси обеих парабол имеют противоположные направления.

778. Дана парабола $y=\frac{3}{4}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду, т. е. хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси.

779. 1) Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

заключенного между ее центром и директрисой.

2) Найти расстояние от фокуса этой гиперболы до ее асимптоты.

3) Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из фокуса гиперболы на ее асимптоту, лежит на директрисе, соответствующей этому фокусу.

780. Доказать, что расстояние от любой точки M гиперболы до фокуса F равно отрезку прямой, проходящей через эту точку параллельно асимптоте, заключенному между точкой M и директрисой, соответствующей фокусу F.

781. Написать уравнение гиперболы, зная четыре точки $(\pm 4;\ \pm 2)$ пересечения ее директрис и асимптот.

782. Написать уравнение линии второго порядка, центр которой находится в точке $(1,\ 0)$, а одной из директрис служит прямая $x=2$, зная, что линия проходит через точку $(5,\ 6)$.

783*. Написать уравнение гиперболы, зная ее фокус $(-2,\ 0)$, уравнение $x=7$ директрисы, соответствующей другому фокусу, и угол между асимптотами $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, содержащий фокус гиперболы.

784*. Написать уравнение линии второго порядка, вершина которой находится в начале координат, ближайший к ней фокус в точке (2, 0), а одна из директрис кривой пересекает ее фокальную ось в точке (12, 0).

785*. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус (1, 1) и асимптоту $x+y=0$.

786. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус (2, 0) и асимптоту $x=1$.

787*. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты (1, 0), (0, 1) и большая ось равна 2.

788*. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты (1, 0) и (0, 1) и асимптоты параллельны осям координат.

789*. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри линии второго порядка и касающейся этой линии в ее вершине, принадлежащей фокальной оси.

790. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от данной точки и данной прямой одна и та же для всех точек этого геометрического места.

791. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и непересекающей ее прямой.

792. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух окружностей:

$$x^2+y^2+2x-3=0,$$
$$x^2+y^2-10x-39=0.$$

793. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через точку (4, 0) и касающихся окружности

$$x^2+y^2+8x-84=0.$$

794*. Две вершины треугольника закреплены в фокусах гиперболы, а третья перемещается по ее ветви. Какие линии описывают точки касания окружности, вписанной в этот треугольник, с его сторонами?

795*. Две вершины треугольника закреплены в фокусах гиперболы, а третья перемещается по ее ветви. Какую линию описывает при этом центр окружности, вписанной в треугольник?

796. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов (—2, 2) и асимптоты $2x-y+1=0$, $x+2y-7=0$.

2. *Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах*

797. Составить уравнение гиперболы в полярных координатах, если дано ее каноническое уравнение $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

798. Составить каноническое уравнение гиперболы, если дано ее уравнение в полярных координатах $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

799. Составить уравнение параболы $y^2=8x$ в полярных координатах.

800. Составить каноническое уравнение параболы, определяемой уравнением $\rho=\frac{6}{1-\cos\varphi}$.

801. Через фокус параболы проведена хорда, образующая с ее осью угол $\frac{\pi}{3}$. Найти отношение, в котором фокус делит эту хорду.

802*. Через фокус параболы проводятся всевозможные хорды. На каждой из них от фокуса в направлении более удаленного конца хорды откладывается отрезок, равный разности отрезков, на которые фокус делит хорду. Найти геометрическое место концов этих отрезков.

803*. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус линии второго порядка делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная.

804*. Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, а третья вершина C перемещается так, что угол при вершине A остается все время вдвое больше угла при вершине C. Найти линию, описываемую вершиной C.

§ 4. Определение типа и расположения линии второго порядка по ее общему уравнению. Применение инвариантов

Александров, гл. XVI, §§ 1—4; гл. XVII, § 11.
Моденов, гл. XI, §§ 141—144, 150.
Постников, гл. 6, § 1, пп. 1—3, 5, 8.

Во всех задачах этого параграфа система координат является прямоугольной.

805. С помощью переноса осей координат установить, какая линия определяется каждым из следующих уравнений, и найти ее расположение относительно данной системы координат:

1) $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$;
2) $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;
3) $3y^2-12x-6y+11=0$;
4) $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;
5) $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$;
6) $3x^2+12x+16y-12=0$;
7) $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$;
8) $x^2+x-6=0$;
9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1$;
10) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}=1$;
11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}=0$.

806*. Линия второго порядка определяется уравнением

$$x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0.$$

Определить тип линии при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

807. Определить тип линии, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
2) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;
3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$;
4) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$;
5) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$;
6) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;
7) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$;
8) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
9) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;
10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;
11) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$;
12) $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$;

13) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$;
14) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;
15) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$;
16) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$;
17) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$;
18) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$;
19) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;
20) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$.

808*. Линия второго порядка определяется уравнением

$$x^2+2\alpha xy+y^2=1.$$

Определить тип линии при изменении параметра α от $-\infty$ до $+\infty$ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

809*. Найти фокусы и соответствующие им директрисы линий второго порядка:

1) $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$;

2) $x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0$.

810. Доказать, что если $I_1=0$ то $I_2<0$.

811*. Пользуясь инвариантами I_1, I_2, I_3, найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линия второго порядка была равносторонней гиперболой, и написать ее каноническое уравнение.

812*. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3 выразить условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ветви гиперболы лежали в острых углах, образованных ее асимптотами.

813*. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3 выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линия второго порядка была парой взаимно перпендикулярных прямых.

814*. Доказать, что всякая линия второго порядка, проходящая через четыре точки пересечения двух равносторонних гипербол, есть равносторонняя гипербола или пара взаимно перпендикулярных прямых.

815*. Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 необходимое и достаточное условие того, чтобы общее уравнение линии второго порядка определяло действительный эллипс. Выразить через инварианты его площадь s.

816*. Общее уравнение $F(x, y) = 0$ второй степени определяет линию второго порядка, распадающуюся на две параллельные прямые. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x_0, y_0) лежала между этими прямыми.

817*. Линия второго порядка, заданная уравнением $F(x, y) = 0$ второй степени, распадается на пару пересекающихся и не взаимно перпендикулярных прямых. Найти необходимое и достаточное условие того, что данная точка $M_0 = (x_0, y_0)$ лежит в остром угле, образованном этими прямыми.

818*. Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 необходимое и достаточное условие того, чтобы общее уравнение линии второго порядка определяло окружность.

819*. Доказать: для того, чтобы уравнение второй степени с двумя неизвестными определяло окружность (действительную, нулевую или мнимую), необходимо и достаточно, чтобы в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат были равны, а коэффициент при произведении координат был равен нулю.

820*. Доказать, что линия второго порядка $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 9 = 0$ есть эллипс, и написать уравнение эллипса с теми же осями, полуоси которого вдвое больше, чем у данного.

821*. Доказать: для того, чтобы две гиперболы имели одни и те же асимптоты, необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях этих гипербол все коэффициенты, кроме, быть может, свободных членов, были пропорциональны.

822*. Доказать: для того, чтобы две параболы имели один и тот же параметр, одну и ту же ось и одно и то же направление оси в сторону вогнутости, необходимо и достаточно, чтобы в их уравнениях все коэффициенты, кроме, быть может, свободных членов, были пропорциональны.

823*. Общие уравнения двух гипербол имеют такой вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + b = 0.$$

При каком необходимом и достаточном условии они будут лежать в разных вертикальных углах, образованных их общими асимптотами?

824*. Общее уравнение $F(x, y)=0$ второй степени определяет гиперболу. С помощью инвариантов написать уравнение линии, распадающейся на пару ее асимптот.

825*. Доказать, что все ромбы, вписанные в один и тот же эллипс, описаны около одной и той же окружности.

826*. Доказать, что линия второго порядка, проходящая через все вершины треугольника и точку пересечения его высот, есть равносторонняя гипербола, если треугольник не прямоугольный.

827*. Доказать, что если две равносторонние гиперболы пересекаются в четырех точках, то каждая из этих точек есть точка пересечения высот треугольника, образованного тремя другими точками.

§ 5. Касательные к линиям второго порядка

Александров, гл. XVII, § 4.
Моденов, гл. VIII, §§ 110, 118, 123; гл. XI, § 147.

828. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1,$$

проведенных из точки $(12, -3)$.

829. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, проведенных из точки $(1, 4)$.

830. Написать уравнения касательных к параболе $y^2=4x$, проведенных из точки $\left(-1, \frac{8}{3}\right)$.

831. Дано уравнение касательной $x-3y+9=0$ к параболе $y^2=2px$. Составить уравнение параболы.

832. Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2=64x$ от прямой $4x+3y+46=0$.

833. Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, параллельных прямой $x+y-1=0$.

834*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ можно было провести касательные, параллельные прямой $y=kx$.

835. Найти касательную к параболе $y^2=2px$, параллельную прямой $y=kx$.

836. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=2px$, отсекающей на осях координат равные отрезки.

837. Найти геометрическое место середин отрезков касательных к параболе $y^2=2px$, заключенных между осями координат.

838*. Написать уравнения касательных к эллипсу $3x^2+8y^2=45$, расстояния которых от центра эллипса равны 3.

839. Написать уравнения касательной к гиперболе $xy=C$ в точке (x_0, y_0), лежащей на гиперболе.

840. Найти угол между касательными к двум равносторонним гиперболам в их общей точке, если оси одной гиперболы служат асимптотами другой.

841*. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

842*. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь s. Выразить эту площадь через полуоси гиперболы.

843. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, касается прямой $x-y-2=0$ в точке $M=(4, 2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

844. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y=\pm\frac{x}{2}$ и уравнение одной из ее касательных $5x-6y-8=0$.

845*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ из точки (x_0, y_0):

1) можно было провести две касательные;

2) можно было провести одну касательную;

3) нельзя было провести ни одной касательной.

846*. При каком необходимом и достаточном условии касательные, проведенные из точки (x_0, y_0) к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, касаются различных ее ветвей.

847*. Написать уравнение касательной к гиперболе, проведенной из точки (x_0, y_0), лежащей на ее асимптоте $y=\frac{b}{a}x$ и отличной от центра гиперболы.

848*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $Ax+By+C=0$ касалась:

1) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) параболы $y^2=2px$;

4) гиперболы $xy=k$.

849. Эллипс, имеющий фокусы в точках $(-3, 0)$, $(3, 0)$, касается прямой $x+y-5=0$. Составить уравнение эллипса.

850*. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямая $Ax+By+C=0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая пересекала эллипс, касалась его, проходила вне эллипса.

851*. Найти общие касательные к двум эллипсам:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$$

852*. Определить общие касательные к параболе $y^2=4x$ и к эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

853*. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести взаимно перпендикулярные касательные: 1) к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) к параболе $y^2=2px$.

854*. Эллипс при движении по плоскости касается двух взаимно перпендикулярных прямых. Какую линию описывает центр эллипса?

855*. Найти геометрическое место точек, из которых к действительной нераспадающейся линии второго порядка можно провести равные касательные.

856*. Доказать, что вершины ромба, описанного около эллипса, лежат на его осях.

857. Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1.$$

858*. Написать уравнение параболы, касающейся оси Ox в точке $(3, 0)$, а оси Oy в точке $(0, 2)$.

859*. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку (1, 1), касающейся оси Ox в точке (3, 0) и имеющей ось Oy своей асимптотой.

860*. Написать уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые $x-1=0$, $2x-y+1=0$ и касающейся прямой $4x+y+5=0$.

861*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы прямая $Ax+By+C=0$ касалась нераспадающейся линии второго порядка, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

862*. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до боковых сторон равнобедренного треугольника равно квадрату расстояния до его основания.

863*. Доказать, что произведение расстояний от фокуса линии второго порядка до двух параллельных касательных к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

864*. Доказать, что произведение расстояний от фокусов линии второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

865*. Доказать, что:

1) нормаль к эллипсу в произвольной его точке делит пополам угол, образованный лучами, выходящими из этой точки и проходящими через фокусы эллипса;

2) касательная к гиперболе в произвольной ее точке делит пополам угол, образованный лучами, выходящими из этой точки и проходящими через фокусы гиперболы;

3) нормаль к параболе делит пополам угол, образованный лучом, выходящим из этой точки и проходящим через фокус параболы, и лучом диаметра параболы, выходящим из этой точки и направленным в сторону вогнутости параболы.

866*. Найти геометрическое место точек, симметричных фокусу линии второго порядка относительно касательных к этой линии.

867*. Найти геометрическое место проекций фокуса линии второго порядка на всевозможные касательные к ней.

868*. Доказать, что:

1) касательные в точках пересечения софокусных эллипса и гиперболы взаимно перпендикулярны;

2) касательные в точках пересечения парабол с общим фокусом и противоположно направленными осями взаимно перпендикулярны.

869*. Доказать, что прямая, соединяющая точки прикосновения касательных к линии второго порядка, проведенных из произвольной точки ее директрисы, проходит через фокус, соответствующий этой директрисе.

870*. На эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

найти точку, нормаль в которой находится на наибольшем расстоянии δ от центра эллипса. Найти это расстояние.

871*. Доказать, что прямая, соединяющая фокус F параболы с точкой пересечения касательных к параболе в двух произвольных ее точках M_1 и M_2, делит пополам угол M_1FM_2.

872*. Найти множество точек, каждая из которых является проекцией фокуса эллипса на все прямые, которые:

1) касаются эллипса;
2) пересекают эллипс;
3) не имеют с эллипсом общих точек.

873*. Найти множество точек, являющихся проекциями фокуса гиперболы на все прямые, которые:

1) касаются гиперболы;
2) пересекают гиперболу;
3) не имеют с гиперболой общих точек.

874*. Найти множество точек, каждая из которых является проекцией фокуса параболы на все прямые, которые:

1) касаются параболы;
2) пересекают параболу;
3) не имеют с параболой общих точек.

§ 6. Центр, диаметры, асимптоты линий второго порядка

Александров, гл. XVII, §§ 1, 3, 5—9, 11.
Моденов, гл. VIII, §§ 144—146, 148, 159.
Постников, гл. 6, § 1, пп. 4—8.

875. Найти асимптоты следующих гипербол:

1) $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$;
2) $2x^2+6xy-12x-18y+5=0$.

876. Найти соотношения, связывающие угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух сопряженных диаметров:

1) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) гиперболы $xy=C$.

877. Написать уравнение диаметра эллипса

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,$$

проходящего через середину хорды, отсекаемой эллипсом на прямой $3x+2y-6=0$.

878. Написать уравнения двух сопряженных диаметров гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$, один из которых проходит через точку $(2, 1)$.

879. Составить уравнение такой хорды эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

которая точкой $(2, 1)$ делится пополам.

880. Дана линия второго порядка

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Найти сопряженные диаметры этой линии, один из которых параллелен оси ординат.

881*. Даны две линии второго порядка:

$$3x^2+6xy-y^2-18x-10y=0,$$
$$9x^2+6xy+y^2-18x-10y=0.$$

Найти общий диаметр этих двух линий и направления тех хорд каждой из данных линий, которым сопряжен этот диаметр.

882*. Найти диаметры, сопряженные одновременно относительно двух линий:

$$x^2+2xy-y^2=1,$$
$$x^2-10xy+4y^2=1.$$

883*. В эллипс $x^2+4y^2=25$ вписан параллелограмм, одной из сторон которого является прямая $x+2y-7=0$. Найти остальные его стороны.

884*. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон параллелограмма, описанного около центральной действительной нераспадающейся линии второго порядка, являются ее диаметрами. Когда эти диаметры будут сопряженными?

885*. Показать, что если кривая второго порядка касается одной из сторон описанного около нее параллелограмма в середине этой стороны, то остальных трех сторон параллелограмма она касается также в их серединах; кривая в этом случае есть эллипс.

886*. Доказать, что диагонали параллелограмма, все вершины которого принадлежат центральной нераспадающейся линии второго порядка («вписанный параллелограмм»), являются ее диаметрами. Когда эти диаметры будут сопряженными?

887*. Доказать, что две касательные к эллипсу или к гиперболе параллельны тогда и только тогда, когда точки касания принадлежат одному диаметру.

888. В эллипс вписан ромб так, что все четыре вершины ромба совпадают с вершинами эллипса. Доказать, что диаметры эллипса, параллельные сторонам ромба, равны между собой.

889*. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около центральной нераспадающейся линии второго порядка, являются ее сопряженными диаметрами.

890*. Зная конец (x_1, y_1) диаметра эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

найти концы диаметра, ему сопряженного.

891*. Около линии второго порядка, заданной уравнением $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$, описан параллелограмм, одна из вершин которого находится в точке $A=(3, 4)$. Найти остальные его вершины.

892*. Написать уравнение эллипса, зная его центр $C=(2, 1)$ и концы двух сопряженных диаметров $A=(5, 1)$, $B=(0, 3)$.

893*. Доказать, что если O — точка нераспадающейся линии второго порядка, ось Ox — проходящий через эту точку диаметр, а ось Oy — касательная к линии в точке O, то в этой системе координат уравнение линии имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x=0.$$

894*. Написать уравнение параболы, проходящей через точку $(0, 1)$, для которой прямая $x-2y=0$ служит диаметром, а прямая $x+y=0$ — касательной в точке пересечения этого диаметра с параболой.

895*. Составить уравнение параболы, зная, что ее диаметры параллельны прямой $x+y=0$ и что она проходит через точки $(0,\ 0)$ и $(0,\ 1)$.

896*. Дан треугольник ABC:

$$A=(4,\ 2),\qquad B=(8,\ 2),\qquad C=(4,\ 5).$$

Написать уравнение параболы, описанной около этого треугольника так, чтобы медиана AD, проведенная из вершины A, была ее диаметром.

897*. Три вершины параллелограмма находятся в точках $O=(0,\ 0)$, $A=(4,\ 0)$, $B=(2,\ 2)$; A и B — противоположные вершины. Написать уравнение эллипса, вписанного в этот параллелограмм и касающегося стороны OA в ее середине.

898*. Написать уравнение эллипса, зная, что центр его находится в точке $C=(2,\ 1)$ и что прямые $y-2=0$ и $x-y=0$ служат касательными в концах двух сопряженных диаметров этого эллипса.

899*. Даны вершины треугольника ABC: $A=(6,\ 0)$, $B=(0,\ 4)$, $C=(6,\ 4)$. Написать уравнение линии второго порядка, описанной около этого треугольника, зная, что ее центр находится в точке $M=(4,\ 3)$.

900*. Найти геометрическое место середин хорд гиперболы, высекаемых на прямых, проходящих через точку, лежащую на асимптоте гиперболы.

901*. Зная угловые коэффициенты $k_1=1$, $k_2=2$ асимптот гиперболы и угловой коэффициент $k=0$ ее диаметра, найти угловой коэффициент k' диаметра, ему сопряженного.

902*. Найти асимптоты гиперболы, для которой оси координат образуют одну пару сопряженных диаметров, а прямые $x-y=0$ и $x-4y=0$ — другую пару сопряженных диаметров.

903*. Написать уравнение эллипса, принимая за оси координат его сопряженные диаметры, а за единичную точку системы координат — одну из вершин параллелограмма, описанного около эллипса, стороны которого параллельны этим сопряженным диаметрам.

904*. Написать уравнение гиперболы, принимая за оси координат ее сопряженные диаметры, а за единичную точку — любую из вершин параллелограмма, стороны которого параллельны взятым диаметрам, причем две из них касаются гиперболы, а диагоналями служат асимптоты гиперболы.

905*. Написать уравнение параболы, принимая за начало координат точку O, лежащую на параболе, за ось Ox — проходящий через точку O диаметр, за ось Oy — касательную к параболе в точке O, а за единичную точку E системы — любую точку параболы.

906*. Написать уравнение гиперболы, принимая за оси координат ее асимптоты, а за единичную точку системы координат — произвольную точку, лежащую на гиперболе.

907*. Доказать, что в общем уравнении линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

коэффициент $a_{12} = 0$ тогда и только тогда, когда середины хорд линии, параллельных одной из осей координат, лежат на прямой, параллельной другой оси координат.

908*. Доказать, что точка пересечения касательных к линии второго порядка в концах какой-либо ее хорды лежит на диаметре, сопряженном с направлением этой хорды.

909*. Пусть O — центр эллипса, A и B — концы его сопряженных диаметров, C — середина хорды $\overline{AB}$, M — точка пересечения луча $\overrightarrow{OC}$ с эллипсом. Найти отношение $\dfrac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OM}}$.

910*. Доказать, что произведение длин отрезков $\overline{M_1P_1}$ и $\overline{M_2P_2}$, отсекаемых произвольной касательной P_1P_2 к эллипсу или гиперболе от двух фиксированных параллельных касательных M_1P_1 и M_2P_2 к рассматриваемой линии (M_1 и M_2 — точки касания), одно и то же для всех касательных к кривой.

911*. Доказать, что произведение длин отрезков $\overline{MP_1}$ и $\overline{MP_2}$ касательной P_1MP_2 к эллипсу или гиперболе в фиксированной точке M, где P_1 и P_2 — точки, в которых рассматриваемая касательная пересекается с двумя произвольными параллельными касательными к линии, постоянно.

912*. Найти геометрическое место точек M пересечения прямых, проходящих через две данные точки A и B плоскости, при условии, что AM и BM параллельны двум сопряженным диаметрам эллипса или гиперболы.

913*. Найти геометрическое место центров гипербол, проходящих через две фиксированные точки A и B и имеющих данные асимптотические направления.

914*. Найти множество точек, которые могут служить центрами эллипсов, описанных около данного треугольника.

915*. Найти угловые коэффициенты и длину d двух равных сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

916. Найти наименьший острый угол между сопряженными диаметрами эллипса с полуосями a и b, $a>b$.

917. Доказать, что асимптоты равносторонней гиперболы являются биссектрисами углов между любыми двумя ее сопряженными диаметрами.

918*. Доказать, что стороны прямоугольника, все вершины которого принадлежат действительной центральной нераспадающейся линии второго порядка («вписанный прямоугольник»), параллельны ее осям.

919*. Доказать, что все параллелограммы, сторонами которых являются половины сопряженных диаметров эллипса, имеют одну и ту же площадь.

920*. Доказать, что сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров эллипса одна и та же для каждой пары диаметров.

921*. Доказать, что гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

может быть задана следующими параметрическими уравнениями:

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

922*. Доказать, что если

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

— параметрические уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то параметрические уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

сопряженной с данной, можно записать в виде

$$x=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

923*. Доказать, что если диаметр гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

пересекает эту гиперболу в точке (x_1, y_1), то сопряженный ему диаметр пересекает гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

сопряженную с данной, в точках

$$\left(\frac{ay_1}{b}, \quad \frac{bx_1}{a}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{ay_1}{b}, \quad -\frac{bx_1}{a}\right).$$

924*. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения двух сопряженных диаметров с сопряженными гиперболами (с общим центром O). Доказать, что:

1) площадь параллелограмма со сторонами OM_1 и OM_2 одна и та же для любой пары сопряженных диаметров;

2) разность квадратов $|\overline{OM_1}|^2-|\overline{OM_2}|^2$ одна и та же для любой пары сопряженных диаметров.

925*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две центральные линии второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a=0,$$
$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+b=0$$

имели одни и те же оси симметрии. Система координат прямоугольная.

926*. Доказать, что если общее уравнение линии второго порядка относительно аффинной системы координат

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

является уравнением параболы, то вектор $\{A_1, A_2\}$, где A_1 и A_2 являются алгебраическими дополнениями элементов a_1 и a_2 в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix},$$

коллинеарен диаметрам параболы и направлен в сторону ее вогнутости.

§ 7. Метрические задачи на линии второго порядка в аффинных координатах

Моденов, Дополнение II, пп. 3, 4.

927*. 1) Составить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

2) Рассмотреть частный случай

$$|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = 1, \qquad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2} = \omega.$$

928*. 1) Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

в аффинной системе координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22} определяло окружность (действительную, нулевую или мнимую).

2) Рассмотреть частный случай

$$|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = 1, \quad \widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2} = \omega.$$

929*. 1) Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

в аффинной системе координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22} являлось уравнением действительной окружности.

2) Найти ее центр C и радиус r.

930*. Найти длины a и b действительной и мнимой полуоси гиперболы $xy = 1$ и угловые коэффициенты k_1 и k_2 ее действительной и мнимой оси, если $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = 1$, $\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2} = \omega$.

931*. Дан многочлен

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$$

и невырожденная квадратичная форма

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2.$$

Доказать, что следующие функции коэффициентов

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}},$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}},$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}$$

являются инвариантами невырожденного линейного неоднородного преобразования

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1,$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2.$$

932*. Относительно аффинной системы координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22} ее базиса центральная линия второго порядка задана общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Доказать, что:

1) существует прямоугольная система координат $O'x'y'$, в которой приведенное уравнение этой линии имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \quad \text{(см. задачу 931)},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{12} - \lambda g_{12} \\ a_{21} - \lambda g_{21} & a_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0;$$

2) координаты x, y направляющих векторов e_1' и e_2' осей $O'x'$ и $O'y'$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i g_{11})\,x + (a_{12} - \lambda_i g_{12})\,y = 0, \\ (a_{21} - \lambda_i g_{21})\,x + (a_{22} - \lambda_i g_{22})\,y = 0 \end{aligned}\right\}$$
$$(i = 1,\ 2).$$

933*. Относительно аффинной системы координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22} ее базиса парабола задана общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

Доказать, что:

1) параметр p этой параболы определяется соотношением

$$p=\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}} \quad \text{(см. задачу 931);}$$

2) вектор $\{A_1, A_2\}$ оси параболы направлен в сторону вогнутости параболы (см. задачу 926);

3) ось параболы определяется уравнением

$$\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+\beta(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0,$$

где вектор $\{\alpha, \beta\}$ определяется из условия перпендикулярности его к вектору $\{a_{12}, -a_{11}\}$ или $\{a_{22}, -a_{12}\}$. При этом надо использовать условие перпендикулярности двух векторов в аффинной системе координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22} ее базиса.

934*. Установить, какая линия определяется каждым из следующих уравнений в аффинной системе координат с заданными метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22}. Написать каноническое уравнение линии и найти ее расположение.

1) $x^2+2xy+3y^2+8x-4y+9=0,$

$$g_{11}=g_{12}=1, \quad g_{22}=3;$$

2) $20x^2+124xy+221y^2-36x-126y+9=0,$

$$g_{11}=4, \quad g_{12}=6, \quad g_{22}=25;$$

3) $2xy-4x+2y+1=0, \quad g_{11}=4, \; g_{12}=1, \quad g_{22}=1;$

4) $x^2-3xy+y^2+5=0, \quad g_{11}=1, \quad g_{12}=\frac{1}{2}, \quad g_{22}=1;$

5) $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0, \quad g_{11}=1,$

$$g_{12}=\frac{1}{2}, \quad g_{22}=1.$$

935*. 1) Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы линия второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1,$$

заданная в аффинной системе координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22}, была эллипсом.

2) Найти длины a и b большой и малой полуосей эллипса и угловые коэффициенты k_1 и k_2 его большой и малой осей.

936*. 1) Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы линия второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1,$$

заданная в аффинной системе координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22}, была гиперболой.

2) Найти длины a и b действительной и мнимой полуосей гиперболы и угловые коэффициенты k_1 и k_2 ее действительной и мнимой осей.

3) При каком необходимом и достаточном условии гипербола будет равносторонней? Чему равны ее полуоси?

937*. 1) Найти параметр p и вершину O' параболы $y^2=2qx$, $q>0$, заданной относительно аффинной системы координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22}.

2) Рассмотреть частный случай

$$|e_1|=|e_2|=1, \qquad \widehat{e_1, e_2}=\omega.$$

938*. Найти длины a и b большой и малой полуосей эллипса и угловые коэффициенты k_1 и k_2 его большой и малой осей, если эллипс задан уравнением $x^2+y^2=1$ относительно аффинной системы координат, при условии, что

$$|e_1|=|e_2|=1, \qquad \widehat{e_1, e_2}=\omega.$$

939*. Найти длины a и b действительной и мнимой полуосей гиперболы и угловые коэффициенты k_1 и k_2 ее действительной и мнимой осей, если гипербола задана уравнением $x^2-y^2=1$ относительно аффинной системы координат, при условии, что

$$|e_1|=|e_2|=1, \qquad \widehat{e_1, e_2}=\omega.$$

940*. Написать уравнение пары главных осей центральной линии второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a,$$

заданной относительно аффинной системы координат с метрическими коэффициентами g_{11}, g_{12}, g_{22}.

ГЛАВА VII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Сфера

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

941. Определить координаты центра и найти радиус каждой из следующих сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;
2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;
4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

942*. При каком необходимом и достаточном условии уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

является уравнением сферы (действительной, нулевой или мнимой)?

943*. При каком необходимом и достаточном условии уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$$

определяет: 1) действительную сферу; найти в этом случае ее центр и радиус r; 2) нулевую сферу; 3) мнимую сферу.

944. Составить уравнение сферы радиуса r, которая касается: 1) трех координатных плоскостей; 2) трех координатных осей.

945. Найти центр и радиус окружности

$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,$$
$$2x+2y+z+1=0.$$

946*. Дано уравнение сферы $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ и уравнение плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$.

1) При каком необходимом и достаточном условии плоскость π пересекает сферу S? Предполагая это условие выполненным, найти центр и радиус ρ окружности K, по которой пересекаются сфера S и плоскость π.

2) При каком необходимом и достаточном условии плоскость π касается сферы S? Предполагая это условие выполненным, найти точку касания.

3) При каком необходимом и достаточном условии сфера S и плоскость π не имеют ни одной общей точки?

947. Составить уравнение плоскости, касающейся сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

в данной на ней точке (x_0, y_0, z_0).

948. Дана сфера $x^2+y^2+z^2+6x+8y+1=0$ и плоскость $2x-y+z-1=0$. Найти плоскость, касательную к данной сфере, параллельную данной плоскости и расположенную так, чтобы центр сферы находился между данной и искомой плоскостями.

949. Составить уравнения плоскостей, касающихся сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

и параллельных плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

950*. Написать уравнения плоскостей, проходящих через прямую

$$\frac{x-13}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4}$$

и касающихся сферы

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0.$$

951*. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (5, 2, 0) и касающейся сфер

$$x^2+y^2+z^2-12x-2y+2z+37=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-10x-8z+32=0.$$

952*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2+y^2=11, \qquad z=0$$

и касающейся плоскости

$$x+y+z-5=0.$$

953*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,$$
$$Ax+By+Cz+D=0$$

и через точку (x_0, y_0, z_0), не лежащую на плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

954*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40=0,$$
$$2x+2y-z+4=0$$

и через начало координат.

955*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекает большой круг сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащий в плоскости Oxy.

956. Плоскость, заданная уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, пересекает сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$, но не проходит через ее центр. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри шарового сегмента, ограниченного сферой и плоскостью и не содержащего центр сферы?

957*. Доказать, что если точка $M=(x_0, y_0, z_0)$ лежит вне сферы

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,$$

то квадрат длины отрезка касательной, заключенного между точкой M и точкой касания, равен

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ax_0+2by_0+2cz_0+d.$$

958*. Степенью точки M относительно сферы с центром C и радиусом R называется число $\sigma=|\overline{CM}|^2-R^2$. Найти степень точки $M=(x_0, y_0, z_0)$ относительно сферы

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0.$$

959*. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых степени относительно двух неконцентрических сфер

$$x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

равны между собой.

960*. Радикальной плоскостью двух неконцентрических сфер называется плоскость, являющаяся геометрическим местом точек, степени каждой из которых относительно этих сфер равны между собой.

1) Даны три сферы, центры которых не лежат на одной прямой. Доказать, что три радикальные плоскости этих сфер, взятых попарно, проходят через одну прямую. Эта прямая называется радикальной осью трех данных сфер.

2) Даны четыре сферы, центры которых не лежат в одной плоскости. Доказать, что шесть радикальных плоскостей этих сфер, взятых попарно, проходят через одну точку и что через ту же точку проходят четыре радикальные оси этих сфер, взятых по три. Эта точка называется радикальным центром четырех рассматриваемых сфер.

961*. Найти геометрическое место центров сфер, пересекающих ортогонально две данные неконцентрические сферы.

962*. Найти геометрическое место центров сфер, пересекающих ортогонально три сферы, не имеющих ни одной общей точки, если их центры не лежат на одной прямой.

963*. Составить уравнение сферы, ортогональной четырем сферам:

$$x^2+y^2+z^2=9,$$
$$(x+5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=53,$$
$$(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=39,$$
$$x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10.$$

964. Даны уравнения двух действительных пересекающихся сфер

$$x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+2a_2x+2b_2y+2c_2z+d_2=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии две такие сферы ортогональны?

965*. Точка $M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит вне сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Составить уравнение плоскости, содержащей окружность, вдоль которой конус с вершиной M_0, описанный около данной сферы, касается этой сферы.

966. Написать уравнение сферы с центром в точке $(\boldsymbol{r}_0)$ и радиусом R.

967*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})=D$ и сфера $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=R^2$: 1) пересекаются, 2) касаются, 3) не имеют ни одной общей точки?

968*. Сфера S задана уравнением $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=R^2$; прямая λ задана уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$. При каком необходимом и достаточном условии прямая λ пересекает сферу S, касается сферы S, не имеет со сферой S ни одной общей точки?

969*. Плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})=D$ пересекает сферу

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=R^2.$$

Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ центра C и радиус ρ окружности сечения.

970*. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})+D=0$ является уравнением действительной сферы? Предполагая это условие выполненным, найти центр C и радиус R сферы.

971*. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра сферы, касающейся плоскости OAB в точке O и проходящей через точку C.

972*. Даны радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ точек M_1, M_2, M_3, не лежащих в одной плоскости с началом O радиусов-векторов. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра сферы, проходящей через точки O, M_1, M_2, M_3.

973*. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра сферы, которая касается прямой OC в точке O и проходит через точки A и B.

974*. Начало O радиусов-векторов служит центром окружности радиуса ρ, плоскость которой перпендикулярна к единичному вектору $\boldsymbol{n}$. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OC}$ центра C сферы, которая проходит через данную окружность и точку A, заданную радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, при условии, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\neq 0$.

§ 2. Цилиндры и конусы второго порядка *)

Александров, гл. XVIII, §§ 2, 3.
Моденов, гл. IX, §§ 131, 135.
Постников, гл. 5, § 3, пп. 7, 8.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

975*. Написать уравнение круглого цилиндра радиуса r, осью которого является прямая

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

---

*) См. также задачи 345—348.

976. Написать уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку (1, —2, 1), осью которого служит прямая

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

977*. Составить уравнение цилиндра, описанного вокруг сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$, зная направляющий вектор $\{a, b, c\}$ образующих цилиндра.

978. Составить уравнение цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и составляют равные углы с осями координат.

979*. Написать уравнение цилиндра, направляющей которого служит окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$, а образующие составляют с осями координат равные углы.

980*. Направляющей цилиндра служит окружность x^2+ $+y^2=r^2$, $z=0$, его образующие параллельны вектору $\{0, \beta, \gamma\}$. Написать уравнение этого цилиндра и привести его к каноническому виду, пользуясь преобразованием прямоугольных координат.

981*. Написать уравнение параболического цилиндра с параметром $p=\frac{2}{3}$, зная вершину $O'=(2, 1, -1)$ параболы, получающейся при пересечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим, направляющий вектор $e_1'=\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ оси этой параболы и направляющий вектор $e_2'=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ касательной в ее вершине.

982. Доказать, что линия пересечения двух параболических цилиндров

$$y^2=x, \qquad z^2=1-x$$

лежит на круговом цилиндре. Каково уравнение этого цилиндра?

983*. Написать уравнение круглого конуса, вершина которого находится в точке (x_0, y_0, z_0), ось параллельна вектору $\{a, b, c\}$, а образующие составляют с осью угол φ.

984*. Составить уравнение поверхности круглого конуса, вершина которого находится в точке (1, 2, 3), направляющий вектор оси $\{2, 2, -1\}$, а угол образующих конуса с его осью равен $\frac{\pi}{6}$.

985*. Написать уравнение круглого конуса, касающегося плоскостей Oxz и Oyz по прямым Ox и Oy.

986*. Составить уравнение поверхности круглого конуса при условии, что все три оси координат служат образующими конуса, а ось конуса проходит в первом и седьмом октантах; составить также каноническое уравнение этого конуса.

987*. Составить уравнение поверхности круглого конуса, касающегося трех плоскостей координат, зная, что ось его проходит в первом и седьмом октантах; составить также каноническое уравнение этого конуса.

988*. Написать уравнение круглого конуса, для которого оси Ox и Oy являются образующими, а ось Oz составляет с осью конуса, проходящей в первом и седьмом октантах, угол $\frac{\pi}{4}$. Написать также каноническое уравнение этого конуса.

989*. Написать уравнение конуса с вершиной в точке $(0, 0, c)$, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(c>r)$.

990*. Найти острый угол между образующими конуса $x^2+y^2-z^2=0$, по которым его пересекает плоскость $5x+10y-11z=0$.

991*. Написать уравнение конуса с вершиной $(2, 3, 6)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат.

992*. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(0, 0, a)$, а направляющей служит гипербола $2xy=a^2$, $z=0$. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести полученное уравнение конуса к каноническому виду.

993*. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(0, 0, p)$, а направляющей служит парабола $y^2=2px$, $z=0$. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести полученное уравнение к каноническому виду.

994*. Написать уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющей которого служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

995*. Написать уравнение конуса, проходящего через прямые $y=\pm x$, $z=0$ и точку $(1, 2, 3)$, для которого ось Oz является осью симметрии.

§ 3. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды *)

Александров, гл. XVIII, §§ 4, 5.

Моденов, гл. IX, §§ 128—130, 132—134.

Постников, гл. 5, § 3, пп. 1—3, 5, 6.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

996*. Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p=6$, вершина которого находится в первом октанте, зная, что плоскость Oxy пересекает параболоид по окружности с радиусом 3, касающейся обеих осей Ox и Oy.

997*. Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p=\frac{1}{3}$, вершиной $(1, 0, -1)$ и направляющим вектором оси вращения $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

998*. Написать уравнение параболоида вращения с параметром p, с вершиной в точке $O'=(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором оси $\boldsymbol{u}=\{a, b, c\}$.

999*. Эллипс с полуосями a и b, $a>b$, с центром в точке $O'=(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором большой оси $\boldsymbol{u}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ вращается около своей большой оси. Написать уравнение полученного эллипсоида вращения.

1000*. В плоскости Oxz дана парабола $x^2=2pz$, $y=0$. По ней перемещается вершина другой параболы с параметром q, плоскость которой остается все время параллельной плоскости Oyz, а ось — параллельной оси Oz. Составить уравнение поверхности, описываемой подвижной параболой.

1001*. Установить, пересекает ли плоскость

$$2x+2y+z-3=0$$

эллипсоид

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1.$$

1002*. По какой линии плоскость $x+y-z+3=0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-4$?

1003. Определить вид и расположение линии пересечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{2}=1$$

и плоскости $x=9$.

*) См. также задачи 349—352.

1004. По какой линии плоскость $x=a$ пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1?$$

1005*. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и пересекающей однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

по паре прямых. Найти эти прямые.

1006. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и пересекающей однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$$

по гиперболе, действительная полуось которой равна 1.

1007*. Доказать, что проекция эллипса, получающегося при пересечении плоскостью параболоида вращения, на плоскость, перпендикулярную к оси параболоида, есть окружность.

1008*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы плоскость $z=ax+by+c$ пересекала параболоид вращения $x^2+y^2=2pz$ $(p>0)$ по действительному эллипсу.

1009*. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$$

и плоскость

$$2x+3y-6=0?$$

1010. Даны однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ и двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. В каком отношении находятся соответствующие полуоси эллипсов, получающихся в сечении однополостного гиперболоида и конуса плоскостями, касательными к двуполостному гиперболоиду в его вершинах?

1011*. Доказать, что если u и v — полуоси эллипса, получающегося при пересечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c>0,$$

плоскостью, проходящей через его центр, то

$$a \geqslant u \geqslant b \geqslant v \geqslant c.$$

1012. Написать уравнение эллипсоида с вершинами (0, 0, 6) и (0, 0, —2), зная, что плоскость Oxy пересекает его по окружности радиуса 3.

1013. Написать уравнение двуполостного гиперболоида с вершинами $(0, 0, \pm 6)$, зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии и пересекают его по гиперболам, асимптоты которых образуют с осью Oz углы, соответственно равные $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$.

1014. Написать уравнение эллиптического параболоида с вершиной (2, 3, 6) и осью, параллельной оси Oz, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат.

1015. Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = c,$$

зная, что его плоскости симметрии совпадают с двумя плоскостями координат Oxz и Oyz и что третья координатная плоскость пересекает его по паре прямых.

1016. Написать уравнение эллиптического параболоида, зная, что плоскости

$$x = a, \quad y = b$$

пересекают его по параболам с вершинами $(a, 0, c)$ и $(0, b, c)$, плоскость Oxy касается параболоида в его вершине, а плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии.

1017. Написать уравнения гиперболического параболоида, проходящего через точку (10, 6, 11), зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии, а плоскость Oxy пересекает его по паре прямых, углы между которыми, содержащие ось Ox, равны $\frac{2\pi}{3}$.

1018*. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он проходит через окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$ и точку (3, 1, 1).

1019*. Написать уравнение однополостного гиперболоида с равными полуосями, проходящего через прямые $y = \pm x$,

$z=0$ и через точку (1, 2, 3), для которого ось Oz является осью симметрии.

1020*. Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через прямые $y=\pm x$, $z=0$ и через точку (1, 2, 3), для которого ось Oz является осью симметрии.

1021*. Доказать, что прямые, по которым плоскость Oxy пересекает гиперболический параболоид

$$x^2-y^2=2pz,$$

являются его осями симметрии.

1022. Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через три окружности

$$x^2+y^2=1, \qquad z=0;$$
$$x^2+y^2=9, \qquad z=1;$$
$$x^2+y^2=25, \qquad z=2,$$

и привести полученное уравнение к каноническому виду.

1023*. Составить уравнение поверхности второго порядка, зная, что она пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2-12x-18y+32=0$, $z=0$, а плоскости Oxz и Oyz — по параболам, оси которых параллельны положительному направлению оси Oz, причем параметр параболы, лежащей в плоскости Oxz, равен 1.

1024*. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух скрещивающихся прямых есть одно и то же число k.

1025*. Даны две скрещивающиеся прямые AB и $A'B'$. Определить вид поверхности, состоящей из прямых CC', соединяющих точки C и C' прямых AB и $A'C'$, для которых

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}}.$$

1026*. Написать уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость Oxy по параболе, а плоскости Oxz и Oyz по окружностям радиуса r, касающимся положительных полуосей координат. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести полученное уравнение к каноническому виду.

1027. Дан эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и плоскость

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Написать уравнение эллипсоида, проходящего через линию пересечения данного эллипсоида и плоскости, оси которого были бы параллельны осям данного эллипсоида и имели бы длину, вдвое бóльшую, чем оси данного эллипсоида.

1028. Доказать, что если плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

пересекает эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

то уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$$

при всех значениях λ определяет эллипсоид, оси которого параллельны осям данного эллипсоида и проходят через линию пересечения данного эллипсоида и плоскости.

1029. Найти геометрическое место фокусов гипербол, получающихся при пересечении гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

плоскостями, параллельными плоскости Oxy.

1030*. Доказать, что параболоид вращения и круглый цилиндр, оси которых параллельны, пересекаются по эллипсу, большая ось которого лежит в плоскости, проходящей через оси данных поверхностей, а малая ось перпендикулярна к этой плоскости.

1031*. По какой линии пересекаются однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b,$$

и сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$?

1032*. Найти линию пересечения поверхностей

$$x^2+y^2-z^2=a^2, \qquad x^2-y^2=2az,$$

1033*. Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=2z$ и сфера $x^2+y^2+z^2=50z$ пересекаются по двум окружностям. Найти центры и радиусы этих окружностей.

1034*. Доказать, что линия пересечения параболического цилиндра $z^2=x+y$ с эллиптическим параболоидом вращения $x^2+y^2=z$ лежит на сфере.

1035*. По какой линии пересекаются эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>q>0,$$

и сфера

$$x^2+y^2+z^2=2pz?$$

1036. По какой линии пересекаются два эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a>b$?

1037*. Написать уравнение эллипсоида с полуосями 4, 2, 1, для которого плоскости $x+y+z-1=0$, $x-y-2z=0$, $x-y+1=0$ служат плоскостями симметрии, причем большая ось эллипсоида лежит на линии пересечения первой и второй плоскостей, средняя ось лежит на линии пересечения первой и третьей плоскостей, малая ось лежит на линии пересечения второй и третьей плоскостей.

1038*. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки (0, 0, 0), (1, 1, —1), (0, 0, 1), для которой плоскости

$$x+y+z=0, \qquad 2x-y-z=0, \qquad y-z+1=0$$

являются плоскостями симметрии. Написать каноническое уравнение этой поверхности.

1039*. Составить уравнение поверхности второго порядка, для которой плоскости

$$x+y+z=0, \qquad 2x-y-z-2=0, \qquad y-z+1=0$$

являются плоскостями симметрии и которая проходит через точки (1, 0, 0), (0, —1, 0), (1, 1, —1).

1040*. Написать уравнения поверхности, состоящей из прямых, по которым пересекаются взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через две данные прямые.

§ 4. Определение типа и расположения поверхности второго порядка по ее общему уравнению. Применение инвариантов

Александров, гл. XIX, § 5; гл. XX, §§ 6, 7.
Моденов, гл. XII, § 166; Дополнение II, п. 5.

Во всех задачах этого параграфа, где нет указания на характер системы координат, координатная система предполагается прямоугольной.

1041. Определить вид поверхности и ее расположение относительно начальной системы координат, пользуясь преобразованием левой части ее уравнения:

1) $x^2+2xy+y^2-z^2+2z-1=0$;
2) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;
3) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;
4) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;
5) $4x^2+y^2-4xy-36=0$.

1042. Определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат:

1) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;
2) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;
3) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;
4) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.

1043*. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из ее осей: 1) $z^2=2xy$; 2) $z=xy$; 3) $z^2=3x+4y$; 4) $z^2=3x^2+4xy$; 5) $z^2=x^2+2xy+y^2+1$.

1044*. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение относительно исходной системы координат, пользуясь переносом и поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $x^2+4y^2+5z^2+4xy+4z=0$;
2) $x^2+2x+3y+4z+5=0$;
3) $z=x^2+2xy+y^2+1$.

1045. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить ее вид, написать каноническое уравнение и найти расположение поверхности относительно исходной системы координат:

1) $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-14x-$
$$-4y+14z+18=0;$$

2) $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+4yz+8zx-6x+6y+$
$$+6z+10=0;$$

3) $2yz+2zx+2xy+2x+2y+2z+1=0;$

4) $3x^2+3y^2+3z^2+2xy-2xz-2yz-2x-2y-$
$$-2z-1=0;$$

5) $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0;$

6) $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-4yz-2zx+10x-4y+$
$$+2z+4=0;$$

7) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0;$

8) $4xy+4yz+4zx+4x+4y+4z+3=0.$

1046. Определить вид каждой из следующих поверхностей, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-$
$$-28x+2y+16z+45=0;$$

2) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+$
$$+2x-10y-2z-1=0;$$

3) $7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-$
$$-8zx-16x-16y-8z+72=0;$$

4) $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+$
$$+4zx-16x-16y+10z-2=0;$$

5) $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-$
$$-16zx+60x-12y+12z-90=0;$$

6) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-$
$$-6x-24y+18z+30=0;$$

7) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0;$

8) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+$
$$+2zx-4x+6y-2z+3=0;$$

9) $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0;$

10) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+$
$$+2x+4y-10z-1=0;$$

11) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0.$

1047*. С помощью инвариантов

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

была: 1) эллипсоидом; 2) мнимым эллипсоидом; 3) мнимым конусом; 4) однополостным гиперболоидом; 5) двуполостным гиперболоидом; 6) конусом; 7) эллиптическим параболоидом; 8) гиперболическим параболоидом.

1048*. Доказать, что: 1) следующие функции:

$$I_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$I_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

коэффициентов многочлена второй степени с тремя переменными

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a$$

являются инвариантами однородного ортогонального преобразования переменных;

2) I_3^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = 0, \qquad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

3) I_2^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если $I_3 = I_4 = 0$ и

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad I_3^* = 0.$$

Функции I_3^* и I_2^* называются семиинвариантами многочлена второй степени с тремя переменными относительно ортогонального преобразования переменных.

1049*. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4, I_2^*, I_3^* найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением, была: 1) эллиптическим цилиндром; 2) мнимым эллиптическим цилиндром; 3) парой мнимых пересекающихся плоскостей; 4) гиперболическим цилиндром; 5) парой действительных пересекающихся плоскостей; 6) параболическим цилиндром; 7) парой действительных параллельных плоскостей; 8) парой мнимых параллельных плоскостей; 9) парой совпадающих плоскостей.

1050*. Доказать, что если $I_3=I_4=0$, то приведенное уравнение поверхности второго порядка имеет вид

1) $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{I_3^*}{I_2}=0$, если $I_2\neq 0$;

здесь λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения;

2) $I_1 x'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3^*}{I_1}}\,y'=0$, если $I_2=0$, $I_3^*\neq 0$;

3) $I_1 x'^2+\frac{I_2^*}{I_1}=0$, если $I_2=0$, $I_3^*=0$, $I_1\neq 0$.

1051. Доказать, что следующие уравнения определяют поверхности, распадающиеся на пару плоскостей, и найти эти плоскости:

1) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

2) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-$
$-x+2y-3z-6=0$;

3) $3x^2-4y^2+3z^2+4xy+10xz-$
$-4yz+6x-20y-14z-24=0$;

4) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+$
$+4zx+4x-6y+2z-5=0$.

Система координат аффинная.

1052. Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов:

1) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$;

2) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;

3) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;

4) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-$
$$-4yz-14x-4y+14z+16=0;$$

5) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;

6) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0$;

7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0$;

8) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+$
$$+2x+4y-10z-1=0;$$

9) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$;

10) $4xy+2x+4y-6z-3=0$;

11) $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$.

Система координат аффинная.

1053*. Найти наибольший угол φ между образующими конуса $z^2+2xy+2xz+2yz=0$, а также углы α, β, γ, которые составляет его ось с осями координат.

1054. Выразить с помощью инвариантов условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение второй степени определяло параболоид вращения, и найти его параметр.

1055*. С помощью инвариантов выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение второй степени определяло гиперболический параболоид с равными параметрами главных сечений, и найти эти параметры.

1056*. 1) С помощью инвариантов найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы общее уравнение второй степени с тремя неизвестными определяло однополостный или двуполостный гиперболоиды с равными полуосями.

2) Пользуясь инвариантами, написать канонические уравнения этих гиперболоидов.

1057*. При каком необходимом и достаточном условии два гиперболоида имеют общий асимптотический конус?

1058*. Дана поверхность второго порядка

$$x^2+y^2+z^2+2axy+2axz+2ayz=1.$$

1) Доказать, что при всех значениях параметра a эта поверхность является поверхностью вращения; найти направляющий вектор ее оси вращения.

2) Для каких значений параметра a поверхность будет эллипсоидом?

1059*. Доказать, что если общее уравнение второй степени $F(x, y, z)=0$ определяет гиперболоид (однополостный или двуполостный), то уравнение $F(x, y, z)=\frac{I_4}{I_3}$ определяет его асимптотический конус.

1060*. Определить k так, чтобы поверхность $x^2-2xy+kz^2=0$ была конусом вращения, и найти ось вращения.

1061*. Доказать, что для того, чтобы в конус второго порядка можно было вписать трехгранный угол, ребра которого попарно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $I_1=0$. Доказать также, что в этом случае всякая плоскость, проходящая через вершину конуса и перпендикулярная к любой его образующей, пересекает конус по двум взаимно перпендикулярным прямым.

1062*. Пусть уравнение второй степени $F(x, y, z)=0$ определяет гиперболоид. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) лежала в области, ограниченной гиперболоидом и его асимптотическим конусом.

1063*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) лежала внутри эллиптического цилиндра, определяемого уравнением второй степени $F(x, y, z)=0$.

1064*. Составить уравнение конуса второго порядка, пересекающего плоскость Oyz по окружности $y^2+z^2=2ry$, $x=0$, а плоскость Oxz по параболе $z^2=2px$, $y=0$.

1065*. Составить уравнение конуса второго порядка, на котором лежат окружности

$$y^2+z^2-2by=0, \qquad x=0;$$
$$x^2+z^2-2ax=0, \qquad y=0.$$

1066*. 1) Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей координатные плоскости по гиперболам

$$yz=\frac{a^2}{2}, \quad x=0; \quad xz=\frac{b^2}{2}, \quad y=0; \quad xy=\frac{c^2}{2}, \quad z=0.$$

2) Определить вид этой поверхности.

3) Привести ее уравнение к каноническому виду при $a=b=c=1$.

1067*. 1) Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость Oxy по паре прямых, а плоскости Oxz и Oyz по окружностям радиуса r, касающимся оси Oz в начале координат и расположенным в положительных полуплоскостях.

2) Привести полученное уравнение к каноническому виду.

1068*. Составить уравнение параболоида, проходящего через две прямые $x=0$, $z=2$ и $y=0$, $z=-2$ и через две точки $(0, 1, -1)$ и $(1, -1, 0)$.

1069*. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипсоида на плоскости, проходящие через концы трех попарно перпендикулярных диаметров эллипсоида.

1070*. 1) Дан многочлен

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_{12}xy+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a$$

и невырожденная квадратичная форма

$$g_{11}x^2+g_{22}y^2+g_{33}z^2+2g_{23}yz+2g_{31}zx+2g_{12}xy.$$

Доказать, что следующие функции коэффициентов данного многочлена и квадратичной формы:

$$I_4=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}, \qquad I_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_{13} \\ g_{21} & a_{22} & a_{23} \\ g_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_{13} \\ a_{21} & g_{22} & a_{23} \\ a_{31} & g_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_{13} \\ a_{21} & a_{22} & g_{23} \\ a_{31} & a_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_{13} \\ g_{21} & g_{22} & a_{23} \\ g_{31} & g_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & g_{13} \\ g_{21} & a_{22} & g_{23} \\ g_{31} & a_{32} & g_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & g_{13} \\ a_{21} & g_{22} & g_{23} \\ a_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}$$

— являются инвариантами невырожденного неоднородного линейного преобразования переменных x, y, z.

2) Функции

$$I_3^* = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ g_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ 0 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & g_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & 0 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & g_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & g_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

$$I_2^* = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_{13} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & a_{23} & a_2 \\ g_{31} & g_{32} & a_{33} & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & g_{13} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & g_{23} & a_2 \\ a_{31} & g_{32} & g_{33} & a_3 \\ a_1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & g_{13} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & g_{23} & a_2 \\ g_{31} & a_{32} & g_{33} & a_3 \\ 0 & a_2 & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}$$

являются инвариантами невырожденного однородного линейного преобразования переменных x, y, z.

3) Если $I_4 = I_3 = 0$, то I_3^* является инвариантом невырожденного неоднородного линейного преобразования переменных x, y, z. Если $I_3 = I_4 = I_2 = I_3^* = 0$, то I_2^* является инвариантом невырожденного неоднородного линейного преобразования переменных x, y, z.

4) Приведенные уравнения поверхностей второго порядка, заданных общим уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

относительно аффинной системы координат с метрическими коэффициентами g_{ij}, записываются в следующем виде:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0, \quad \text{если} \quad I_3 \neq 0;$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\, z' = 0, \quad \text{если} \quad I_3 = 0,\ I_4 \neq 0;$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3^*}{I_2} = 0, \quad \text{если} \quad I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 \neq 0;$$

$$\lambda_1 x'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3^*}{I_1}}\, y' = 0, \quad \text{если}$$

$$I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3^* \neq 0;$$

$$\lambda_1 x'^2 + \frac{I_2^*}{I_1} = 0, \text{ если } I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 = 0,\ I_3^* = 0,\ I_1 \neq 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — отличные от нуля корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} & a_{13}-\lambda g_{13} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} & a_{23}-\lambda g_{23} \\ a_{31}-\lambda g_{31} & a_{32}-\lambda g_{32} & a_{33}-\lambda g_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 5. Касательная плоскость. Прямолинейные образующие

Александров, гл. XVIII, § 6; гл. XIX, §§ 3, 4.
Моденов, гл. XI, § 136, гл. XII, §§ 160, 161.
Постников, гл. 5, § 3, пп. 4, 5.

1071. Составить уравнение касательной плоскости к каждой из следующих поверхностей в лежащей на поверхности точке (x_0, y_0, z_0):

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

4) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$;

5) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (при условии, что точка (x_0, y_0, z_0) не совпадает с вершиной конуса).

1072. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы нераспадающаяся поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_{12}xy+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

касалась плоскости Oxy в начале координат.

1073*. Доказать, что касательная плоскость к поверхности второго порядка пересекает поверхность по паре прямых (действительных, мнимых или совпадающих).

1074*. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямолинейную образующую однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида (не параллельная особому направлению), касается поверхности.

1075. Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{5}=1,$$

проходящей через точку $(12, -3, -1)$ и параллельной оси Oz.

1076. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$$

и касающейся эллипсоида

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1.$$

1077. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-15}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-11}{-1}$$

и касающейся гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z.$$

1078. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0,$$

проходящей через прямую

$$4x-5y=0,\ z-1=0.$$

1079. Найти касательную плоскость к поверхности

$$4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0,$$

параллельную плоскости $x+2y+2=0$.

1080. Найти касательную плоскость к двуполостному гиперболоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

отсекающую на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные a и b.

1081. Найти касательную плоскость к однополостному гиперболоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, отсекающую на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные a и b, и найти прямые, по которым эта плоскость пересекает гиперболоид.

1082. Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные p и q.

1083*. Дан гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=2z$$

и плоскость

$$2x+3y-z=0.$$

Написать уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых; найти эти прямые.

1084. Найти точку пересечения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$x^2+y^2-z^2=1,$$

по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости $x+y-z=0$, и определить угол между этими образующими.

1085. Найти точку пересечения прямолинейных образующих гиперболического параболоида

$$x^2-y^2=2z,$$

по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости $x-y+z+1=0$, и определить угол между этими образующими.

1086. Найти угол φ между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1,$$

проходящими через точку (1, 4, 8), беря на этих образующих лучи, направленные от данной точки к горловому эллипсу.

1087*. Дан однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,$$

Через его образующую

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

и точку (0, 3, 0) проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения этой плоскости с гиперболоидом.

1088*. Доказать, что ортогональные проекции прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

и гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

на плоскости координат касаются сечений этих поверхностей координатными плоскостями (для гиперболического параболоида рассматриваются только проекции на плоскости Oyz и Oxz).

1089. Найти прямолинейные образующие поверхности

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0,$$

проходящие через точку (—1, —1, 1).

1090*. Дан гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z.$$

Через его образующую

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$$

и точку (1, 1, 1) проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения параболоида с этой плоскостью.

1091*. Доказать, что если уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

определяет параболоид, то уравнение

$$2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

является уравнением касательной плоскости к этому параболоиду.

1092. Доказать, что направляющие векторы прямолинейных образующих поверхности второго порядка, проходящих через точку M, принадлежат конусу асимптотических направлений и касательной плоскости к поверхности в точке M.

1093*. 1) Найти координаты направляющих векторов прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) гиперболоида.

2) Рассмотреть частный случай, когда точка принадлежала горловому эллипсу поверхности.

1094. Найти направляющие векторы прямолинейных образующих гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) этого параболоида.

1095*. Найти геометрическое место точек, лежащих на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

1096*. Доказать, что нормали к невырожденной линейчатой поверхности второго порядка, проведенные в точках прямолинейной образующей, составляют гиперболический параболоид.

1097*. Доказать, что конус, образующие которого параллельны нормалям к поверхности второго порядка в точках ее плоского сечения, есть конус второго порядка.

1098*. Написать уравнение поверхности, состоящей из прямых, пересекающих три прямые:

$$x=\frac{1}{2},\quad y=z;\quad y=-1,\quad z=2x;\quad y=1,\quad z=-2x.$$

1099*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

касается невырожденной поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0?$$

1100*. Доказать, что любая плоскость пересекает однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид и конус второго порядка.

1101*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

пересекает каждую из следующих поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

3) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$.

1102*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

касается каждой из следующих поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

4) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$;

5) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

1103*. Доказать, что плоскость, касательная к асимптотическому конусу центральной поверхности второго порядка, пересекает поверхность по параллельным прямым, симметричным относительно прямой, по которой происходит касание плоскости с конусом.

§ 6. Центр. Диаметральные плоскости; плоскости симметрии и оси симметрии

Александров, гл. XIX, § 5; гл. XX, §§ 1—4, 6.
Моденов, гл. XII, §§ 155, 156, 159, 163—165.

1104. Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точку (0, 0, 1), имеющей центр в точке (0, 0, —1) и пересекающей плоскость Oxy по линии

$$3x^2-4xy-3=0, \qquad z=0.$$

1105. Дан однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

и плоскость

$$6x+4y-3z-12=0.$$

Определить направление хорд, которым сопряжена диаметральная плоскость, параллельная данной плоскости.

1106. Написать уравнение диаметральной плоскости гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=2z,$$

проходящей через прямую

$$x=y, \quad z=1,$$

и найти направление тех хорд, которым сопряжена эта плоскость.

1107. Дан эллиптический параболоид.

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=2z$$

и две точки (3. 0, 5) и (0, 4, 7). Написать уравнение диаметральной плоскости параболоида, проходящей через данные точки, и определить направление сопряженных ей хорд.

1108*. Дан параболоид вращения

$$x^2+y^2=2pz$$

и круглый цилиндр

$$(x-a)^2+z^2=r^2.$$

Написать уравнение плоскости, которая была бы диаметральной плоскостью как для параболоида, так и для цилиндра.

1109*. Написать уравнение плоскости, пересекающей однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{5}=1$$

по линии, центр которой находится в точке (6, 6, 5).

1110*. Доказать, что если три некомпланарные хорды поверхности второго порядка проходят через одну точку и делятся в ней пополам, то эта точка является центром поверхности.

1111*. Доказать, что если за ось Oz принять произвольную прямую, не имеющую асимптотического направления поверхности второго порядка, а за плоскость Oxy — диаметральную плоскость, сопряженную направлению этой прямой, то в уравнении поверхности будут отсутствовать члены с произведениями координат xz и yz.

1112*. Доказать, что плоскость пересекает эллиптический или гиперболический параболоид по линии второго порядка, имеющей единственный центр тогда и только тогда, когда плоскость сечения не параллельна особому направлению.

1113*. Доказать, что плоское сечение центральной поверхности второго порядка имеет единственный центр тогда и только тогда, когда плоскость, проходящая через центр поверхности и параллельная плоскости сечения, пересекает асимптотический конус поверхности по двум различным прямым (действительным или мнимым).

1114. Доказать, что касательные плоскости к поверхности второго порядка в концах ее диаметра параллельны между собой.

1115*. Как запишется уравнение однополостного гиперболоида, если за начало координат принять точку поверхности, за оси Ox и Oy — проходящие через нее прямолинейные образующие, а за ось Oz — проходящий через нее диаметр.

1116*. Доказать, что каждая плоскость, параллельная особому направлению эллиптического или гиперболического параболоида, является диаметральной плоскостью, сопряженной к однозначно определенному неособому направлению.

1117*. Доказать, что диаметральные плоскости, сопряженные к неособым направлениям, параллельны тогда и только тогда, когда плоскость, параллельная этим направлениям, параллельна особому направлению.

1118*. Доказать, что диаметральная плоскость, сопряженная неасимптотическому направлению, пересекает асимптотический конус поверхности по двум различным образующим.

1119*. Написать уравнение гиперболического параболоида, принимая за начало координат произвольную точку O поверхности, за оси Ox и Oy — прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, за ось Oz — проходящий через нее диаметр, а за единичную точку E — произвольную точку поверхности, отличную от точки O.

1120*. Написать уравнение конуса второго порядка, принимая за оси Ox и Oy его образующие, за ось Oz — прямую, сопряженную плоскости, проходящей через эти образующие, а за единичную точку E — произвольную точку конуса, отличную от его вершины.

1121*. Как запишется уравнение поверхности второго порядка, если за начало координат принять точку O поверхности, за ось Oz — проходящий через эту точку диаметр, а за оси Ox и Oy — прямые, лежащие в касательной плоскости и имеющие сопряженные направления относительно данной поверхности?

1122*. Написать уравнение конуса второго порядка, принимая за начало координат его вершину, а за оси координат — три прямые, имеющие попарно сопряженные направления.

1123*. Написать уравнение эллипсоида, принимая за начало координат его центр, за оси координат — попарно сопряженные диаметры, а за единичные точки осей координат — точки пересечения этих диаметров с эллипсоидом.

1124*. Две плоскости, из которых каждая параллельна направлению, сопряженному другой относительно поверхности второго порядка, называются сопряженными относительно этой поверхности. Найти необходимое и достаточное условие того, что две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

сопряжены относительно поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

1125. Найти угол между единичным вектором $\boldsymbol{u}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и диаметральной плоскостью поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0,$$

сопряженной направлению вектора $\boldsymbol{u}$.

1126*. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0,\ q>0)$$

двумя его сопряженными диаметральными плоскостями, то

$$p'+q'=p+q.$$

1127*. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0,\ q>0)$$

двумя сопряженными диаметрами, то

$$p'-q'=p-q.$$

1128*. Доказать, что плоскости симметрии поверхности второго порядка, перпендикулярные к хордам неасимптотического направления, могут быть заданы уравнением

$$\alpha(\lambda x+a_1)+\beta(\lambda y+a_2)+\gamma(\lambda z+a_3)=0,$$

где $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ — вектор, имеющий главное направление, соответствующее корню λ характеристического уравнения.

§ 7. Плоские сечения поверхностей второго порядка

Моденов, Дополнение III.

1129*. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(a,\ 0,\ 0)$ и пересекающих однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ по двум параллельным прямым.

1130. Найти линию пересечения однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскости $3x+4y-5z=0$.

1131. Доказать, что плоскость

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}+D=0$$

пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p>0,\ q>0)$$

по прямой, и составить ее уравнения.

1132*. По какой линии касательная плоскость к однополостному гиперболоиду рассекает его асимптотический конус?

1133*. По какой линии однополостный гиперболоид рассекается касательной плоскостью к его асимптотическому конусу?

1134*. Плоскость π пересекает конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad a \geqslant b,$$

по гиперболам. В каких границах может изменяться эксцентриситет гиперболы?

1135*. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и пересекающей по окружности эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b.$$

1136*. Составить уравнение плоскости, пересекающей гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \neq b,$$

по равносторонней гиперболе и проходящей: 1) через ось Ox; 2) через ось Oy. Найти полуоси этих гипербол.

1137*. Составить уравнение плоскости, пересекающей гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, $p>0$, $q>0$, по равносторонней гиперболе и проходящей: 1) через ось Ox; 2) через ось Oy. Найти полуоси этих гипербол.

1138*. В каждом из следующих случаев определить вид линии пересечения поверхности с плоскостью и определить расположение линии относительно исходной системы координат:

1) $x^2+y^2-z^2=0,\ x-z+1=0;$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,\ x+z+\frac{4\sqrt{5}}{3}=0;$

3) $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-$
$-4yz+2x-6z=0,\ x-z=0.$

1139*. Определить вид линии, по которой плоскость $x+y+z-1=0$ пересекает параболический цилиндр $y^2=2x$.

Написать каноническое уравнение этой линии и найти каноническую систему координат.

1140*. Определить вид линии пересечения конуса $x^2+y^2-z^2=0$ с плоскостью $4x-3y-5z+4=0$. Написать каноническое уравнение этой линии и найти каноническую систему координат.

1141*. Определить вид линии пересечения однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскости $2x+2y+z-1=0$. Написать каноническое уравнение этой линии и найти каноническую систему координат.

1142*. Найти фокусы эллипса, получающегося при пересечении цилиндра $x^2+y^2=36$ плоскостью $3x+4y+12z=0$.

1143*. Найти все значения параметра k, для каждого из которых плоскость пучка

$$2x+y+2+k(y+z)=0$$

пересекает конус

$$x^2+y^2-z^2=0$$

по эллипсу.

1144*. Через прямую $2x=2y=z$ провести плоскость, пересекающую гиперболический параболоид $4x^2-y^2+z=0$ по равносторонней гиперболе.

1145*. Какого типа линии получаются при пересечении двуполостного гиперболоида и плоскости, если плоскость пересекает: 1) одну полость гиперболоида; 2) обе полости гиперболоида.

1146*. Пусть плоскость π не проходит через вершину конуса второго порядка. Доказать, что плоскость π пересекает конус по эллипсу, если плоскость π', проходящая через вершину конуса и параллельная плоскости π, имеет с конусом только одну общую точку (вершину конуса); плоскость π пересекает конус по параболе, если плоскость π' и конус имеют единственную общую прямую (касается конуса вдоль этой прямой); плоскость π пересекает конус по гиперболе, если плоскость π' пересекает конус по паре различных прямых.

1147*. По линиям какого типа может пересекать плоскость каждую из следующих поверхностей: 1) эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) конус; 5) эллиптический параболоид; 6) гиперболический параболоид.

1148*. Найти необходимый и достаточный признак типа линий пересечения плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

с каждой из следующих поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$

5) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>0,\ q>0;$

6) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>0,\ q>0.$

1149*. Найти все плоскости, пересекающие по окружности каждую из следующих поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c;$

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b;$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad a>b;$

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad a>b;$

5) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>q>0;$

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b.$

1150*. Точка поверхности второго порядка называется омбилической, если касательная плоскость к поверхности в этой точке параллельна плоскостям круговых сечений. Найти омбилические точки каждой из следующих поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c;$

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad a>b;$

3) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>q>0.$

1151*. Найти радиус кругового сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c,$$

и однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b,$$

плоскостью, проходящей через центр поверхности.

1152*. 1) Найти необходимое и достаточное условие того, что плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

пересекает поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \tag{2}$$

по центральной линии.

2) Определить координаты центра линии пересечения поверхности (2) с плоскостью (1).

ГЛАВА VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Аффинные преобразования

Александров, гл. XI, §§ 1—5; гл. XVII, § 12.
Моденов, гл. XIV, §§ 171—179, 186.
Постников, гл. 7, § 1, пп 1—3; § 2, п. 2.

1. Аффинные преобразования плоскости

1153. Написать формулы поворота плоскости на угол φ: 1) вокруг начала координат; 2) вокруг точки (x_0, y_0). Система координат прямоугольная.

1154. Написать формулы преобразования гомотетии плоскости с коэффициентом k: 1) с центром в начале координат; 2) с центром в точке (x_0, y_0). Система координат аффинная.

1155. Найти аффинное преобразование, переводящее вершины прямоугольного треугольника $O=(0, 0)$, $A=(1, 0)$, $B=(0, 1)$ соответственно в вершины равностороннего треугольника

$$O=(0, 0), \quad A=(1, 0), \quad B'=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Система координат прямоугольная.

1156. Найти аффинное преобразование, переводящее точку $(6, -2)$ в точку $(1, 1)$, а векторы $\{2, 1\}$ и $\{-1, 2\}$ — соответственно в векторы $\{4, 2\}$ и $\{-3, 6\}$. Система координат аффинная.

1157. Определить аффинное преобразование, которое точки $A_1=(1, 0)$, $A_2=(0, 2)$, $A_3=(-3, 0)$ переводит соответственно в точки $A_1'=(2, 3)$, $A_2'=(-1, 4)$, $A_3'=(-2, -1)$. Система координат аффинная.

1158. Найти аффинное преобразование, обратное преобразованию

$$x'=2x+3y-7, \quad y'=3x+5y-9.$$

Система координат аффинная.

1159. Даны два аффинных преобразования:

$$A\colon\ x' = 2x + y - 5, \quad y' = 3x - y + 7;$$
$$B\colon\ x' = x - y + 4, \quad y' = -x + 2y + 5.$$

Найти преобразования AB и BA. Система координат аффинная.

1160. Дано аффинное преобразование $x' = 3x + 4y - 12$, $y' = 4x - 3y + 6$. На прямой $7x - 2y - 24 = 0$ найти такую точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, лежащую на этой прямой. Система координат аффинная.

1161. Дано аффинное преобразование $x' = 2x + y - 2$, $y' = x - y - 1$ и точка $A = (1, 1)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая при этом преобразовании переходит в прямую, также проходящую через точку A. Система координат аффинная.

1162. Дано аффинное преобразование $x' = 10x + 11y$, $y' = 10x + 9y$. Найти вектор, который при этом преобразовании переходит в вектор, ему ортогональный. Система координат прямоугольная.

1163*. Найти неподвижную точку аффинного преобразования, переводящего точки A, B, C соответственно в точки B, C, A.

1164. Найти преобразование подобия, являющееся произведением поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг точки $(1, 1)$ и гомотетии с центром в этой точке и коэффициентом 3. Система координат прямоугольная.

1165*. Найти преобразование подобия с неподвижной точкой $(2, 1)$, переводящее точку $(2, -9)$ в точку $(-2, -2)$. Система координат прямоугольная.

1166*. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением симметрии относительно прямой $x + 3y - 5 = 0$ и гомотетии с центром в точке $(2, 1)$ на этой прямой и коэффициентом 3. Система координат прямоугольная.

1167. Найти формулы аффинного преобразования, являющегося произведением поворота вокруг точки $(2, 1)$ на угол $-\arccos\frac{4}{5}$ и растяжения с центром $(1, 2)$ и коэффициентом 5. Найти неподвижную точку этого преобразования. Система координат прямоугольная.

1168*. Найти аффинное преобразование, являющееся сжатием к прямой $2x + y - 2 = 0$ с коэффициентом сжатия, равным 3. Система координат прямоугольная.

1169*. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением сжатия к прямой

$$x+y-2=0$$

с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и сжатия к прямой $x-y=0$ с коэффициентом 2. Система координат прямоугольная.

1170*. Найти аффинное преобразование, являющееся произведением сжатия к прямой

$$x+y-1=0$$

с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и симметрии относительно этой прямой. Система координат прямоугольная.

1171*. Выяснить геометрический смысл аффинного преобразования, переводящего вершины треугольника ABC в середины противолежащих им сторон.

1172*. Доказать, что преобразование

$$x'=3x+4y+6,$$
$$y'=4x-3y-12$$

является преобразованием подобия, меняющим ориентацию. Представить это преобразование в виде произведения симметрии относительно прямой и гомотетии, центр которой лежит на этой прямой.

1173*. Доказать, что преобразование

$$x'=3x-4y+10,$$
$$y'=4x+3y-10$$

является преобразованием подобия, сохраняющим ориентацию. Представить это преобразование в виде произведения гомотетии и поворота вокруг центра гомотетии.

1174*. Выяснить геометрический смысл аффинного преобразования:

1) $x'=ax-by, \quad y'=bx+ay;$

2) $x'=ax+by, \quad y'=bx-ay.$

Система координат прямоугольная.

1175. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$x'=7x-y+1, \quad y'=4x+2y+4.$$

Система координат аффинная.

1176. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$x' = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5},$$
$$y' = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}.$$

Система координат аффинная.

1177*. Как запишется аффинное преобразование $x' = x + 2y$, $y' = 4x + 3y$, если за новые оси аффинной системы координат принять инвариантные прямые? Система координат аффинная.

1178*. Доказать, что если аффинное преобразование обладает единственной инвариантной точкой, то всякая инвариантная прямая проходит через эту точку.

1179. Найти такое аффинное преобразование, для которого все точки оси Ox являются инвариантными, а точка $A = (2, 6)$ переходит в точку $A' = (-1, -4)$. Система координат аффинная.

1180*. Определить такое аффинное преобразование, при котором каждая точка прямой $x + 2y - 1 = 0$ является инвариантной и точка $(1, 2)$ переходит в точку $(2, 2)$. Система координат аффинная.

1181*. Определить аффинное преобразование, при котором прямые $x + y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ переходят в себя, а точка $(1, 1)$ — в точку $(2, 1)$. Система координат аффинная.

1182*. Найти такое аффинное преобразование, при котором прямые $5x - 6y - 7 = 0$ и $3x - 4y = 0$ переходят соответственно в прямые $2x + y - 4 = 0$ и $x - y + 1 = 0$, а точка $(6, 4)$ — в точку $(2, 1)$. Система координат аффинная.

1183. Дано аффинное преобразование

$$x' = \frac{5}{4}x, \qquad y' = \frac{5}{13}y.$$

Найти такие прямые, которые этим преобразованием изометрически отображаются на свои образы. Система координат прямоугольная.

1184. Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование

$$x' = k_1 x, \qquad y' = k_2 y, \qquad k_1 > 1 > k_2 > 0.$$

Найти такие прямые, которые этим преобразованием изометрически отображаются на свои образы.

1185. Дано аффинное преобразование $x'=kx$, $y'=\frac{1}{k}y$. Найти такие прямые, которые этим преобразованием изометрически отображаются на свои образы. Система координат прямоугольная.

1186*. Доказать, что если k_1 и k_2 — коэффициенты сжатия аффинного преобразования, $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор и $\boldsymbol{a}'$ — его образ при данном преобразовании, то

$$k_1 \leqslant \frac{|\boldsymbol{a}'|}{|\boldsymbol{a}|} \leqslant k_2.$$

1187*. Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование $x'=7x+y$, $y'=-5x+5y$. Найти два таких взаимно перпендикулярных вектора, которые при этом преобразовании переходят во взаимно перпендикулярные векторы.

1188*. Определить площадь параллелограмма, стороны которого относительно прямоугольной системы координат определяются уравнениями

$$Ax+By+C=0, \qquad Ax+By+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0, \quad A'x+B'y+D'=0.$$

1189*. Через точку $P=(15, 6)$ провести прямую, отсекающую от прямых $5x-2y-5=0$, $2x+5y-2=0$ треугольник, площадь которого равна 29. Система координат прямоугольная.

1190. Через точку $P=(-3, -5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+3y-15=0$, $4x-5y-12=0$ в точке P делится пополам. Система координат аффинная.

1191*. Дано аффинное преобразование

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1, \qquad y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2.$$

Найти его каноническую запись в зависимости от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

и ранга r матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

в случае кратного корня λ. Рассмотреть следующие случаи:

1) корни λ_1 и λ_2 действительные различные, не равные 1;
2) корни λ_1 и λ_2 комплексные сопряженные:

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i, \qquad \beta\neq 0;$$

3) λ — кратный корень, не равный 1, и $r=0$;
4) λ — кратный корень, не равный 1, и $r=1$;
5) $\lambda_1\neq\lambda_2=1$;
6) $\lambda=1$ — кратный корень и $r=0$;
7) $\lambda=1$ — кратный корень и $r=1$.

2. *Аффинные преобразования пространства*

1192. Найти аффинное преобразование, при котором точки $O=(0, 0, 0)$, $E_1=(1, 0, 0)$ и $E_2=(0, 1, 0)$ остаются неподвижными, а точка $E_3=(0, 0, 1)$ переходит в точку $E=(1, 1, 1)$. Система координат аффинная.

1193. Вершины тетраэдра $ABCD$ находятся в точках $A=(0, 0, 0)$, $B=(1, 0, 0)$, $C=(0, 1, 0)$, $D=(0, 0, 1)$. Найти аффинное преобразование, оставляющее вершину A на месте и переводящее середины ребер $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в середины противоположных им ребер. Система координат аффинная.

1194. Вершины тетраэдра $ABCD$ находятся в точках $A=(0, 0, 0)$, $B=(1, 0, 0)$, $C=(0, 1, 0)$, $D=(0, 0, 1)$. Найти аффинное преобразование, переводящее вершины A, B, C, D соответственно в вершины B, C, D, A. Найти инвариантные точки, инвариантные прямые и инвариантные плоскости этого преобразования. Система координат аффинная.

1195*. Выяснить геометрический смысл аффинного преобразования, переводящего вершины тетраэдра в центры тяжести противолежащих им граней.

1196*. Выяснить геометрический смысл аффинного преобразования

$$x'=3x-4y,$$
$$y'=4x+3y,$$
$$z'=5z.$$

Система координат прямоугольная.

1197*. Доказать, что если аффинное преобразование обладает единственной неподвижной точкой, то все прямые и плоскости, инвариантные относительно этого преобразования, проходят через эту неподвижную точку.

1198*. Доказать, что через всякую неподвижную точку аффинного преобразования проходит инвариантная плоскость, параллельная каждой инвариантной плоскости этого аффинного преобразования.

1199*. Найти инвариантные точки, прямые и плоскости аффинного преобразования

$$x' = 2x + y + 1,$$
$$y' = 2y + z + 2,$$
$$z' = 2z + 3.$$

Система координат аффинная.

1200*. Найти инвариантные точки, прямые и плоскости аффинного преобразования

$$x' = 3x - 4y + 6, \quad y' = 4x + 3y - 8, \quad z' = -2z + 9.$$

Система координат аффинная.

1201*. Дано аффинное преобразование

$$x' = x + y,$$
$$y' = y + z,$$
$$z' = z + 1.$$

Установить, обладает ли это преобразование инвариантной точкой, инвариантной прямой или инвариантной плоскостью. Система координат аффинная.

1202*. Найти инвариантные точки, инвариантные прямые и инвариантные плоскости аффинного преобразования

$$x' = 6x - 2y - 3z,$$
$$y' = -2x + 3y - 6z + 6,$$
$$z' = -3x - 6y - 2z + 12.$$

1203*. Найти аффинное преобразование, являющееся сжатием к плоскости $2x - 2y + z - 2 = 0$ с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$. Система координат прямоугольная.

1204*. Доказать, что при подобном преобразовании плоскости или пространства с коэффициентом подобия $k \neq 1$ существует неподвижная точка и притом только одна.

1205. Написать формулы аффинного преобразования пространства, переводящего репер с начальной точкой

$A=(x_0, y_0, z_0)$ и базисными векторами $\boldsymbol{a}_1=\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$, $\boldsymbol{a}_3=\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$ в репер с начальной точкой $A'=(x'_0, y'_0, z'_0)$ и базисными векторами $\boldsymbol{b}_1=\{b_{11}, b_{21}, b_{31}\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{b_{12}, b_{22}, b_{32}\}$, $\boldsymbol{b}_3=\{b_{13}, b_{23}, b_{33}\}$.

§ 2. Аффинные преобразования линий второго порядка

Александров, гл. XVI, § 5.
Моденов, гл. XIV, §§ 187, 188.

1206. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу, проходящих через концы его сопряженных диаметров.

1207. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, соединяющих концы сопряженных диаметров.

1208. Определить коэффициент гомотетии двух гомотетичных эллипсов с общим центром, если треугольник, вписанный в первый эллипс, является описанным около второго эллипса.

1209. Доказать, что центр тяжести треугольника, вписанного в один эллипс и описанного около другого, гомотетичного первому, с тем же центром, есть центр эллипса.

1210. Определить геометрическое место середин хорд эллипса, отсекающих от него сегменты постоянной площади.

1211. Доказать, что прямые, соединяющие концы сопряженных диаметров эллипса, касаются эллипса, гомотетичного данному. Найти коэффициент гомотетии.

1212*. Доказать, что отрезки $\overline{MM_1}$ и $\overline{MM_2}$ касательных, проведенных из какой-либо точки M к эллипсу (M_1 и M_2 — точки касания), относятся между собой как диаметры, которым они параллельны.

1213*. Доказать, что длины хорд, стягивающих дуги, заключенные между двумя параллельными секущими к эллипсу, относятся друг к другу как диаметры эллипса, параллельные этим хордам.

1214. Около эллипса описан четырехугольник. Доказать, что сумма площадей двух треугольников, имеющих общей вершиной центр эллипса, а основаниями соответственно две противоположные стороны четырехугольника, равна сумме площадей двух других таких же треугольников.

1215. Пусть A, A' — концы одной пары сопряженных диаметров эллипса, а B, B' — концы другой пары сопряженных диаметров. Доказать, что среди прямых AB, $A'B'$, AB' и $A'B$ есть две параллельные.

1216. Доказать, что два сопряженных диаметра эллипса делят его на четыре равновеликие части.

1217. Доказать, что если $M_0=(x_0, y_0)$ — произвольная точка плоскости и P — точка пересечения луча $\overrightarrow{OM}$ с эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}}\right)^2$.

1218*. Найти аффинное преобразование, которое переводит в себя эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1219*. Найти аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию, при котором эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

переходит в тот же эллипс и точка $(a, 0)$ переходит в точку $(0, b)$.

1220*. Найти те аффинные преобразования, при которых гипербола $xy=c$ переходит в себя.

1221*. Найти все аффинные преобразования, переводящие гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в себя. Доказать, что определитель этих преобразований равен ± 1. Показать, что все эти преобразования образуют группу.

1222*. Определить аффинное преобразование, при котором гипербола $x^2-y^2=1$ переходит в ту же гиперболу, причем точка $(1, 0)$ переходит в точку $(\sqrt{2}, 1)$.

1223*. 1) Найти общий вид аффинных преобразований, при которых парабола $y^2=2px$ переходит в ту же параболу.

2) Найти все аффинные унимодулярные преобразования, при которых парабола $y^2=2px$ переходит в ту же параболу.

1224*. Доказать, что существует и притом только одно аффинное преобразование, переводящее параболу в себя, при котором две произвольные точки параболы переходят в две точки, также лежащие на этой параболе.

1225*. Определить такое аффинное преобразование параболы $y^2=2x$ в себя, которое переводит точки $(2, 2)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ соответственно в точки $(8, 4)$ и $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$.

1226*. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 2px$, отсекающих сегменты параболы постоянной площади.

1227*. Доказать, что:

1) при всяком аффинном преобразовании существует равносторонняя гипербола, образом которой является равносторонняя гипербола;

2) если аффинное преобразование переводит некоторую окружность в окружность, то это преобразование является подобием.

§ 3. Изометрические преобразования

Александров, гл. XI, § 6—8; гл. XXV, §§ 3, 4.
Моденов, гл. XIV, §§ 180—183.
Постников, гл. 7, § 1, п. 5; § 2, п. 1, пп. 3, 4.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

1. Изометрические преобразования плоскости

1228. Написать формулы поворота ориентированной плоскости на угол φ вокруг точки (x_0, y_0).

1229. Найти неподвижную точку изометрического преобразования плоскости

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0, \quad \varphi \neq 2k\pi.$$

1230*. Написать формулы изометрического преобразования плоскости, являющегося произведением симметрии относительно прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$, и переноса вдоль этой прямой на вектор, имеющий направление вектора $\boldsymbol{a}$ и длину d.

1231*. Дано изометрическое преобразование

$$x' = x + x_0,$$
$$y' = -y + y_0,$$

меняющее ориентацию плоскости. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

1232*. Дано изометрическое преобразование

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$

меняющее ориентацию плоскости. Доказать, что это преобразование является симметрией относительно прямой, и написать уравнение оси симметрии.

1233*. Дано изометрическое преобразование

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0,$$
$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + y_0.$$

Найти ось симметрии и вектор переноса, коллинеарный оси симметрии. Найти канонический вид данного преобразования.

1234*. Дано изометрическое преобразование

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6,$$

$$y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12.$$

Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии. Найти канонический вид данного преобразования.

1235. Найти изометрическое преобразование, при котором каждая точка переходит в точку, симметричную ей относительно прямой

$$x + y - 5 = 0.$$

1236. Найти изометрическое преобразование плоскости, являющееся симметрией относительно прямой

$$2x + y - 2 = 0.$$

1237*. Найти изометрическое преобразование, при котором каждая точка переходит в точку, симметричную ей относительно прямой $Ax + By + C = 0$.

1238. Найти изометрическое преобразование, сохраняющее ориентацию и переводящее точку (1, 0) в точку (0, 0), а точку (0, 0) в точку (0, 1). Найти угол поворота φ и неподвижную точку этого преобразования.

1239*. Найти изометрическое преобразование, меняющее ориентацию и переводящее точку (1, 0) в точку (0, 0), а точку (0, 0) в точку (0, 1). Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

2. *Изометрические преобразования пространства*

1240*. Пусть

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{aligned} \tag{1}$$

— изометрическое преобразование;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— ортогональная матрица этого преобразования и $\det A = +1$; $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ — вектор переноса. Доказать, что:

1) Если $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то преобразование (1) является переносом на вектор $\boldsymbol{b}$. Его канонический вид

$$x'^* = x^* + \alpha, \qquad y'^* = y^*, \qquad z'^* = z^*,$$

где $\alpha = |\boldsymbol{b}|$.

2) Если $A \neq E$, то преобразование (1) является произведением поворота вокруг оси и переноса вдоль этой оси. Угол φ поворота определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}, \qquad 0 < \varphi \leqslant \pi.$$

Координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ оси вращения определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - 1)\,a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 &= 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - 1)\,a_2 + a_{23}a_3 &= 0, \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33} - 1)\,a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и неравенства

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_1 \\ 0 & a_{21} & a_2 \\ 0 & a_{31} & a_3 \end{vmatrix} > 0, \tag{3}$$

если векторы $\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0, 0\}$ и $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ не коллинеарны и $\varphi \neq \pi$. Если векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны, то следует воспользоваться неравенством

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_1 \\ 1 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Канонический вид преобразования:

$$x'^* = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi,$$
$$y'^* = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi,$$
$$z'^* = z^* + \gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Вектор $\boldsymbol{c} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}$ переноса вдоль оси вращения определяется равенством

$$\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Координаты точек, лежащих на оси вращения, удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-1)x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 - c_1 = 0,\\ a_{21}x + (a_{22}-1)y + a_{23}z + b_2 - c_2 = 0,\\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-1)z + b_3 - c_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

1241*. Пусть

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1,\\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2,\\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

— изометрическое преобразование;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— ортогональная матрица этого преобразования и $\det A = -1$; $\boldsymbol{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ — вектор переноса. Доказать, что:

1) Если след матрицы A, $a_{11} + a_{22} + a_{33} \neq 1$, то преобразование (1) является произведением симметрии относительно плоскости и поворота вокруг оси, перпендикулярной к плоскости симметрии. Угол φ поворота определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}{2}, \qquad 0 < \varphi \leqslant \pi.$$

Координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ оси вращения определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}+1)\,a_1+a_{12}a_2+a_{13}a_3=0,\\ a_{21}a_1+(a_{22}+1)\,a_2+a_{23}a_3=0,\\ a_{31}a_1+a_{32}a_2+(a_{33}+1)\,a_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и неравенства

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_1 \\ 0 & a_{21} & a_2 \\ 0 & a_{31} & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

если векторы $\boldsymbol{e}_1=\{1, 0, 0\}$ и $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ не коллинеарны и $\varphi \neq \pi$. Если векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны, то следует воспользоваться неравенством

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_1 \\ 1 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Канонический вид преобразования:

$$\begin{aligned} x'^* &= x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi,\\ y'^* &= x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi,\\ z'^* &= -z^*. \end{aligned}$$

Плоскость симметрии и ось вращения проходят через единственную неподвижную точку данного преобразования, определяемую из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-1)\,x+a_{12}y+a_{13}z+b_1=0,\\ a_{21}x+(a_{22}-1)\,y+a_{23}z+b_2=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-1)\,z+b_3=0. \end{aligned}\right\}$$

2) Если след матрицы A, $a_{11}+a_{22}+a_{33}=1$, то преобразование (1) является произведением симметрии относительно плоскости и переноса, определяемого вектором $\boldsymbol{d}=\{d_1, d_2, d_3\}$, компланарным этой плоскости. Вектор $\boldsymbol{d}$ находится из равенства

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\,\boldsymbol{a},$$

где координаты a_1, a_2, a_3 вектора $\boldsymbol{a}$ определяются из системы (2). Канонический вид преобразования:

$$x'^* = -x^*,$$
$$y'^* = y^* + \beta, \qquad \text{где} \qquad \beta = |\boldsymbol{d}|,$$
$$z'^* = z^*.$$

Плоскость симметрии определяется любым из следующих трех уравнений:

$$(a_{11} - 1)\,x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 - d_1 = 0,$$
$$a_{21}x + (a_{22} - 1)\,y + a_{23}z + b_2 - d_2 = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)\,z + b_3 - d_3 = 0.$$

1242*. Выяснить геометрический смысл и найти канонический вид следующих изометрических преобразований пространства:

1) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{15}y + \frac{15}{25}z + 3, \quad y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4,$
$z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5;$

2) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1, \quad y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, \; z' = -z + 2;$

3) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, \quad y' = \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z - 2,$
$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z - 1;$

4) $x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 7, \quad y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4,$
$z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 6;$

5) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, \; y' = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z + 2,$
$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3;$

6) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \quad y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2, \quad z' = z + 3;$

7) $x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7, \; y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14,$
$z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7;$

8) $x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14,\quad y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2,\quad z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5;$

9) $x' = -\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z - 7,\quad y' = \frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 14,\quad z' = \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 7;$

10) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6,\quad y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12,\quad z' = z;$

11) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 14,\quad y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z - 2,\quad z' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + 5;$

12) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 4,\quad y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 2,\quad z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z + 14;$

13) $x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 2,\quad y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4\quad z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 6;$

14) $x' = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \sqrt{\frac{3}{8}}z + 2,\quad y' = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \sqrt{\frac{3}{8}}z + 1,\quad z' = -\sqrt{\frac{3}{8}}x + \sqrt{\frac{3}{8}}y + \frac{1}{2}z;$

15) $x' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 10,\quad y' = -\frac{10}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{2}{15}z - 4,\quad z' = -\frac{5}{15}x - \frac{2}{15}y + \frac{4}{15}z - 2;$

16) $x' = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \sqrt{\frac{3}{8}}z - 2,\quad y' = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \sqrt{\frac{3}{8}}z - 2,\quad z' = \sqrt{\frac{3}{8}}x - \sqrt{\frac{3}{8}}y - \frac{1}{2}z;$

17) $x' = z + 1,\quad y' = x,\quad z' = y;$

18) $x' = -z + 1,\quad y' = x,\quad z' = y.$

1243*. Выяснить геометрический смысл и найти канонический вид следующего изометрического преобразования пространства:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$
$$z' = -z + c.$$

1244*. Найти матрицу преобразования симметрии относительно прямой с направляющим вектором $\{2, 2, 1\}$, проходящей через начало координат.

1245*. Найти матрицу преобразования поворота ориентированного пространства на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси с направляющим вектором $\{2, 2, 1\}$, проходящей через начало координат.

1246*. Найти матрицу преобразования поворота ориентированного пространства на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\{1, 1, 0\}$, проходящей через начало координат.

1247. Найти матрицу преобразования симметрии пространства относительно плоскости

$$2x - 2y + z = 0.$$

1248*. Найти изометрическое преобразование, являющееся произведением поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и переноса вдоль оси вращения на вектор с координатой -9 по отношению к оси вращения, зная, что ось вращения проходит через точку $(0, 0, 9)$ и имеет направляющий вектор $\{2, 2, 1\}$.

1249*. Найти изометрическое преобразование, являющееся произведением симметрии относительно плоскости $2x - y - 5z + 15 = 0$ и переноса, определяемого вектором $\{4, 3, 1\}$, компланарным этой плоскости.

1250*. Найти изометрическое преобразование, являющееся произведением поворота на угол $\arccos\frac{7}{10}$ вокруг оси с направляющим вектором $\{1, 1, -7\}$, проходящей через точку $\left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$, и симметрии относительно плоскости, проходящей через ту же точку и перпендикулярной к оси вращения.

1251. Найти изометрическое преобразование, оставляющее неподвижными три точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

1252*. Найти изометрическое преобразование, переводящее точки $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ соответственно в точки $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$: 1) сохраняющее ориентацию пространства; 2) изменяющее ориентацию пространства. Найти канонический вид этих преобразований.

1253*. Даны два вектора:

$$\boldsymbol{a}=\{8, 4, 1\}, \quad \boldsymbol{b}=\{6, -6, 3\}.$$

Найти матрицу преобразования поворота пространства вокруг оси, перпендикулярной к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, переводящего вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\boldsymbol{b}$.

1254*. В ориентированном пространстве даны два вектора, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$, причем вектор $\boldsymbol{e}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{a}$ и равен по длине 1. Найти вектор $\boldsymbol{a}'$, получающийся из вектора $\boldsymbol{a}$ при повороте пространства на угол φ вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{e}$.

1255*. Написать формулы преобразования поворота ориентированного пространства на угол φ вокруг оси с единичным направляющим вектором $\boldsymbol{e}$, проходящей через точку O.

§ 4. Инверсии

Постников, гл. 7, § 3.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

1. *Инверсии плоскости*

1256. Пусть O — фиксированная точка плоскости и σ — фиксированное действительное число, отличное от нуля. Инверсией с полюсом O и степенью σ называется преобразование множества всех точек плоскости, за исключением точки O, при котором каждой точке M, отличной от O, ставится в соответствие точка M', лежащая на прямой OM, для которой $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\sigma$. Инверсия с полюсом O и степенью σ обозначается через (O, σ).

Написать формулы, связывающие координаты x, y точки M с координатами x', y' точки M', являющейся образом точки M при инверсии (O, σ) в прямоугольной системе координат с началом в точке O.

1257. Составить уравнение образа окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

при инверсии, полюсом которой является начало координат, а степень равна σ.

1258*. Доказать, что центр окружности C, не проходящей через полюс O инверсии (O, σ), переходит в центр ее образа C' тогда и только тогда, когда окружность C' совпадает с окружностью C.

1259*. Окружность C, заданная уравнением

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0,$$

не проходит через начало координат. Пусть C' — образ этой окружности при инверсии (O, σ).

1) Найти центр и радиус окружности C'.

2) Показать, что полюс инверсии и центры окружностей C и C' лежат на одной прямой.

1260. Составить уравнение образа прямой

$$Ax+By+C=0$$

при инверсии (O, σ), где O — начало координат.

1261*. Доказать, что всякая окружность, проходящая через две соответствующие друг другу точки при инверсии (O, σ), инвариантна относительно этой инверсии.

1262*. Окружность C проходит через полюс инверсии (O, σ). Ее образ C' при этой инверсии — прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через точку O и центр окружности C. Доказать, что на множестве всех точек окружности C, за исключением точки O, данная инверсия совпадает с перспективным отображением окружности C на прямую C' с центром перспективы O.

1263*. Доказать, что при инверсии сохраняются углы между двумя пересекающимися окружностями (в частности, между окружностью и прямой и между двумя прямыми).

1264. Окружность C задана уравнением

$$x^2+y^2+2ax+2by=0.$$

При инверсии (O, σ) с полюсом в начале координат эта окружность переходит в прямую C'.

1) Найти расстояние d от начала координат до прямой C'.

2) Найти вектор, нормальный к прямой C'.

3) Доказать, что прямая, проходящая через начало координат O и через центр окружности C, перпендикулярна к прямой C'.

1265*. Пусть C' — прямая, являющаяся образом окружности C

$$x^2+y^2+2ax+2by=0$$

при инверсии (O, σ) с полюсом в начале координат. При каком условии прямая C' касается окружности C?

1266. Пусть A' и B' — образы точек A и B при инверсии (O, σ). Выразить длину отрезка $\overline{A'B'}$ через длины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и σ.

1267*. Доказать, что если полюс O инверсии (O, σ) лежит вне окружности C, то множество точек, лежащих внутри окружности C, отображается при инверсии (O, σ) на множество точек, лежащих внутри окружности C', являющейся образом C; множество точек, лежащих вне окружности C, отображается на множество точек, лежащих вне окружности C'.

Если же полюс O инверсии лежит внутри окружности C, то множество точек, лежащих внутри окружности C, отображается на множество точек, лежащих вне окружности C', а множество точек, лежащих вне окружности C, отображается на множество точек, лежащих внутри окружности C'.

1268. Рассмотрим инверсию (O, r^2). Доказать, что каждая точка окружности с центром O и радиусом r (окружность инверсии) является неподвижной при инверсии (O, r^2). Каждая точка, лежащая внутри этой окружности, переходит в точку, лежащую вне окружности (и наоборот).

1269*. Доказать, что:

1) любая окружность, ортогональная к окружности с центром O и радиусом r, при инверсии (O, r^2) переходит в себя;

2) любая окружность, отличная от окружности инверсии и переходящая в себя при инверсии (O, r^2), ортогональна окружности инверсии.

1270*. При каком условии окружность C пересекает свой образ C' при инверсии (O, r^2)?

1271*. Пусть C — окружность, не проходящая через полюс O инверсии (O, σ), M — произвольная точка этой окружности, а N — вторая точка пересечения прямой OM с окружностью C. Доказать, что образ M' точки M при инверсии (O, σ) совпадает с образом N' точки N при гомотетии с центром O и коэффициентом $k=\frac{\sigma}{\varkappa}$, где $\varkappa$ — степень точки O относительно окружности C.

1272*. Прямая $Ax+By+C=0$, не проходящая через начало координат O $(C\neq 0)$, делит плоскость на две области. Как преобразуются эти области при инверсии с полюсом O и степенью инверсии $\sigma>0$.

1273*. Найти образ множества точек, заданных неравенствами $x>1$, $y>1$, при инверсии, полюсом которой является начало координат, а степень равна 1.

1274*. Множество точек плоскости задано неравенствами $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ (полоса). Найти образ этого множества при инверсии $(O, 1)$, где O — начало координат.

1275*. Доказать, что при инверсии окружность, отличная от окружности инверсии, переходит в себя тогда и только тогда, когда она проходит через две различные точки M и M', соответствующие друг другу при этой инверсии.

1276. Найти образ эллипса, гиперболы, параболы, заданных полярным уравнением

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi},$$

при инверсии (F, σ), где F — фокус данной линии.

1277. Найти образ при инверсии $(O, 1)$:

1) циссоиды Диоклеса, определяемой уравнением $\rho=\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$;

2) области $\rho>\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

1278*. 1) Доказать, что если окружность инверсии принадлежит гиперболическому пучку окружностей, то инверсия относительно этой окружности переводит каждую из остальных окружностей пучка в другую окружность того же пучка, причем предельные точки этого пучка переходят друг в друга.

2) Доказать, что если окружность инверсии принадлежит эллиптическому пучку окружностей, то базисные точки этого пучка неподвижны, а любая другая окружность этого пучка переходит в окружность того же пучка.

1279*. Пусть C_1 и C_2 — две неконцентрические окружности без общих точек, M — произвольная точка их радикальной оси, MP — касательная к любой из этих окружностей (P — точка касания), A и B — точки пересечения линии центров данных окружностей с окружностью с центром в точке M и радиусом $|\overline{MP}|$. Доказать, что:

1) при инверсии $(A, |\overline{AB}|^2)$ окружности C_1 и C_2 перейдут в концентрические окружности C_1' и C_2';

2) если окружности C_1 и C_2 лежат одна вне другой, то множество точек, внешних по отношению к обеим окружностям, перейдет в множество внутренних точек кольца, ограниченного окружностями C_1' и C_2'.

2. *Инверсии пространства*

1280. Пусть O — фиксированная точка пространства и σ — фиксированное действительное число, отличное от нуля. Инверсией с полюсом O и степенью σ называется преобразование множества всех точек пространства, за исключением точки O, при котором каждой точке M, отличной от O, ставится в сооответствие точка M', лежащая на прямой OM, для которой $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\sigma$. Инверсия пространства с полюсом O и степенью σ обозначается через (O, σ). Написать формулы, связывающие координаты x, y, z точки M с координатами x', y', z' точки M', являющейся образом точки M при инверсии (O, σ) в прямоугольной системе координат с началом координат в точке O.

1281. Составить уравнение образа S' сферы S

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

при инверсии, полюсом которой является начало координат, а степень равна σ.

1282. Составить уравнение образа плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

при инверсии (O, σ) (O — начало координат).

1283*. Доказать, что если сфера S не проходит через точку O, а S' — ее образ при инверсии с полюсом O, то точка O лежит на одной прямой с центрами сфер S и S'.

1284*. Доказать, что при инверсии пространства всякая окружность, не проходящая через полюс инверсии, переходит в окружность, а всякая окружность, проходящая через полюс инверсии, — в прямую.

1285*. Найти центр и радиус образа окружности

$$x^2+y^2+z^2-z=0,$$
$$x+y+z-1=0$$

при инверсии $(O,\ 1)$, где O — начало координат.

1286*. Пусть S — сфера с диаметром d; O и P — две ее диаметрально противоположные точки; π — касательная плоскость к сфере в точке P.

Доказать, что:

1) при инверсии $(O,\ d^2)$ сфера S перейдет в плоскость π;

2) проекция M' произвольной точки M, лежащей на сфере S, из точки O на плоскость π совпадает с образом точки M при инверсии $(O,\ d^2)$ (перспективное отображение сферы S на плоскость π с центром перспективы O называется *стереографической проекцией*);

3) окружность, лежащая на сфере S и не проходящая через точку O, проектируется из точки O на плоскость π в окружность.

1287*. Пусть O и P — диаметрально противоположные точки сферы S, π — касательная плоскость к сфере S в точке P, λ — произвольная окружность, лежащая на сфере S и не проходящая через точку O, λ' — проекция окружности λ из точки O на плоскость π. Доказать, что:

1) если окружность λ не является окружностью большого круга и K — конус, касающийся сферы S по окружности λ, то центром окружности λ' является проекция вершины конуса K из точки O на плоскость π;

2) если λ — окружность большого круга, то центр окружности λ' есть пересечение прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости окружности λ, с плоскостью π.

1288*. Доказать, что угол между касательными к сфере в произвольной ее точке M равен углу между их проекциями из точки O, отличной от M, на плоскость π, касающуюся сферы в точке, диаметрально противоположной точке O.

1289*. Пусть S — сфера, O и P — ее диаметрально противоположные точки, π — плоскость, касательная к сфере S в точке P. Рассмотрим два семейства окружностей, лежащих на сфере S. Первое семейство C_λ получается при пересечении сферы S параллельными плоскостями, перпендикулярными к плоскости π; пусть A и B — точки касания двух плоскостей этого семейства со сферой S. Второе семейство окружностей C_μ получается при пересечении сферы S плоскостями, проходящими через диаметр AB. Обозначим через C'_λ и C'_μ семейства окружностей, являющихся проекциями окружностей семейств C_λ и C_μ из точки O на плоскость π.

Доказать, что:

1) окружности семейства C'_λ образуют гиперболический пучок, предельными точками которого являются проекции A' и B' точек A и B на плоскость π из точки O;

2) окружности семейства C'_μ образуют эллиптический пучок с базисными точками A' и B'.

3) каждая окружность семейства C'_λ ортогональна каждой окружности семейства C'_μ.

ГЛАВА IX

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Проективная прямая

Александров, гл. XXI, §§ 7, 8, пп. 1—4.

1. Проективные координаты на проективной прямой

1290*. На прямой введена аффинная система координат. Принимая несобственную точку этой прямой и начало координат за базисные точки A_1 и A_2 проективной системы координат на проективно-аффинной прямой, а единичную точку E аффинной системы координат — за единичную точку проективной системы координат, найти проективные координаты $x_1:x_2$ собственной точки, имеющей аффинную координату x. Проективные координаты в такой системе координат называются однородными координатами.

1291*. На прямой введена аффинная система координат. Принимая несобственную точку этой прямой и начало аффинной системы координат за базисные точки A_2 и A_1 проективной системы координат на проективно-аффинной прямой, а единичную точку E аффинной системы координат — за единичную точку проективной системы координат, найти проективные координаты $x_1:x_2$ собственной точки, имеющей аффинную координату x.

1292*. На проективно-аффинной прямой в проективной системе координат A_1A_2E' точка E является несобственной. Найти проективные координаты:

1) середины отрезка $\overline{A_1A_2}$;

2) точки, делящей отрезок $\overrightarrow{A_1A_2}$ в отношении λ.

1293. На проективной прямой введены две системы координат A_1A_2E и $A_1'A_2'E'$. Зная координаты базисных точек $A_1' = (a_{11}:a_{21})$, $A_2' = (a_{12}:a_{22})$ и единичной точки $E' = (b_1:b_2)$ проективной системы $A_1'A_2'E'$ относительно системы A_1A_2E, найти:

1) проективные координаты $x_1':x_2'$ точки M в системе $A_1'A_2'E'$, зная ее координаты $x_1:x_2$ в системе A_1A_2E;

2) проективные координаты $x_1 : x_2$ точки M в системе A_1A_2E, зная ее координаты $x_1' : x_2'$ в системе $A_1'A_2'E'$.

1294*. На проективно-аффинной прямой введена проективная система координат с собственными базисными точками A_1, A_2 и собственной единичной точкой E. В аффинной системе координат на этой прямой точки A_1, A_2, E имеют соответственно координаты a_1, a_2, b.

1) Найти проективные координаты $x_1 : x_2$ собственной точки M, имеющей аффинную координату x.

2) Найти аффинную координату x собственной точки M, имеющей проективные координаты $x_1 : x_2$.

1295. На прямой заданы четыре точки своими аффинными координатами:

$$A = (x_1), \quad B = (x_2), \quad C = (x_3), \quad D = (x_4).$$

Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

1296*. Доказать, что если две прямые, не проходящие через точку O, пересекают четыре прямые пучка с центром O соответственно в точках A, B, C, D и A', B', C', D', то ангармоническое отношение $(ABCD)$ равно ангармоническому отношению $(A'B'C'D')$.

1297*. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек,

$$A = (a_1 : a_2), \quad B = (b_1 : b_2), \quad C = (c_1 : c_2), \quad D = (d_1 : d_2),$$

заданных на проективной прямой своими проективными координатами.

1298. Найти ангармоническое отношение (A_1A_2EM), где

$$A_1 = (1 : 0), \quad A_2 = (0 : 1), \quad E = (1 : 1), \quad M = (x_1 : x_2).$$

1299. На плоскости введена аффинная система координат Oxy с единичной точкой E. Пусть $M = (x_1, x_2)$ — произвольная точка плоскости, не лежащая на оси Oy. Найти ангармоническое отношение (Ox, Oy, OE, OM).

1300. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум сторонам AB и AC треугольника ABC и медиане, выходящей из вершины A.

1301. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум сторонам угла и его биссектрисе.

1302. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум катетам и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу (неравнобедренного) прямоугольного треугольника.

1303*. Доказать, что любая пара сопряженных диаметров гиперболы гармонически разделяется ее асимптотами.

1304*. На проективной прямой заданы четыре точки A, B, C, D. Доказать, что на этой прямой имеется две точки P и Q, гармонически разделяющие как пару A, B, так и пару C, D, тогда и только тогда, когда пара C, D не разделяет пару A, B.

2. Проективные преобразования проективной прямой

1305*. Доказать, что если при некотором проективном преобразовании проективной прямой имеются три инвариантные точки, то это преобразование является тождественным преобразованием.

1306*. Доказать, что ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек, лежащих на проективной прямой, не меняется при проективном преобразовании.

1307*. Найти проективное преобразование проективной прямой, при котором точки $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ переходят соответственно в точки $(a_1:a_2)$, $(b_1:b_2)$, $(c_1:c_2)$.

1308. Найти проективное преобразование проективной прямой, которое точку $(1:0)$ переводит в точку $(0:1)$, точку $(0:1)$ — в точку $(1:0)$, если точка $(1:1)$ инвариантна при этом преобразовании.

1309*. Найти инвариантные точки следующих проективных преобразований проективной прямой:

1) $\lambda x_1' = x_1 + 2x_2,$ $\lambda x_2' = 4x_1 + 3x_2;$ 2) $\lambda x_1' = 2x_1 + x_2,$ $\lambda x_2' = 2x_2;$ 3) $\lambda x_1' = x_1 - x_2,$ $\lambda x_2' = x_1 + x_2.$

1310*. При каком необходимом и достаточном условии проективное преобразование проективной прямой

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2:$$

1) не имеет инвариантных точек (эллиптическое преобразование);

2) имеет две инвариантные точки (гиперболическое преобразование);

3) имеет только одну инвариантную точку (параболическое преобразование);

4) является тождественным преобразованием?

1311*. 1) Доказать, что эллиптическое и параболическое проективные преобразования проективной прямой не меняют ее ориентации.

2) При каком необходимом и достаточном условии гиперболическое проективное преобразование проективной прямой меняет ее ориентацию?

1312*. Установить тип проективного преобразования проективной прямой в каждом из следующих случаев:

$$1)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= 2x_1 - 3x_2,\\ \lambda x_2' &= 3x_1 + 8x_2;\end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= -7x_1,\\ \lambda x_2' &= -7x_2;\end{aligned}$$

$$3)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= 5x_1 + 4x_2,\\ \lambda x_2' &= 4x_1 + 5x_2;\end{aligned} \qquad 4)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= x_1 + x_2,\\ \lambda x_2' &= x_1 - x_2;\end{aligned}$$

$$5)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= x_1 + 2x_2,\\ \lambda x_2' &= -7x_1 + 5x_2.\end{aligned}$$

1313. Найти инвариантные точки следующих проективных преобразований:

$$1)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= 2x_1 - 3x_2,\\ \lambda x_2' &= 3x_1 + 8x_2;\end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= 5x_1 + 4x_2,\\ \lambda x_2' &= 4x_1 + 5x_2;\end{aligned}$$

$$3)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= x_1 + x_2,\\ \lambda x_2' &= x_1 - x_2;\end{aligned} \qquad 4)\ \begin{aligned}\lambda x_1' &= x_1 + 2x_2,\\ \lambda x_2' &= -7x_1 + 5x_2.\end{aligned}$$

1314*. 1) Какой вид примут формулы

$$\begin{aligned}\lambda x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \lambda x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned}$$

определяющие гиперболическое преобразование проективной прямой, если его инвариантные точки принять за базисные точки $A_1 = (1:0)$, $A_2 = (0:1)$ проективной системы координат?

2) При каком необходимом и достаточном условии рассматриваемое гиперболическое преобразование сохраняет ориентацию проективной прямой?

3) Какой геометрический смысл имеет гиперболическое преобразование, если проективная прямая интерпретируется как собственный пучок прямых на аффинной плоскости?

1315*. 1) Какой вид примут формулы

$$\begin{aligned}\lambda x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \lambda x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned}$$

определяющие параболическое проективное преобразование проективной прямой, если его инвариантную точку принять за базисную точку $A_1=(1:0)$ проективной системы координат?

2) Как интерпретируется это преобразование в собственном пучке прямых аффинной плоскости?

1316*. Какой вид примут формулы

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$\lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

определяющие параболическое проективное преобразование проективной прямой, если его инвариантную точку принять за базисную точку $A_1=(1:0)$ проективной системы координат, а за единичную точку E принять образ базисной точки $A_2=(0:1)$ при этом преобразовании?

1317*. При каком необходимом и достаточном условии проективное преобразование проективной прямой, переводящее точки $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ соответственно в точки $(a_1:a_2)$, $(b_1:b_2)$, $(c_1:c_2)$, сохраняет ориентацию этой прямой.

1318*. На проективной прямой заданы три попарно различные точки A, B, C. Доказать, что проективное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в точки B, C, A, является эллиптическим.

1319*. Доказать, что гиперболическое преобразование проективной прямой с инвариантными точками A_1 и A_2 сохраняет ориентацию проективной прямой тогда и только тогда, когда ангармоническое отношение $(A_1A_2EE')>0$, где E — произвольная точка проективной прямой, отличная от точек A_1 и A_2, а E' — ее образ при этом гиперболическом преобразовании.

1320*. Пусть A_1 — инвариантная точка проективного преобразования проективной прямой, A_2 — произвольная точка этой прямой, A_2' — образ точки A_2, а A_2'' — образ точки A_2' при рассматриваемом проективном преобразовании. Доказать, что преобразование будет параболическим тогда и только тогда, когда точки A_1 и A_2' гармонически разделяют пару точек A_2, A_2''.

1321*. Проективное преобразование π называется циклическим, если существует натуральное число n, для которого π^n есть тождественное преобразование. Наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее этому условию, называется периодом преобразования. Пусть A, B, C, D — гармоническая четверка точек. Доказать, что проективное преобразование, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки B, C, D, является циклическим, и найти период этого преобразования.

1322*. Сколько существует параболических проективных преобразований проективной прямой, при которых точки A и B переходят в точки A' и B'?

1323*. Доказать, что существует и притом только одно параболическое проективное преобразование проективной прямой с заданной инвариантной точкой A, при котором данная точка M переходит в данную точку M'.

3. Инволюции на проективной прямой

1324*. Какой вид имеют формулы проективного преобразования A:

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$\lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

проективной прямой, если это преобразование является инволюционным, т. е. если $A^2 = E$, где E — тождественное преобразование.

1325*. При каком необходимом и достаточном условии инволюционное преобразование проективной прямой

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

1) имеет две инвариантные точки (гиперболическая инволюция);

2) не имеет инвариантных точек (эллиптическая инволюция);

3) имеет одну инвариантную точку?

1326*. Доказать, что эллиптическая инволюция сохраняет ориентацию проективной прямой, а гиперболическая инволюция меняет ориентацию проективной прямой на противоположную.

1327*. Доказать, что всякое периодическое гиперболическое преобразование проективной прямой является инволюцией (иначе: имеет период 2).

1328*. 1) Как запишется гиперболическая инволюция проективной прямой, если инвариантные точки этой инволюции принять за базисные точки проективной системы координат?

2) Каков будет образ единичной точки $E = (1:1)$ при этой инволюции?

1329*. Как запишется в аффинных координатах гиперболическая инволюция множества собственных точек проективно-аффинной прямой, для которой инвариантными точками являются начало координат и несобственная точка?

1330*. Каков геометрический смысл гиперболической инволюции в случае, если проективная прямая интерпретируется как пучок прямых аффинной плоскости?

1331*. 1) Как запишется в аффинных координатах инволюционное преобразование множества всех собственных точек проективно-аффинной прямой, переводящее начало координат O аффинной системы координат в несобственную точку ∞ этой аффинной прямой?

2) При каком необходимом и достаточном условии эта инволюция будет эллиптической?

3) При каком необходимом и достаточном условии эта инволюция будет гиперболической? Найти в этом случае ее инвариантные точки.

1332*. Доказать, что:

1) каковы бы ни были пары точек A_1, A_2 и A'_1, A'_2 проективной прямой, существует инволюция, переводящая точки A_1, A_2 соответственно в точки A'_1, A'_2;

2) если, кроме того, $A_2 \neq A'_1$ или $A_1 \neq A'_2$, то такая инволюция единственная;

3) если пары точек A_1, A_2 и A'_1, A'_2 разделяют друг друга, то инволюция гиперболическая; если пары точек A_1, A_2 и A'_1, A'_2 не разделяют друг друга, то инволюция эллиптическая.

4) Найти формулы инволюционного преобразования, переводящего точки $A_1 = (1:0)$ и $A_2 = (0:1)$ в точки $A'_1 = (a_1 : a_2)$ и $A'_2 = (b_1 : b_2)$ в случае, если $a_1 \neq 0$ ($A'_1 \neq A_2$) или $b_2 \neq 0$ ($A'_2 \neq A_1$).

1333*. Найти все инволюционные преобразования проективной прямой, которые точку $(1:0)$ переводят в точку $(0:1)$. Какие из этих инволюций будут эллиптическими и какие гиперболическими?

1334*. На проективной прямой l задана гиперболическая инволюция двумя парами соответствующих точек A, A' и B, B'. Доказать, что $(AA'BB') > 0$.

1335*. На проективной прямой l задана эллиптическая инволюция двумя парами соответствующих точек A, A' и B, B'. Доказать, что $(AA'BB') < 0$.

1336*. Доказать, что проективное преобразование проективной прямой, при котором точки A, B, C переходят в точки A', B', C', будет инволюционным тогда и только тогда, когда

$$(ABCC') = (B'A'CC').$$

1337*. Доказать, что если A и B — инвариантные точки гиперболической инволюции, то соответствующие друг другу точки M и M' гармонически разделяют пару точек A, B. Обратно: если на проективной прямой зафиксировать две произвольные точки A, B и считать соответствующими друг другу точки M и M', гармонически разделяющие пару A, B, то такое соответствие является гиперболической инволюцией с инвариантными точками A и B.

1338*. Пусть прямая l, не проходящая через вершину полного четырехугольника $PQRS$, пересекает его противоположные стороны PQ и RS в точках A и A', противоположные стороны PR и QS в точках B и B' и противоположные стороны PS и RQ в точках C и C'. Доказать, что проективное преобразование прямой l, при котором точки A, B, C переходят в точки A', B', C', являются инволюцией.

1339*. Пусть прямая l является собственной прямой проективно-евклидовой плоскости; A и B — собственные точки, лежащие на прямой l. Доказать, что гиперболический пучок окружностей с предельными точками A и B устанавливает на прямой l гиперболическую инволюцию, соответствующими точками которой являются точки M и M' пересечения окружности рассматриваемого пучка с прямой l. Доказать, что A и B — инвариантные точки при этой инволюции.

1340*. Пусть прямая l является собственной прямой проективно-евклидовой плоскости; A и B — собственные точки, симметричные относительно прямой l. Доказать, что эллиптический пучок окружностей с базисными точками A и B устанавливает на прямой l эллиптическую инволюцию, соответствующими точками которой являются точки пересечения окружности, проходящей через точки A и B, с прямой l.

1341*. Пусть прямая l является собственной прямой проективно-евклидовой плоскости. Доказать, что если A, A' и B, B' — соответствующие друг другу точки при эллиптической инволюции на прямой l, то окружности с диаметрами AA' и BB' пересекаются в точках P и P'; прямая PP' пересекает прямую l в точке O, лежащей между соответствующими друг другу точками M и M', и $|\overline{OM}| \cdot |\overline{OM'}| = \text{const}$.

1342*. Собственная прямая l лежит на проективно-евклидовой плоскости. Пусть Γ — гиперболическая инволюция на прямой l. Доказать, что если A, A' и B, B' — пары соответствующих друг другу точек при инволюции Γ, а O — точка пересечения с прямой l радикальной оси λ окружностей с диаметрами AA' и BB', то точки M и M', соответствующие друг другу при инволюции, лежат по одну сторону от прямой λ и $|\overline{OM}|\cdot|\overline{OM'}|=\text{const}$. Доказать, что инвариантные точки при инволюции Γ являются точками пересечения прямой l с окружностью, центром которой является точка O, а радиус равен $\sqrt{|\overline{OM}|\cdot|\overline{OM'}|}$.

1343*. Доказать, что если интерпретировать проективную прямую как собственный пучок прямых аффинной плоскости с центром O, то эллиптическая инволюция будет инволюцией сопряженных диаметров некоторого эллипса с центром O, а гиперболическая инволюция будет инволюцией сопряженных диаметров некоторой гиперболы с центром O. Доказать, что асимптоты гиперболы будут инвариантными «точками» при рассматриваемой гиперболической инволюции.

1344*. Проективная прямая интерпретируется как собственный пучок прямых аффинной плоскости с центром в начале аффинной системы координат. Дано инволюционное преобразование

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

Составить уравнение семейства линий второго порядка, для которых данное преобразование является инволюцией сопряженных диаметров.

1345*. Доказать, что всякое проективное преобразование проективной прямой можно представить как произведение двух инволюций.

§ 2. Проективная плоскость

Александров, гл. XXI, §§ 1—5; § 8, пп. 5, 6.
Моденов, гл. XV, §§ 191—193, 202.
Постников, гл. 9, § 1, пп. 1, 2, 4—6; Дополнение.

1. Проективные координаты на проективной плоскости

1346*. На проективно-аффинной плоскости введена аффинная система координат Oxy и проективная система координат $A_1A_2A_3E$, в которой точками A_1, A_2, A_3 являются соответственно несобственная точка оси Ox, несобственная точка оси Oy и начало O аффинной системы координат Oxy. Единичная точка E проективной системы координат совпадает с единичной точкой E аффинной системы координат Oxy. Пусть $x_1 : x_2 : x_3$ — проективные (однородные) координаты, а x, y — аффинные координаты собственной точки M в указанных системах. Найти выражения x и y через x_1, x_2, x_3.

1347. Сторонами A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника проективной системы координат на проективно-аффинной плоскости являются прямые, заданные относительно аффинной системы координат уравнениями

$$x - 4 = 0, \quad y - 3 = 0, \quad 3x + 4y - 12 = 0.$$

Единичной точкой E проективной системы координат $A_1A_2A_2E$ является точка $E = (3, 2)$. Найти:

1) проективные координаты точки M, аффинные координаты которой 1, 1;

2) аффинные координаты точки N, проективные координаты которой $4:3:-6$;

3) проективные координаты несобственной точки R оси Ox;

4) однородные координаты точки P, проективные координаты которой $5:5:-7$.

1348. Какая особенность в расположении двух прямых соответствует тому факту, что два коэффициента уравнения одной прямой пропорциональны соответствующим коэффициентам уравнения другой прямой?

1349*. При каком условии две прямые

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$
$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

1) пересекаются; 2) совпадают; 3) предполагая, что данные прямые пересекаются, найти координаты точки их пересечения.

1350. Найти координаты точки пересечения прямой $7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ с прямой, проходящей через точки $A = (3:1:5)$ и $B = (-2:0:7)$.

1351. Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_1 : b_2 : b_3)$.

1352. Даны две точки $A = (3:0:-1)$ и $B = (-1:3:0)$ своими однородными координатами.

1) Написать уравнение прямой, проходящей через эти две точки.

2) Написать параметрические уравнения этой прямой.

3) Найти значения параметров, соответствующих несобственной точке этой прямой, и координаты этой несобственной точки.

1353. На проективной плоскости введены две системы координат $A_1A_2A_3E$ и $A_1'A_2'A_3'E'$. Зная координаты базисных точек

$$A_1'=(a_{11}:a_{21}:a_{31}),\quad A_2'=(a_{12}:a_{22}:a_{32}),\quad A_3'=(a_{13}:a_{23}:a_{33})$$

и единичной точки $E'=(b_1:b_2:b_3)$ проективной системы $A_1'A_2'A_3'E'$ относительно системы $A_1A_2A_3E$, найти:

1) проективные координаты $x_1':x_2':x_3'$ точки в системе $A_1'A_2'A_3'E'$, зная ее координаты $x_1:x_2:x_3$ в системе $A_1A_2A_3E$;

2) проективные координаты $x_1:x_2:x_3$ точки в системе $A_1A_2A_3E$, зная ее координаты $x_1':x_2':x_3'$ в системе $A_1'A_2'A_3'E'$.

1354. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ на проективной плоскости даны координаты базисных точек

$$A_1'=(4:1:1),\quad A_2'=(4:4:1),\quad A_3'=(0:4:1)$$

и координаты единичной точки $E'=(2:1:1)$ новой проективной системы координат. Найти выражения координат произвольной точки $(x_1:x_2:x_3)$ в первой системе через координаты $x_1':x_2':x_3'$ той же точки во второй системе.

1355. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ заданы уравнения сторон $A_2'A_3'$, $A_3'A_1'$, $A_1'A_2'$ базисного треугольника $A_1'A_2'A_3'$ и координаты единичной точки E':

$$\begin{aligned}
a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3&=0 \qquad (A_2'A_3'),\\
a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3&=0 \qquad (A_3'A_1'),\\
a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3&=0 \qquad (A_1'A_2'),\\
E'&=(e_1:e_2:e_3).
\end{aligned}$$

Выразить координаты $x_1':x_2':x_3'$ произвольной точки проективной плоскости в системе $A_1'A_2'A_3'E'$ через ее координаты $x_1:x_2:x_3$ в системе $A_1A_2A_3E$.

1356*. На проективно-аффинной плоскости введена проективная система координат: за стороны A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ приняты собственные прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0,$$

а за единичную точку принята собственная точка $E=(x_0, y_0)$.

1) Каковы будут проективные координаты $y_1:y_2:y_3$ собственной точки $M=(x, y)$?

2) Найти проективные координаты $y_1:y_2:y_3$ несобственной точки, однородные координаты которой $x_1:x_2:0$.

3) Написать уравнение несобственной прямой в проективных координатах.

1357. На проективно-аффинной плоскости сторонами A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 базисного треугольника проективной системы координат служат соответственно прямая $y=2$, ось Oy и ось Ox, а единичной точкой — точка $E=(1, 1)$. Найти в этой системе центр пучка прямых, параллельных оси Oy.

1358. Вершины базисного треугольника и единичная точка проективной системы координат на проективно-аффинной плоскости имеют следующие аффинные координаты:

$$A_1=(1, 1), \quad A_2=(-1, 1), \quad A_3=(0, 0), \; E=\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Найти в этой системе координат уравнения осей координат и уравнение несобственной прямой.

1359. На проективно-аффинной плоскости относительно аффинной системы координат даны четыре точки: $A_1=(1, 2)$, $A_2=(-1, 2)$, $A_3=(2, 3)$, $E=(-3, 4)$. Найти проективные координаты точки $(-2, 0)$ относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$.

1360*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы:

1) три точки $(x_1:x_2:x_3)$, $(y_1:y_2:y_3)$, $(z_1:z_2:z_3)$ лежали на одной прямой; 2) три прямые $[u_1:u_2:u_3]$, $[v_1:v_2:v_3]$, $[w_1:w_2:w_3]$ проходили через одну точку.

1361. 1) Составить уравнение пучка прямых, центром которого является вершина $A_1=(1:0:0)$ базисного треугольника $A_1A_2A_3$.

2) Найти точку пересечения произвольной прямой этого пучка с базисной прямой A_2A_3.

1362*. На сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ взяты точки $M_1=(0:x_2:x_3)$, $M_2=(x_1:0:x_3)$, $M_3=(x_1:x_2:0)$. Доказать, что прямые A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 пересекаются в точке $M=(x_1:x_2:x_3)$.

1363. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ дана точка $M=(x_1:x_2:x_3)$.

Найти точки M_1, M_2, M_3 пересечения прямых A_1M, A_2M, A_3M со сторонами базисного треугольника $A_1A_2A_3$.

1364. Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через одну из базисных точек $A_1=(1:0:0)$, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$?

1365. Найти точки пересечения прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ со сторонами A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 базисного треугольника $A_1A_2A_3$.

1366*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ дана точка $M=(x_1:x_2:x_3)$. Пусть E_3 и M_3 — точки пересечения прямых A_3E и A_3M с прямой A_1A_2. Найти проективные координаты точки M_3 на прямой A_1A_2 в системе координат $A_1A_2E_3$.

1367. Пусть E_1, E_2, E_3 — соответственно точки пересечения прямых A_1E, A_2E, A_3E со сторонами A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ проективной системы координат $A_1A_2A_3E$. Найти координаты прямых: 1) A_1E, A_2E, A_3E; 2) E_1E_2, E_2E_3, E_3E_1.

1368*. Проективная система координат на проективной плоскости задана базисными прямыми $a_1=[1:0:0]$, $a_2=[0:1:0]$, $a_3=[0:0:1]$ и единичной прямой $e=[1:1:1]$.

1) Найти координаты точек F_1, F_2, F_3 пересечения единичной прямой e с базисными прямыми a_1, a_2, a_3.

2) Найти координаты прямых A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3, где A_1, A_2, A_3 — вершины базисного треугольника.

1369*. Доказать, что если на проективно-евклидовой плоскости введена проективная система координат $A_1A_2A_3E$, где все точки A_1, A_2, A_3, E собственные, то:

1) проективные координаты $x_1:x_2:x_3$ собственной точки M пропорциональны отношениям расстояний d_1, d_2, d_3 от точки M до сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника к расстояниям e_1, e_2, e_3 от единичной точки E до тех же сторон:

$$\lambda x_1=\frac{d_1}{e_1},\qquad \lambda x_2=\frac{d_2}{e_2},\qquad \lambda x_3=\frac{d_3}{e_3}$$

(трилинейные координаты точки);

2) проективные координаты $u_1:u_2:u_3$ собственной прямой m пропорциональны отношениям расстояний δ_1, δ_2, δ_3 от вершин A_1, A_2, A_3 базисного треугольника до прямой m к расстояниям ε_1, ε_2, ε_3 от тех же вершин до единичной прямой $e=[1:1:1]$:

$$\lambda u_1=\frac{\delta_1}{\varepsilon_1},\quad \lambda u_2=\frac{\delta_2}{\varepsilon_2},\quad \lambda u_3=\frac{\delta_3}{\varepsilon_3}$$

(трилинейные координаты прямой).

1370*. На проективно-евклидовой плоскости треугольник ABC с вершинами в собственных точках принят за базисный треугольник проективной системы координат. За единичную точку принимается центр E окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти трилинейные координаты: 1) точки пересечения медиан треугольника ABC; 2) центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC; 3) точки пересечения высот треугольника ABC.

1371*. Написать уравнение несобственной прямой проективно-евклидовой плоскости, принимая за вершины базисного треугольника ABC собственные точки, а за единичную точку:

1) точку пересечения медиан треугольника ABC;
2) центр окружности, вписанной в треугольник ABC;
3) центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC;
4) точку пересечения высот треугольника ABC.

1372*. На проективной плоскости заданы два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, расположенные так, что прямые A_2B_3, A_1B_1, A_3B_2 проходят через одну точку и прямые A_1B_3, A_2B_2, A_3B_1 также проходят через одну точку. Доказать, что тогда прямые A_1B_2, A_3B_3, A_2B_1 проходят через одну точку.

1373*. На проективной плоскости даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Доказать, что:

1) если прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 проходят через одну точку, то точки пересечения пар прямых A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, A_3A_1 и B_3B_1 лежат на одной прямой;

2) если точки пересечения пар прямых A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, A_3A_1 и B_3B_1 лежат на одной прямой, то прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 проходят через одну точку (теорема Дезарга).

1374*. Два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, лежащие на проективной плоскости, называются гомологичными, если прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 проходят через одну точку, называемую центром гомологии. В этом случае точки пересечения пар прямых A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, A_3A_1 и B_3B_1 лежат на одной прямой (см. предыдущую задачу), называемой осью гомологии.

Доказать, что если три треугольника попарно гомологичны и имеют один и тот же центр гомологии, то оси гомологии трех пар этих треугольников проходят через одну точку.

1375*. 1) На проективной плоскости даны две различные прямые a и b. На прямой a взяты точки 1, 3, 5; на прямой b взяты точки 2, 4, 6. Доказать, что точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 лежат на одной прямой.

2) На проективной плоскости даны две точки A и B. Через точку A проведены три прямые 1, 3, 5; через точку B проведены три прямые 2, 4, 6. Доказать, что прямые, проходящие через точки 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61, проходят через одну точку (теорема Паппа).

2. *Ангармоническое отношение. Гармонизм*

1376*. Найти ангармоническое отношение:

1) $(ABCD)$ четырех точек проективной плоскости, лежащих на одной прямой:

$$A=(x_1:x_2:x_3),$$
$$B=(y_1:y_2:y_3),$$
$$C=((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3)),$$
$$D=((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):(\lambda x_3+\mu y_3));$$

2) $(abcd)$ четырех прямых проективной плоскости, проходящих через одну точку:

$$a=[u_1:u_2:u_3],$$
$$b=[v_1:v_2:v_3],$$
$$c=[(\alpha u_1+\beta v_1):(\alpha u_2+\beta v_2):(\alpha u_3+\beta v_3)],$$
$$d=[(\lambda u_1+\mu v_1):(\lambda u_2+\mu v_2):(\lambda u_3+\mu v_3)].$$

1377. На проективной плоскости заданы три точки, лежащие на одной прямой,

$$A=(a_1:a_2:a_3),$$
$$B=(b_1:b_2:b_3),$$
$$C=((\alpha a_1+\beta b_1):(\alpha a_2+\beta b_2):(\alpha a_3+\beta b_3)).$$

Найти координаты точки D, лежащей на прямой AB, зная, что ангармоническое отношение $(ABCD)$ равно λ.

1378. На проективной плоскости заданы четыре точки

$$A=(1:1:2),\quad B=(3:-1:2),\quad C=(11:-1:10),\quad D=(3:4:10).$$

Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

1379. На проективной плоскости заданы четыре прямые

$$a=[0:1:-1],\quad b=[1:2:-1],\quad c=[1:1:0],\quad d=[4:9:-5].$$

Доказать, что они проходят через одну точку, и найти ангармоническое отношение $(abcd)$.

1380. На проективной плоскости заданы три точки $A = (1:2:3)$, $B=(-3:2:4)$, $C=(-2:4:7)$. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти точку D, гармонически сопряженную с точкой C относительно пары точек A, B.

1381*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ задана точка $M=(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$, не лежащая ни на одной из прямых A_3A_1 и A_3A_2. Составить уравнение прямой A_3M и уравнение прямой l, гармонически сопряженной с этой прямой относительно пары прямых A_3A_1, A_3A_2.

1382*. На плоскости введена проективная система координат $A_1A_2A_3E$. Пусть $M=(x_1:x_2:x_3)$ — точка плоскости, не лежащая ни на одной из сторон базисного треугольника. Обозначим через E_3 и M_3 точки пересечения прямых A_3E и A_3M с прямой A_1A_2. Найти ангармоническое отношение $(A_1A_2E_3M_3)$.

1383*. На проективной плоскости введена проективная система координат $A_1A_2A_3E$. Пусть $M=(x_1:x_2:x_3)$ — точка, не лежащая ни на одной из сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$. Обозначим через M_1, M_2, M_3 точки пересечения прямых A_1M, A_2M, A_3M со сторонами A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника; пусть N_1 — точка, гармонически сопряженная с точкой M_1 относительно точек A_2, A_3; N_2 — точка, гармонически сопряженная с точкой M_2 относительно точек A_3, A_1; N_3 — точка, гармонически сопряженная с точкой M_3 относительно точек A_1, A_2. Доказать, что точки N_1, N_2, N_3 лежат на одной прямой, и найти координаты этой прямой.

1384*. Полным четырехугольником называется совокупность четырех точек P, Q, R, S, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сторонами полного четырехугольника $PQRS$ называются шесть прямых QR, PS, RP, QS, PQ и RS. Стороны, не проходящие через одну и ту же вершину, называются противоположными: QR и PS, RP и QS, PQ и RS. Точки A, B, C пересечения пар противоположных сторон называются диагональными точками, а треугольник ABC называется диагональным. Доказать, что:

1) точки A_1, B_1, C_1 пересечения сторон BC, CA, AB диагонального треугольника со сторонами QR, RP, PQ лежат на одной прямой;

2) стороны SR и PQ пересекают сторону AB диагонального треугольника в точках M и N, гармонически сопряженных относительно пары точек A, B.

1385*. Полным четырехсторонником называется совокупность четырех прямых p, q, r, s, из которых никакие три не проходят через одну точку. Вершинами полного четырехсторонника называются шесть точек пересечения его сторон: q и r, p и s, r и p, q и s, p и q, r и s. Вершины, не лежащие на одной и той же стороне четырехсторонника, называются противоположными. Прямые a, b, c, соединяющие противоположные вершины, называются диагональными прямыми. Доказать, что:

1) прямые a_1, b_1, c_1, проходящие через вершины диагонального треугольника и соответственно через вершины, в которых пересекаются стороны q и r, r и p, p и q, проходят через одну точку;

2) вершины, в которых пересекаются прямые s и r, p и q, гармонически разделяются точками, в которых стороны a и b пересекаются с прямой, соединяющей эти вершины.

1386. Найти диагональные точки четырехугольника, вершины которого

$$(1:1:1),\quad (1:1:-1),\quad (1:-1:1),\quad (-1:1:1).$$

1387*. Доказать, что шесть сторон четырехугольника пересекают три стороны его диагонального треугольника в шести вершинах четырехсторонника с тем же самым диагональным треугольником.

§ 3. Проективные преобразования проективной плоскости

1. Коллинеации

Александров, гл. XXI, § 6.
Моденов, гл. XV, §§ 194—196.
Постников, гл. 7, § 1, п. 4.

1388*. На проективно-аффинной плоскости задано в однородных координатах проективное преобразование

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= x_1 - 2x_2 + 3x_3,\\
\lambda x_2' &= 2x_1 + x_2 + 2x_3,\\
\lambda x_3' &= 4x_1 - 2x_2 + 5x_3.
\end{aligned}$$

Найти несобственные точки, которые при этом преобразовании переходят в несобственные точки.

1389*. Найти проективное преобразование множества всех собственных точек (x, y) проективно-аффинной плоскости, образами (x', y') которых являются собственные точки, если точка $(0, 0)$ — инвариантная точка этого проективного преобразования, а прямые

$$x+y+2=0, \qquad x-y-4=0, \qquad x-4y+3=0$$

переходят соответственно в прямые

$$x'+3y'+2=0, \qquad x'-3y'+4=0 \qquad x'+2y'-3=0.$$

1390. Найти проективное преобразование проективно-аффинной плоскости, переводящее начало аффинной системы координат в точку $(-7, 4)$, несобственную точку оси Ox — в точку $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$, несобственную точку оси Oy — в точку $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$, а точку $(1, 1)$ — в несобственную точку прямой $x+y=0$.

1391. Найти образ прямой $[u_1 : u_2 : u_3]$ при проективном преобразовании, для которого стороны базисного треугольника $A_1A_2A_3$ инвариантны, а точка $(a_1 : a_2 : a_3)$, не лежащая ни на одной из сторон базисного треугольника, переходит в точку $(a_1' : a_2' : a_3')$, также не лежащую ни на одной из сторон базисного треугольника.

1392. Дано проективное преобразование:

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Найти координаты: 1) образа прямой $[u_1 : u_2 : u_3]$; 2) прообраза точки $(x_1' : x_2' : x_3')$; 3) прообраза прямой $[u_1' : u_2' : u_3']$.

1393. Дано проективное преобразование множества прямых проективной плоскости:

$$\lambda u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3,$$
$$\lambda u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3,$$
$$\lambda u_3' = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3.$$

Найти: 1) образ точки $(x_1 : x_2 : x_3)$; 2) прообраз прямой $[u_1' : u_2' : u_3']$; 3) прообраз точки $(x_1' : x_2' : x_3')$.

1394*. Найти все проективные преобразования, при которых базисные точки A_1, A_2, A_3 инвариантны. Какой геометрический смысл имеют эти преобразования в случае, если проективная плоскость реализована связкой прямых и плоскостей трехмерного аффинного пространства?

1395. Найти проективное преобразование, при котором базисные точки A_1, A_2, A_3 переходят соответственно в точки A_2, A_3, A_1, а единичная точка E инвариантна.

1396. Найти проективное преобразование, при котором вершины базисного треугольника $A_1=(1:0:0)$, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$ переходят соответственно в точки $E_1=(0:1:1)$, $E_2=(1:0:1)$, $E_3=(1:1:0)$, а единичная точка E инвариантна.

1397. Найти все проективные преобразования, при которых вершины базисного треугольника $A_1=(1:0:0)$, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$ переходят соответственно в точки $E_1=(0:1:1)$, $E_2=(1:0:1)$, $E_3=(1:1:0)$.

1398. Найти проективное преобразование проективной плоскости, при котором базисные точки A_1, A_2, A_3 проективной системы координат инвариантны, а единичная точка E переходит в точку $E'=(e_1:e_2:e_3)$.

1399*. 1) Найти проективные преобразования проективно-аффинной плоскости, при которых все точки несобственной прямой $x_3=0$ инвариантны.

2) Какое преобразование на множестве собственных точек проективно-аффинной плоскости порождает это проективное преобразование?

1400*. 1) Найти все проективные преобразования проективно-аффинной плоскости в системе однородных координат, при которых несобственная прямая $x_3=0$ инвариантна.

2) Как преобразуется при этом множество собственных точек плоскости?

1401. Найти проективное преобразование проективной плоскости, при котором образами точек $A_1=(1:0:0)$, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$, $E=(1:1:1)$ являются точки

$$A_1'=(a_{11}:a_{21}:a_{31}),\quad A_2'=(a_{12}:a_{22}:a_{32}),$$
$$A_3'=(a_{13}:a_{23}:a_{33}),\quad E'=(b_1:b_2:b_3).$$

1402. Как запишется проективное преобразование проективной плоскости, если точка $A_1=(1:0:0)$ является инвариантной точкой, прямая A_2A_3 является инвариантной прямой, причем точка $A_3=(0:0:1)$ является образом точки $A_2=(0:1:0)$?

1403*. Проективное преобразование проективной плоскости называется гиперболической гомологией, если оно имеет прямую инвариантных точек (ось гомологии) и инвариантную точку (центр гомологии), не лежащую на этой прямой.

1) Как запишется гиперболическая гомология с центром $A_1=(1:0:0)$ и осью A_2A_3, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$?

2) Как преобразуются собственные точки проективно-аффинной плоскости при гиперболической гомологии, если $A_1=(1:0:0)$—несобственная точка проективно-аффинной плоскости, лежащая на оси Ox аффинной системы координат Oxy, а ось A_2A_3 гомологии совпадает с осью Oy?

3) Как преобразуются собственные точки проективно-аффинной плоскости, если в качестве центра гомологии принять начало координат аффинной системы координат Oxy, а в качестве оси гомологии — несобственную прямую?

1404*. 1) Доказать, что гиперболическая гомология однозначно определяется заданием ее оси, центра, точки M, отличной от центра, не лежащей на оси гомологии и ее образа M', лежащего на прямой, соединяющей центр гомологии с точкой M, причем M' отличен от центра гомологии и не лежит на ее оси.

2) Найти гиперболическую гомологию с центром $A_1=(1:0:0)$, осью A_2A_3, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$, при которой точка $E=(1:1:1)$ переходит в $E'=(a:1:1)$ $(a\neq 1)$.

1405*. Гиперболическая гомология называется гармонической, если точка M и ее образ M' при этой гомологии гармонически разделяют пару точек A_1 и P, где A_1 — центр гомологии, а P — точка пересечения прямой A_1M с осью гомологии A_2A_3.

1) Доказать, что гармоническая гомология является инволюционным преобразованием. Обратно: если гиперболическая гомология является инволюционным преобразованием, то она является гармонической.

2) Записать гармоническую гомологию, принимая ее центр A_1 за вершину $(1:0:0)$ базисного треугольника, а ось гомологии за сторону A_2A_3 базисного треугольника проективной системы координат на проективной плоскости.

3) Как преобразуются собственные точки при гармонической гомологии проективно-аффинной плоскости, если ее центр $A_1=(1:0:0)$ — несобственная точка оси Ox, а ось гомологии — ось Oy аффинной системы координат Oxy?

4) Как преобразуются собственные точки проективно-аффинной плоскости при гармонической гомологии, если ее центром является начало координат аффинной системы координат Oxy, а ее осью — несобственная прямая?

1406*. Какой геометрический смысл имеет гармоническая гомология, если проективная плоскость реализована как связка прямых и плоскостей трехмерного аффинного пространства?

1407*. Доказать, что всякое инволюционное преобразование проективной плоскости является гармонической гомологией или тождественным преобразованием.

1408*. Доказать, что произведение трех гармонических гомологий, центры которых совпадают с вершинами, а оси — со сторонами треугольника, есть тождественное преобразование.

1409*. Проективное преобразование проективной плоскости называется параболической гомологией, если оно имеет прямую инвариантных точек (ось гомологии) и пучок инвариантных прямых, центр которого (центр гомологии) лежит на прямой инвариантных точек.

1) Как запишется параболическая гомология с центром $A_1=(1:0:0)$ и осью A_1A_2, $A_2=(0:1:0)$?

2) Как запишется параболическая гомология с центром $A_1=(1:0:0)$, осью A_1A_2, $A_2=(0:1:0)$, при которой точка $E=(1:1:1)$ переходит в точку $E'=(k:1:1)$ $(k\neq 1)$?

3) Как преобразуются собственные точки проективно-аффинной плоскости, если центр гомологии есть несобственная точка оси Ox аффинной системы координат Oxy, а ось гомологии — несобственная прямая?

1410*. Какой геометрический смысл имеет параболическая гомология, если проективная плоскость реализована как связка прямых и плоскостей трехмерного аффинного пространства?

1411*. 1) Доказать, что произведение двух гармонических гомологий есть параболическая гомология.

2) Обратно: всякая параболическая гомология может быть представлена как произведение двух гармонических гомологий.

1412*. Доказать, что проективное преобразование

$$\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

при котором инвариантными точками являются все точки прямой $x_3=0$ и только эти точки, является параболической гомологией. Найти ее центр.

1413*. Доказать, что произведение гиперболической гомологии на параболическую гомологию с той же осью есть гиперболическая гомология.

1414*. Дано проективное преобразование

$$\begin{aligned} kx_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ kx_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ kx_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Пусть

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

— характеристический полином матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

этого преобразования.

Доказать, что:

1) координаты $x_1 : x_2 : x_3$ инвариантных точек этого преобразования определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)\,x_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где λ — корень характеристического полинома;

2) координаты $u_1 : u_2 : u_3$ инвариантных прямых находятся из системы

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 &= 0, \\ a_{12}u_1 + (a_{22}-\lambda)\,u_2 + a_{32}u_3 &= 0, \\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33}-\lambda)\,u_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где λ — корень того же характеристического полинома;

3) если λ — простой корень характеристического полинома, то соответствующие ему инвариантные точка и прямая, определяемые из систем (1) и (2), не инцидентны.

1415*. Дано проективное преобразование

$$\begin{aligned} kx_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ kx_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ kx_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Пусть

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

— характеристический полином матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

этого преобразования.

Найти канонический вид этого преобразования в зависимости от корней λ_1, λ_2, λ_3 характеристического полинома и ранга матрицы $A-\lambda E$, если λ — кратный корень характеристического полинома.

Рассмотреть следующие случаи:

1) λ_1, λ_2, λ_3 — действительные и простые корни;

2) λ_1 — действительный корень, λ_2 и λ_3 — комплексные сопряженные корни: $\lambda_{2,3}=\alpha\pm\beta i$ (α и β — действительные числа и $\beta\neq 0$);

3) $\lambda_1=\lambda_2=s\neq\lambda_3$, $\quad \mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

4) $\lambda_1=\lambda_2=s\neq\lambda_3$, $\quad \mathrm{Rg}(A-sE)=1$;

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s$, $\quad \mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

6) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s$, $\quad \mathrm{Rg}(A-sE)=1$;

7) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s$, $\quad \mathrm{Rg}(A-sE)=0$.

1416*. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые проективного преобразования, заданного в канонической системе координат, в зависимости от канонического вида этого преобразования (см. предыдущую задачу).

2. *Корреляции. Поляритет*

Александров, гл. XXII, § 5.

1417*. Корреляцией называется отображение множества всех точек проективной плоскости на множество всех прямых проективной плоскости, определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda u_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ \lambda u_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ \lambda u_3 &= a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0, \qquad (1)$$

где $(x_1:x_2:x_3)$ — произвольная точка, а $[u_1:u_2:u_3]$ — соответствующая ей прямая проективной плоскости. Доказать, что:

1) если три точки A, B, C лежат на одной прямой, то соответствующие им прямые a, b, c при корреляции (1) проходят через одну точку;

2) если три прямые a, b, c проходят через одну точку, то они соответствуют трем точкам A, B, C, лежащим на одной прямой.

1418*. Доказать, что если точки A, B, C лежат на одной прямой $[v_1:v_2:v_3]$, то при корреляции

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

им соответствуют три прямые a, b, c, проходящие через одну точку $(y_1:y_2:y_3)$ такую, что

$$\lambda v_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3,$$
$$\lambda v_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3,$$
$$\lambda v_3 = a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3.$$

1419*. Доказать, что существует и притом только одна корреляция, при которой четырем точкам, из которых никакие три не лежат на одной прямой, соответствуют четыре прямые, из которых никакие три не проходят через одну точку.

1420*. Даны две корреляции K_1 и K_2. Пусть M — произвольная точка проективной плоскости, m — ее образ при корреляции K_1, M' — прообраз m при корреляции K_2. Доказать, что соответствие, при котором точке M соответствует точка M', является проективным преобразованием.

1421. Найти корреляцию проективной плоскости, при которой точкам $A_1=(1:0:0)$, $A_2=(0:1:0)$, $A_3=(0:0:1)$, $E=(1:1:1)$ ставятся в соответствие прямые $a_1=[1:0:1]$, $a_2=[0:1:-3]$, $a_3=[0:1:5]$, $e=[1:1:2]$.

1422. Дана корреляция

$$\lambda u_1 = 2x_1, \qquad \lambda u_2 = 3x_2, \qquad \lambda u_3 = -5x_3.$$

На прямой $x_1+x_2-2x_3=0$ найти точку, для которой прямая, являющаяся ее образом при данной корреляции, проходит через эту точку.

1423. Найти корреляцию, при которой точкам $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$ ставятся в соответствие прямые $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$, $[1:1:1]$.

1424*. Корреляция

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

называется поляритетом П, если матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является симметрической.

Доказать, что:

1) если прямая a является образом точки A при поляритете П и B — произвольная точка, лежащая на прямой a, то прямая b, являющаяся образом точки B при этом поляритете, проходит через точку A;

2) если при корреляции произвольной точке A соответствует прямая a и любой точке B, лежащей на прямой a, соответствует прямая b, проходящая через точку A, то эта корреляция есть поляритет.

Если прямая a соответствует точке A при поляритете П, то a называется полярой точки A, а точка A — полюсом прямой a. Точки A и B, из которых каждая лежит на поляре другой, называются сопряженными точками. Прямые a и b, из которых каждая проходит через полюс другой, называются сопряженными прямыми.

1425*. Доказать, что всякая корреляция, при которой вершинам некоторого треугольника ABC соответствуют его противоположные стороны, есть поляритет. Треугольник ABC, для которого каждая сторона является полярой противоположной вершины при некотором поляритете, называется автополярным треугольником для этого поляритета.

1426. Как запишется поляритет, если базисный треугольник $A_1A_2A_3$ является автополярным для этого поляритета?

1427*. Доказать, что поляритет однозначно определяется заданием автополярного треугольника, точкой M и прямой m, являющейся образом точки M.

1428*. Доказать, что если точки A и B лежат на своих полярах, то прямая AB не проходит через свой полюс.

1429*. Доказать, что на прямой не может быть более двух точек, лежащих на своих полярах.

1430*. Доказать, что:

1) если при поляритете П вершинам треугольника ABC соответствуют стороны $B'C', C'A', A'B'$ треугольника $A'B'C'$, отличного от треугольника ABC, то прямые AA', BB' и CC' проходят через одну точку O (теорема Шаля);

2) если у двух различных треугольников ABC и $A'B'C'$ прямые AA', BB', CC' проходят через одну точку O, то существует поляритет, при котором вершинам A, B, C треугольника ABC соответствуют стороны $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника $A'B'C'$ (теорема Штаудта).

1431*. Доказать, что поляритет на любой прямой, не проходящей через ее полюс, порождает инволюцию сопряженных точек.

1432*. Если при поляритете П ни одна точка не лежит на своей поляре, то поляритет П называется эллиптическим. Если при поляритете П существует точка, лежащая на своей поляре, то поляритет П называется гиперболическим. Три прямые A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, не проходящие через одну точку, делят проективную плоскость на четыре области. Пусть поляритет П задан автополярным треугольником $A_1A_2A_3$ и образом e точки E. Доказать, что если точка E лежит в той области, в которой нет точек прямой e, то поляритет П будет эллиптическим; если прямая e содержит точки той области, в которой лежит точка E, то поляритет будет гиперболическим.

1433*. Дан поляритет

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

При каком необходимом и достаточном условии: 1) точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на своей поляре; 2) поляритет является эллиптическим; 3) поляритет является гиперболическим.

1434. Дан поляритет

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

При каком необходимом и достаточном условии прямая $[u_1 : u_2 : u_3]$ проходит через свой полюс?

1435*. Доказать, что если две пары противоположных вершин четырехсторонника сопряжены при некотором поляритете, то и третья пара противоположных вершин будет также сопряжена при этом поляритете (теорема Гессе).

1436*. В четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$ вершины A_1 и A_3, а также A_2 и A_4, сопряжены при некотором поляритете. Доказать, что точка A_5 пересечения прямых A_1A_2, A_3A_4 и точка A_6 пересечения прямых A_1A_4 и A_2A_3 полярно сопряжены при том же поляритете (теорема Гессе).

1437*. Доказать, что корреляция, переводящая четыре вершины пятиугольника в соответствующие противоположные стороны, есть поляритет, при которой и пятой вершине соответствует противолежащая ей сторона.

1438. 1) Найти уравнение геометрического места точек, лежащих на своих образах (прямых) при корреляции

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

2) Какой вид примет это уравнение в случае, если данная корреляция является поляритетом?

§ 4. Линии второго порядка на проективной плоскости

Александров, гл. XXII, §§ 1—3, 8.
Моденов, гл. XV, §§ 203—211.
Постников, гл. 6, § 2, пп. 1—3, 8.

1. Линии второго порядка

1439*. Написать уравнение линии второго порядка на проективно-аффинной плоскости, касающейся оси Ox в точке (3, 0), оси Oy в точке (0, 2) и несобственной прямой.

1440. На проективно-аффинной плоскости введена аффинная система координат Oxy. Как запишется уравнение эллипса $x^2+y^2=1$ в проективной системе координат $A_1A_2A_3E$, если за стороны A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника принять соответственно прямые $y+1=0$, $y-1=0$, $x=0$, а за единичную точку E — точку (1, 0)?

1441. Как запишется уравнение параболы $y^2=4x$, лежащей на проективно-аффинной плоскости, в проективной системе координат $A_1A_2A_3E$, если

$$A_1=(1,\ 0),\qquad A_2=(-1,\ 2),\qquad A_3=(-1,\ -2),\qquad E=(0,\ 0)?$$

1442. На проективно-евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат задана окружность $x^2 + y^2 = 1$. Как запишется уравнение этой окружности в проективной системе координат $A_1A_2A_3E$, если

$$A_1 = (1,\ 0), \quad A_2 = (0,\ 1), \quad A_3 = (-1,\ 0), \quad E = (0,\ -1)?$$

1443. Составить уравнения линий второго порядка, зная, что они проходят через вершины базисного треугольника $A_1A_2A_3$ проективной системы координат.

1444. Пользуясь приведением квадратичной формы к сумме квадратов, определить проективный класс следующих линий второго порядка:

1) $2x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 5x_3x_1 + 3x_1x_2 = 0$;
2) $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$;
3) $4x_1^2 + 15x_2^2 - 5x_3^2 - 22x_2x_3 - 8x_3x_1 + 16x_1x_2 = 0$;
4) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1 - 4x_1x_2 = 0$;
5) $4x_1^2 + x_2^2 + 34x_3^2 - 6x_2x_3 - 12x_3x_1 + 4x_1x_2 = 0$;
6) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0$.

1445*. Относительно проективной системы координат даны четыре прямые:

$$\begin{aligned}
U_1 &\equiv u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = 0 \quad (l_1),\\
U_2 &\equiv u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = 0 \quad (l_2),\\
U_3 &\equiv u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 = 0 \quad (l_3),\\
U_4 &\equiv u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3 = 0 \quad (l_4),
\end{aligned}$$

из которых никакие три не проходят через одну точку, и точка $M_0 = (x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через четыре точки пересечения прямых l_1 и l_2, l_2 и l_3, l_3 и l_4, l_4 и l_1 и через точку M_0.

1446. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек:

$$A = (0:0:1), \quad B = (0:1:1), \quad C = (1:0:1),$$
$$D = (2:-5:1), \quad E = (-5:2:1).$$

1447*. Доказать: для того, чтобы через пять точек проективной плоскости можно было провести единственную линию второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы никакие четыре из этих точек не лежали на одной прямой.

1448*. 1) Составить уравнение линии второго порядка, касающейся сторон A_1A_3 и A_2A_3 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ в точках A_1, A_2 и проходящей через единичную точку E проективной системы координат.

2) К какому аффинному классу будет относиться эта линия, если A_1 и A_2 — несобственные точки проективно-аффинной плоскости?

3) К какому аффинному классу будет относиться эта линия, если A_1 и A_3 — несобственные точки проективно-аффинной плоскости?

1449*. Доказать, что если уравнение

$$F \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

является уравнением действительной овальной линии C второго порядка, то условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot F(x_1, x_2, x_3) > 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы точка $M = (x_1 : x_2 : x_3)$ была внутренней точкой линии C.

1450. При каком необходимом и достаточном условии точка $(a_1 : a_2 : a_3)$ является внешней точкой линии $x_1^2 + x_2^2 - - x_3^2 = 0$?

1451*. Дана действительная овальная линия C второго порядка:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

и прямая

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

При каком необходимом и достаточном условии эта прямая: 1) пересекает линию C; 2) касается линии C; 3) не пересекает линию C.

1452*. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, лежащие на проективной плоскости и такие, что прямые AA', BB', CC' проходят через одну точку. Доказать, что шесть точек пересечения прямых AB и $A'C'$, AB и $B'C'$, AC и $A'B'$, AC и $B'C'$, BC и $C'A'$, BC и $A'B'$ лежат на одной и той же линии второго порядка.

1453*. В действительную овальную линию второго порядка вписан шестиугольник 123456. Доказать, что точки пересечения пар прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

1454*. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — пять произвольных точек, лежащих на действительной нераспадающейся линии C второго порядка. Доказать, что если l — касательная к линии C второго порядка в точке A_1, то три точки пересечения прямых l и A_3A_4, A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_1A_5 лежат на одной прямой.

1455*. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные точки, лежащие на действительной нераспадающейся линии C второго порядка; l_1, l_2, l_3, l_4 — касательные к этой линии соответственно в точках A_1, A_2, A_3, A_4. Доказать, что четыре точки пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, A_2A_3 и A_4A_1, l_2 и l_4, l_1 и l_3 лежат на одной прямой.

1456*. Пусть A_1, A_2, A_3 — три произвольные точки действительной нераспадающейся линии второго порядка, а l_1, l_2, l_3 — касательные к этой линии, проведенные к ней в этих точках. Доказать, что три точки пересечения прямых A_2A_3 и l_1, A_3A_1 и l_2, A_1A_2 и l_3 лежат на одной прямой.

1457*. Около действительной нераспадающейся линии второго порядка описан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Доказать, что прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 проходят через одну точку (теорема Брианшона).

1458*. Доказать, что если $A_1A_2A_3A_4A_5$ — произвольный пятиугольник, описанный около действительной нераспадающейся линии второго порядка, и A_6 — точка касания прямой A_1A_5 с этой линией, то прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 проходят через одну точку.

1459*. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольный четырехугольник, описанный около действительной нераспадающейся линии C второго порядка, а A_5, A_6, A_7, A_8 — точки касания сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 с линией C. Доказать, что четыре прямые A_1A_3, A_2A_4, A_5A_7, A_6A_8 проходят через одну точку.

1460*. Доказать, что если треугольник $A_1A_2A_3$ описан около действительной нераспадающейся линии C второго порядка, а A_4, A_5, A_6 — точки касания сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 с линией C, то прямые A_1A_5, A_2A_6, A_3A_4 проходят через одну точку.

1461*. Пусть S — семейство нераспадающихся линий второго порядка, каждая из которых касается четырех прямых

a_1, a_2, a_3, a_4. Доказать, что прямые, проходящие через точки касания линий S со сторонами a_1, a_2 и a_3, a_4, проходят через одну точку.

1462*. Доказать, что если каждые две из трех линий второго порядка пересекаются в четырех точках, причем все они имеют общую хорду, то три другие их общие хорды проходят через одну точку (теорема Штурма).

1463*. Два пучка прямых с центрами S_1 и S_2 находятся в проективном соответствии, если между ними установлено взаимно однозначное соответствие, при котором четырем любым прямым пучка S_1, образующим гармоническую четверку, соответствуют четыре прямых пучка S_2, также образующих гармоническую четверку.

Доказать, что точки пересечения прямых, соответствующих друг другу при проективном соответствии пучков S_1 и S_2, лежат на одной и той же линии второго порядка, проходящей через точки S_1 и S_2, и обратно: если на линии L второго порядка взять две точки S_1 и S_2 и поставить в соответствие прямой l_1 пучка S_1 прямую l_2 пучка S_2, которая пересекается с прямой l_1 в точке M, лежащей на линии L, то такое соответствие двух пучков будет проективным.

1464*. Найти геометрическое место точек пересечения соответствующих прямых двух проективных пучков $x_1 = kx_2$, $x_2 = kx_3$.

1465*. Даны четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и прямая l, не проходящая ни через одну из этих точек. Рассмотрим семейство линий второго порядка, каждая из которых проходит через четыре данные точки. Доказать, что если M и M' — точки пересечения прямой l с произвольной линией семейства, то эти точки соответствуют друг другу при некоторой инволюции на прямой l.

1466*. Рассмотрим семейство линий второго порядка, касающихся двух данных прямых в фиксированных точках. Доказать, что пары точек пересечения этих линий с третьей фиксированной прямой λ соответствуют друг другу при некоторой инволюции на прямой λ.

1467*. На проективно-аффинной плоскости введена аффинная система координат Oxy. Найти в однородных координатах, а для собственных точек линий и в аффинных координатах, проективное преобразование плоскости, которое переводит:

1) эллипс $x^2+y^2=1$ в гиперболу $x^2-y^2=1$, дополненную несобственными точками ее асимптот;

2) гиперболу $x^2-y^2=1$, дополненную несобственными точками ее асимптот, в параболу $y=x^2$, дополненную несобственной точкой ее диаметров;

3) эллипс $x^2+y^2=1$ в параболу $y=x^2$, дополненную несобственной точкой ее диаметров;

4) пару пересекающихся прямых $x^2-y^2=0$, дополненную их несобственными точками, в пару параллельных прямых $x^2-1=0$, дополненную их несобственной точкой.

1468*. На проективно-евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат Oxy задана гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1) Найти проективное преобразование в однородных координатах, при котором эта гипербола инвариантна, а касательные в вершинах гиперболы переходят в ее асимптоты.

2) Как в декартовых координатах x, y преобразуются собственные точки этой гиперболы при этом проективном преобразовании?

1469. Доказать, что действительная нераспадающаяся линия второго порядка инвариантна при гармонической гомологии, центр которой является полюсом ее оси.

1470*. Составить уравнение семейства линий второго порядка, инвариантных при гармонической гомологии $\lambda x_1'=-x_1$, $\lambda x_2'=x_2$, $\lambda x_3'=x_3$ с осью $A_2A_3=[1:0:0]$ и центром $A_1=(1:0:0)$.

1471*. Найти проективное преобразование, при котором точка $A_1=(1:0:0)$ инвариантна, а точка M линии

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$$

переходит во вторую точку M' пересечения прямой AM с этой линией.

1472*. Доказать, что если при проективном преобразовании действительной овальной линии второго порядка в себя три точки этой линии инвариантны, то все точки этой линии инвариантны.

2. Полюсы и поляры

1473. Найти поляру точки (1, 0) относительно линии

$$3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+10=0.$$

1474. Найти полюс прямой $3x-y+6=0$ относительно линии второго порядка

$$x^2-2xy+y^2+2x-6y=0.$$

1475. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 1), полярно сопряженную прямой $4x-y+30=0$ относительно линии

$$x^2-6xy+9y^2-12x+14y-7=0.$$

1476. На прямой $x-5y+18=0$ найти точку, полярно сопряженную с точкой (—5, 4) относительно линии

$$2xy-6x+4y-1=0.$$

1477. Составить уравнение линии второго порядка, для которой ось Oy является полярой точки (5, 0), ось Ox — полярой точки (0, 3) и которая проходит через точки (1, 2), $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

1478. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $A=(1, 1)$, $B=(1, -1)$, $O=(0, 0)$ при условии, что точка (3, 1) является полюсом прямой AB.

1479. Доказать, что поляры любой точки плоскости относительно эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

симметричны относительно оси Ox.

1480. Доказать, что поляра любой точки асимптоты гиперболы, отличная от ее центра, параллельна этой асимптоте.

1481. 1) Доказать, что поляра центра нераспадающейся линии второго порядка, лежащей на проективно-аффинной плоскости, есть несобственная прямая.

2) Доказать, что полюс диаметра нераспадающейся линии второго порядка есть несобственная точка хорд, которым сопряжен этот диаметр.

1482*. На проективно-аффинной плоскости задана действительная овальная линия второго порядка. Доказать, что если из внешней собственной точки этой линии провести к ней касательные, то прямая, соединяющая эту точку с серединой хорды, граничными точками которой являются точки касания, будет диаметром линии, сопряженным направлению хорды.

1483*. Доказать, что центр нераспадающейся линии второго порядка лежит вне треугольника, являющегося автополярным по отношению к этой линии.

1484. Доказать, что директриса линии второго порядка является полярой соответствующего ей фокуса.

1485*. Доказать, что если две прямые проходят через фокус линии второго порядка, то необходимым и достаточным условием полярной сопряженности этих прямых является их перпендикулярность.

1486. Доказать, что если из каждой точки прямой, перпендикулярной к оси линии второго порядка, опустить перпендикуляр на поляру этой точки, то все такие перпендикуляры проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси линии.

1487*. Доказать, что если треугольник ABC является автополярным для окружности, то точка пересечения высот треугольника ABC совпадает с центром этой окружности.

1488*. Пусть C — действительная овальная линия второго порядка на проективно-евклидовой плоскости, а F — ее фокус. Доказать, что при поляритете относительно окружности с центром F множество всех касательных к линии C преобразуется в множество точек окружности с центром F.

1489*. Найти геометрическое место полюсов M хорд параболы, которые видны из фокуса под прямым углом.

1490*. 1) Доказать, что для всякого поляритета геометрическое место точек, инцидентных своим полярам, есть нераспадающаяся линия второго порядка (действительная или мнимая).

2) Доказать, что для всякой линии второго порядка существует поляритет, при котором геометрическим местом точек, инцидентных своим полярам, является эта линия.

1491*. Пусть на проективной плоскости дана нераспадающаяся линия второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

и точка $M_0=(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$. Найти геометрическое место точек, гармонически сопряженных с точкой M_0 относительно точек A и B, в которых произвольная прямая, проходящая через точку M_0, пересекает данную линию.

1492*. Пусть C — линия второго порядка, являющаяся геометрическим местом точек, инцидентных соответствующим им прямым при поляритете П. Доказать, что если точка M лежит на линии C, то при поляритете П ей соответствует касательная к линии C в точке M.

1493*. Пусть A — произвольная точка, лежащая на нераспадающейся линии C второго порядка, а B — полюс любой прямой, проходящей через точку A. Доказать, что прямая AB является касательной к линии C в точке A.

1494*. Доказать, что если M — точка, внешняя по отношению к действительной нераспадающейся линии второго порядка, то ее поляра проходит через точки прикосновения касательных, проведенных к данной линии из точки M.

1495*. Доказать, что если M — внешняя точка для действительной нераспадающейся линии второго порядка, то любая пара полярно сопряженных прямых, проходящих через точку M, гармонически разделяет пару касательных к этой линии, проведенных к ней из точки M.

1496. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через вершины A_1, A_2, A_3 базисного треугольника, зная, что единичная точка $E=(1:1:1)$ проективной системы координат является полюсом единичной прямой $e=[1:1:1]$.

1497*. Доказать, что если в нераспадающуюся линию второго порядка вписан треугольник, то прямая, полярно сопряженная с одной из его сторон, пересекает две другие стороны в полярно сопряженных точках.

1498*. Пусть точки A и B полярно сопряжены относительно нераспадающейся линии второго порядка. Пусть прямая, проходящая через точку B, пересекает эту линию в точках P и Q, а AP и AQ пересекают линию вторично в точках R и S. Доказать, что точки R, S и B лежат на одной прямой.

1499*. На проективной плоскости введена проективная система координат $A_1A_2A_3E$. Пусть E_1 и E_2 — точки пересечения прямых A_1E и A_2E со сторонами A_2A_3 и A_3A_1. Составить уравнение линии C второго порядка, для которой базисный треугольник $A_1A_2A_3$ будет автополярным, а полярой единичной точки E будет прямая E_1E_2. Какие из точек A_1, A_2, A_3 являются внутренними точками линии C, а какие внешними?

1500. При каком необходимом и достаточном условии две точки $(x_1:x_2:x_3)$ и $(y_1:y_2:y_3)$ полярно сопряжены относительно нераспадающейся линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0?$$

1501. При каком необходимом и достаточном условии две прямые $[u_1:u_2:u_3]$ и $[v_1:v_2:v_3]$ полярно сопряжены относительно нераспадающейся линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0?$$

1502. Найти координаты полюса прямой

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

относительно нераспадающейся линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0.$$

1503*. Доказать, что если в овальную линию второго порядка вписать треугольник и в его вершинах провести касательные к этой линии, то точка пересечения прямых, соединяющих вершины описанного треугольника с точками касания противоположных сторон, есть полюс прямой, на которой лежат три точки пересечения сторон вписанного треугольника с касательными в противоположных вершинах.

1504*. Доказать, что если $A_1A_2A_3$ — автополярный треугольник для действительной овальной линии второго порядка, то одна из его вершин является внутренней точкой этой линии, а две другие — внешними.

1505*. Доказать, что уравнение линии второго порядка относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ имеет вид $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ тогда и только тогда, когда треугольник $A_1A_2A_3$ автополярный, точка A_3 внутренняя, а точки A_1 и A_2 — внешние для этой линии и единичная точка E совпадает с одной из четырех точек, в которых пересекаются касательные к линии, проведенные из точек A_1 и A_2.

1506*. Написать уравнение овальной линии второго порядка, касающейся двух сторон A_1A_3 и A_2A_3 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ в вершинах $A_1=(1:0:0)$ и $A_2=(0:1:0)$, зная, что единичная точка $E=(1:1:1)$ является полюсом единичной прямой $e=[1:1:1]$ относительно этой линии.

1507*. Треугольник ABC описан около овальной линии второго порядка. Доказать, что если точка M полярно сопряжена с точкой A относительно этой линии, то прямые MB и MC также полярно сопряжены относительно той же линии.

1508*. Пусть A и B — полярно сопряженные точки относительно нераспадающейся линии C второго порядка. Пусть прямая, пересекающая линию C в точках P и Q, полярно сопряжена с прямой AB. Доказать, что прямые AQ и BP пересекаются в точке, лежащей на линии C.

1509. Относительно проективной системы координат задана нераспадающаяся линия второго порядка:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

При каком необходимом и достаточном условии треугольник с вершинами $(x_1 : x_2 : x_3)$, $(y_1 : y_2 : y_3)$, $(z_1 : z_2 : z_3)$ является автополярным относительно данной линии?

1510*. Доказать, что если два треугольника являются автополярными при данном поляритете, то шесть их вершин лежат на одной и той же линии второго порядка.

1511*. Доказать, что любые два треугольника, вписанные в действительную нераспадающуюся линию второго порядка, являются автополярными при некотором поляритете.

1512*. Доказать, что если в нераспадающуюся линию второго порядка вписан шестиугольник $ABCA'B'C'$ так, что прямые AA', BB', CC' проходят через одну точку, то эта точка является полюсом прямой, на которой лежат точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$.

1513*. Доказать, что если полный четырехугольник вписан в нераспадающуюся линию второго порядка, то его диагональный треугольник является автополярным для рассматриваемой линии.

1514*. Доказать, что шесть вершин двух автополярных треугольников относительно линии второго порядка принадлежат некоторой линии второго порядка.

§ 5. Проективное пространство

1. Проективные координаты в проективном пространстве. Гармонизм

Александров, гл. XXIII, § 1; § 2, пп. 1, 2.

Моденов, гл. XV, §§ 197—200.

Постников, гл. 4, § 2, пп. 1—4.

1515*. В проективно-аффинном пространстве введена аффинная система координат $Oxyz$ и проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$, где A_1, A_2, A_3 — несобственные точки осей Ox, Oy, Oz; A_4 совпадает с точкой O и E — точка, имеющая в аффинной системе координат $Oxyz$ координаты 1, 1, 1. Выразить аффинные координаты x, y, z собственной точки M через ее проективные координаты $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ (однородные координаты).

1516. В проективно-аффинном пространстве заданы своими однородными координатами две точки:

$$A = (1 : 0 : -1 : 2),$$
$$B = (1 : -1 : 0 : -2).$$

Найти несобственную точку прямой AB.

1517. В проективно-аффинном пространстве заданы две плоскости своими однородными координатами $[2 : -1 : 0 : 1]$ и $[6 : 0 : 1 : -3]$. Найти несобственную точку прямой, по которой пересекаются эти плоскости.

1518*. В проективно-аффинном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$, где все точки A_1, A_2, A_3, A_4, E собственные. Относительно аффинной системы координат с началом координат A_4, осями A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 и единичной точкой E строится точка $M_4 = (x_1, x_2, x_3)$. Относительно аффинной системы координат с началом координат A_1, осями A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 и единичной точкой E строится точка $M_1 = (x_2, x_3, x_4)$. Относительно аффинной системы координат с началом координат A_2, осями A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4 и единичной точкой E строится точка $M_2 = (x_1, x_3, x_4)$. Относительно аффинной системы координат с началом координат в точке A_3, осями A_3A_1, A_3A_2, A_3A_4 и единичной точкой E строится точка $M_3 = (x_1, x_2, x_4)$. Доказать, что прямые A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 проходят через одну точку M, и найти ее проективные координаты.

1519*. В проективно-аффинном пространстве введена аффинная система координат, относительно которой заданы уравнения граней базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (A_2A_3A_4),$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (A_1A_3A_4),$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (A_1A_2A_4),$$
$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \quad (A_1A_2A_3)$$

и единичная точка $E = (x_0, y_0, z_0)$ проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$.

Найти проективные координаты точки M, если даны ее аффинные координаты x, y, z.

1520*. Доказать, что если в проективно-евклидовом пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$, где все точки A_1, A_2, A_3, A_4, E — собственные, то проективные координаты $x_1:x_2:x_3:x_4$ собственной точки M пропорциональны отношениям расстояний d_1, d_2, d_3, d_4 от точки M до граней $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ базисного тетраэдра к расстояниям e_1, e_2, e_3, e_4 от единичной точки E до тех же граней:

$$\lambda x_1=\frac{d_1}{e_1},\quad \lambda x_2=\frac{d_2}{e_2},$$
$$\lambda x_3=\frac{d_3}{e_3},\quad \lambda x_4=\frac{d_4}{e_4}$$

(тетраэдрические координаты точки).

1521*. В проективно-аффинном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$, где все точки A_1, A_2, A_3, A_4, E — собственные. Доказать, что проективные координаты $u_1:u_2:u_3:u_4$ собственной плоскости $u_1x_1+u_2x_2+$ $+u_3x_3+u_4x_4=0$ пропорциональны отношениям расстояний δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 от вершин A_1, A_2, A_3, A_4 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ до рассматриваемой плоскости к расстояниям ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 от вершин A_1, A_2, A_3, A_4 до единичной плоскости $e=[1:1:1:1]$:

$$\lambda u_1=\frac{\delta_1}{\varepsilon_1},\quad \lambda u_2=\frac{\delta_2}{\varepsilon_2},$$
$$\lambda u_3=\frac{\delta_3}{\varepsilon_3},\quad \lambda u_4=\frac{\delta_4}{\varepsilon_4}$$

(тетраэдрические координаты плоскости).

1522*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задан новый базисный тетраэдр $A_1'A_2'A_3'A_4'$ и новая единичная точка E':

$$A_1'=(a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41}),$$
$$A_2'=(a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42}),$$
$$A_3'=(a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43}),$$
$$A_4'=(a_{14}:a_{24}:a_{34}:a_{44}),$$
$$E'=(b_1:b_2:b_3:b_4).$$

1) Выразить старые координаты $x_1:x_2:x_3:x_4$ произвольной точки M проективного пространства через ее новые координаты $x_1':x_2':x_3':x_4'$.

2) Выразить $x_1':x_2':x_3':x_4'$ через $x_1:x_2:x_3:x_4$.

1523. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2:0:1:-3)$ и пересекающей две прямые: одну, проходящую через точки $(1:-1:0:4)$ и $(-2:0:-4:3)$, и другую, заданную двумя плоскостями $[2:5:-3:0]$ и $[3:-2:2:1]$.

1524. Составить параметрические уравнения прямой, лежащей в плоскости $x_1-2x_3+3x_4=0$ и пересекающей две прямые, из которых одна задана двумя точками $A=(2:3:0:-4)$, $B=(0:3:-4:0)$, а другая — двумя плоскостями $u=[2:0:-3:0]$, $v=[1:5:4:3]$.

1525. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве плоскость π задана уравнением

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0.$$

Как расположена эта плоскость относительно базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, если: 1) $a_1=0$; 2) $a_1=a_2=0$; 3) $a_1=a_2=a_3=0$?

1526*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве заданы две плоскости α и β:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0\ (\alpha),$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0\ (\beta).$$

Доказать, что:

1) плоскости α и β совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты уравнений этих плоскостей пропорциональны:

$$a_1=kb_1,\quad a_2=kb_2,\quad a_3=kb_3,\quad a_4=kb_4,\quad k\neq 0;$$

2) плоскости α и β пересекаются по прямой, лежащей в плоскости $x_4=0$, тогда и только тогда, когда существует число $k\neq 0$ такое, что

$$a_1=kb_1,\quad a_2=kb_2,\quad a_3=kb_3,\quad a_4\neq kb_4;$$

3) плоскости α и β пересекаются по прямой, пересекающей ребро $x_3=0$, $x_4=0$ базисного тетраэдра, тогда и только тогда, когда существует число $k\neq 0$ такое, что

$$a_1=kb_1,\quad a_2=kb_2 \text{ и } a_3\neq kb_3 \text{ или } a_4\neq kb_4.$$

1527*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве заданы две точки $A=(a_1:a_2:a_3:a_4)$ и $B=(b_1:b_2:b_3:b_4)$.

Доказать, что:

1) эти точки совпадают тогда и только тогда, когда существует число $k \neq 0$ такое, что

$$a_1 = kb_1, \quad a_2 = kb_2, \quad a_3 = kb_3, \quad a_4 = kb_4;$$

2) прямая AB проходит через вершину $A_4 = (0:0:0:1)$ базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ тогда и только тогда, когда существует число $k \neq 0$ такое, что

$$a_1 = kb_1, \quad a_2 = kb_2, \quad a_3 = kb_3, \quad a_4 \neq kb_4;$$

3) прямая AB пересекается с ребром A_1A_2 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ тогда и только тогда, когда существует число $k \neq 0$ такое, что

$$a_1 = kb_1, \quad a_2 = kb_2 \text{ и } a_3 \neq kb_3 \text{ или } a_4 \neq kb_4.$$

1528. При каком необходимом и достаточном условии две прямые в проективном пространстве имеют общую точку, если:

1) одна прямая проходит через точки $A = (a_1 : a_2 : a_3 : a_4)$, $B = (b_1 : b_2 : b_3 : b_4)$, а другая — через точки $C = (c_1 : c_2 : c_3 : c_4)$ и $D = (d_1 : d_2 : d_3 : d_4)$;

2) одна прямая является линией пересечения двух плоскостей

$$u = [u_1 : u_2 : u_3 : u_4], \qquad v = [v_1 : v_2 : v_3 : v_4],$$

а другая — линией пересечения двух плоскостей

$$w = [w_1 : w_2 : w_3 : w_4], \; p = [p_1 : p_2 : p_3 : p_4];$$

3) одна прямая проходит через точки $A = (a_1 : a_2 : a_3 : a_4)$, $B = (b_1 : b_2 : b_3 : b_4)$, а другая является линией пересечения двух плоскостей $u = [u_1 : u_2 : u_3 : u_4]$, $v = [v_1 : v_2 : v_3 : v_4]$?

1529. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задана точка $M = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$. Найти точки M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, пересечения прямых A_iM с гранями, противоположными вершинам A_i.

1530*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задана точка $M = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$. Пусть $M_4 = (x_1 : x_2 : x_3 : 0)$ — точка, в которой прямая A_4M пересекает грань $A_1A_2A_3$. Доказать, что $x_1 : x_2 : x_3$ — проективные координаты точки M_4 на проективной плоскости $A_1A_2A_3$ в проективной системе координат $A_1A_2A_3E_4$, где E_4 — точка пересечения прямой A_4E с плоскостью $A_1A_2A_3$.

1531*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задана точка $M = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$. Пусть $M_{12} = (x_1 : x_2 : 0 : 0)$ — точка пересечения плоскости A_3A_4M с ребром A_1A_2, а E_{12} — точка пересечения плоскости A_3A_4E с той же прямой A_1A_2. Доказать, что $x_1 : x_2$ — проективные координаты точки M_{12} в проективной системе координат на прямой A_1A_2 с базисными точками A_1, A_2 и единичной точкой E_{12}.

1532*. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек, лежащих в проективном пространстве на одной прямой:

$$A = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4),$$
$$B = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4),$$
$$C = ((\alpha x_1 + \beta y_1) : (\alpha x_2 + \beta y_2) : (\alpha x_3 + \beta y_3) : (\alpha x_4 + \beta y_4)),$$
$$D = ((\lambda x_1 + \mu y_1) : (\lambda x_2 + \mu y_2) : (\lambda x_3 + \mu y_3) : (\lambda x_4 + \mu y_4)).$$

1533*. В проективном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти точки E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в которых прямые A_iE пересекают противоположные грани базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, и точки F_i, $i = 1, 2, 3, 4$, гармонически сопряженные с точками E_i относительно точек A_i и E.

2) Найти точки E_{ij}, в которых плоскости A_iA_jE пересекают ребра, противоположные ребру A_iA_j, и точки F_{ij}, гармонически сопряженные с точками E_{ij} относительно вершин ребра, противоположного ребру A_iA_j.

3) Найти точки G_{1234}, G_{1324}, G_{1423}, гармонически сопряженные с точкой E относительно точек E_{12}, E_{34}; E_{13}, E_{24}; E_{14}, E_{23}.

1534*. Пусть E — произвольная точка проективного пространства, не лежащая ни на одной из граней тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Обозначим через π_{ij} плоскость, проходящую через ребро A_iA_j и точку E. Пусть τ_{ij} — плоскость, которая проходит через ребро A_iA_j и которая гармонически сопряжена с плоскостью π_{ij} относительно граней тетраэдра, проходящих через ребро A_iA_j. Доказать, что три прямые, по которым пересекаются плоскости τ_{12}, τ_{34}; τ_{13}, τ_{24}; τ_{23}, τ_{14}, и шесть точек, в которых плоскости τ_{12}, τ_{13}, τ_{14}, τ_{23}, τ_{24}, τ_{34} пересекаются соответственно с ребрами A_3A_4, A_2A_4, A_2A_3, A_1A_4, A_1A_3, A_1A_2, лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости, принимая тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ за базисный, а точку E — за единичную точку.

1535*. Плоскость π, не проходящая ни через одну из вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, пересекает ребра A_iA_j в точках M_{ij}. На каждом ребре A_iA_j берется точка P_{ij}, гармонически сопряженная с точкой M_{ij} относительно точек A_i, A_j. Доказать, что прямые $P_{12}P_{34}$, $P_{13}P_{24}$, $P_{14}P_{23}$ проходят через одну точку Ω и что через ту же точку Ω проходят шесть плоскостей: $P_{12}A_3A_4$, $P_{13}A_2A_4$, $P_{14}A_2A_3$, $P_{23}A_1A_4$, $P_{24}A_1A_3$, $P_{34}A_1A_2$.

1536*. Прямая l пересекает грани $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ соответственно в точках M_1, M_2, M_3, M_4. Пусть π_i — плоскость, проходящая через вершину A_i и данную прямую. Доказать, что ангармоническое отношение $(M_1M_2M_3M_4)$ равно ангармоническому отношению $(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$.

1537*. Доказать, что если четыре вершины одного тетраэдра принадлежат четырем граням второго, а три вершины второго — трем граням первого, то и четвертая вершина второго тетраэдра принадлежит четвертой грани первого тетраэдра (теорема Мёбиуса).

1538*. Доказать, что если a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — две тройки попарно скрещивающихся прямых и каждая прямая a_i пересекает каждую прямую b_j, то любая прямая, пересекающая прямые a_1, a_2, a_3, будет пересекать и прямые b_1, b_2, b_3 (теорема Галуччи).

2. *Коллинеации*

Александров, гл. XXIII, § 2, п. 3.
Моденов, гл. XV, § 201.

1539. В проективно-аффинном пространстве введена аффинная система координат $Oxyz$. Дано проективное преобразование в однородных координатах

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\lambda x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\lambda x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\lambda x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.
\end{aligned}$$

1) Найти в аффинных координатах формулы, по которым преобразуются собственные точки пространства, не лежащие на плоскости

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0.$$

2) Найти прообраз несобственной плоскости при этом преобразовании.

3) Найти образ несобственной плоскости при этом преобразовании.

1540. В проективном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$. Найти проективное преобразование, которое переводит плоскости

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0,\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=0,\\
a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=0,
\end{aligned}
$$

из которых никакие три не проходят через одну прямую, соответственно в плоскости $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, а точку $(b_1:b_2:b_3:b_4)$ — в единичную точку $E=(1:1:1:1)$.

1541. Найти проективное преобразование, которое переводит точки $A_1=(1:0:0:0)$, $A_2=(0:1:0:0)$, $A_3=(0:0:1:0)$, $A_4=(0:0:0:1)$, $E=(1:1:1:1)$ соответственно в точки $A_1'=(a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41})$, $A_2'=(a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42})$, $A_3'=$ $=(a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43})$, $A_4'=(a_{14}:a_{24}:a_{34}:a_{44})$, $E'=(b_1:b_2:b_3:b_4)$ при условии, что никакие четыре из точек A_1', A_2', A_3', A_4', E' не принадлежат одной плоскости.

1542. Найти все проективные преобразования, при которых вершины базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ являются инвариантными точками.

1543. Найти общий вид проективвых преобразований проективного пространства, при которых ребра A_1A_2 и A_3A_4 базисного тетраэдра инвариантны.

1544. Найти общий вид проективных преобразований проективного пространства, при которых инвариантны все точки ребер A_1A_2 и A_3A_4 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

1545. Найти общий вид проективных преобразований проективного пространства, при которых ребра базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ переходят в ребра, им противоположные.

1546. Найти общий вид проективных преобразований проективного пространства, при которых вершины A_1, A_2, A_3, A_4 базисного тетраэдра переходят в точки, лежащие на противоположных гранях.

1547. Прямые A_1E, A_2E, A_3E, A_4E, соединяющие вершины базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с единичной точкой E, пересекают противоположные этим вершинам грани $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ соответственно в точках E_1, E_2, E_3, E_4. Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходят соответственно в точки E_1, E_2, E_3, E_4, а точка E инвариантна.

1548*. 1) В проективном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$. Найти проективное преобразование, имеющее только две инвариантные точки $A_1 \doteq (1:0:0:0)$, $A_2=(0:0:1:0)$ и только одну инвариантную прямую A_3A_4.

2) Какие проективные преобразования порождает рассматриваемое преобразование на прямых A_1A_2 и A_3A_4? При каком условии эти преобразования будут инволюционными?

1549*. 1) Проективное преобразование не имеет инвариантных точек и плоскостей, но имеет две скрещивающиеся инвариантные прямые. Как запишется это преобразование в координатах, если ребра A_1A_2 и A_3A_4 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ расположить на инвариантных прямых?

2) Какие преобразования порождает рассматриваемое проективное преобразование на прямых A_1A_2 и A_3A_4?

1550*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование P, при котором точки A_1, A_2 и все точки прямой A_3A_4 инвариантны.

2) Какое проективное преобразование порождается преобразованием P в плоскости $A_1A_3A_4$?

3) Какое проективное преобразование порождает преобразование P на ребрах тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$?

1551*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3 и прямая A_3A_4 инвариантны.

2) Какие проективные преобразования порождаются этим преобразованием на прямой A_3A_4?

1552*. В проективном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$. Какое проективное преобразование порождается в плоскости $A_1A_2A_3$ проективным преобразованием, оставляющим инвариантными все точки прямых A_1A_2 и A_3A_4?

1553*. В проективном пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

Найти проективное преобразование, при котором все точки плоскости $A_1A_2A_3$ инвариантны и ребро A_1A_4 является инвариантной прямой.

1554. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$. Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2 и плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ будут инвариантны.

1555*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходят соответственно в точки A_2, A_1, A_4, A_3 и точка E — в точку $(1:-1:1:-1)$.

2) Найти инвариантные точки, инвариантные плоскости и инвариантные прямые этого преобразования.

3) Какие проективные преобразования порождаются этим преобразованием на прямых A_1A_2 и A_3A_4?

1556*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование, при котором все точки плоскости $A_1A_2A_3$ и точка A_4 инвариантны, а единичная точка E переходит в точку $(1:1:1:k)$, $k \neq 1$.

2) Найти инвариантные плоскости и инвариантные прямые этого преобразования.

3) При каком необходимом и достаточном условии это преобразование будет инволюционным?

4) Какие проективные преобразования порождаются рассматриваемым преобразованием в плоскостях, проходящих через прямую A_4E?

1557*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходят соответственно в точки A_2, A_1, A_4, A_3 и точка E инвариантна.

2) Найти инвариантные точки, инвариантные плоскости и инвариантные прямые этого преобразования.

3) Какие проективные преобразования порождаются этим преобразованием на прямых A_1A_2 и A_3A_4?

1558*. В пространстве введена проективная система координат $A_1A_2A_3A_4E$.

1) Найти проективное преобразование, при котором точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходят соответственно в точки A_2, A_3, A_4, A_1 и точка E инвариантна.

2) Найти инвариантные точки, инвариантные плоскости и инвариантные прямые этого преобразования.

3) Какие проективные преобразования порождаются рассматриваемым преобразованием на его инвариантных прямых?

1559*. Пусть π и α — две различные плоскости, а O и O' — две различные точки, не лежащие на плоскостях π и α. Пусть M — произвольная точка плоскости π, P — точка пересечения прямой OM с плоскостью α, M' — точка пересечения прямой $O'P$ с плоскостью π. Доказать. что преобразование, при котором точке M ставится в соответствие точка M', является гиперболической гомологией, осью которой является прямая пересечения плоскостей π и α, а центром — точка пересечения прямой OO' с плоскостью π.

1560*. Дано проективное преобразование:

$$\begin{aligned}
kx_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
kx_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
kx_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
kx_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}$$

— характеристический полином матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

этого преобразования. Доказать, что:

1) координаты $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ инвариантных точек этого преобразования определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + a_{34}x_4 &= 0,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44}-\lambda)x_4 &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где λ — корень характеристического полинома;

2) координаты $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ инвариантных плоскостей находятся из системы

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)u_1+a_{21}u_2+a_{31}u_3+a_{41}u_4&=0,\\ a_{12}u_1+(a_{22}-\lambda)u_2+a_{32}u_3+a_{42}u_4&=0,\\ a_{13}u_1+a_{23}u_2+(a_{33}-\lambda)u_3+a_{43}u_4&=0,\\ a_{14}u_1+a_{24}u_2+a_{34}u_3+(a_{44}-\lambda)u_4&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

где λ — корень того же характеристического полинома;

3) если λ — простой корень характеристического полинома, то соответствующие ему инвариантная точка и плоскость, определяемые из систем (1) и (2), не инцидентны.

1561*. Дано проективное преобразование:

$$\begin{aligned}kx'_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\ kx'_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\ kx'_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\ kx'_4&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4.\end{aligned}$$

Пусть

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda\end{vmatrix}$$

— характеристический полином матрицы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$$

этого преобразования.

Найти канонический вид этого преобразования в зависимости от корней λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 характеристического полинома и ранга матрицы $A-\lambda E$ в случае, если λ — кратный корень характеристического полинома.

Рассмотреть следующие случаи:

1) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — действительные и простые корни;

2) λ_1, λ_2 — действительные и различные корни; λ_3, λ_4 — комплексные сопряженные корни: $\lambda_{3,4}=\alpha\pm\beta i$, $\beta\neq 0$;

3) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — комплексные простые корни: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, $\beta\neq 0$; $\lambda_{3,4}=\gamma\pm\delta i$, $\delta\neq 0$;

4) λ_1 и λ_2 — действительные и простые корни, $\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}\,(A-sE)=3$;

5) λ_1 и λ_2 — действительные и простые корни, $\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

6) $\lambda_1=\lambda_2=s$ — действительные корни, λ_3, λ_4 — комплексные сопряженные корни: $\lambda_{3,4}=\alpha\pm\beta i$, $\beta\neq 0$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=3$;

7) $\lambda_1=\lambda_2=s$ — действительные корни, λ_3, λ_4 — комплексные сопряженные корни: $\lambda_{3,4}=\alpha\pm\beta i$, $\beta\neq 0$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

8) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — действительные корни, $\lambda_1=\lambda_2=s\neq\lambda_3=\lambda_4=t$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=3$, $\mathrm{Rg}(A-tE)=3$;

9) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — действительные корни, $\lambda_1=\lambda_2=s\neq\lambda_3=\lambda_4=t$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=3$, $\mathrm{Rg}(A-tE)=2$;

10) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — действительные корни, $\lambda_1=\lambda_2=s\neq\lambda_3=\lambda_4=t$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=\mathrm{Rg}(A-tE)=2$;

11) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — комплексные корни, $\lambda_1=\lambda_2=s=\alpha+\beta i$, $\lambda_3=\lambda_4=t=\alpha-\beta i$, $\beta\neq 0$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=\mathrm{Rg}(A-tE)=3$;

12) λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — комплексные корни, $\lambda_1=\lambda_2=s=\alpha+\beta i$, $\lambda_3=\lambda_4=t=\alpha-\beta i$, $\beta\neq 0$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=\mathrm{Rg}(A-tE)=2$;

13) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s\neq\lambda_4$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=3$;

14) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s\neq\lambda_4$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

15) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=s\neq\lambda_4$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=1$;

16) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=3$;

17) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=2$;

18) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=1$;

19) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=s$, $\mathrm{Rg}(A-sE)=0$.

1562*. Найти инвариантные точки, инвариантные плоскости и инвариантные прямые проективного преобразования, заданного в канонической системе координат $A_1A_2A_3A_4E$ в зависимости от канонического вида этого преобразования (см. задачу 1561).

3. Корреляции. Поляритет

1563. Корреляцией или коррелятивным преобразованием проективного пространства называется отображение множества всех точек пространства на множество всех его плоскостей, определяемое соотношениями:

$$\begin{aligned}\lambda u_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\ \lambda u_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\ \lambda u_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\ \lambda u_4&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4,\end{aligned}\qquad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\neq 0,$$

где $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ — координаты произвольной точки пространства, а $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ — координаты плоскости, соответствующей этой точке.

Доказать, что при корреляции:

1) четырем точкам, лежащим в одной плоскости, соответствуют четыре плоскости, проходящие через одну точку;

2) четыре плоскости, проходящие через одну точку, соответствуют четырем точкам, лежащим в одной плоскости;

3) трем точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три плоскости, проходящие через одну прямую;

4) три плоскости, проходящие через одну прямую, соответствуют трем точкам, лежащим на одной прямой.

1564. Доказать, что если множеству точек плоскости $[v_1 : v_2 : v_3 : v_4]$ при корреляции

$$\begin{aligned}
\lambda u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\lambda u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\lambda u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\lambda u_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4
\end{aligned}$$

соответствует связка плоскостей с центром $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$, то

$$\begin{aligned}
\lambda v_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4,\\
\lambda v_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4,\\
\lambda v_3 &= a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + a_{43}y_4,\\
\lambda v_4 &= a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4.
\end{aligned}$$

1565. Найти корреляцию проективного пространства, при которой каждой точке $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ соответствует плоскость $[u_1 : u_2 : u_3 : u_4]$, проходящая через эту точку.

1566*. Корреляция

$$\begin{aligned}
\lambda u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\lambda u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\lambda u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\lambda u_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4
\end{aligned}$$

называется поляритетом П, если матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

является симметричной. Доказать, что:

1) если плоскость α является образом точки A при поляритете П и B — точка, лежащая в плоскости α, то точке B соответствует плоскость β, проходящая через точку A;

2) если при корреляции произвольной точке A соответствует плоскость α и любой точке B, лежащей в плоскости α, соответствует плоскость β, проходящая через точку A, то эта корреляция есть поляритет.

Если точке A при поляритете соответствует плоскость α, то точка A называется полюсом плоскости α при поляритете П, а плоскость α называется полярной плоскостью точки A (при поляритете П).

1567*. Доказать, что если при корреляции каждой вершине тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ соответствует противолежащая ей грань, то такая корреляция является поляритетом.

1568*. Точки A и B называются полярно сопряженными при поляритете П, если каждая из этих точек лежит на полярной плоскости другой точки.

Плоскости α и β называются полярно сопряженными при поляритете П, если каждая из этих плоскостей проходит через полюс другой плоскости.

Дан поляритет проективного пространства:

$$\lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$
$$\lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$
$$\lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$
$$\lambda u_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

При каком необходимом и достаточном условии будут полярно сопряжены:

1) две точки $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ и $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$;

2) две плоскости $[u_1 : u_2 : u_3 : u_4]$ и $[v_1 : v_2 : v_3 : v_4]$?

4. Поверхности второго порядка в проективном пространстве

Александров, гл. XXIII, §§ 4—8.
Моденов, гл. XV, §§ 212—217.

1569*. В проективно-аффинном пространстве введена аффинная система координат $Oxyz$.

Какими несобственными точками надо дополнить:

1) двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

2) эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p>0, \quad q>0,$$

для получения овальной поверхности второго порядка?

Какими несобственными точками надо дополнить:

3) однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

4) гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p>0, \quad q>0,$$

для получения тороидальной поверхности второго порядка?

Какими несобственными точками надо дополнить:

5) конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

6) эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

7) гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

8) параболический цилиндр

$$y^2=2px$$

для получения действительного конуса второго порядка в проективно-аффинном пространстве?

1570*. Найти в однородных координатах проективное преобразование проективно-аффинного пространства, при котором

1) двуполостный гиперболоид

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

и

2) эллиптический параболоид

$$2z=x^2+y^2,$$

дополненные несобственными точками до овальных поверхностей второго порядка, преобразуются в эллипсоид

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Как преобразуются при этих преобразованиях собственные точки проективно-аффинного пространства?

1571*. Найти в однородных координатах проективное преобразование проективно-аффинного пространства, при котором однополостный гиперболоид

$$x^2+y^2-z^2=1,$$

дополненный несобственными точками до тороидальной поверхности второго порядка, переходит в гиперболический параболоид

$$2z=x^2-y^2,$$

дополненный несобственными точками до тороидальной поверхности второго порядка. Как преобразуются при этом преобразовании собственные точки проективно-аффинного пространства?

1572. Определить проективный класс следующих поверхностей второго порядка:

1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+$
$+4x_2x_3+4x_2x_4+6x_3x_4=0;$

2) $x_1^2+2x_2^2+x_3^2-3x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+$
$+4x_3x_4+4x_2x_4=0;$

3) $x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+$
$+4x_2x_3+4x_2x_4+2x_3x_4=0;$

4) $2x_1^2-3x_2^2-x_4^2-x_1x_2-x_1x_3-3x_2x_3+4x_2x_4=0.$

1573*. При каком необходимом и достаточном условии поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно проективной системы координат:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\\ +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0,$$

является действительной овальной поверхностью второго порядка?

1574. Доказать, что любая плоскость проективного пространства пересекает поверхность второго порядка по линии второго порядка.

1575*. Относительно проективной системы координат в проективном пространстве задана поверхность второго порядка общим уравнением:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+\\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+\\ +2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии плоскость

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

пересекает эту поверхность по паре прямых (действительных или мнимых, различных или совпадающих)?

1576*. Уравнение поверхности второго порядка в проективном пространстве является или уравнением действительной невырождающейся поверхности второго порядка, или уравнением действительного конуса второго порядка. Составить уравнение касательной плоскости к этой поверхности в данной на ней точке $M_0=(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0)$ (в случае конуса точка M_0 отлична от вершины конуса).

1577*. Доказать, что касательная плоскость к поверхности второго порядка пересекает ее по линии второго порядка, распадающейся на пару прямых (действительных или мнимых, различных или совпадающих).

1578*. Доказать, что:

1) касательная плоскость к действительной овальной поверхности второго порядка пересекает эту поверхность по паре мнимых пересекающихся прямых, действительной точкой пересечения которых является точка касания;

2) касательная плоскость к тороидальной поверхности второго порядка пересекает ее по двум действительным прямым, пересекающимся в точке касания;

3) касательная плоскость к действительному конусу второго порядка в точке, отличной от его вершины, пересекает конус по двум совпадающим прямым;

4) касательные плоскости к тороидальной поверхности второго порядка в двух различных точках одной и той же прямолинейной образующей различны;

5) касательные плоскости в двух различных точках одной и той же образующей конуса второго порядка совпадают.

1579*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задана действительная невырождающаяся поверхность S второго порядка:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

1) Составить уравнение конуса K с вершиной $M_0 = (x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0)$, описанного около данной поверхности.

2) Доказать, что линия касания конуса K с поверхностью S плоская, и составить уравнение той плоскости, в которой она расположена.

1580. Составить уравнение семейства поверхностей второго порядка, касающихся двух граней $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в точках $A_3 = (0:0:1:0)$, $A_4 = (0:0:0:1)$.

1581*. Доказать, что два конуса, описанные около поверхности второго порядка, пересекаются по двум плоским линиям второго порядка.

1582*. 1) Составить уравнение поверхности второго порядка, если известно, что ребра A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 базисного тетраэдра и единичная точка проективной системы координат лежат на его поверхности.

2) Составить уравнения двух серий прямолинейных образующих этой поверхности.

1583*. Составить уравнение пучка поверхностей второго порядка, касающихся поверхности $F = 0$ по линии пересечения этой поверхности с гранью $A_2A_3A_4$ базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

1584. Составить уравнение пучка поверхностей второго порядка, проходящих через линию пересечения поверхности второго порядка $F=0$ с гранями $x_1=0$, $x_2=0$.

1585*. Доказать, что если в пространстве заданы 7 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой и никакие 4 не лежат в одной плоскости, то существует 8-я точка, обладающая тем свойством, что любая поверхность второго порядка, проходящая через данные 7 точек, проходит и через эту 8-ю точку.

1586. Найти координаты полюса плоскости $u_1x_1+u_2x_2+$ $+u_3x_3+u_4x_4=0$ относительно невырождающейся поверхности второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$$
$$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.$$

1587. Найти координаты полюса плоскости $u_1x_1+u_2x_2+$ $+u_3x_3+u_4x_4=0$ относительно каждой из поверхностей: 1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$; 2) $x_1^2+x_2^2-2x_3x_4=0$.

1588. Поверхность второго порядка задана уравнением

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$$
$$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии относительно этой поверхности будут полярно сопряжены:

1) две точки $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и $(y_1:y_2:y_3:y_4)$;

2) две плоскости $[u_1:u_2:u_3:u_4]$ и $[v_1:v_2:v_3:v_4]$.

1589*. В проективной системе координат $A_1A_2A_3A_4E$ задано уравнение поверхности S второго порядка

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0.$$

1) Доказать, что тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ автополярный относительно этой поверхности.

2) Доказать, что точка A_4 является внутренней точкой поверхности S, а точки A_1, A_2, A_3 — внешними точками.

1590*. В проективной системе координат $A_1A_2A_3A_4E$ задано уравнение поверхности второго порядка

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0.$$

1) Доказать, что тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ автополярный.

2) Доказать, что точки A_1 и A_2 лежат по одну сторону от этой поверхности, а точки A_3 и A_4 — по другую ее сторону.

1591*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задано уравнение поверхности второго порядка $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$.

1) Составить уравнения шести касательных плоскостей α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 к поверхности в точках ее пересечения с ребрами базисного тетраэдра.

2) Какие из этих плоскостей проходят через единичную точку проективной системы координат?

3) Найти координаты восьми точек M_i, в каждой из которых пересекаются касательные плоскости α_i, β_j, γ_k $(i, j, k=1, 2)$.

1592*. Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$ в проективном пространстве задано уравнение тороидальной поверхности S второго порядка

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0.$$

1) Составить уравнения восьми касательных плоскостей α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 к поверхности S в точках ее пересечения с ребрами базисного тетраэдра.

2) Какие из этих плоскостей проходят через единичную точку проективной системы координат?

3) Доказать, что любые четыре плоскости α, β, γ, δ проходят через одну точку, и найти восемь точек пересечения всех таких четверок плоскостей.

1593. 1) Составить уравнения касательных плоскостей α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 к поверхности

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0,$$

проведенных к ней через ребра A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$. Найти точки касания.

2) Найти точки пересечения касательных плоскостей α, β, γ (взятых по одной из каждой пары α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2).

1594*. 1) Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0,$$

проведенных к ней через ребра A_1A_3, A_2A_3, A_1A_4, A_2A_1 базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ проективной системы координат $A_1A_2A_3A_4E$. Найти точки касания.

2) Найти точки пересечения этих касательных плоскостей.

ГЛАВА X
МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Векторные пространства

Александров, гл. XII, §§ 1—5.
Гельфанд, гл. I, § 1.
Ефимов и Розендорн, гл. I.

Во всех задачах этого параграфа базис произвольный.

1595. Даны три вектора $a_1=\{2, 3, 4, 5\}$, $a_2=\{-3, 6, -6, -4\}$, $a_3=\{-3, 3, -6, -5\}$. Установить, будут ли эти векторы линейно зависимы.

1596. Даны четыре вектора $a_1=\{1, 2, 3, 4\}$, $a_2=\{4, 3, 2, 1\}$, $a_3=\{-1, 1, 3, 5\}$, $a_4=\{0, 1, 2, 3\}$. Показать, что эти векторы линейно зависимы, найти максимальную подсистему линейно независимых векторов и выразить остальные векторы системы через векторы этой подсистемы.

1597. Даны четыре вектора: $a_1=\{1, 2, 3, 4\}$, $a_2=\{4, 3, 2, 1\}$, $a_3=\{-1, 0, 1, 2\}$, $a_4=\{1, 1, 1, 2\}$. Показать, что эти векторы линейно зависимы, найти максимальную подсистему линейно независимых векторов и выразить остальные векторы системы через векторы этой подсистемы.

1598. Даны пять векторов: $a_1=\{2, -1, 3, 5\}$, $a_2=\{4, -3, 1, 3\}$, $a_3=\{3, -2, 3, 4\}$, $a_4=\{4, -1, 15, 17\}$, $a_5=\{7, -6, -7, 0\}$. Найти линейно независимую подсистему этой системы векторов и выразить остальные векторы системы через векторы этой подсистемы.

1599. Даны два вектора: $a_1=\{4, 4, 6, 8\}$, $a_2=\{1, 2, 3, 4\}$. Дополнить эту систему до базиса всего пространства базисными векторами $e_1=\{1, 0, 0, 0\}$, $e_2=\{0, 1, 0, 0\}$, $e_3=\{0, 0, 1, 0\}$, $e_4=\{0, 0, 0, 1\}$ и выразить через векторы нового базиса не вошедшие в него векторы старого базиса.

1600. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы. Будут ли линейно зависимыми векторы

$$b_1=a_2+a_3+\ldots+a_n,\ b_2=a_1+a_3+\ldots+a_n,\ \ldots$$
$$\ldots,\ b_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}?$$

1601. В пространстве V даны два подпространства: V_1 с базисом $\boldsymbol{a}_1=\{1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{2, 1, 0, 0\}$ и V_2 с базисом $\boldsymbol{b}_1=\{3, 2, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{4, 3, 2, 1\}$. Показать, что пространство V есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2, и представить вектор $\boldsymbol{x}=\{1, 2, 3, 5\}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, из которых первый принадлежит V_1, а второй V_2.

1602*. Найти базис суммы и пересечения подпространств A и B векторного пространства V, имеющих соответственно базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$.

1603. Найти базис суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2, имеющих соответственно базисы $\boldsymbol{a}_1=\{1, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{0, 1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3=\{0, 0, 1, 1\}$ и $\boldsymbol{b}_1=\{1, 0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{0, 2, 1, 1\}$, $\boldsymbol{b}_3=\{1, 2, 1, 2\}$.

1604. Найти базис суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2, имеющих соответсгвенно базисы $\boldsymbol{a}_1=\{1, 2, 0, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1, 1, 0\}$ и $\boldsymbol{b}_1=\{1, 0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{1, 3, 0, 1\}$.

1605. Найти базис суммы и пересечения подпространств четырехмерного пространства, одно из которых задано своим базисом $\boldsymbol{a}_1=\{1, 2, 0, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1, 1, 0\}$, а другое — системой уравнений

$$3x_1-x_2-3x_3=0, \qquad x_2-3x_4=0.$$

1606*. В черырехмерном пространстве даны две системы векторов. У векторов первой системы две координаты равны $+1$, а две другие -1. У векторов второй системы две последние координаты равны $+1$. Найти базис суммы и пересечения линейных оболочек этих систем векторов.

1607. Подпространство V_1 четырехмерного пространства V задано своим базисом $\boldsymbol{a}_1=\{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{0, 1, 1, 1\}$, а подпространство V_2 — системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0. \end{aligned}\right\}$$

Доказать, что $V=V_1 \oplus V_2$, и представить вектор $\boldsymbol{x}=\{1, 2, 3, 4\}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ так, что $\boldsymbol{y} \in V_1$, $\boldsymbol{z} \in V_2$, и найти это представление.

1608. Дана прямая $x_1=8t$, $x_2=4t$, $x_3=3t$, $x_4=-3t$ и гиперплоскость $2x_1-2x_2-x_3+x_4=0$. Представить вектор $\boldsymbol{x}=\{1, 2, 3, 4\}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{y}$ принадлежал данной прямой, а вектор $\boldsymbol{z}$ — данной гиперплоскости.

1609*. Доказать, что если $\boldsymbol{a}_1=\{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}, \ldots, \boldsymbol{a}_k=\{a_{k1}, \ldots, a_{kn}\}$ — базис подпространства V_0 векторного пространства V и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то подпространство V_0 совпадает с пространством решений следующей системы $n-k$ независимых уравнений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1\,k+1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k\,k+1} \\ x_1 & \ldots & x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1\,k+2} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k\,k+2} \\ x_1 & \ldots & x_k & x_{k+2} \end{vmatrix}=0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kn} \\ x_1 & \ldots & x_k & x_n \end{vmatrix}=0.$$

1610*. Доказать, что две линейно независимые системы векторов

$$\boldsymbol{a}_1=\{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}, \ldots, \boldsymbol{a}_k=\{a_{k1}, \ldots, a_{kn}\},$$
$$\boldsymbol{b}_1=\{b_{11}, \ldots, b_{1n}\}, \ldots, \boldsymbol{b}_k=\{b_{k1}, \ldots, b_{kn}\}$$

определяют одно и то же k-мерное подпространство тогда и только тогда, когда все детерминанты k-го порядка, составленные из столбцов матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

пропорциональны детерминантам матрицы

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{k1} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

составленным из столбцов с теми же номерами.

§ 2. Точечные аффинные пространства

Александров, гл. XIV, §§ 1—4.
Ефимов и Розендорн, гл. III, §§ 1—3, 7.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

1611. Доказать, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то:

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$;

2) четыре точки A, B, C, D лежат или на одной прямой, или в одной (двумерной) плоскости.

1612. Найти параметрические и общие уравнения плоскости, проходящей через три точки (—1, 1, 0, 1, 5), (2, —1, 3, 4, 0), (1, 2, 7, 6, 1).

1613. Найти параметрические уравнения плоскости по общим ее уравнениям

$$\left.\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5-3=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5-6=0.\end{aligned}\right\}$$

1614. Даны две прямые: первая прямая определяется точкой (1, 0, —2, 1) и вектором {1, 2, —1, —3}, а вторая — точкой (0, 1, 1, —1) и вектором {2, 3, —2, —4}. Найти плоскость минимальной размерности, содержащую обе прямые.

1615. Написать параметрические и общие уравнения плоскости минимальной размерности, проходящей через две прямые

$$x_1=1+t,\quad x_2=2+t,\quad x_3=3+t,\quad x_4=4+t$$

и

$$x_1=0,\quad x_2-x_3+1=0,\quad x_4-3=0.$$

1616. Определить взаимное расположение прямой

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4-3=0,\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-2=0,\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4-7=0\end{aligned}\right\}$$

и гиперплоскости

$$5x_1+7x_2+9x_3+2x_4-20=0,$$

лежащих в четырехмерном пространстве.

1617. В четырехмерном пространстве дана плоскость $5x_1+9x_3+2x_4-20=0$, $x_2=0$ и прямая

$$\left.\begin{aligned} x_1+4x_2+5x_3+2x_4-2=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4-3=0,\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4-7=0.\end{aligned}\right\}$$

Определить взаимное расположение прямой и плоскости.

1618*. Дана прямая $x_1=1+t$, $x_2=2+2t$, $x_3=3+3t$, $x_4=4+4t$ и плоскость $x_1+x_2+1=0$, $x_3-x_4-1=0$. Показать, что прямая и плоскость не пересекаются, и написать уравнение плоскости минимальной размерности, проходящей через данную плоскость параллельно данной прямой.

1619*. Дана прямая $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = 3 + 4t$, $x_4 = 4 + 5t$ и плоскость $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 - x_4 - 1 = 0$. Показать, что прямая и плоскость не пересекаются, и написать уравнения параллельных гиперплоскостей, проходящих через данную прямую и данную плоскость.

1620*. Доказать, что если плоскость π_1 имеет размерность r, а плоскость π_2 — размерность s, то существует плоскость π, размерность которой не превосходит $r + s + 1$ и которая содержит плоскости π_1 и π_2. В частности, доказать, что две прямые содержатся в плоскости, размерность которой меньше или равна 3, прямая и двумерная плоскость — в плоскости, размерность которой меньше или равна 4; две двумерные плоскости — в плоскости, размерность которой меньше или равна 5.

1621. В каждом из следующих случаев установить взаимное расположение плоскостей α и β, если плоскость α определяется точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, а плоскость β — точкой B и векторами $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$:

1) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (0, 0, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{0, 0, 0, 1, 0\}$;

2) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{0, 0, 0, 1, 0\}$;

3) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (0, 0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{1, 1, 1, 0, 0\}$;

4) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (0, 1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{0, 0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{1, 1, 1, 0, 0\}$;

5) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (0, 0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{1, 1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{1, -1, 0, 0, 0\}$;

6) $A = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\}$,
$B = (2, 1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = \{1, 1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{1, -1, 0, 0, 0\}$.

1622*. В пятимерном пространстве плоскость α определяется точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$; плоскость β — точкой B и векторами $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$. Как связано взаимное расположение плоскостей α и β с линейной зависимостью между векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\overrightarrow{AB}$?

1623*. В пятимерном пространстве двумерные плоскости определяются системами уравнений

$$\sum_{i=1}^{5} a_{ij}x_i + b_j = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ 3;$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_{ij}x_i + b_j = 0, \qquad j = 4,\ 5,\ 6.$$

Определить взаимное расположение этих плоскостей с помощью рангов r и R матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & b_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & b_5 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & b_6 \end{pmatrix}.$$

1624*. Пусть плоскость π_1 определяется точкой A_1 и подпространством V_1, а плоскость π_2 — точкой A_2 и подпространством V_2. Доказать, что плоскости π_1 и π_2 пересекаются тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ принадлежит сумме подпространств $V_1 + V_2$.

1625*. Доказать, что если плоскость α не имеет общих точек с гиперплоскостью π, то α и π параллельны.

1626*. Для того чтобы две плоскости π_1 и π_2, не имеющие общих точек, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы обе они содержались в плоскости π размерности $r+1$, где r — наибольшая из размерностей плоскостей π_1 и π_2.

1627*. Доказать, что через две непересекающиеся плоскости можно провести параллельные гиперплоскости.

1628*. Пусть π_1 и π_2 — непересекающиеся плоскости конечномерного пространства. Найти плоскость π минимальной размерности, содержащую плоскость π_1 и параллельную плоскости π_2.

1629. Доказать, что диагонали k-мерного параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

1630*. 1) Найти отношение, в котором гиперплоскость π, проходящая через концы n ребер n-мерного параллелепипеда, выходящих из одной вершины O, делит диагональ $\overline{OD}$ параллелепипеда, выходящую из той же вершины.

2) Доказать, что точка пересечения гиперплоскости π и прямой OD является центром $(n-1)$-мерного симплекса, получающегося при пересечении гиперплоскости π с $(n-1)$-мерными гранями параллелепипеда, содержащими вершину O.

1631*. Доказать, что если через концы n ребер n-мерного параллелепипеда, выходящих из одной вершины O, провести $(n-1)$-мерную плоскость π, а затем через все вершины параллелепипеда провести $(n-1)$-мерные плоскости, параллельные плоскости π, то эти плоскости вместе с π разобьют диагональ параллелепипеда, выходящую из вершины O, на n равных частей.

1632*. 1) Доказать, что все прямые, соединяющие центры граней симплекса с центрами противоположных им граней, проходят через одну точку — центр симплекса.

2) Найти отношение, в котором центр симплекса делит направленный отрезок с началом в центре k-мерной грани и концом в центре противоположной $(n-k-1)$-мерной грани.

§ 3. Евклидовы пространства

Александров, гл. XXIV.
Гельфанд, гл. I, §§ 2, 3.
Ефимов и Розендорн, гл. VIII, §§ 11—13.

1. Векторные евклидовы пространства

Во всех задачах этого параграфа базис предполагается ортонормальным.

1633. Относительно ортонормального базиса даны три вектора: $\{1, 2, 2, 1\}$, $\{1, 1, -5, 3\}$, $\{3, 2, 8, -7\}$. Найти ортонормальный базис подпространства, натянутого на эти векторы, и дополнить его до ортонормального базиса всего пространства.

1634. Относительно ортонормального базиса пятимерного пространства дана гиперплоскость $x_1-x_2-2x_3+x_4=0$. Найти новый ортонормальный базис, первые четыре вектора которого лежали бы в данной гиперплоскости.

1635. Дана гиперплоскость $2x_1-2x_2-x_3+x_4=0$ и вектор $\boldsymbol{x}=\{2,\ 0,\ 4,\ 6\}$. Представить вектор $\boldsymbol{x}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{y}$ лежал в данной гиперплоскости, а вектор $\boldsymbol{z}$ был к ней ортогонален.

1636. Пусть V' — подпространство евклидова пространства V, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ — векторы из V и $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{z}_2$, причем векторы $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ принадлежат V', а $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$ ортогональны к V'. Доказать, что если $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ принадлежит V', то $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_2$.

1637*. Доказать, что если A и B — подпространства евклидова пространства, причем $r=\dim A<\dim B=s$, то в B содержится подпространство C, ортогональное к A, такое, что $\dim C\geqslant s-r$ *).

1638*. Доказать, что если A и B — подпространства евклидова пространства одинаковой (конечной) размерности и в B содержится ненулевой вектор, ортогональный к A, то и A содержит вектор, ортогональный к B.

1639. Пусть V' — подпространство евклидова пространства V, $\boldsymbol{x}$ — вектор, не принадлежащий V', $\boldsymbol{y}$ — его ортогональная проекция на V'. Доказать: для того чтобы вектор $\boldsymbol{u}$, принадлежащий V', был ортогонален к вектору $\boldsymbol{x}$, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален к вектору $\boldsymbol{y}$.

1640. Найти ортогональную проекцию вектора $\{4,\ -1,\ -3,\ 4\}$ на подпространство, заданное своим базисом $\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$, $\{1,\ 2,\ 2,\ -1\}$.

1641. Найти ортогональную проекцию вектора $\{7,\ -4,\ -1,\ 2\}$ на подпространство, заданное системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_2+x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+2x_2+2x_3+x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

1642. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ евклидова пространства V на подпространство V', заданное своим базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$, если базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$: 1) ортонормальный; 2) произвольный.

1643*. Пусть V' — подпространство евклидова пространства V и $\boldsymbol{x}$ — вектор, не принадлежащий V'.

1) Доказать, что из всех векторов подпространства V' наименьший угол φ с вектором $\boldsymbol{x}$ образует вектор $\boldsymbol{y}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство V'.

---

*) Символом $\dim A$ обозначается размерность пространства A.

2) Найти угол φ, образуемый вектором $\boldsymbol{x}$ с его ортогональной проекцией $\boldsymbol{y}$ на подпространство V'.

1644. Найти угол между вектором $\{2, 2, 1, 1\}$ и подпространством, заданным своим базисом $\{3, 4, -4, -1\}$, $\{0, 1, -1, 2\}$.

1645. Найти угол между прямой

$$x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4, \quad x_2 = 2x_3$$

и плоскостью

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0.$$

1646*. 1) Доказать, что все векторы подпространства с базисом $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, -1, 1, -1\}$ образуют с подпространством, натянутым на векторы $\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e}_2 = \{0, 1, 0, 0\}$, один и тот же угол.

2) Найти этот угол.

1647*. Найти угол между подпространствами A и B евклидова пространства.

1648*. Найти угол, образуемый с подпространством, натянутым на векторы $\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e}_2 = \{0, 1, 0, 0\}$, подпространствами, натянутыми на векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, в каждом из следующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}_1 = \{2, 3, 1, 6\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{3, 2, -6, -1\}$;
2) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 2, 1, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{2, 1, -2, -1\}$;
3) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{1, 1, 3, -5\}$;
4) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 2, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 1, -1\}$;
5) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{1, -1, 7, -7\}$.

1649*. Найти угол между подпространствами четырехмерного евклидова пространства, одно из которых натянуто на векторы $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, -1, 1, -1\}$, а другое — на векторы $\{2, 2, 1, 0\}$, $\{1, -2, 2, 0\}$.

1650*. Пусть π и π' — k-мерные подпространства евклидова пространства, пересечение которых есть $\mathbf{0}$; $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — ненулевые попарно ортогональные векторы подпространства π; $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_k$ — их ортогональные проекции на подпространство π', также попарно ортогональные друг другу. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ образуют с подпространством π' равные углы, то и все векторы подпространства π образуют с π' один и тот же угол.

1651. В евклидовом пространстве даны два подпространства A и B размерности k, пересечение которых есть $\mathbf{0}$, имеющие ортонормальные базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$; $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ соответственно. В подпространстве A найти такой ортогональный базис, ортогональные проекции векторов которого на подпространство B образуют ортогональную систему.

2. *Точечные евклидовы пространства*

1652*. Доказать, что если A, B, C — три точки евклидова пространства и $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$, $\rho(C, A)$ — расстояния между ними, то $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны и одинаково направлены.

1653. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a.

1654. Найти отношение ортогональной проекции ребра n-мерного куба на его диагональ к диагонали куба.

1655*. Четырехмерный куб задан неравенствами $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найти диагонали этого куба, перпендикулярные к его диагонали $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, и определить углы между ними.

1656*. Найти число диагоналей n-мерного куба, перпендикулярных к одной и той же его диагонали.

1657. Найти угол между диагональю четырехмерного куба и его одномерной, двумерной и трехмерной гранями.

1658. Найти угол между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

1659. 1) Доказать, что гиперплоскость, проведенная через концы n ребер n-мерного куба, выходящих из одной его вершины, перпендикулярна к диагонали куба, выходящей из той же вершины.

2) Найти расстояние от вершины куба до этой гиперплоскости, если ребро куба равно a.

1660*. Доказать, что из всякой точки пространства, не принадлежащей плоскости, можно опустить на эту плоскость перпендикуляр и притом только один. Длина этого перпендикуляра меньше длины каждого отрезка, соединяющего данную точку с произвольной точкой плоскости.

1661*. Доказать, что если две плоскости не имеют общих точек, то существует прямая, являющаяся общим перпендикуляром к обеим плоскостям. Если плоскости абсолютно скрещиваются *), то такая прямая единственна. Длина общего перпендикуляра меньше длины каждого отрезка, концы которого находятся в данных плоскостях.

1662. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M=(5, 1, 0, 8)$ на плоскость, проходящую через три точки:

$$A=(1, 2, 3, 4), \quad B=(2, 3, 4, 5), \quad C=(2, 2, 3, 7).$$

1663. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M=(4, 2, -5, 1)$ на плоскость, заданную системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3+2x_4&=9,\\ 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4&=12.\end{aligned}\right\}$$

1664*. Плоскость проходит через три точки $A=(1, 1, 1, 1)$, $B=(2, 2, 0, 0)$, $C=(1, 2, 0, 1)$, а прямая — через две точки: $D=(1, 1, 1, 2)$, $E=(1, 1, 2, 1)$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости, написать уравнения и найти длину их общего перпендикуляра.

1665*. Плоскость проходит через три точки: $A=(1, 1, 1, 1)$, $B=(3, 0, 1, 1)$, $C=(1, 1, -1, 2)$, а прямая —через две точки: $D=(4, 2, 1, 6)$, $E=(0, 4, 5, 4)$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости и найти расстояние между ними.

1666*. Даны две плоскости: первая плоскость проходит через точки $A_1=(4, 5, 3, 2)$, $B_1=(5, 7, 5, 4)$, $C_1=(6, 3, 4, 4)$, а вторая—через точки $A_2=(1, -2, 1, -3)$, $B_2=(3, -2, 3, -2)$, $C_2=(2, -4, 1, -4)$. Определить взаимное расположение этих плоскостей и найти расстояние между ними.

1667*. Найти кратчайшее расстояние между двумерной гранью единичного четырехмерного куба и его диагональю, не пересекающей эту грань.

1668. Найти расстояние от точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ n-мерного евклидова пространства до гиперплоскости

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0.$$

1669. Найти расстояние h от начала координат до гиперплоскости, отсекающей на осях прямоугольной системы координат отрезки $a_1, \ldots, a_n$.

---

*) Две плоскости называются абсолютно скрещивающимися, если они не имеют общих точек, и не существует двух параллельных прямых, принадлежащих соответственно этим плоскостям.

1670. Найти расстояние от точки $(b_1, \ldots, b_n)$ n-мерного евклидова пространства до прямой $x_1 = a_1 + \lambda_1 t, \ldots$ $\ldots, x_n = a_n + \lambda_n t$.

1671*. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, отложенные от одной точки, служат ребрами n-мерного параллелепипеда. Найти высоту этого параллелепипеда, принимая за его основание $(n-1)$-мерный параллелепипед, построенный на векторах $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

1672*. Доказать, что прямая, соединяющая центры двух противоположных граней правильного симплекса, перпендикулярна к этим граням.

1673*. Найти расстояние h между k-мерной гранью правильного симплекса с ребром 1 и противоположной ей $(n-k-1)$-мерной гранью.

1674*. Найти угол между двумерными гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$ правильного четырехмерного симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$.

1675. Написать формулы преобразования прямоугольных координат четырехмерного пространства, зная, что начала координат обеих систем различны, а концы соответствующих базисных векторов реперов этих систем совпадают.

§ 4. Линейные операторы

1. Линейные операторы в произвольном векторном пространстве

Александров, гл. XII, § 6; гл. XXV, § 1.
Гельфанд, гл. II, §§ 9, 11.
Ефимов и Розендорн, гл. VII, §§ 1, 3—7.

1676*. Доказать, что если f—линейное отображение пространства X на пространство Y, то следующие условия попарно эквивалентны:

1) отображение f взаимно однозначно;

2) ядро отображения f равно **0**.

Если пространство X конечномерно, то каждому из этих условий эквивалентно следующее:

3) размерность образа пространства X равна размерности самого пространства X.

Если, кроме того, размерность пространства X равна размерности пространства Y, то каждому из предыдущих условий эквивалентно условие:

4) f есть отображение X на Y.

1677. Доказать, что конечномерное пространство является суммой образа и ядра линейного оператора тогда и только тогда, когда их пересечение есть **0**.

1678. Доказать, что если A — обратимый оператор, то всякое подпространство, инвариантное относительно A, инвариантно и относительно A^{-1}.

1679. Пусть $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, и собственным вектором оператора B, соответствующим собственному значению μ. Доказать, что $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором:

1) операторов $A+B$ и AB, соответствующим собственным значениям $\lambda+\mu$ и $\lambda\mu$;

2) оператора αA, где α — любое число, соответствующим собственному значению $\alpha\lambda$;

3) оператора A^m, где m — натуральное число или 0, соответствующим собственному значению λ^m;

4) оператора $F(A)$, где F — многочлен, соответствующим собственному значению $F(\lambda)$.

1680*. Доказать, что если все векторы линейного пространства являются собственными векторами линейного оператора A, то все эти векторы соответствуют одному и тому же собственному значению α и линейный оператор имеет вид $A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ (гомотетия).

1681*. Найти матрицу C линейного оператора, переводящего линейно независимые векторы

$$\boldsymbol{a}_1=\{a_{11}, \ldots, a_{1n}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{a}_n=\{a_{n1}, \ldots, a_{nn}\}$$

соответственно в векторы

$$\boldsymbol{b}_1=\{b_{11}, \ldots, b_{1n}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{b}_n=\{b_{n1}, \ldots, b_{nn}\}.$$

1682. Найти линейный оператор, переводящий векторы

$$\boldsymbol{a}_1=\{2, 3, 5, 0\}, \quad \boldsymbol{a}_2=\{0, 1, 2, 0\},$$
$$\boldsymbol{a}_3=\{1, 0, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{a}_4=\{0, 0, 0, 1\}$$

соответственно в векторы

$$\boldsymbol{b}_1 = \{1,\ 1,\ 1,\ 0\},\quad \boldsymbol{b}_2 = \{1,\ 1,\ -1,\ 0\},$$
$$\boldsymbol{b}_3 = \{2,\ 1,\ 2,\ 0\},\quad \boldsymbol{b}_4 = \{0,\ 0,\ 0,\ 2\}.$$

1683. Найти линейный оператор, собственными значениями которого являются числа 2, —3, 5, —1, а соответствующие им собственные векторы суть $\{1, 1, 1, 0\}$, $\{2, 2, 1, 0\}$, $\{1, 0, -1, 0\}$, $\{0, 0, 0, 1\}$.

1684. Найти базисы собственных подпространств линейных операторов, заданных в базисе $\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e}_2 = \{0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e}_3 = \{0, 0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{e}_4 = \{0, 0, 0, 1\}$ следующими матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad 3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$
$$4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1685*. Доказать, что если операторы A и B перестановочны, то всякое собственное подпространство оператора A является инвариантным подпространством для оператора B.

1686*. Если сумма собственных подпространств оператора A совпадает со всем пространством и каждое собственное подпространство оператора A является инвариантным для оператора B, то A и B перестановочны.

1687. Если линейный оператор A перестановочен со всеми линейными операторами, то $A = \lambda E$.

1688*. Доказать, что если собственное подпространство V_λ оператора A, соответствующее собственному значению λ, одномерно и оператор B перестановочен с A, то V_λ содержится в собственном подпространстве V_μ оператора B, соответствующем собственному значению μ оператора B.

1689. Доказать, что если собственные значения оператора A, заданного в n-мерном пространстве, попарно различны и оператор B перестановочен с A, то B имеет n линейно независимых собственных векторов.

1690. Найти инвариантные подпространства оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1691*. 1) Доказать, что если линейный оператор, заданный в n-мерном пространстве, обладает одномерным инвариантным подпространством, то он обладает инвариантными подпространствами всех размерностей от 2 до $n-1$.

2) Из существования $(n-1)$-мерного инвариантного подпространства следует существование одномерного инвариантного подпространства.

1692*. Доказать, что если все характеристические числа матрицы линейного оператора принадлежат полю, над которым построено линейное пространство, то каждое инвариантное подпространство содержит по крайней мере одно одномерное инвариантное подпространство.

1693*. Доказать, что если n-мерное пространство V обладает базисом, состоящим из собственных векторов линейного оператора A, то и всякое его инвариантное подпространство обладает базисом, состоящим из собственных векторов этого оператора.

1694*. Найти все инвариантные подпространства линейного оператора A, заданного в n-мерном пространстве V, имеющего n попарно различных собственных значений. Определить число всех инвариантных подпространств.

1695*. Пусть $V=V_1 \oplus V_2$ — представление пространства V в виде прямой суммы подпространств V_1 и V_2. Оператор A, заданный на пространстве V, называется симметрией относительно подпространства V_1 в направлении V_2, если каждому вектору $x=y+z$, $y \in V_1$, $z \in V_2$, ставится в соответствие вектор $x'=y-z$. Доказать, что: 1) оператор A линейный; 2) для того, чтобы линейный оператор A был инволюционным, необходимо и достаточно, чтобы он был симметрией относительно V_1 в направлении V_2.

1696*. Пусть $V=V_1 \oplus V_2$ — представление пространства V в виде прямой суммы подпространств V_1 и V_2. Оператор A, заданный на пространстве V, называется проектированием пространства V на подпространство V_1 параллельно V_2, если каждому вектору $x=y+z$, $y \in V_1$, $z \in V_2$, ставится в соответствие вектор y.

1) Доказать, что оператор A линейный.

2) Для того чтобы линейный оператор был идемпотентным (т. е. $A^2=A$), необходимо и достаточно, чтобы он был проектированием пространства V на подпространство V_1 параллельно V_2.

1697. Доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — собственные векторы линейного оператора A, соответствующие попарно различным собственным значениям, и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — числа, не равные нулю, то вектор $y=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k$ не является собственным вектором оператора A.

1698*. Найти матрицу линейного оператора, заданного в четырехмерном пространстве, имеющего ровно три одномерных инвариантных подпространства, базисами которых служат векторы $e_1=\{1, 0, 0, 0\}$, $e_2=\{0, 1, 0, 0\}$, $e_3=\{0, 0, 1, 0\}$, соответствующие собственным значениям 1, 2, 3.

1699*. Найти все инвариантные подпространства линейного оператора $y_1=ax_1+x_2$, $y_2=ax_2+x_3$, $\ldots$, $y_{n-1}=$ $=ax_{n-1}+x_n$, $y_n=ax_n$, заданного в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

1700*. Пусть A — линейный оператор, заданный в векторном пространстве V; H — гиперплоскость, все векторы которой являются инвариантными по отношению к оператору A; x — вектор, не принадлежащий H, Ax — его образ, который можно представить в виде $Ax=\lambda x+y$, где $y \in H$. Показать, что для всякого $x \notin H$ число λ не зависит от вектора x.

1701*. Доказать, что если аннулирующий многочлен оператора A имеет степень k, то любой вектор пространства принадлежит инвариантному относительно A подпространству, размерность которого не больше k.

1702. Если оператор A^2 имеет собственный вектор с неотрицательным собственным значением, то оператор A имеет собственный вектор.

1703*. Если все характеристические числа линейного оператора принадлежат полю, над которым построено линейное пространство, и оператор имеет только одно одномерное инвариантное подпространство, то все пространство не может быть представлено в виде прямой суммы инвариантных подпространств, каждое из которых отлично от нулевого подпространства.

1704*. Показать, что если A и B — линейные операторы, то всякое отличное от нуля собственное значение оператора AB является собственным значением оператора BA.

1705. Доказать, что если линейный оператор, заданный в n-мерном пространстве, обладает единственным характеристическим числом α и единственным одномерным инвариантным подпространством с базисом e_1, то существует базис, в котором матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(«жорданова клетка»).

2. Линейные операторы в евклидовом векторном пространстве

Александров, гл. XXV, §§ 2, 5, 6.
Гельфанд, гл. II, § 16, пп. 1, 2, 5.
Ефимов и Розендорн, гл. IX, §§ 1—3, 7, 8, 11.

1706. Найти матрицу преобразования, являющегося ортогональным проектированием четырехмерного пространства на плоскость

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

1707. Найти матрицу преобразования ортогонального проектирования четырехмерного пространства на двумерное подпространство

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

1708. Найти матрицу преобразования симметрии четырехмерного пространства относительно прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

1709. Найти матрицу преобразования симметрии четырехмерного пространства относительно двумерного подпространства

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.$$

1710*. Доказать, что:

1) для того чтобы линейный оператор переводил каждый вектор пространства в вектор, ему ортогональный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был кососимметрическим;

2) в трехмерном пространстве линейный оператор, переводящий каждый вектор в вектор, ему ортогональный, яв-

ляется векторным умножением постоянного вектора a на произвольный вектор;

3) в случае двумерного пространства линейный оператор, переводящий каждый вектор в вектор, ему ортогональный, является произведением поворота всех векторов пространства в одном направлении на угол $\pi/2$ и гомотетии.

1711. Доказать, что если A — самосопряженный оператор, заданный в евклидовом пространстве V, то V представляется в виде прямой суммы ядра и области значений этого оператора.

1712. Доказать: для того, чтобы произведение двух самосопряженных операторов было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы эти операторы были перестановочны.

1713. Доказать: для того, чтобы оператор симметрии евклидова пространства V относительно подпространства V_1 в направлении подпространства V_2 был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы подпространства V_1 и V_2 были ортогональны.

1714*. Доказать: для того, чтобы оператор проектирования пространства V на подпространство V_1 в направлении подпространства V_2 был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы подпространства V_1 и V_2 были ортогональны.

1715. Пусть A — линейный оператор, заданный в евклидовом пространстве V, и A^* — оператор, ему сопряженный. Доказать, что:

1) если $\boldsymbol{e}$ — собственный вектор оператора A^*A и $\boldsymbol{x}$ — вектор, ортогональный к $\boldsymbol{e}$, то векторы $A\boldsymbol{e}$ и $A\boldsymbol{x}$ ортогональны;

2) если для каждого вектора $\boldsymbol{x}$, ортогонального к вектору $\boldsymbol{e}$, векторы $A\boldsymbol{e}$ и $A\boldsymbol{x}$ ортогональны, то вектор $\boldsymbol{e}$ является собственным вектором оператора A^*A.

1716*. Доказать: для того, чтобы линейный оператор A, заданный в конечномерном евклидовом пространстве, переводил ортогональный базис пространства в ортогональную систему векторов, необходимо и достаточно, чтобы векторы этого базиса были собственными векторами оператора A^*A, где A^* — оператор, сопряженный к A.

1717*. Доказать, что отображение евклидова пространства на себя, при котором сохраняется скалярное произведение каждых двух векторов, является линейным.

1718*. Доказать, что отображение евклидова пространства на себя, сохраняющее модуль разности каждых двух векторов, является линейным.

3. Изометрические преобразования в точечном евклидовом пространстве

1719. Пусть E — евклидово пространство; O — точка пространства E; V — соответствующее пространству E векторное пространство; $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ — изометрическое преобразование пространства E; V_1 — собственное подпространство пространства V, соответствующее собственному значению $+1$ оператора A, определенного на пространстве V; V_2 — ортогональное дополнение подпространства V_1; $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ — представление вектора $\boldsymbol{b}$ в виде суммы векторов $\boldsymbol{b}_1 \in V_1$ и $\boldsymbol{b}_2 \in V_2$. Доказать, что в плоскости π_2, определяемой точкой O и подпространством V_2, найдется точка O' такая, что исходное преобразование будет иметь вид $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}_1$, где $\boldsymbol{b}_1$ — вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{b}$ на подпространство V_1.

1720. Доказать: для того, чтобы изометрическое преобразование $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ точечного евклидова пространства E имело инвариантную точку, необходимо и достаточно, чтобы вектор переноса $\boldsymbol{b}$ был ортогонален к собственному векторному подпространству V_1, соответствующему собственному значению $+1$ оператора A.

1721. Доказать, что всякое изометрическое преобразование точечного евклидова пространства обладает либо инвариантной точкой, либо инвариантной прямой.

§ 5. Линейные, билинейные и квадратичные функции

1. Линейные функции

Александров, гл. XIII, § 1.
Гельфанд, гл. I, § 4, п. 1.
Ефимов и Розендорн, гл. IV, § 1.

1722. Доказать, что:

1) если $\boldsymbol{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор n-мерного линейного пространства, то функция $f(\boldsymbol{x})=x_1$ есть линейная функция вектора $\boldsymbol{x}$;

2) всякую линейную функцию $l(\boldsymbol{x})$, заданную в n-мерном пространстве, надлежащим выбором базиса можно привести к виду $l(\boldsymbol{x})=x_1$, где x_1, — первая координата вектора $\boldsymbol{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$.

1723*. Доказать, что:

1) ядро ненулевой линейной функции есть подпространство коразмерности 1;

2) всякое подпространство коразмерности 1 является ядром ненулевой линейной функции (говорят, что подпространство имеет коразмерность 1, если все пространство представимо в виде прямой суммы этого подпространства и подпространства размерности 1).

1724*. Доказать, что две ненулевые линейные функции $L_1(x)$ и $L_2(x)$ имеют одно и то же ядро тогда и только тогда, когда

$$L_2(x)=\lambda L_1(x).$$

1725*. Доказать, что если произведение двух линейных функций, заданных на векторном пространстве, тождественно равно нулю, то по крайней мере одна из этих функций тождественно равна нулю.

2. Билинейные функции

Александров, гл. XIII, §§ 2—5.

Гельфанд, гл. I, § 4, пп. 2—4.

Ефимов и Розендорн, гл. IV, §§ 2, 3.

1726*. Доказать: для того, чтобы билинейная функция, заданная в конечномерном пространстве, представлялась в виде произведения двух линейных функций, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой билинейной функции был равен 1.

1727*. Доказать, что:

1) всякую несимметрическую билинейную форму ранга 1 надлежащим выбором базиса можно привести к виду

$$b(x, y)=x_1y_2,$$

где x_1 — первая координата вектора x, а y_2 — вторая координата вектора y;

2) всякую симметрическую билинейную форму ранга 1 надлежащим выбором базиса можно привести к виду $b(x, y)=\pm x_1y_1$, где x_1 — первая координата вектора x, а y_1 — первая координата вектора y.

1728*. Доказать, что если $b(x, y)$ — билинейная функция, определенная на пространстве V и невырожденная на его конечномерном подпространстве V_1, то V есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2, где V_2 — множество векторов $\boldsymbol{y}$ подпространства V, обладающих тем свойством, что $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ для всякого вектора $\boldsymbol{x} \in V_1$.

1729. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы билинейная функция $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обращалась в нуль при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ для всякого вектора.

1730. Доказать, что ненулевой симметрической билинейной функции соответствует ненулевая квадратичная функция.

1731*. Доказать, что если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — ненулевая билинейная функция, обладающая тем свойством, что для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, удовлетворяющих условию $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, выполняется равенство $b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$, то функция $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является или симметрической или кососимметрической.

1732*. В четырехмерном пространстве дана кососимметрическая билинейная форма

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \\ + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3.$$

Найти канонический вид этой формы и ее канонический базис.

1733*. Доказать, что, какова бы ни была билинейная функция, заданная в пространстве конечной размерности, существует базис, в котором матрица билинейной формы этой функции обладает тем свойством, что ее элементы, не лежащие на главной диагонали и симметричные относительно этой диагонали, имеют противоположные знаки.

3. Квадратичные функции

Александров, гл. XIII, §§ 3—5; гл. XXV, § 7.

Гельфанд, гл. I, § 4, п. 5; §§ 5, 7; гл. II, § 16, пп. 3, 4.

Ефимов и Розендорн, гл. IV, §§ 4—7, 9; гл. IX, §§ 4, 5.

1734*. Пусть $Q(\boldsymbol{x})$ — квадратичная функция, заданная в вещественном векторном пространстве, причем

$$Q(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ при } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \text{ и } Q(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ при } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Доказать, что:

1) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы;

2) в двумерном пространстве с базисом $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ существуют два вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, для которых $Q(\boldsymbol{x}_1) = Q(\boldsymbol{x}_2) = 0$;

3) векторы x_1, x_2 линейно независимы;

4) векторы x_1, x_2 не принадлежат ядру билинейной функции, соответствующей данной квадратичной функции $Q(x)$.

1735*. Пусть $Q(x)$ — квадратичная функция и $Q(a)=0$ для вектора a, не принадлежащего ядру соответствующей ей билинейной функции. Доказать, что функция $Q(x)$ принимает все значения из поля, над которым построено линейное пространство.

1736*. Доказать: для того, чтобы квадратичная функция, заданная на вещественном векторном пространстве, была знакопостоянной, необходимо и достаточно, чтобы множество ее нулей содержалось в ядре соответствующей билинейной функции.

1737. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы квадратичная форма $\sum\limits_{i=1}^{n} ax_i^2+2\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} bx_ix_j$ была положительно определенной.

1738*. Доказать, что:

1) для того чтобы ненулевая квадратичная функция, заданная в конечномерном пространстве над произвольным полем, распадалась в произведение двух линейных функций, необходимо, чтобы ранг квадратичной формы, соответствующей этой функции, был равен 1 или 2;

2) в случае поля комплексных чисел равенство ранга квадратичной функции 1 или 2 является достаточным условием ее распадения в произведение двух линейных функций;

3) для распадения квадратичной функции, заданной в пространстве над полем вещественных чисел, в произведение двух линейных функций, необходимо и достаточно, чтобы ранг этой квадратичной функции был равен 1 или 2, а индексы инерции в случае функции ранга 2 были равны 1.

1739*. Доказать, что:

1) для существования базиса, в котором квадратичная форма, заданная в конечномерном векторном вещественном пространстве, не содержит членов с квадратами координат, необходимо и достаточно, чтобы оба индекса инерции этой квадратичной формы были отличны от нуля;

2) для существования ортонормального базиса, в котором квадратичная форма, заданная в конечномерном евклидовом векторном пространстве, не содержит членов с квадратами координат, необходимо и достаточно, чтобы в каком-нибудь

ортонормальном базисе след матрицы этой квадратичной формы был равен нулю.

1740*. Доказать, что если квадратичная функция, заданная в n-мерном пространстве, тождественно обращается в нуль на подпространстве размерности $k > \frac{n}{2}$, то ядро соответствующей ей билинейной функции имеет размерность больше нуля.

1741*. Доказать, что если p и q — индексы инерции невырожденной квадратичной функции, заданной в вещественном n-мерном пространстве, то существует линейное подпространство, размерность которого равна меньшему из индексов инерции, на котором квадратичная функция тождественно обращается в нуль, и не существует подпространства большей размерности, обладающего этим же свойством.

1742. Для каждой из следующих квадратичных форм, заданных относительно ортонормального базиса, найти такой ортонормальный базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид; найти канонический вид формы в этом базисе:

1) $4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4 + 3x_4^2$;

2) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

3) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;

4) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 +$
$+ 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$.

§ 6. Поверхности второго порядка

Александров, гл. XXV, § 8.
Ефимов и Розендорн, гл. XI.

1. Поверхности второго порядка в точечном аффинном пространстве

1743. Пусть $Q(x)$ — квадратичная функция векторного аргумента x, $L(x)$ — линейная функция, c — число. Доказать, что функция

$$Q(x) + 2L(x) + c$$

при преобразовании переноса $x = x' + x_0$ принимает вид

$$Q(x') = 2[B(x_0, x') + L(x')] + Q(x_0) + 2L(x_0) + c,$$

где $B(x, y)$ — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной форме $Q(x)$.

1744*. Пусть O — фиксированная точка аффинного пространства, $x = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки M с началом в точке O. Поверхностью второго порядка называется совокупность точек точечного аффинного пространства, радиусы-векторы которых удовлетворяют векторному уравнению

$$Q(x) + 2L(x) + c = 0,$$

где $Q(x)$ — квадратичная функция, $L(x)$ — линейная функция, c — число. Точка O' называется центром (непустой) поверхности второго порядка, если для каждой точки M поверхности точка M_1, симметричная точке M относительно точки O', также принадлежит этой поверхности. Доказать, что точка O' с радиусом-вектором $\overrightarrow{OO'} = x_0$ является центром поверхности второго порядка тогда и только тогда, когда преобразованием переноса $x = x' + x_0$ уравнение поверхности приводится к виду

$$Q(x') + c' = 0,$$

где $c' = L(x_0) + c$.

1745. Пусть

$$Q(x) + 2L(x) + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка в точечном аффинном пространстве, $x = x_0 + tu$ — прямая. Найти значения параметра t, которым соответствуют точки пересечения прямой и поверхности.

1746*. Пусть

$$Q(x) + 2L(x) + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка в точечном аффинном пространстве и u — вектор неасимптотического направления, т. е. $Q(u) \neq 0$. Доказать, что середины хорд поверхности, параллельных вектору u, лежат в одной гиперплоскости. Эта гиперплоскость называется диаметральной гиперплоскостью, сопряженной направлению, определяемому вектором u. Написать уравнение этой гиперплоскости.

1747*. Пусть

$$Q(x) + 2L(x) + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка в точечном аффинном пространстве, x_0—радиус-вектор точки M_0, принадлежащей этой поверхности и не являющейся ее центром. Написать уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке M_0.

1748*. Доказать, что:

1) если одна и та же поверхность второго порядка, заданная двумя уравнениями

$$F(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x}) + 2L(\boldsymbol{x}) + c = 0,$$
$$F^*(\boldsymbol{x}) = Q^*(\boldsymbol{x}) + 2L^*(\boldsymbol{x}) + c^* = 0,$$

обладает тем свойством, что существует прямая, пересекающая эту поверхность ровно в двух различных точках, то существует число $\lambda \neq 0$, для которого

$$F^* = \lambda F;$$

при этом утверждение верно также в том случае, когда поверхность является двойной гиперплоскостью;

2) если $F = 0$ и $F^* = 0$ — уравнения одной и той же поверхности второго порядка (удовлетворяющей одному из условий в 1)), заданной в n-мерном аффинном пространстве, то соответствующие коэффициенты многочленов F и F^* пропорциональны.

1749*. Доказать, что если в n-мерном точечном аффинном пространстве ввести аффинную систему координат с началом в точке O и базисом $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то уравнение

$$Q(\boldsymbol{x}) + 2L(\boldsymbol{x}) + c = 0$$

поверхности второго порядка примет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты радиуса-вектора $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OM}$ точки M поверхности, $a_{ij} = B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $b_i = L(\boldsymbol{e}_i)$, причем $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции $Q(\boldsymbol{x})$.

1750*. Пусть

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка, заданной в n-мерном точечном аффинном пространстве.

Доказать, что:

1) координаты $x_1^0, \ldots, x_n^0$ центра поверхности определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

2) для того, чтобы поверхность второго порядка имела центр (не обязательно единственный), необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \ldots & b_n & c \end{pmatrix}$$

отличались не более, чем на 1;

3) если начало системы координат, не меняя ее базиса, перенести в центр $O' = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ поверхности второго порядка, то ее уравнение примет вид

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x'_i x'_j + c' = 0,$$

где

$$c' = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^0 + c;$$

4) для того, чтобы поверхность второго порядка имела единственный центр, необходимо и достаточно, чтобы определитель δ матрицы A был отличен от нуля; в этом случае поверхность называется центральной;

5) если начало системы координат, не меняя ее базиса, перенести в центр поверхности, то в том случае, когда этот центр единственный, уравнение поверхности примет вид

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x'_i x'_j + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

где δ и Δ — определители матриц A и B соответственно.

1751*. Доказать, что уравнение поверхности второго порядка, заданной в действительном n-мерном точечном аффинном пространстве, переходом к новой системе координат (и, возможно, умножением обеих частей уравнения на -1) может быть приведено к одной из следующих нормальных форм:

(I) $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=1, \quad 0\leqslant k\leqslant r\leqslant n.$ При $k=r=n$ поверхность называется действительным $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $k=0, r=n$ — мнимым $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $0<k<r=n$ поверхность называется $(n-1)$-мерным гиперболоидом; при $r<n$ — цилиндром над соответствующей $(r-1)$-мерной поверхностью.

(II) $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=0, \; 1\leqslant r\leqslant n, \; k\geqslant\frac{r}{2}$ при r четном, $k\geqslant\frac{r+1}{2}$ при r нечетном.

При $k<r=n$ поверхность называется действительным $(n-1)$-мерным конусом; при $k=r=n$ — мнимым $(n-1)$-мерным конусом; при $r<n$ — цилиндром над $(r-1)$-мерным конусом или конической поверхностью.

(III) $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=2x_{r+1}, \; 1\leqslant r\leqslant n-1;$ $k\geqslant\frac{r}{2}$ при r четном, $k\geqslant\frac{r-1}{2}$ при r нечетном. При $r=n-1$ поверхность называется $(n-1)$-мерным параболоидом; при $r<n-1$ — цилиндром над соответствующим $(r-1)$-мерным параболоидом.

Во всех случаях (I), (II), (III) r — ранг квадратичной формы, входящей в состав многочлена левой части уравнения поверхности.

1752*. Найти максимальную размерность плоскости, содержащейся в поверхности второго порядка, заданной в n-мерном точечном аффинном пространстве, если эта поверхность:

(I) конус $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2=0, \; 1\leqslant k\leqslant n;$

(II) гиперболоид $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2=1, \; 1\leqslant k\leqslant n;$

(III) параболоид $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{n-1}^2=2x_n,$ $1\leqslant k\leqslant n-1.$

1753*. Доказать, что две (непустые) поверхности второго порядка, заданные в действительном n-мерном точечном аффинном пространстве, аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они приводятся к одной и той же нормальной форме с соответственно одинаковыми r и k.

1754*. Поверхность второго порядка, заданная уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$$

в n-мерном точечном аффинном пространстве, называется цилиндрической, если в некоторой системе координат она может быть записана уравнением с неполным числом переменных.

Доказать: для того, чтобы поверхность второго порядка была цилиндрической, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю как детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{vmatrix}$$

многочлена, стоящего в левой части ее уравнения, так и детерминант

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратичной формы этого многочлена.

1755*. Поверхность второго порядка задана уравнением

$$P=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$$

в n-мерном точечном аффинном пространстве. Доказать, что:

1) эта поверхность является конической тогда и только тогда, когда в некоторой системе координат ее уравнение не содержит ни членов первой степени относительно координат, ни свободного члена; в этом случае начало координат называется вершиной конической поверхности;

2) для того чтобы поверхность была конической, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

был равен рангу R матрицы

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{pmatrix}$$

многочлена P, стоящего в левой части уравнения поверхности;

3) поверхность является конусом второго порядка тогда и только тогда, когда в некоторой аффинной системе координат многочлен P, стоящий в левой части ее уравнения, является квадратичной формой ранга n;

4) для того чтобы поверхность второго порядка была конусом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{vmatrix} = 0;$$

5) конус имеет единственную вершину, являющуюся его единственным центром;

6) если конус содержит точку M, отличную от его вершины O, то все точки прямой OM принадлежат этому конусу.

1756*. Поверхность второго порядка задана уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$$

в действительном n-мерном точечном аффинном пространстве. Доказать, что:

1) поверхность является параболоидом, если в некоторой аффинной системе координат ее уравнение имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a'_{ij}x'_ix'_j+2b'_nx'_n=0;$$

2) для того чтобы поверхность второго порядка была параболоидом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Поверхности второго порядка в точечном евклидовом пространстве

1757*. Доказать, что:

1) квадратичную функцию $Q(\boldsymbol{x})$, заданную в векторном евклидовом пространстве, можно представить в виде

$$Q(\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}),$$

где A — самосопряженный оператор;

2) линейную функцию $L(\boldsymbol{x})$, заданную в векторном евклидовом пространстве, можно представить в виде

$$L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{b}$ — вектор.

1758*. Пусть

$$Q(\boldsymbol{x}) + 2L(\boldsymbol{x}) + c = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}) + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка в точечном евклидовом пространстве. Доказать: для того, чтобы эта поверхность имела центр O', необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежал области значений оператора A.

1759*. Пусть

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}) + c = 0$$

— уравнение поверхности второго порядка в точечном евклидовом пространстве, не имеющей центра. Доказать, что существует вектор $\boldsymbol{x}_0$ такой, что в результате переноса $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_0$ уравнение поверхности приводится к виду

$$(A\boldsymbol{x},'\ \boldsymbol{x}') + 2(\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{x}') = 0,$$

где $\boldsymbol{b}''$ — вектор, ортогональный к области значений оператора A.

1760*. Доказать, что если в n-мерном точечном евклидовом пространстве задано уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$$

поверхности второго порядка в прямоугольных координатах, то существует прямоугольная система координат с началом в точке $O' = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и ортонормальным базисом $\boldsymbol{e}_1', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$, в которой уравнение поверхности представляется в одной из следующих форм:

(I) $\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_r x_r'^2 + c' = 0$, $1 \leqslant r \leqslant n$, если $R - r \leqslant 1$;

(II) $\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_r x_r'^2 + 2\mu x_{r+1}' = 0$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, если $R - r = 2$, где r — ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а R — ранг матрицы

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{pmatrix}.$$

1761*. Доказать, что уравнение поверхности второго порядка, заданной в евклидовом n-мерном точечном пространстве относительно прямоугольной системы координат,

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0,$$

переходом к новой прямоугольной системе координат и умножением обеих частей уравнения на некоторое число может быть приведено к одной из следующих канонических форм:

$$\text{(I)}\ \frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\dots-\frac{x_r^2}{a_r^2}=1,\quad 0\leqslant k\leqslant r\leqslant n.$$

При $k=r=n$ поверхность является действительным $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $k=0$, $r=n$ — мнимым $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $0<k<r=n$ — $(n-1)$-мерным гиперболоидом; при $r<n$ — цилиндром над соответствующей $(r-1)$-мерной поверхностью второго порядка.

$$\text{(II)}\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\dots-\frac{x_r^2}{a_r^2}=0,\qquad 1\leqslant r\leqslant n;$$

$k\geqslant\frac{r}{2}$ при r четном, $k\geqslant\frac{r+1}{2}$ при r нечетном.

При $k<r=n$ поверхность является действительным $(n-1)$-мерным конусом; при $k=r=n$ — мнимым $(n-1)$-мерным конусом, при $r<n$ — цилиндром над $(r-1)$-мерным конусом.

$$\text{(III)}\quad \frac{x_1^2}{p_1}+\dots+\frac{x_k^2}{p_k}-\frac{x_{k+1}^2}{p_{k+1}}-\dots-\frac{x_r^2}{p_r}=2x_{r+1},\quad p_i>0,$$

$i=1, 2, \dots, r$; $1\leqslant r\leqslant n-1$; $k\geqslant\frac{r}{2}$ при r четном, $k\geqslant\frac{r-1}{2}$ при r нечетном.

При $r=n-1$ поверхность является $(n-1)$-мерным параболоидом, при $r<n-1$ — цилиндром над соответствующим $(r-1)$-мерным параболоидом.

1762*. Доказать, что:

1) две поверхности второго порядка, заданные в n-мерном точечном евклидовом пространстве, изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же каноническое уравнение (см. задачу 1761) с одними и теми же значениями параметров a_i и p_i в случаях (I) и (III) соответственно и с пропорциональными значениями параметров a_i в случае (II);

2) две поверхности второго порядка, заданные в n-мерном евклидовом пространстве, подобны тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же каноническое уравнение с пропорциональными значениями параметров a_i и p_i соответственно.

1763. Для каждой из следующих поверхностей второго порядка, заданных в четырехмерном точечном евклидовом пространстве относительно прямоугольной системы координат, найти ее каноническое уравнение и каноническую систему координат:

1) $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4-$
$$-2x_2-4x_3-6x_4+5=0;$$

2) $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+3x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-$
$$-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4=0;$$

3) $4x_1x_2+4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+4x_3x_4+$
$$+3x_4^2+14x_4+11=0.$$

1764*. Пусть
$$(Ax,\ x)+2(b,\ x)+c=0$$
— уравнение поверхности второго порядка в точечном евклидовом пространстве. Найти гиперплоскости симметрии этой поверхности, перпендикулярные к ее хордам.

1765*. Пусть
$$P=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c$$
— многочлен второй степени от n переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$;
$$x_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j+t_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

— преобразование ω переменных $x_1, \ldots, x_n$ с ортогональной матрицей

$$T=(t_{ij});$$

$$P'=\sum_{i,\,j=1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j+2\sum_{i=1}^{n} b'_i x'_i+c'$$

— многочлен, получающийся из многочлена P в результате преобразования ω.

1) Доказать, что следующие функции от коэффициентов a_{ij}, b_i, c многочлена P являются инвариантами преобразования ω:

$$I_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$I_{n+1}=K_{n+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \ldots & b_n & c \end{vmatrix}.$$

Доказать, что инвариантами являются также суммы I_{n-1}, $I_{n-2}, \ldots, I_3, I_2, I_1$ диагональных миноров определителя I_n соответственно порядков $n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$.

2) Доказать, что суммы $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_3, K_2$ диагональных миноров определителя K_{n+1}, содержащих c, соответственно порядка $n, n-1, \ldots, 3, 2$, являются инвариантами любого *однородного* преобразования γ:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

с ортогональной матрицей

$$T=(t_{ij});$$

$K_n, K_{n-1}, \ldots, K_3, K_2$ называются семиинвариантами.

3) Доказать, что если существует линейное невырожденное однородное преобразование, при котором многочлен P преобразуется в многочлен P' от $n-1$ переменных $x'_1, x'_2, \ldots$ $\ldots, x'_{n-1}$, то K_n является инвариантом и неоднородного ортогонального преобразования переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если существует линейное невырожденное однородное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при котором многочлен P

преобразуется в многочлен P' от $n-2$ переменных x_1', x_2', ..., x_{n-2}', то K_{n-1} и K_n являются инвариантами любого неоднородного ортогонального преобразования переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и т. д.; наконец, если существует линейное невырожденное однородное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$, при котором многочлен P преобразуется в многочлен P', содержащий только одну переменную x_1', то все семиинварианты $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_3, K_2$ будут инвариантами и любого неоднородного ортогонального преобразования ω.

4) Всякий многочлен

$$P=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i+c$$

ортогональным преобразованием переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть преобразован к одной из следующих канонических форм:

$$\text{(I)}\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2+c', \qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\text{(II)}\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2+2b_{r+1}'x_{r+1}', \quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

где r — ранг квадратичной формы

$$Q=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — отличные от нуля корни характеристического полинома

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Доказать следующие необходимые и достаточные признаки этих канонических форм:

(I) $I_n=\ldots=I_{r+1}=0,\ I_r\neq 0,\quad K_{r+2}=0;$

(II) $I_n=\ldots=I_{r+1}=0,\ I_r\neq 0,\quad K_{r+2}\neq 0.$

5) Доказать, что канонические формы многочлена P второй степени от n переменных могут быть записаны в виде

$$\text{(I)}\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2+\frac{K_{r+1}}{I_r}, \qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$(\mathrm{II})\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\sqrt{-\frac{K_{r+2}}{I_r}}\, x'_{r+\hat{1}} \qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

где r — ранг определителя I_n, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — отличные от нуля корни характеристического полинома $\varphi(\lambda)$.

6) Доказать, что если $\varphi(\lambda)$ — характеристический полином квадратичной формы Q, входящей в левую часть уравнения поверхности второго порядка, заданной относительно прямоугольной системы координат, то

$$I_j = \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}\, \varphi^{(n-j)}(0), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

7) Доказать, что если

$$\psi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda & b_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & c \end{vmatrix},$$

то

$$K_{j+\hat{1}} = \frac{(-1)^{n+1-j}}{(n+1-j)!}\, \psi^{(n+1-j)}(0), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

1766*. Поверхность второго порядка задана в n-мерном точечном евклидовом пространстве уравнением

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0$$

относительно аффинной системы координат, базис которой имеет метрические коэффициенты $g_{ij}=(e_i,\ e_j)$. Доказать, что:

1) приведенные уравнения поверхности имеют вид

$$(\mathrm{I})\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + \frac{K_{r+\hat{1}}}{I_r} = 0 \ \text{ в случае } I_n = \ldots = I_{r+1} = 0,$$

$I_r \neq 0;\ K_{r+2}=0;$

$$(\mathrm{II})\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\sqrt{-\frac{K_{r+2}}{I_r}}\, x'_{r+\hat{1}} = 0 \ \text{ в случае } I_n = \ldots$$

$\ldots = I_{r+1} = 0,\ I_r \neq 0;\ K_{r+2} \neq 0,\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$ здесь r — ранг квадратичной формы, входящей в состав левой части уравнения поверхности, λ_i — отличные от нуля корни характеристического уравнения

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & \dots & a_{1n}-\lambda g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-\lambda g_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda g_{nn} \end{vmatrix}=0,$$

а I_s и K_{s+1} вычисляются по формулам

$$I_s=\frac{1}{g}\,\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!}\,\varphi^{(n-s)}(0), \qquad s=1,\ 2,\ \dots,\ n;$$

$$K_{s+1}=\frac{1}{g}\,\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\,\psi^{(n+1-s)}(0), \qquad s=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}, \quad \psi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & \dots & a_{1n}-\lambda g_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-\lambda g_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda g_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{vmatrix};$$

2) если (g^{ij}) — матрица, обратная для матрицы (g_{ij}), то, вводя коэффициенты

$$a_i^j=\sum_{\alpha=1}^{n} g^{\alpha j}a_{i\alpha}, \qquad b^i=\sum_{\alpha=1}^{n} g^{\alpha i}b_\alpha,$$

можно предыдущие формулы (см. 1)) переписать так:

$$I_s=\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!}\,\varphi^{(n-s)}(0), \qquad s=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

$$K_{s+1}=\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\,\psi^{(n+1-s)}(0), \qquad s=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1^1-\lambda & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \psi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1^1-\lambda & \dots & a_1^n & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n-\lambda & b_n \\ b^1 & \dots & b^n & c \end{vmatrix};$$

3) координаты $(\varepsilon_{i1},\ \varepsilon_{i2},\ \dots,\ \varepsilon_{in})$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$, базисного вектора e_i' канонической системы координат находятся из системы

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i g_{11})\,\varepsilon_{i1}+\dots+(a_{1n}-\lambda_i g_{1n})\,\varepsilon_{in}&=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ (a_{n1}-\lambda_i g_{n1})\,\varepsilon_{i1}+\dots+(a_{nn}-\lambda_i g_{nn})\,\varepsilon_{in}&=0, \end{aligned}\right\}$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. $\overrightarrow{AB}=\frac{a-b}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{a+b}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{b-a}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{a+b}{2}$.

2. $\overrightarrow{AB}=\frac{\lambda a-b}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{a+b}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{\lambda b-a}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{\lambda(a+b)}{1+\lambda}$.

4. $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}$.

5. 0. 8. $\overrightarrow{BC}=\frac{4\overrightarrow{AL}-2\overrightarrow{AK}}{3}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{2\overrightarrow{AL}-4\overrightarrow{AK}}{3}$.

9. Точка пересечения медиан треугольника. 10. Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. 13. M — точка, в которой пересекаются семь прямых: три прямые, проходящие через середины противоположных ребер тетраэдра, и четыре прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположных граней. 14. $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.

15. 1) $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$;

2) $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$;

3) $|\boldsymbol{x}|:|\boldsymbol{y}|:|\boldsymbol{z}|=\sin A:\sin B:\sin C$.

16. Если все углы треугольника меньше $\frac{2\pi}{3}$, то точка M существует и $\angle BMC=\angle CMA=\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$. Если один из углов треугольника ABC больше $\frac{2\pi}{3}$, то такой точки нет. 17. Указание. Повернуть плоскость многоугольника вокруг его центра на центральный угол многоугольника. 18. Указание. См. предыдущую задачу. 19. $\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2}$. 20. $\overrightarrow{EF}=\frac{2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{6}$.

21. $\overrightarrow{MM'}=\frac{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}}{3}$. 22. $\overrightarrow{OM}=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$. 23. $\overrightarrow{AB}=\{1,\ 0\}$, $\overrightarrow{BC}=\{-1,\ 1\}$, $\overrightarrow{CD}=\{-2,\ 1\}$, $\overrightarrow{DE}=\{-1,\ 0\}$, $\overrightarrow{EF}=\{1,\ -1\}$, $\overrightarrow{FA}=\{2,\ -1\}$. 24. $\overrightarrow{AB}=\{0,\ 1\}$, $\overrightarrow{BC}=\{\lambda,\ 0\}$, $\overrightarrow{CD}=\{1-\lambda,\ -1\}$, $\overrightarrow{DA}=\{-1,\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{\lambda,\ 1\}$, $\overrightarrow{BD}=\{1,\ -1\}$. 25. $\overrightarrow{A'B'}=\{1,\ 0,\ 0\}$, $\overrightarrow{A'D'}=\{0,\ 1,\ 0\}$, $\overrightarrow{A'A}=\{0,\ 0,\ -1\}$, $\overrightarrow{A'C}=\{1,\ 1,\ -1\}$, $\overrightarrow{A'B}=\{1,\ 0,\ -1\}$, $\overrightarrow{A'D}=\{0,\ 1,\ -1\}$, $\overrightarrow{A'C'}=\{1,\ 1,\ 0\}$. 26. 1) $\overrightarrow{AB}=\{-1,\ 1,\ 0\}$, $\overrightarrow{BC}=$

$=\{0, -1, 1\}$, $\overrightarrow{CA}=\{1, 0, -1\}$; 2) $\overrightarrow{DE}=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; 3) $\overrightarrow{DF}=$ $=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. 27. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. 28. 1) Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независимы; 2) векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы и $\boldsymbol{c}=$ $=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$; 3) векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы, но вектор $\boldsymbol{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны между собой, а вектор $\boldsymbol{c}$ им не коллинеарен. **30.** $\{-96, -30, 0\}$. **31.** $\{-4, 10, 3\}$. **32.** $r_4=r_1-r_2+r_3$. **33.** $r_4=r_1-r_2+r_3$, $r_2'=r_1'-r_1+r_2$, $r_3'=r_1'-r_1+r_3$, $r_4'=r_1'-r_2+r_3$. **34.** $r=\frac{r_1+\lambda r_2}{1+\lambda}$, $r=\frac{r_1+r_2}{2}$. **35.** $r=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$. **36.** Указание. Вектор $\overrightarrow{OM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OD}$, а вектор $\overrightarrow{AM}$ компланарен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

37. $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}\,|\overrightarrow{AC}|+\overrightarrow{AC}\,|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$. **38.** $\overrightarrow{CH}=\frac{a^2\overrightarrow{CA}+b^2\overrightarrow{CB}}{a^2+b^2}$.

39. $r=\frac{ar_1+br_2+cr_3}{a+b+c}$. Указание. Применить теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

40. $r=\frac{r_3\operatorname{ctg}B+r_2\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C}$. **41.** $r_4=r_1+\lambda(r_3-r_2)$,

$r'=\frac{r_1+\lambda r_3}{1+\lambda}$, $r''=\frac{r_1-\lambda r_2}{1-\lambda}$.

42. Указание. Ввести радиусы-векторы вершин тетраэдра.

43. $r=\frac{m_1r_1+m_2r_2+\ldots+m_nr_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **44.** Указание. Ввести радиусы-векторы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и найти радиус-вектор точки M. **45.** $A=(0, 0)$, $B=(1, 0)$, $C=\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D=(1, \sqrt{3})$, $E=(0, \sqrt{3})$, $F=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **46.** $A=(-4, 0)$, $D=(4, 0)$, $C=(1, 3)$, $B=(-1, 3)$, $M=\left(0, \frac{12}{5}\right)$, $S=(0, 4)$. **47.** 1) $(-x, -y)$; 2) $(x, -y)$; 3) $(-x, y)$; 4) (y, x); 5) $(-y, -x)$. **48.** $A=(0, 0)$, $B=(1, 0)$, $C=(0, 1)$, $D=$ $=(-2, 2)$, $E=(-3, 2)$, $F=(-2, 1)$. **49.** $A=(0, 0)$, $B=(0, 1)$, $C=$ $=\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $D=(1, 0)$, $M=\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $S=\left(0, \frac{3}{2}\right)$. **50.** $C=(5, 3)$, $D=(2, 5)$. **51.** $D=(1, -2)$. **52.** $M=(12, -11)$. **53.** 1) $(-x, -y, -z)$; 2) $(x, y, -z)$; 3) $(-x, -y, z)$. **54.** 1) $(x, 0, 0)$; 2) $(0, y, z)$. **55.** $d_x=$ $=\sqrt{y^2+z^2}$, $d_y=\sqrt{z^2+x^2}$, $d_z=\sqrt{x^2+y^2}$. **56.** $(-6, -4, 3)$. **57.** $A=$ $=(0, 0, 0)$, $B=(1, 0, 0)$, $C=(1, 1, 0)$, $D=(0, 1, 0)$, $A'=(0, 0, 1)$, $B'=(1, 0, 1)$, $C'=(1, 1, 1)$, $D'=(0, 1, 1)$. **58.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ для грани AOB; $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ для грани BOC; $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ для грани COA;

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ для грани ABC. **59.** $M=(-11, 2, -1)$. **60.** 5. **61.** $(2, 2)$, $(-12, -12)$, $(6, -6)$, $(-4, 4)$. **62.** $M=(2, 1)$, $r=5$. **63.** $B=(2, 5)$, $D=(16, 3)$. **64.** $M=(2, 10)$. **65.** $M_1=(1, -1)$, $r_1=1$; $M_2=(5, -5)$, $r_2=5$. **66.** $(15, \pm 12)$, $r=15$. **67.** $M_1=\left(-6, \frac{15}{2}\right)$, $r_1=\frac{15}{2}$; $M_2=\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right)$, $r_2=\frac{15}{8}$. **68.** $(3, 3, 1)$, $R=3$. **69.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **70.** $M=(4, -4, 2)$. **71.** $-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}$. **72.** $\frac{2\pi}{3}$. **73.** $\{4\sqrt{2}, 4, 4\}$. **74.** Четыре вектора $\{\pm 4, \pm 3, 0\}$. **75.** $\varphi_1=\arcsin\frac{6}{11}$, $\varphi_2=\arcsin\frac{2}{11}$, $\varphi_3=\arcsin\frac{9}{11}$. **76.** $\cos\alpha_1=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, $\cos\beta_1=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, $\cos\gamma_1=0$. **77.** Указание. Если A, B, C — точки пересечения плоскости с осями Ox, Oy, Oz, а P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC, то направляющие косинусы луча $\overrightarrow{OP}$ суть $\cos\alpha=\frac{p}{a}$, $\cos\beta=\frac{p}{b}$, $\cos\gamma=\frac{p}{c}$. **78.** $\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

79.
$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}},$$
$$\cos\beta=\frac{\cos\beta_1+\cos\beta_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}},$$
$$\cos\gamma=\frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}}.$$

80. 1) $\frac{2}{3}$; 2) (-8); 3) (-2); 4) $-\frac{4}{9}$. **81.** $\frac{1}{\lambda}$. **82.** $-\lambda^2$. Указание. Ввести на прямой AB систему координат и обозначить координаты точек A и B соответственно через x_1 и x_2. **83.** $-x$. **84.** $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}=-1-\lambda$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA}}=\frac{1}{\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AC}}=-\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BA}}=-\frac{1}{1+\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB}}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Указание. Выбрать систему координат так, чтобы $A=(0)$, $B=(1)$. **85.** $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{(1+\mu)(\nu-\lambda)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}$. Указание. Принять точку A за начало координат, а точку B за единичную точку. **86.** $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\lambda+\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\mu\nu}{1+\mu+\nu+\lambda\nu}$. **87.** $D=\left(\frac{8}{5}\right)$. **90.** $B=(0, -7)$. **91.** $(-3, 3)$, $(7, 5)$, $(-3, -3)$. **92.** $C=(10, 9)$, $D=(4, -4)$. **93.** 4-

94. $x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. 95. $D=(8, -18)$, $M=\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $S=\left(\frac{7}{4}, \frac{23}{4}\right)$. 96. $B=\left(-3, \frac{16}{3}\right)$. 97. $\lambda=-2$. 98. $A=(160, -131)$, $B=(-225, 184)$. 99. $\frac{\sqrt{61}}{2}$. 100. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. 101. $M=(0, 5)$, $r=3\sqrt{5}$. 102. $M=(-2, 1)$. 103. $D=(11, 7)$, $M=\left(5, \frac{23}{5}\right)$, $S=(5, 13)$. 104. $\left(\frac{11}{2}, \frac{19}{4}\right)$. 105. $\left(\frac{2}{7}, \frac{25}{14}\right)$. 106. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. 107. Указание. Проверить, что точка пересечения диагоналей $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ является внутренней точкой для каждого из этих отрезков. 108. $\left(\frac{41}{5}, \frac{31}{5}\right)$. Указание. Центр тяжести однородной четырехугольной пластинки лежит на прямой, проходящей через точки пересечения медиан треугольника, на которые четырехугольник разбивается его диагональю. 109. $C=(4, -5, -2)$. 110. $-\frac{1}{2}$. 111. Пересекает ось Oz и не пересекает осей Ox и Oy. 112. Пересекаются в точке $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 11\right)$. 113. $D=\left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $M=\left(\frac{9}{2}, 3, \frac{17}{8}\right)$, $S=(7, 8, 9)$. 114. $B=(1, 0)$, $C=\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $D=\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $E=\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $F=\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$. 115. 1) $|\overline{AB}|=\sqrt{3}$; 2) $|\overline{CD}|=10$; 3) $|\overline{EF}|=5$. 116. $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$. 117. 1) $B=\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $C=\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$. 118. $A=\left(2, \frac{17\pi}{12}\right)$, $B=\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$, $C=\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $D=\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E=\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$. 119. $S=1$. 120. $A=(1, \sqrt{3})$, $B=(-1, 1)$, $C=(0, 5)$, $D=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. 121. $A=\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $B=\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $C=(5, 0)$, $D=\left(10, -\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$. 122. $(2+5\sqrt{3}, 8)$. 123. $M_1=\left(6\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2=\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$. 124. A: $r=9$, $\varphi=-\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\theta=\arcsin\frac{1}{9}$; B: $r=3$, $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$, $\theta=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; C: $r=5$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, $\theta=\arcsin\frac{3}{5}$; D: $r=\sqrt{3}$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, $\theta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; E: $r=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\theta=0$. 125. $r=2$, $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\theta=-\frac{\pi}{6}$. 126. $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 127. $s=r\arccos[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2]$. 128. A: $r=5$, $\varphi=-\arccos\frac{3}{5}$, $z=5$; B: $r=\sqrt{2}$,

$\varphi=-\frac{\pi}{4}$, $z=-1$; C: $r=6$, $\varphi=\pi$, $z=8$. **129.** $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **130.** $\cos\alpha=\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}$. **131.** $-\frac{3}{2}$. **132.** -19. **133.** 0. **135.** $|\overline{CD}|^2=\frac{\lambda}{1+\lambda}a^2+\frac{1}{1+\lambda}b^2-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}c^2$. **136.** $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат, приняв за начало координат вершину A треугольника и за базисный вектор оси абсцисс вектор $\overrightarrow{AB}$. **137.** 1) $2nr^2$; 2) n^2r^2. Указание. См. задачу 17. **139.** Указание. См. задачу 138. **140.** Указание. Ввести радиусы-векторы точек A, B, C, D. **141.** $\boldsymbol{x}=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$.

142. $\boldsymbol{x}=\frac{(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})^2}$.

143.
$$\boldsymbol{x}=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\\ \boldsymbol{b} & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\\ \boldsymbol{c} & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c})\end{vmatrix}}.$$

144. $\boldsymbol{c}=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$. **145.** $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}$.

146. $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}$, $\cos\angle DOA=\frac{a+b\cos\gamma+c\cos\beta}{d}$, $\cos\angle DOB=\frac{a\cos\gamma+b+c\cos\alpha}{d}$, $\cos\angle DOC=\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha+c}{d}$.

147. 5; $\arccos\frac{7}{10}$, $\arccos\frac{8}{10}$, $\arccos\frac{9}{10}$. **148.** $\{-6,\ 6,\ -3\}$. **149.** $\{6,\ 6,\ 0\}$. **150.** $\{3,\ -1,\ 1\}$. **151.** $\left\{-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}\right\}$. **152.** $A = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $B=\arccos\frac{5}{3\sqrt{3}}$, $C=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. **153.** $d=15$, $\angle BAC'=\arccos\frac{25}{27}$. **154.** $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\frac{\pi}{2}$. **155.** $\boldsymbol{a}'=\{-y,\ x\}$. **156.** $\boldsymbol{b}_2=\{-2,\ -4\}$. **157.** $\boldsymbol{b}'=\{4,\ -1\}$. **158.** Пары $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}')$ имеют противоположную ориентацию. **159.** Пары лучей одинаково ориентированы.

160. $x'=x\cos^2\varphi+y\sin\varphi\cos\varphi$,
$y'=x\cos\varphi\sin\varphi+y\sin^2\varphi$.

161. $x=d_1\cos\varphi_1+d_2\cos\varphi_2$, $y=d_1\sin\varphi_1+d_2\sin\varphi_2$.

162. $x=d_1\cos\varphi_1+d_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$,
$y=d_1\sin\varphi_1+d_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)$.

163. $x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi$, $y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi$.

164. $C=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5-4\sqrt{3}}{2}\right)$. 165. $D_1=(-5, 7)$, $C_1=(0, 9)$ или $D_2=(-1, -3)$, $C_2=(4, -1)$. 166. $C=(4, 3)$, $D=(-2, 5)$. Указание. Если M — середина диагонали AB, то вершины C и D мы получим, повернув вектор $\overrightarrow{MB}$ один раз на угол $+\pi/2$, другой раз на угол $-\frac{\pi}{2}$. 167. $C=(9, 2)$. 168. $C=\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$. 169. $A_k=$ $=\left(x_0+(x_1-x_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}-(y_1-y_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}, y_0+(x_1-x_0)\times\right.$ $\left.\times\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}+(y_1-y_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}\right)$, $k=2, 3, \ldots, n$. 170. $C=$ $=(-5, 0)$. 171. $\frac{\lambda\mu\nu+1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$. Указание. Принять точку A за начало координат, а пару векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ за базис. 172. $\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ (см. предыдущую задачу). 173. $2\cos A\cos B\cos C$. Треугольники PQR и ABC имеют одинаковую ориентацию, если треугольник ABC остроугольный, и противоположную, если этот треугольник тупоугольный. 174. $r/2R$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Указание. $|\overrightarrow{AR}|=$ $=|\overrightarrow{AQ}|=p-a$, $|\overrightarrow{BR}|=|\overrightarrow{BP}|=p-b$, $|\overrightarrow{CQ}|=|\overrightarrow{CP}|=p-c$, где p — полупериметр треугольника ABC. Отсюда находим отношения, в которых точки P, Q, R делят стороны треугольника ABC. Далее воспользоваться результатом задачи 171 и применить формулы $S=\frac{abc}{4R}$, $S=pr$. 175. $c=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$. 176. $c=\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}$. 177. $d=\left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. 178. $d=\left\{-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\right\}$. 179. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$. 180. $\left\{\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, 0\right\}$; луч проходит вне трехгранного угла. 181. Тройки лучей $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ имеют одинаковую ориентацию. 182. Тройки лучей одинаково ориентированы. 183. $c=\left\{\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{5\sqrt{5}}\right\}$. 184. $d=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$. 185. $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$, $\cos\gamma=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$.

186. $\cos\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$, $\cos\beta=\frac{\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$, $\cos\gamma=$ $=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$, где φ — угол между данными лучами,

$$\sin\varphi=\sqrt{\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}^2}.$$

187. $\varphi=\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{45}$. 188. $-\frac{1}{27}$. Указание. Принять за начало координат вершину D, а за базис упорядоченную тройку векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. 189. 9. 190. 48.

191. $abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$. 192. Два решения: 1) $a=b=c=0$; 2) $|a|=|b|=|c|=1$, векторы a, b, c попарно ортогональны. 197. $d=|a|[b, c]+|b|[c, a]+|c|[a, b]$, если $(a, b, c)>0$; $d=-|a|[b, c]-|b|[c, a]-|c|[a, b]$, если $(a, b, c)<0$.

198. $S=\frac{|(a, b, n)|}{|n|}=\operatorname{mod}\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. 199. $b=a\cos\varphi+[n, a]\sin\varphi$. 203. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из двух условий: 1) вектор b перпендикулярен к векторам a и c; 2) векторы a и c коллинеарны. 204. $x=\frac{\alpha[b, c]+\beta[c, a]+\gamma[a, b]}{(a, b, c)}$. Указание. Разложить вектор x по базису $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, b]$. 205. 1) $(a, b)=0$; 2) $x=-\frac{[a, b]}{(a, a)}+\lambda a$, где λ принимает все действительные значения.

206. $\overrightarrow{OH}=\frac{(a, b, c)}{([b, c]+[c, a]+[a, b])^2}([b, c]+[c, a]+[a, b])$.

Указание. Ввести ортонормированный базис. 209. $x=\frac{\alpha a_2-[a_1, b]}{(a_1, a_2)}$.

210. Если $(a_1, b_2)+(a_2, b_1)\neq 0$, то решений нет. Если же $(a_1, b_2)+(a_2, b_1)=0$, то $x=\frac{[b_1, b_2]}{(b_1, b_2)}$. 211. Если $a^4>4(b^2+pa^2)$, то задача имеет два решения: $x=\lambda a+\frac{[a, b]}{(a, a)}$, $y=(1-\lambda)a-\frac{[a, b]}{(a, a)}$, где $\lambda=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}$. Если $a^4=4(b^2+pa^2)$, то одно решение: $x=\frac{a}{2}+\frac{[a, b]}{(a, a)}$, $y=\frac{a}{2}-\frac{[a, b]}{(a, a)}$. Если $a^4<4(b^2+pa^2)$, то решений нет.

212. 1) $\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$,

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c},$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

Указание. Если e_1, e_2, e_3 — единичные векторы лучей $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, то

$$\cos A = \frac{([e_1, e_2], [e_1, e_3])}{|[e_1, e_2]|\,|[e_1, e_3]|} = \frac{(e_1, e_1)(e_2, e_3)-(e_1, e_3)(e_1, e_2)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}; \quad 2)\ \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}, \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Указание. Пользуясь формулами для $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, вычислить $\cos A + \cos B \cos C$ и $\sin B \sin C$ и поделить один результат на другой. Иначе: рассмотреть трехгранный угол, ребра которого имеют направления $[e_1, e_2]$, $[e_2, e_3]$, $[e_3, e_1]$; его плоские углы будут $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. **213.** $|e_1| = \sqrt{g_{11}}$, $|e_2| = \sqrt{g_{22}}$, $\cos\omega = g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$, $S = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$. **214.** $(a, b) = g_{11}x_1x_2 + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{22}y_1y_2$. **215.** $|a| = \sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2}$.

216. $$\cos\varphi = \frac{g_{11}x_1x_2 + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{22}y_1y_2}{\sqrt{g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1y_1 + g_{22}y_1^2}\,\sqrt{g_{11}x_2^2 + 2g_{12}x_2y_2 + g_{22}y_2^2}}.$$

217. $$\cos\alpha = \frac{g_{11}x + g_{12}y}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{g_{21}x + g_{22}y}{\sqrt{g_{22}}\,\sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2}}.$$

218. $$\cos\varphi = \frac{g_{11}x_1x_2 + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{22}y_1y_2}{\sqrt{g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1y_1 + g_{22}y_1^2}\,\sqrt{g_{11}x_2^2 + 2g_{12}x_2y_2 + g_{22}y_2^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1y_1 + g_{22}y_1^2}\,\sqrt{g_{11}x_2^2 + 2g_{12}x_2y_2 + g_{22}y_2^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{g}}{g_{11}x_1x_2 + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{22}y_1y_2},$$

где $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

219. $$\cos\varphi = \frac{g_{11}x + g_{12}y}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y\sqrt{g}}{g_{11}x + g_{12}y}, \text{ где } g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

220. $|a| = 30$. **221.** $b = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$. **222.** $2\sqrt{61}$. **223.** $|\overline{AB}| = 6$, $|\overline{AC}| = 4$, $A = \frac{\pi}{3}$. **224.** $\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. **225.** $|e_1| = 2$, $|e_2| = 1$; $\widehat{e_1, e_2} =$

$=\frac{2\pi}{3}$. 226. $|e_1|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $|e_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\omega=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

227. $|\overline{A'B'}|=1$, $|\overline{A'C'}|=5$, $\cos A'=\frac{4}{5}$.

228. 1) $|a|=\sqrt{x^2+2xy\cos\omega+y^2}$;

2) $\cos\alpha=\frac{x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\omega+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+2x_1y_1\cos\omega+y_1^2}\sqrt{x_2^2+2x_2y_2\cos\omega+y_2^2}}$;

3) $S=(x_1y_2-x_2y_1)\sin\omega$;

4) $\cos\alpha^*=\frac{x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\omega+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+2x_1y_1\cos\omega+y_1^2}\sqrt{x_2^2+2x_2y_2\cos\omega+y_2^2}}$,

$$\sin\alpha^*=\frac{(x_1y_2-x_2y_1)\sin\omega}{\sqrt{x_1^2+2x_1y_1\cos\omega+y_1^2}\sqrt{x_2^2+2x_2y_2\cos\omega+y_2^2}}.$$

229. $\cos\alpha=\frac{x+y\cos\omega}{\sqrt{x^2+2xy\cos\omega+y^2}}$,

$$\cos\beta=\frac{x\cos\omega+y}{\sqrt{x^2+2xy\cos\omega+y^2}}.$$

230. $\cos\varphi=\frac{x+y\cos\omega}{\sqrt{x^2+2xy\cos\omega+y^2}}$,

$$\sin\varphi=\frac{y\sin\omega}{\sqrt{x^2+2xy\cos\omega+y^2}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y\sin\omega}{x+y\cos\omega}.$$

231. 1) $g^{11}=\frac{g_{22}}{g}$, $g^{12}=-\frac{g_{12}}{g}$, $g^{22}=\frac{g_{11}}{g}$, где

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}^2;$$

2) $e^1=\left\{\frac{g_{22}}{g},\ -\frac{g_{12}}{g}\right\}$, $e^2=\left\{-\frac{g_{12}}{g},\ \frac{g_{11}}{g}\right\}$; 3) $|e^1|=\sqrt{\frac{g_{22}}{g}}$, $|e^2|=\sqrt{\frac{g_{11}}{g}}$;

4) $\cos\theta=-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$. 232. $x^1y_1+x^2y_2$.

233. 1) $e^1=\left\{\frac{1}{\sin^2\omega},\ -\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}$, $e^2=\left\{-\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega},\ \frac{1}{\sin^2\omega}\right\}$;

2) $|e^1|=|e^2|=\frac{1}{\sin^2\omega}$; 3) $\omega'=\pi-\omega$.

234. 1) $e_1'=\left\{\cos\varphi-\frac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}},\ \frac{g_{11}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\}$,

$e_2'=\left\{-\frac{g_{22}\sin\varphi}{\sqrt{g}},\ \cos\varphi+\frac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\}$; 2) $e_1'=\left\{-\frac{g_{12}}{\sqrt{g}},\ \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{g_{22}}{\sqrt{g}},\ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right\}$.

235. $a' = xe'_1 + ye'_2$, где $e'_1 = \left\{\cos\varphi - \frac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}},\ \frac{g_{11}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\}$, $e'_2 = \left\{-\frac{g_{22}\sin\varphi}{\sqrt{g}},\ \cos\varphi + \frac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\}$. Указание. См. задачу 234.

236. 1) $e'_1 = \left\{\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\omega},\ \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\right\}$, $e'_2 = \left\{-\frac{\sin\varphi}{\sin\omega},\ \frac{\sin(\omega+\varphi)}{\sin\omega}\right\}$;
2) $e'_1 = \frac{1}{\sin\omega}\{-\cos\omega,\ 1\}$, $e'_2 = \frac{1}{\sin\omega}\{-1,\ \cos\omega\}$. 237. $|e_1| = \sqrt{g_{11}}$, $|e_2| = \sqrt{g_{22}}$, $|e_3| = \sqrt{g_{33}}$, $\cos\omega_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$, $\cos\omega_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}$, $\cos\omega_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$, $V = \sqrt{g}$, где $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$. 238. $(a,\ b) = g_{11}x^1y^1 + g_{22}x^2y^2 + g_{33}x^3y^3 + g_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + g_{23}(x^2y^3 + x^3y^2) + g_{31}(x^3y^1 + x^1y^3) = g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ (по α и β производится суммирование от 1 до 3).

239. $|a| =$
$$= \sqrt{g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{31}x^3x^1}.$$

240. $\cos\varphi = \frac{(a,\ b)}{|a|\,|b|}$, где $(a,\ b) = g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = g_{11}x^1y^1 + g_{22}x^2y^2 + g_{33}x^3y^3 + g_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + g_{23}(x^2y^3 + x^3y^2) + g_{31}(x^3y^1 + x^1y^3)$,
$$|a| = \sqrt{g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} = \sqrt{g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{31}x^3x^1},$$
$$|b| = \sqrt{g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta} = \sqrt{g_{11}(y^1)^2 + g_{22}(y^2)^2 + g_{33}(y^3)^2 + 2g_{12}y^1y^2 + 2g_{23}y^2y^3 + 2g_{31}y^3y^1}.$$

241. $$\cos\alpha_1 = \frac{g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3}{\sqrt{g_{11}}\,|a|};$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3}{\sqrt{g_{22}}\,|a|},$$
$$\cos\alpha_3 = \frac{g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3}{\sqrt{g_{33}}\,|a|},$$
где $|a| = \sqrt{g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{31}x^3x^1}$.

242. $$V = \sqrt{g}\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix},\quad \text{где}\quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

243. $\cos\varphi_1 = \dfrac{x^1 + x^2\cos\omega_{12} + x^3\cos\omega_{13}}{|a|}$,

$\cos\varphi_2 = \dfrac{x^1\cos\omega_{21} + x^2 + x^3\cos\omega_{23}}{|a|}$,

$\cos\varphi_3 = \dfrac{x^1\cos\omega_{31} + x^2\cos\omega_{32} + x^3}{|a|}$,

где $|a| =$

$$= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2\cos\omega_{12} + 2x^2x^3\cos\omega_{23} + 2x^3x^1\cos\omega_{31}}.$$

244. $$V = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}\sqrt{g}, \text{ где } g = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos\omega_{32} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2\cos\omega_{12}\cos\omega_{23}\cos\omega_{31} - \cos^2\omega_{12} - \cos^2\omega_{23} - \cos^2\omega_{31}.$$

245. $x = d\dfrac{\Omega_1}{\Omega}$, $y = d\dfrac{\Omega_2}{\Omega}$, $z = d\dfrac{\Omega_3}{\Omega}$, где

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos\omega_{32} & 1 \end{vmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\varphi_2 & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\varphi_3 & \cos\omega_{32} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & \cos\varphi_2 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos\varphi_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\varphi_1 \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\varphi_2 \\ \cos\omega_{31} & \cos\omega_{32} & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}.$$

246. $e^1 = \dfrac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)}$, $e^2 = \dfrac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}$, $e^3 = \dfrac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}$.

247. $x^1y_1 + x^2y_2 + x^3y_3$.

248. $$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}^{-1}.$$

249. $x_1 = g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3$, $x_2 = g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3$, $x_3 = g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3$ (короче: $x_i = g_{i\alpha}x^\alpha$, где $x_i = (x, e_i)$). 250. $|e^1| = |e^2| = |e^3| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\widehat{e^1, e^2} = \widehat{e^2, e^3} = \widehat{e^3, e^1} = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. 251. $e_1 = \{g_{11}, g_{12}, g_{13}\}$, $e_2 = \{g_{21}, g_{22}, g_{23}\}$, $e_3 = \{g_{31}, g_{32}, g_{33}\}$.

252. $$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}}},$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}}.$$

253. $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{23}}$, $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{31}}$, $\cos\theta_3 = \frac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{12}}$, где

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos\omega_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

255. $z_1 = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}\sqrt{g}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 \\ y^3 & y^1 \end{vmatrix}\sqrt{g}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}\sqrt{g}$, где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad g_{ij} = (e_i, e_j).$$

259. $\frac{\overrightarrow{A_0M}}{\overrightarrow{MA_1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. 261. $\frac{\lambda_0 + k\mu_0}{1+k}$, $\frac{\lambda_1 + k\mu_1}{1+k}$. 268. $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. 269. $\lambda_0 = \frac{\lambda\mu}{1+\lambda+\lambda\mu}$, $\lambda_1 = \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}$. 270. $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $y = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$;

$$\lambda_0 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}.$$

271. $\lambda_0 = \frac{c_0}{\Delta}(A_0x + B_0y + C_0)$, $\lambda_1 = \frac{c_1}{\Delta}(A_1x + B_1y + C_1)$,

$$\lambda_2 = \frac{c_2}{\Delta}(A_2x + B_2y + C_2),$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, а c_0, c_1, c_2 — соответственно алгебраические дополнения элементов C_0, C_1, C_2 в определителе Δ. Указание. На основании предыдущей задачи $\lambda_0 = C(A_0x + B_0y + C_0)$. Константа C определяется из следующего условия: для вершины A_0 будет $\lambda_0 = 1$; аффинные координаты вершины A_0 будут $x_0 = \frac{a_0}{c_0}$, $y_0 = \frac{b_0}{c_0}$, где a_0, b_0, c_0 — алгебраические дополнения элементов A_0, B_0, C_0 в определителе Δ. Значит,

$$1 = C\left(A_0\frac{a_0}{c_0} + B_0\frac{b_0}{c_0} + C_0\right) = C\frac{\Delta}{c_0}.$$

Отсюда $C=\frac{c_0}{\Delta}$ и, значит,

$$\lambda_0=\frac{c_0}{\Delta}(A_0x+B_0y+C_0).$$

Аналогично выводятся две другие формулы.

272. $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} < 0.$

Указание. Ввести барицентрическую систему координат, принимая треугольник $A_0A_1A_2$ за базисный.

274. $\frac{\lambda_0+k\mu_0}{1+k}$, $\frac{\lambda_1+k\mu_1}{1+k}$, $\frac{\lambda_2+k\mu_2}{1+k}$. 275. $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{3}$.

276. $\lambda_0=\frac{a}{a+b+c}$, $\lambda_1=\frac{b}{a+b+c}$, $\lambda_2=\frac{c}{a+b+c}$.

277. $\lambda_0=\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$,

$\lambda_1=\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$,

$\lambda_2=\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

или

$\lambda_0=\frac{1}{2}(1-\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C)$, $\lambda_1=\frac{1}{2}(1-\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A)$,

$\lambda_2=\frac{1}{2}(1-\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B)$. 278. $\lambda_0=\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C$,

$\lambda_1=\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A$, $\lambda_2=\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B$.

Указание. Если μ_0, μ_1, μ_2 — барицентрические координаты центра O окружности, описанной около треугольника ABC, а G — точка пересечения его медиан, то $\overrightarrow{OG}:\overrightarrow{GH}=1:2$ (теорема Эйлера), откуда $\lambda_0=1-2\mu_0$, $\lambda_1=1-2\mu_1$, $\lambda_2=1-2\mu_2$.

284. 1) $\lambda_0>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$; 2) $\lambda_0<0$; 3) $\lambda_0=0$; 4) $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$; 5) $\lambda_0=1$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. 285. $\frac{\lambda_0+k\mu_0}{1+k}$, $\frac{\lambda_1+k\mu_1}{1+k}$, $\frac{\lambda_2+k\mu_2}{1+k}$, $\frac{\lambda_3+k\mu_3}{1+k}$.

288. $\lambda_0=\frac{d_0}{\Delta}(A_0x+B_0y+C_0z+D_0)$,

$\lambda_1=\frac{d_1}{\Delta}(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$,

$\lambda_2=\frac{d_2}{\Delta}(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$,

$\lambda_3=\frac{d_3}{\Delta}(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix},$$

а d_0, d_1, d_2, d_3 — алгебраические дополнения элементов D_0, D_1, D_2, D_3 в определителе Δ.

289.
$$-\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}(A_3x+B_3y+C_3z+D_3).$$

Указание. Если принять тетраэдр $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ за базисный тетраэдр барицентрической системы координат в пространстве, то уравнение искомой плоскости в барицентрических координатах будет иметь вид $\lambda_2=\lambda_3$. **290.** Указание. Принять тетраэдр $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$ за базисный. Пусть ρ — радиус вписанной сферы, а V — объем тетраэдра $\overrightarrow{A_0A_1A_2A_3}$. Тогда барицентрические координаты центра O сферы будут:

$$\lambda_i=\frac{\frac{1}{3}\rho s_i}{V}=\frac{\frac{1}{3}\rho s_i}{\frac{1}{3}(\rho s_0+\rho s_1+\rho s_2+\rho s_3)}=\frac{s_i}{s_0+s_1+s_2+s_3},$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

291. Окружность с центром в середине отрезка $\overline{AB}$ и радиусом, равным $\sqrt{a^2-c^2}$. **292.** Две прямые, перпендикулярные к прямой AB и находящиеся на расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от середины отрезка $\overline{AB}$. **293.** Прямая, на которой лежит гипотенуза треугольника. **294.** Окружность, вписанная в треугольник. **295.** Окружность с центром в вершине параллелограмма $ABCD$ и радиусом, равным $\sqrt{|\overline{AC}|^2+|\overline{BC}|^2-|\overline{AB}|^2}$, действительная, когда угол при вершине C острый, нулевая, когда угол C прямой, и мнимая, когда этот угол тупой. **296.** Окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и радиусом, равным $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2-(|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+|\overline{CA}|^2)}$. **297.** Две прямые, соединяющие середины противоположных сторон прямоугольника. Указание. Принять за оси координат средние линии прямоугольника. **298.** Окружность с центром в точке, лежащей на прямой AB и делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-k^2$; радиус окружности $r=\frac{k}{|1-k^2|}|\overline{AB}|$. **299.** Окружность, проходящая через точку O с центром на луче $\overrightarrow{OB}$ и радиусом, равным $\frac{ab}{a-b}$. **300.** Прямая, перпендикулярная к линии центров данных окружностей. Если окружности пересекаются — прямая, проходящая через точки пересечения данных окружностей, за исключением точек этой прямой, лежащих внутри окружностей. Если окружности касаются — касательная в их общей точке. Во всех трех случаях прямая называется радикальной осью двух окружностей. **301.** Прямая, перпендикулярная к прямой OA и пересекающая луч $\overrightarrow{OA}$ в точке, находящейся на расстоянии $\frac{a^2+r^2}{2a}$ от точки O. **302.** Два луча прямой $x=-1$, $y\geqslant 3$ и $x=-1$, $y\leqslant -3$. **303.** Дуга окружности $\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2$, $x\leqslant -\frac{19}{8}$. **304.** Четыре прямые: $y=\pm 2x$, $y=\pm\frac{1}{2}x$ в системе координат, осями которой служат данные прямые. **305.** Контур квадрата, образованного прямыми $x+y\pm 3=0$, $x-y\pm 3=0$. **306.** Диагонали квадрата и описанная около него окружность. **307.** Две стороны квадрата, средней линией которого служит отрезок перпендикулярной прямой, параллельные этой средней линии, и продолжения диагоналей этого квадрата. **308.** Если принять средние линии прямоугольника за оси координат, причем бо́льшую из них за ось абсцисс, то искомое геометрическое место будет состоять из двух отрезков $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=\pm a$ и четырех лучей $x\geqslant a$, $y=\pm x$; $x\leqslant -a$, $y=\pm x$. **309.** $r=\frac{a}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. **310.** $r=2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. **311.** Две равные окружности радиусов $\frac{a}{2}$, касающиеся BC в точке O. **312.** Окружность, проходящая через точку O, центр которой лежит на луче $\overrightarrow{OA}$ и радиус равен $\frac{b^2}{2a}$. Указание. Применить полярные координаты. **313.** Две полуокружности радиуса $a\sqrt{2}$, центры C_1 и C_2 которых являются концами диаметра, перпендикулярного к OA. Эти полуокружности расположены в полуплоскостях, определяемых прямыми AC_1 и AC_2, не содержащих точку O (рис. 1). Указание. Применить полярные координаты. **314.** Окружность, проходящая через точку A, центр которой находится на луче $\overrightarrow{AB}$, а радиус равен $\frac{bc}{b+c}$. Указание. Применить полярные координаты. **315.** Эллипс. Указание. Если принять за начало прямоугольной системы координат середину отрезка $\overline{F_1F_2}$, а за ось абсцисс прямую F_1F_2, то урав-

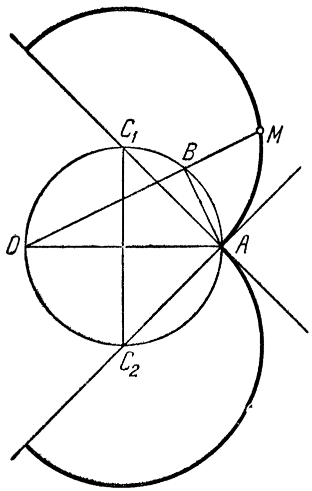

Рис. 1.

нение эллипса будет иметь канонический вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$ (рис. 2). **316.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}a\right)^2}=1$. **317.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **318.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **319.** В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{k}\right)^2}=1$.

320. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Указание. Составить параметрические уравнения линии, выбирая в качестве параметра угол, образуемый лучом $\overrightarrow{OA}$ с осью Ox (рис. 3).
321. Гипербола. Указание. Если принять за начало прямоугольной системы координат

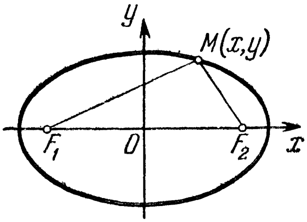

Рис. 2.

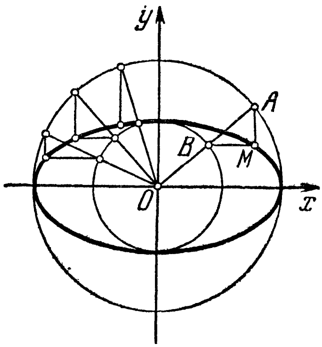

Рис. 3.

середину отрезка $\overline{F_1F_2}$, а за ось абсцисс прямую F_1F_2, то уравнение гиперболы будет иметь канонический вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$ (рис. 4).
322. Эллипс, если $e<1$; гипербола, если $e>1$. Указание. Если принять за начало прямоугольной системы координат точку O, делящую в отношении $-e^2$ отрезок $\overrightarrow{FD}$ перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d, а за ось Ox этот перпендикуляр, то получим канонические уравнения кривых. **323.** Парабола. Указание. Если принять за начало прямоугольной системы координат середину O отрезка $\overline{FD}$ перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d, а за положительное направление оси Ox — направление $\overrightarrow{OF}$, то уравнение параболы будет иметь канонический вид $y^2=2px$ (рис. 5).
324. Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **325.** Спираль Архимеда $r=\frac{v}{\omega}\varphi$ (рис. 6).
326. Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$, $r=c\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (рис. 7). **327.** Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2=2sxy$, $r=\sqrt{s\sin 2\varphi}$ (рис. 8). Указание. См. предыдущую задачу. **328.** Циссоида Диоклеса $r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ (рис. 9). **329.** Кон-

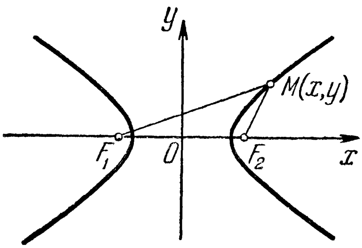

Рис. 4.

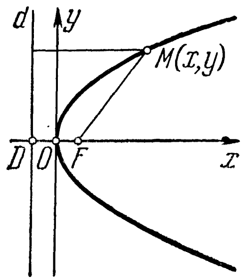

Рис. 5.

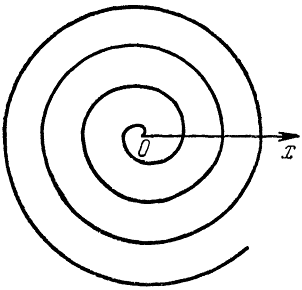

Рис. 6.

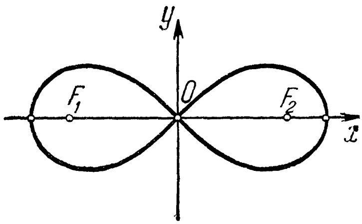

Рис. 7.

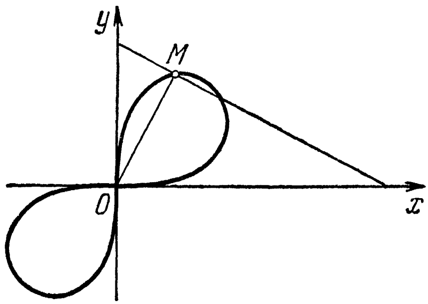

Рис. 8.

хоида Никомеда $r=\frac{a}{\cos\varphi}\pm b$ или $(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0$ (рис. 10). **330.** Улитка Паскаля $r=a\cos\varphi+b$, $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$ (рис. 11). **331.** Улитка Паскаля $r=b+a\cos\varphi$, $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. Указание. Принять за начало координат данную неподвижную точку,

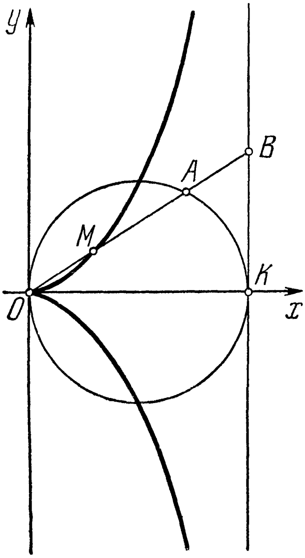

Рис. 9.

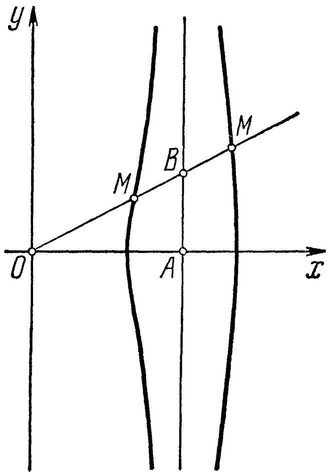

Рис. 10.

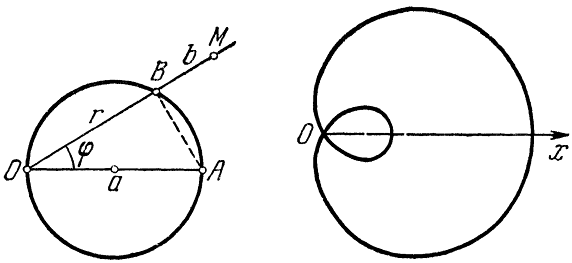

Рис. 11.

а за положительное направление оси направление луча, идущего из данной точки в центр окружности. **332.** Кардиоида (частный случай улитки Паскаля) $r=4a\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (рис. 12). **333.** Строфоида $r=\frac{a}{\cos\varphi}\pm a\operatorname{tg}\varphi$, $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ (рис. 13). **334.** $r=$

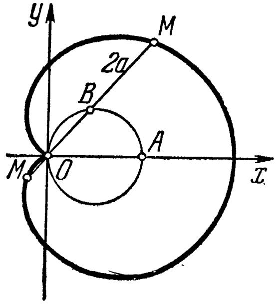

Рис. 12.

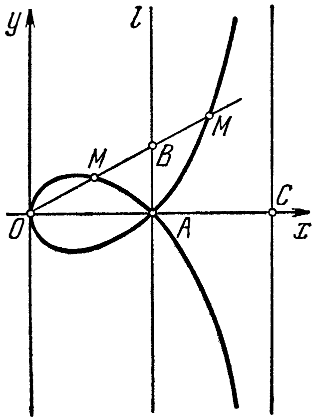

Рис. 13.

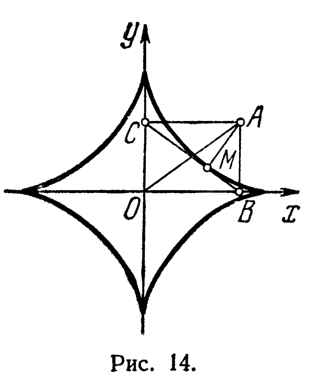

Рис. 14.

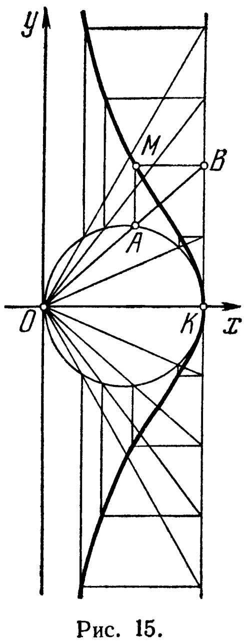

Рис. 15.

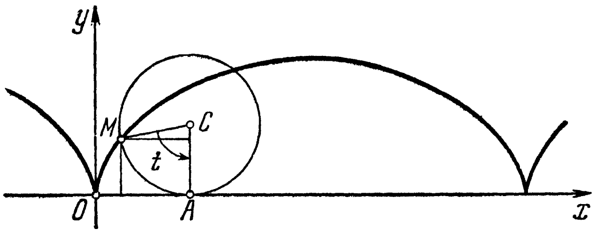

Рис. 16.

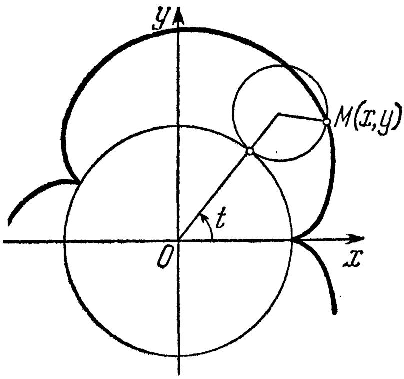

Рис. 17.

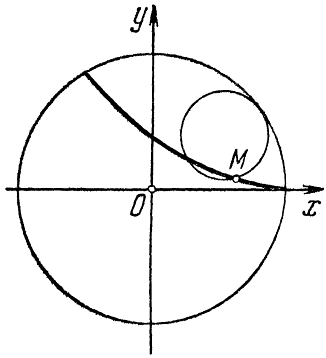

Рис. 18.

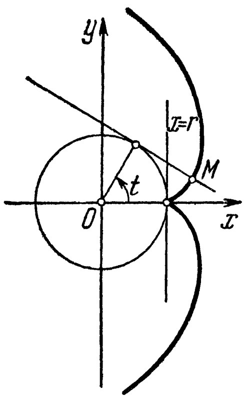

Рис. 19.

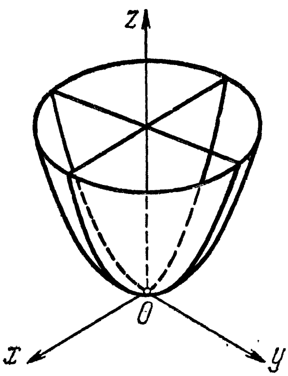

Рис. 20.

$= a\sin 2\varphi$, $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. **335.** Астроида $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 14). **336.** Верзьера Марии Аньези $x=a\cos^2\varphi$, $y=a\operatorname{tg}\varphi$; $x=\frac{a^3}{y^2+a^2}$, где a — длина диаметра окружности (рис. 15). **337.** Циклоида $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (рис. 16). Параметр t принимает все действительные значения. **338.** Эпициклоида $x=(R+r)\times$ $\times\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t$ (рис. 17). **339.** Гипоциклоида $x=(R-r)\cos t+r\cos\frac{R-r}{r}t$, $y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t$ (рис. 18). **341.** Эвольвента окружности $x=r(\cos t+t\sin t)$, $y=r(\sin t-$ $-t\cos t)$ (рис. 19). **342.** 1) $x=0$, $y=0$, $z=0$; 2) $x=a$, $y=b$, $z=c$; 3) $x\pm y=0$. **343.** $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. Указание. Выразить с помощью скалярного произведения числовое значение проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось $\overrightarrow{OP}$, где M — произвольная точка плоскости, а P — основание перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат O. **344.** 1) $x^2+y^2+z^2=R^2$; 2) $(x-a)^2+$

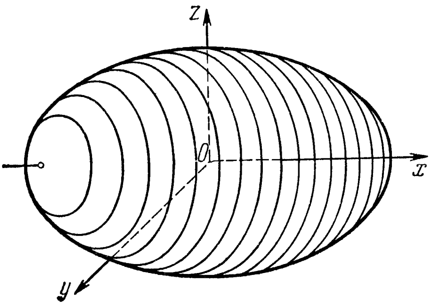

Рис. 21.

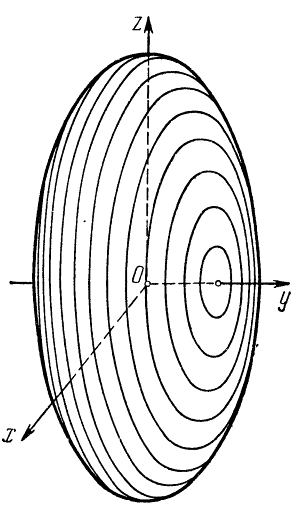

Рис. 22.

$+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. **345.** $x^2+y^2=r^2$. **346.** $x^2+y^2-\left(\frac{r}{h}\right)^2(z-h)^2=0$. **347.** $x^2+y^2-\operatorname{tg}^2\varphi z^2=0$. **348.** $y^2+z^2=(kx+b)^2$ (конус вращения, если $k\neq 0$; круглый цилиндр, если $k=0$, $b\neq 0$). **349.** $z=a(x^2+y^2)$ (параболоид вращения) (рис. 20). **350.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ (вытянутый эллипсоид вращения, рис. 21); 2) $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (сжатый эллипсоид вращения, рис. 22). **351.** 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ (двуполостный гиперболоид вращения, рис. 23); 2) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (однополостный гиперболоид вращения, рис. 24). **352.** $y^2+z^2=2px$ (параболоид вращения).

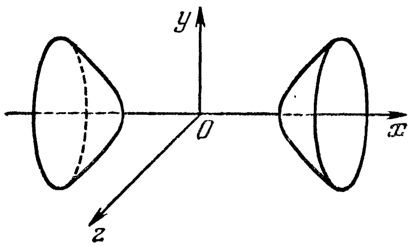

Рис. 23.

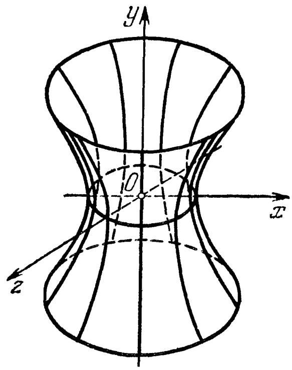

Рис. 24.

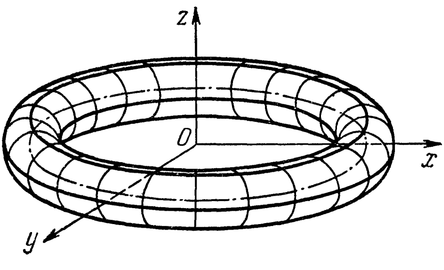

Рис. 25.

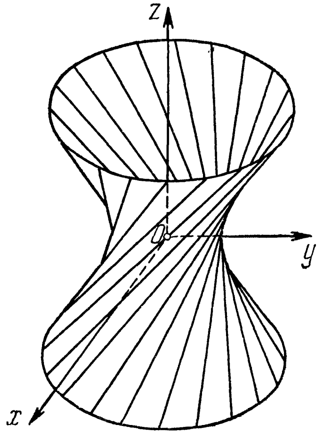

Рис. 26.

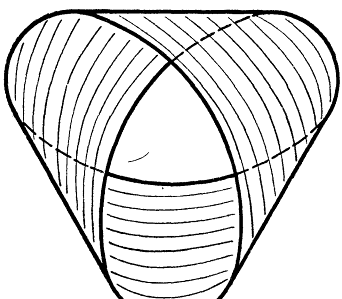

Рис. 27.

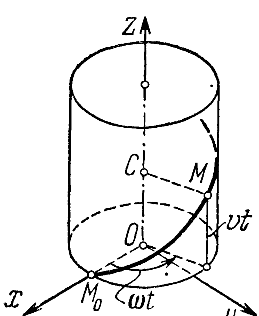

Рис. 28.

353. $(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (тор, рис. 25). **354.** $y^2+z^2=[f(x)]^2$. **355.** $F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$. **356.** Однополостный гиперболоид вращения $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2k^2}=1$ (рис. 26). **357.** $x^2+y^2=[f(z)]^2+[g(z)]^2$. **358.** $x=r\cos u\cos v$, $y=r\cos u\sin v$, $z=r\sin u$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\pi\leqslant v<\pi$. **359.** $x=(a+b\cos u)\cos v$, $y=(a+b\cos u)\sin v$, $z=b\sin u$; $-\pi<u\leqslant\pi$, $-\pi<v\leqslant\pi$. **360.** $x=(a+u\cos v)\cos 2v$, $y=(a+u\cos v)\times\sin 2v$, $z=u\sin v$, $0\leqslant u\leqslant b<a$, $0<v<2\pi$ (лист Мёбиуса, рис. 27). **361.** $x=r\cos\omega t$, $y=r\sin\omega t$, $z=vt$, $-\infty<t<+\infty$ (винтовая линия, рис. 28). **362.** $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\cos\varphi\sin\varphi$, $z=r\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ (рис. 29). **363.** 1) $3x-y+4=0$; 2) $5x+y-13=0$; 3) $x-3=0$; 4) $x+2y+7=0$; 5) $3x-2y=0$; 6) $5x-3y-15=0$. **364.** $k=-\frac{1}{2}$; $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$. **365.** $x=3-2t$, $y=-2+3t$; $3x+2y-5=0$. **366.** $x=x_1(1-t)+x_2t$, $y=y_1(1-t)+y_2t$. **367.** $5x+7y-11=0$. **368.** $7x+y+18=0$. **369.** $y=0$, $y=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$. **370.** $x-2y-4=0$. **371.** $2x+5y\pm10=0$. **372.** $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$. **373.** $\frac{\overline{DM}}{\overline{MK}}=\frac{3}{2}$; $\frac{\overline{BM}}{\overline{ML}}=\frac{16}{9}$. Указание. Принять за начало координат вершину A, а за базис—векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$. **374.** Прямая $y=\frac{k_1+k_2}{2}x+\frac{b_1+b_2}{2}$.

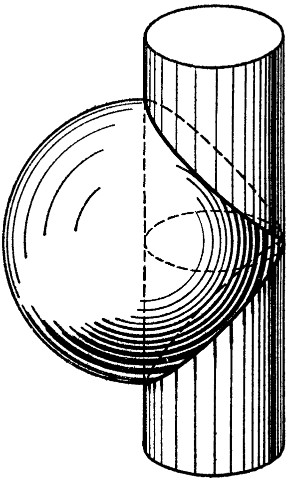

Рис. 29.

375. Отрезок прямой, соединяющий середину основания и середину высоты треугольника. Указание. Принять за оси координат основание и высоту треугольника. **376.** Отрезок прямой, соединяющей середины диагоналей. Указание. Принять за оси координат диагонали четырехугольника. **377.** $x+y-12=0$. Вершины (0, 0), (4, 8), (2, 10). **378.** $5x-3y-1=0$. **379.** $16x+13y-68=0$, $17x+11y-106=0$.

380. 1) $\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}$; 2) $\frac{1}{7}$. Указание. Ввести систему координат с началом координат в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **381.** 1) $Aa+Bb\neq 0$; 2) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C\neq 0$; 3) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C=0$.

382. 1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$; 2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & a_1 \\ y_2-y_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$;

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & a_1 \\ y_2-y_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$.

383. 1) — 3) Прямые параллельны. **384.** $x-3y-7=0$; $2x+5y-3=0$. **385.** $5x+3y-1=0$. **386.** $x-2=0$, $x-3y+13=0$. **387.** $3x-5y+9=0$, $x-y+3=0$, $x-3y+11=0$. **388.** $x+y-7=0$. **389.** $5x-7y-3=0$, $x+y+3=0$, $7x-5y-9=0$. **391.** $x-y-7=0$, $x-2y=0$. **392.** $A_1x+B_1y-(2A_1x_0+2B_1y_0+C_1)=0$, $A_2x+B_2y-(2A_2x_0+2B_2y_0+C_2)=0$. **393.** $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$. Указание. Найти точки, симметричные точкам P и Q относительно точки M. **394.** $5x-12y+36=0$ (BC), $9x+12y+20=0$ (CD). **395.** $5x-12y-6=0$ (AD), $5x-12y+36=0$ (BC), $9x+12y+20=0$ (CD).

396. Четыре числа

$$\delta_1=\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix},\quad \delta_2=\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix},\quad \delta_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

должны быть отличны от нуля.

397. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$ и хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. **398.** 1) Прямые образуют треугольник; 2) прямые имеют одну общую точку; 3) первая и третья прямые параллельны, вторая их пересекает; 4) прямые попарно параллельны. **400.** 1) $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu\neq 0$; 2) $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu=0$. Указание. Ввести систему координат, принимая за начало координат точку A, а за базис векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

401. $(A_1x+B_1y+C_1)\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}=(A_2x+B_2y+C_2)\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$.

402. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2A_3+B_2B_3)=(A_2x+B_2y+C_2)(A_1A_3+B_1B_3)$.

403. $$\frac{\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)=\frac{\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2).$$

404. $Q\in\angle BMC$, $R\in\angle CMD$, $S\in\angle DMA$, $T\in\angle BMC$. **405.** Точки A, B и C лежат в полосе, точки D и F принадлежат одной внешней области, точка E — другой внешней области. **406.** Прямая пересекает продолжение отрезка $\overline{AB}$ за точку B. **407.** $\lambda=-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$. **408.** Точка M принадлежит как отрезку $\overline{AB}$, так и отрезку $\overline{CD}$. **409.** Числа Ax_0+By_0+C и Ax_0+By_0+D имеют противоположные знаки. **410.** $C<D<E$ или $C>D>E$. **411.** Прямая пересекает стороны $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ и продолжение стороны $\overline{CA}$ за точку A. **412.** Точка M лежит на продолжении стороны $\overline{BC}$ за вершину B. Точка N лежит в области, ограниченной стороной $\overline{AB}$ и продолжениями сторон $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ за точки A и B. Точка P лежит в области, ограниченной продолжениями сторон $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ за вершину B. **413.** Числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2$,

$A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ должны иметь соответственно или такие же знаки, как числа $\delta_1 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, или противоположные знаки. **414.** На первой прямой вектор $\{-B_1, A_1\}$, если числа $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ и $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ — одного знака, и $\{B_1, -A_1\}$, если эти числа имеют противоположные знаки. На второй прямой вектор $\{-B_2, A_2\}$, если числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ имеют одинаковые знаки, и вектор $\{B_2, -A_2\}$, если знаки этих чисел противоположны. **415.** Прямая параллельна стороне $\overline{BC}$ и пересекает продолжения сторон $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ за точку A. **416.** $3x - 4y + 12 = 0$. **417.** $C = (2, 4)$. **418.** $39x - 9y - 4 = 0$. **419.** $x - y + 2 = 0$. **420.** $C = \left(\frac{35}{9}, \frac{8}{9}\right)$. **421.** $M = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **422.** $3x - 2y + 8 = 0$, $2x + 3y - 56 = 0$, $3x - 2y - 10 = 0$. **423.** $(2, -7)$. **424.** $M' = (2, 3)$. **425.** $3x - 2y + 11 = 0$, $2x + y - 9 = 0$, $x + 4y - 1 = 0$. **426.** $21x - 13y - 185 = 0$, $23x - 9y - 185 = 0$. **427.** $4x - y - 5 = 0$. **428.** Основания: $x + 7y - 8 = 0$, $x + 7y - 58 = 0$; боковые стороны: $3x - 4y - 24 = 0$, $4x + 3y + 18 = 0$. **429.** $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y + 16 = 0$. **431.** $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg} 7$. **432.** $5x - 12y + 62 = 0$, $x - 2 = 0$. **433.** Основание $2x - 3y + 7 = 0$; боковые стороны: $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$. **434.** $8x + 9y - 33 = 0$. **435.** $x = 2$. **436.** $x - 5y + 23 = 0$. **437.** $C = \left(6, \frac{31}{4}\right)$. **438.** 1) $7x - y + 30 = 0$; 2) $x + 7y - 10 = 0$; 3) $x - 3y + 10 = 0$. **439.** $3x + y + 16 = 0$. **440.** $C = (-1, -4)$. **441.** CA_1: $x + 3 = 0$, CB_1: $2x - 11y + 28 = 0$; CA_2: $3x - 4y + 17 = 0$, CB_2: $2x + y + 4 = 0$. **442.** $(2, -4)$. **443.** $x + 3y - 13 = 0$. **444.** $M_1 = (4, 0)$, $M_2 = (-1, 5)$. **446.** $-\frac{5}{13}$. **447.** $\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$; при этом берется знак плюс, если числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ противоположных знаков, и знак минус, если эти числа одного знака. **448.** $\cos\varphi_{12} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$, при этом берется знак плюс, если числа $\delta_1 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$ и $\delta_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ имеют противоположные знаки, и знак минус, если эти числа одного знака.

449. $(A_1A_2 + B_1B_2)\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} < 0$. **450.** $5x + 12y + 64 = 0$, $5x + 12y - 66 = 0$. **451.** 11. **452.** $x + 7y - 10 = 0$, $7x - y + 30 = 0$. **453.** $5x - 12y + 46 = 0$, $5x - 12y - 32 = 0$. **454.** $y + 1 = 0$, $3x + 4y - 17 = 0$. **455.** $4x + 3y + 3 = 0$, $y + 1 = 0$. **456.** $3x + 4y - 64 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 48 = 0$. **457.** Два решения: $2x - 11y - 23 = 0$, $2x - 11y - 73 = 0$. **458.** $3x - y - 10 = 0$.

459. $$\frac{\operatorname{sgn}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)=\frac{\operatorname{sgn}(A_2x_0+B_2y_0+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2).$$

460. $3x+y-14=0$, $x-3y+32=0$, $3x+y+11=0$, $x-3y-18=0$. **461.** $(3, 2)$. **462.** $(0, 1)$. **463.** $(-1, 4)$. **464.** $C_1=(-2, 4)$, $r_1=\sqrt{2}$; $C_2=(-3, 1)$, $r_2=2\sqrt{2}$. **465.** $C=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{1}{2}$. **466.** $C=(-2, -6)$, $r=2\sqrt{2}$. **467.** $x-y=0$, $7x-56y+25=0$, $77x+21y-50=0$. **468.** $11x+3y+10=0$. **469.** $4x-4y+5=0$.

470. $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, причем берется знак плюс, если $A_1A_2+B_1B_2<0$, и знак минус, если $A_1A_2+B_1B_2>0$. **471.** AB: $x+2y-3=0$, CD: $x+2y-23=0$; B_1C_1: $2x-y-6=0$, A_1D_1: $2x-y+14=0$; B_2C_2: $2x+y-18=0$, A_2D_2: $2x+y+2=0$. **472.** Два решения: I. A_1B_1: $3x+5y-57=0$, B_1C_1: $5x-3y+37=0$, C_1D_1: $3x+5y-9=0$; D_1A_1: $5x-3y-11=0$; II. A_2B_2: $9x-y-27=0$, B_2C_2: $x+9y-31=0$, C_2D_2: $9x-y+21=0$, D_2A_2: $x+9y-79=0$. **473.** Два решения: I. A_1B_1: $7x+y-15=0$, B_1C_1: $x-7y+7=0$, C_1D_1: $7x+y-26=0$, D_1A_1: $x-7y-4=0$; II. A_2B_2: $x-3y+1=0$, B_2C_2: $3x+y-1=0$, C_2D_2: $x-3y+12=0$, D_2A_2: $3x+y+10=0$. **474.** Окружность, построенная на заключенном между данными прямыми отрезке прямой, перпендикулярной к ним, как на диаметре, причем исключаются концы диаметра окружности. **475.** Пусть P, Q, R — точки пересечения биссектрис внутренних углов при вершинах A, B и C со сторонами $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Искомое геометрическое место состоит из отрезка $\overline{PQ}$ и лучей прямых PR и QR с начальными точками P и Q, не содержащих точки R. Указание. Принять за оси координат катеты треугольника. **476.** $x-7y+32=0$, $x-y+2=0$.

477.
$$\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\sqrt{A_3^2+B_3^2}}.$$

478. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k\sqrt{g}}{g_{11}+kg_{12}}$, где $g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$. **479.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k\sin\omega}{1+k\cos\omega}$.

480. $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(k_2-k_1)\sqrt{g}}{g_{11}+g_{12}(k_1+k_2)+g_{22}k_1k_2}.$$

481. $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(k_2-k_1)\sin\omega}{1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2}.$$

482. $A_1A_2g_{22}-g_{12}(A_1B_2+A_2B_1)+B_1B_2g_{11}=0$.

483. $1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2=0$.

484.

$$1)\ \cos\varphi = -\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & B_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & B_1 \\ A_1 & B_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_2 \\ g_{21} & g_{22} & B_2 \\ A_2 & B_2 & 0 \end{vmatrix}}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}}{\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & B_1 \\ A_1 & B_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_2 \\ g_{21} & g_{22} & B_2 \\ A_2 & B_2 & 0 \end{vmatrix}}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & B_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \end{vmatrix}};$$

$$2)\ \cos\varphi = \frac{A_1A_2-(A_1B_2+A_2B_1)\cos\omega+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2-2A_1B_1\cos\omega+B_1^2}\,\sqrt{A_2^2-2A_2B_2\cos\omega+B_2^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{(A_1B_2-A_2B_1)\sin\omega}{\sqrt{A_1^2-2A_1B_1\cos\omega+B_1^2}\,\sqrt{A_2^2-2A_2B_2\cos\omega+B_2^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(A_1B_2-A_2B_1)\sin\omega}{A_1A_2-(A_1B_2+A_2B_1)\cos\varphi+B_1B_2}.$$

485. $(A\cos\omega-B)(x-x_0)+(A-B\cos\omega)(y-y_0)=0$. 486. 1) $g_{11}x+g_{12}y+C=0$; 2) $g_{21}x+g_{22}y+C=0$; 3) $x+y\cos\omega+C=0$, $x\cos\omega+y+C=0$, где C принимает все действительные значения.

487. $$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}B^2-2g_{12}AB+g_{22}A^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}},$$
где g^{ij} — метрические коэффициенты базиса e^1, e^2, взаимного с базисом e_1, e_2.

488. $$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|\sin\omega}{\sqrt{A^2-2AB\cos\omega+B^2}}.$$

489. $d=3$. 490. 1) $x\sqrt{g_{11}}\pm y\sqrt{g_{22}}=0$; 2) $x\pm y=0$. 491. 1) $x=1$; $y=2$; $z=3$; 2) $y=2$, $z=3$; $z=3$, $x=1$; $x=1$, $y=2$; 3) $3y-2z=0$; $3x-z=0$; $2x-y=0$; 4) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. 492. 1) $x=1$, $y=2$; $y=2$, $z=3$; $z=3$, $x=1$; 2) $3y-2z=0$, $x=1$; $3x-z=0$, $y=2$; $2x-y=0$, $z=3$; 3) $x=1$; $y=2$; $z=3$. 493. $\{0, 0, 1\}$. 494. 1) $3x+2y-6=0$, $z=0$; 2) $3x+2y-6=0$. 495. $x=0$, $z=3$. 496. 1) $x\pm y=0$; 2) $x-y=0$, $z=0$. 497. $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$, $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$. 498. $x=0$,

$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$; $y=0$, $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$; $z=0$, $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$.

499. $\left(-\frac{x_2z_1}{z_2-z_1}, \frac{y_1z_2}{z_2-z_1}, 0\right)$. **500.** $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$. **501.** $4x+3z=0$, $y+2z+9=0$. **502.** $x=2-5u+2v$, $y=3+6u-v$, $z=-5+4u$; $4x+8y-7z-67=0$. **503.** $x-4y-z+16=0$. **504.** 1) $x=-13$, $y=13$, $z=-9$; 2) $u=-\frac{1}{5}$, $v=\frac{2}{5}$. **505.** 1) $x=-6$, $y=-4$, $z=-3$; 2) $u+v-1=0$, $u=0$, $v=0$; 3) $39u+9v-1=0$. **506.** 1. **507.** $14x-10y+33z-70=0$. **508.** $x+y-2z+3=0$. **509.** $\frac{1}{6}$. **510.** Два решения: $3x-z=0$, $x-z=0$. **511.** Два решения: $27x+11y+z-65=0$, $29x-13y+11z-45=0$. **512.** Семь плоскостей: $x-z-6=0$, $x+y-10=0$, $x+2y-z-8=0$, $2x+y-z-14=0$, $x-y-z-2=0$, $2x+y+z-16=0$, $5x+y-2z-28=0$. **513.** $18x-11y+3z-47=0$. **514.** $x-3y-3z+11=0$. **515.** $\left.\begin{array}{r}2y-z+2=0,\\ x-7y+3z-17=0.\end{array}\right\}$

516. $\left.\begin{array}{l}5x+y-8z+17=0,\\ 12x+9y-16z+18=0.\end{array}\right\}$ **517.** $x=3+t$, $y=2-t$, $z=1-t$.

518. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{-1}$. **519.** $y-2z=0$. **520.** $\left.\begin{array}{r}y-2z+4=0,\\ 3x+4y-z-10=0.\end{array}\right\}$

521. $\frac{\pi}{2}$, $4x+3y-24=0$. **522.** Плоскость, параллельная данным прямым, проходящая через точку, делящую в данном отношении один из указанных отрезков. **523.** Указание. Принять за начало координат вершину D тетраэдра $ABCD$, а за базис — векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. **524.** 1) $A=B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$; 2) по крайней мере одно из чисел A или B отлично от нуля; 3) $A=B=D=0$, $C\neq 0$. **525.** 1) $C\neq 0$; 2) $C=0$, $D\neq 0$; 3) $C=D=0$. **526.** 1) $c\neq 0$; 2) $c=0$, $z_0\neq 0$; 3) $c=0$, $z_0=0$. **527.** 1) $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$; 2) $A_1B_2-A_2B_1=0$ и по крайней мере одно из чисел $A_1D_2-A_2D_1$ или $B_1D_2-B_2D_1$ отлично от нуля; 3) $A_1B_2-A_2B_1=0$, $A_1D_2-A_2D_1=0$, $B_1D_2-B_2D_1=0$. **528.** 1) $ay_0-bx_0\neq 0$; 2) $ay_0-bx_0=0$ и по крайней мере одно из чисел a или b отлично от нуля; 3) $a=b=0$, $c\neq 0$ и по крайней мере одно из чисел x_0 или y_0 отлично от нуля; 4) $a=b=0$, $c\neq 0$, $x_0=y_0=0$. **529.** 1) $C_1D_2-C_2D_1\neq 0$; 2) $C_1D_2-C_2D_1=0$ и по крайней мере одно из чисел $B_1C_2-B_2C_1$ или $A_1C_2-A_2C_1$ отлично от нуля; 3) $B_1C_2-B_2C_1=0$, $A_1C_2-A_2C_1=0$, $C_1D_2-C_2D_1\neq 0$; 4) $B_1C_2-B_2C_1=0$, $A_1C_2-A_2C_1=0$, $C_1D_2-C_2D_1=0$. **530.** 1) Пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. **531.** 1) $r=R=2$; 2) $r=1$, $R=2$; 3) $r=R=1$. **532.** 1) Пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. **533.** 1) $r=3$; 2) $r=2$, $R=3$; 3) $r=R=2$. **534.** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(0, 0, -2)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 3, 1)$. **535.** 1) $aA+bB+cC\neq 0$; 2) $aA+bB+cC=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$; 3) $aA+bB+cC=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. **536.** 1) $r=3$; 2) $r=2$, $R=3$; 3) $r=R=2$. **537.** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 4, 6)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости. **538.** 1) $r=3$; 2) $r=2$, $R=3$; 3) $r=R=2$. **539.** 1) Пересекаются в точке (—3, 5, —5) и лежат в плоскости $9x+10y-7z-58=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x-22y+19z+9=0$; 4) совпадают. **540.** 1) $R=3$; 2) $r=R=2$; 3) $r=1$, $R=2$; 4) $r=R=1$. **541.** 1) Совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x-3y+8z=0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке (10, —1, 0) и лежат в плоскости $x-7y+3z-17=0$. **542.** 1) $(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(aA_2+bB_2+cC_2)-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)(aA_1+bB_1+cC_1)\neq 0$; 2) $(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(aA_2+bB_2+cC_2)-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)(aA_1+bB_1+cC_1)=0$ и по крайней мере одно из чисел $aA_1+bB_1+cC_1$ или $aA_2+bB_2+cC_2$ отлично от нуля; 3) $aA_1+bB_1+cC_1=0$, $aA_2+bB_2+cC_2=0$ и по крайней мере одно из чисел $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1$ или $A_2x_0+B_2y+C_2z_0+D_2$ отлично от нуля; 4) $aA_1+bB_1+cC_1=0$, $aA_2+bB_2+cC_2=0$, $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$. **543.** 1) Пересекаются в точке (—3, 0, 4) и лежат в плоскости $2x-y+6z-18=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $18x+25y-46z-18=0$; 4) совпадают. **544.** 1) $r=3$, $R=4$; 2) $r=R=3$; 3) $r=2$, $R=3$; 4) $r=R=2$. **545.** 1) Три плоскости пересекаются в точке (3, 5, 7); 2) три плоскости попарно параллельны; 3) три плоскости проходят через одну прямую; 4) плоскости попарно пересекаются и линия пересечения каждых двух плоскостей параллельна третьей плоскости; 5) первая и третья плоскости параллельны; вторая плоскость их пересекает. **546.** 1) $r=3$; 2) $r=R=2$ и никакие две строки матрицы A не пропорциональны; 3) $r=2$, $R=3$ и никакие две строки матрицы A не пропорциональны; 4) $r=2$, $R=3$ и две строки матрицы A пропорциональны; 5) $r=1$, $R=2$ и никакие две строки матрицы B не пропорциональны; 6) $r=R=2$ и две строки матрицы B пропорциональны; 7) $r=1$, $R=2$ и две строки матрицы B не пропорциональны; 8) $r=R=1$. **547.** $20x+19y-5z+41=0$. **548.** $5y+13z-60=0$. **549.** $3x+5y-4z+25=0$. **550.** $16x+50y-3z-132=0$. **551.** $2x-2y-2z-1=0$. **552.** $x-9y+5z+20=0$, $x-2y-5z+9=0$. **553.** $4y-3z-3=0$.

554. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}\neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}\neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}\neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

555. 1) $R<4$; 2) $r=R$; 3) $r<R<4$. **556.** Точки A, B, C лежат по одну сторону от данной плоскости; точки D и E — по другую сторону. **557.** Точки A и B лежат внутри одного угла; точки C и D лежат в вертикальных углах, смежных с углом, содержащим точку A; точка E лежит в угле, вертикальном к углу, содержащему точку A. **558.** Точки A и B лежат между данными плоскостями, точки C и D лежат в разных внешних областях. **559.** Плоскость пересекает продолжение отрезка $\overline{AB}$ за точку A. **560.** 1) $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq$

$\neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$; 2) числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют противоположные знаки; 3) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$; 4) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$.

561. $\dfrac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}$.

562. $\dfrac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{PQ}} = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{D - E}$.

563. Числа $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + E$ имеют противоположные знаки. **564.** $(A_ix + B_iy + C_iz + D_i)\, d_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, где d_i — алгебраическое дополнение элемента D_i в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}.$$

565. $(A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i)\, d_i < 0$, где d_i — алгебраическое дополнение элемента D_i в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}.$$

566. Векторы

$$p_1 = \left\{ \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \right\},$$

$$p_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_3 & A_3 \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$p_3 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

направлены по ребрам трехгранного угла, если все четыре числа

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1, \\ u_2 &= A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2, \\ u_3 &= A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

имеют один и тот же знак. Если же какое-нибудь из чисел

$$u_i = A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i,\quad i = 1, 2, 3,$$

имеет знак, противоположный знаку числа Δ, то вместо вектора p следует взять вектор $-p_i$.

567. $2x + 6y - 4z - 56 = 0$. **568.** $3x + 2y + 4z - 38 = 0$. **569.** $5x - y - 3z + 6 = 0$. **570.** $x + 3y - 2z - 10 = 0$. Указание. Воспользоваться уравнением пучка плоскостей. **571.** $3x + 4y - z + 1 = 0$ и $x - 2y - 5z + 3 = 0$. **572.** $41x - 19y + 52z - 68 = 0$, $33x + 4y - 5z - 63 = 0$.

573. $\begin{vmatrix} x-x_0 & a & A \\ y-y_0 & b & B \\ z-z_0 & c & C \end{vmatrix} = 0.$

574. $x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct.$

575. $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0.$

576. $\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & a \\ y-y_0 & y_1-y_0 & b \\ z-z_0 & z_1-z_0 & c \end{vmatrix} = 0, \\ &a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0. \end{aligned}\right\}$

577. $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-13}{3} = \dfrac{z-7}{6},\quad d = 7.$ **578.** $(-2,\ 1,\ 4)$.

579. $\begin{vmatrix} x-x_1 & A_1 & A_2 \\ y-y_1 & B_1 & B_2 \\ z-z_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$

580. $(7,\ 1,\ 0)$. **581.** $\left(\dfrac{33}{5},\ 2,\ \dfrac{36}{5}\right)$. **582.** $(7,\ -7,\ 18)$. **583.** $(9,\ 2,\ 11)$.
584. $5x - 13y - 12z + 20 = 0,\ 2x - 2y + 3z - 5 = 0.$ **585.** 1) $d = 3\sqrt{2}$; $5x - 11y + 4z + 5 = 0,\ x + y - 1 = 0$; 2) $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{17}{6}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{7}{6}\right)$.
586. $x + y + z - 1 = 0,\quad x - 1 = 0.$ **587.** $24x + 21y - 33z + 50 = 0.$
588. $4x - 14y - 7z - 48 = 0.$ Указание. Найти точку, симметричную точке $(-3,\ 0,\ 0)$, лежащей в первой плоскости, относительно второй плоскости, и воспользоваться уравнением пучка плоскостей, определяемого данными плоскостями. **589.** 2. **590.** Два решения: $x + 3y = 0,\ 3x - y = 0.$ **591.** Два решения: $x + 20y + 7z - 62 = 0,\ x - z + 2 = 0.$ **592.** Два решения: $x + 20y + 7z - 12 = 0,\ x - z + 4 = 0.$ Указание. Воспользоваться уравнением пучка плоскостей. **593.** Два решения: $2x + y + z + 8 = 0,\ 14x + 13y - 11z + 20 = 0.$ Указание. Рассмотреть пучок плоскостей, осью которого является данная прямая. **594.** $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. **595.** $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) \times (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0.$ **596.** $(A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3)(A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1)(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0.$
597. $\pm\dfrac{9}{2\sqrt{33}}$. **598.** Два решения: $x + y + z = 0,\ x + y - z + 2 = 0.$ Указание. Рассмотреть пучок плоскостей, осью которого является данная прямая. **599.** $\arcsin\dfrac{1}{10\sqrt{19}}$. **600.** $\arccos\left(-\dfrac{73}{75}\right)$. **601.** $\dfrac{15}{\sqrt{779}},\ -\dfrac{23}{\sqrt{779}},\ \dfrac{5}{\sqrt{779}}$. **602.** $-\dfrac{5}{\sqrt{134}},\ \dfrac{3}{\sqrt{134}},\ \dfrac{10}{\sqrt{134}}$. Луч проходит вне трехгранного угла. **603.** $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. **604.** Два решения: $2x + y - 4z + 17 = 0,\ 2x + y - 4z - 25 = 0.$ **605.** Два решения: $6x + 3y + 2z - 75 = 0,\ 6x + 3y + 2z - 19 = 0.$ **606.** $d = \dfrac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. **607.** $Ax + By + Cz \pm$

$\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$. 608. $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$. 609. $8x+5y-9z-24=0$. 610. $3x-y+2z-2=0$.

611. $\left(-\frac{19}{6}, -\frac{5}{6}, 0\right)$.

612. Центр $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, радиус равен $\frac{3}{2}$.

613. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z}{2}$, $r=\frac{1}{3}$. 614. $14x-2y+4z-1=0$. 615. Центр (2, 3, 4), радиус равен 1. 616. Четыре прямых:

$$\frac{x-1}{\pm 2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{\pm 2}.$$

617. $\sqrt{14}$. 618. $\sqrt{\frac{35}{6}}$. 619. $9x+12y+20z-60=0$, $4x-3y=0$; $h=5$.

620. 1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) $\frac{16}{\sqrt{102}}$. 621. 3. 622. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 623. $r=r_0+at$. 624. $r=r_0+ua+vb$ или $(r-r_0, a, b)=0$. 625. $r=r_0+u(r_1-r_0)+$ $+va$ или $(r-r_0, r_1-r_0, a)=0$. 626. $(r-r_0, n)=0$. 627. $(r-r_0, n_1, n_2)=0$ или $r=r_0+un_1+vn_2$. 628. $r_0+a\frac{(r_1-r_0, b, c)}{(a, b, c)}$.

629. 1) $(r_2-r_1, a_1, a_2)\neq 0$; 2) $(r_2-r_1, a_1, a_2)=0$; 3) $(r_2-r_1, a_1, a_2)=$ $=0$, $[a_1, a_2]\neq 0$; 4) $[a_1, a_2]=0$, $[r_2-r_1, a]\neq 0$; 5) $[a_1, a_2]=0$, $[r_2-r_1, a]=0$. 630. $r_1+\frac{(r_0-r_1, a)}{(a, a)}a$. 631. $2r_1-r_0+2\frac{(r_0-r_1, a)}{(a, a)}a$. 632. $r_0-\frac{(r_0, n)+D}{(n, n)}n$. 633. $r_0-2\frac{(r_0, n)+D}{(n, n)}n$. 634. r_0+ $+\frac{(r_1-r_0, a, b)}{([a, b], [a, b])}[a, b]$. 635. $(n_1, n_2, n_3)\neq 0$.

636. $-\frac{D_1[n_2, n_3]+D_2[n_3, n_1]+D_3[n_1, n_2]}{(n_1, n_2, n_3)}$. 637. 1) $(a, n)\neq 0$; 2) $(a, n)=0$, $(r_0, n)+D\neq 0$; 3) $(a, n)=0$, $(r_0, n)+D=0$. 638. $(r-r_0, a, n)=0$. 639. $(r-r_1, a_1, a_2)=0$. 640. $(r-r_1, a_1, [a_1, a_2])=0$, $(r-r_2, a_2, [a_1, a_2])=0$. 641. $(r-r_0, a)=0$, $(r-r_0, r_1-r_0, a)=0$. 642. $(n_1, n_2, n_3)=0$, $[n_1, n_2]\neq 0$, $[n_2, n_3]\neq$ $\neq 0$, $[n_3, n_1]\neq 0$, $D_1[n_2, n_3]+D_2[n_3, n_1]+D_3[n_1, n_2]\neq 0$. 643. $(n_1, n_2, n_3)=0$, $D_1[n_2, n_3]+D_2[n_3, n_1]+D_3[n_1, n_2]=0$ и по крайней мере один из векторов $[n_2, n_3]$, $[n_3, n_1]$, $[n_1, n_2]$ отличен от нуля. 644. $(n_1, n_2, n_3)\neq 0$, $(n_1, n_4, n_3)\neq 0$, $(n_2, n_3, n_4)\neq 0$, $(n_2, n_4, n_1)\neq 0$, $-D_1(n_2, n_3, n_4)+D_2(n_1, n_3, n_4)-D_3(n_1, n_2, n_4)+$ $+D_4(n_1, n_2, n_3)\neq 0$. 645. Числа (r_1-r_0, r_2-r_0, a), (r_2-r_0, r_3-r_0, a), (r_3-r_0, r_1-r_0, a) одного знака. 646. 1) $[n_1, n_2]\neq 0$; 2) $[n_1, n_2]=0$, $D_1n_2-D_2n_1\neq 0$; 3) $[n_1, n_2]=0$, $D_1n_2-D_2n_1=0$. 647. $\frac{|(r_0, n)+D|}{|n|}$.

648. $\dfrac{|[r_1-r_0,\ a]|}{|a|}$. 649. 1) $d=\dfrac{|(r_2-r_1,\ a_1,\ a_2)|}{|[a_1,\ a_2]|}$; 2) $d=\dfrac{|[r_2-r_1,\ a_1]|}{|a_1|}$. 650. $(r,\ n)+D=0,\ (r-r_0,\ a,\ [a,\ n])=0$.

651. 1) Указание. Если прямая проходит через точку (r_0), то $b=[r_0,\ a]$.

652. $$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{23}BC+2g^{31}CA+2g^{12}AB}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}}}.$$

Указание. Нормальный вектор к плоскости $n=Ae^1+Be^2+Ce^3$, где e^1, e^2, e^3 — базис, взаимный с базисом e_1, e_2, e_3, а $g^{ij}=(e^i, e^j)$. 653. $\cos\varphi=\pm\dfrac{\lambda}{\mu\nu}$, где

$$\lambda=g^{11}A_1A_2+g^{22}B_1B_2+g^{33}C_1C_2+g^{12}(A_1B_2+A_2B_1)+g^{23}(B_1C_2+B_2C_1)+g^{31}(C_1A_2+C_2A_1),$$

$$\mu=\sqrt{g^{11}A_1^2+g^{22}B_1^2+g^{33}C_1^2+2g^{23}B_1C_1+2g^{31}C_1A_1+2g^{12}A_1B_1},$$

$$\nu=\sqrt{g^{11}A_2^2+g^{22}B_2^2+g^{33}C_2^2+2g^{23}B_2C_2+2g^{31}C_2A_2+2g^{12}A_2B_2},$$

или

$$\cos\varphi=\pm\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_2 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}}}.$$

654. $g^{11}A_1A_2+g^{22}B_1B_2+g^{33}C_1C_2+g^{23}(B_1C_2+B_2C_1)+g^{31}(A_1C_2+A_2C_1)+g^{12}(A_1B_2+A_2B_1)=0$ или

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

655. $\varphi=\arcsin\dfrac{|aA+bB+cC|}{|p|\cdot|n|}$, где

$$|p|=\sqrt{g_{11}a^2+g_{22}b^2+g_{33}c^2+2g_{23}bc+2g_{31}ca+2g_{12}ab},$$

$$|n|=\sqrt{g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{23}BC+2g^{31}CA+2g^{12}AB}.$$

656. $(g_{11}a+g_{12}b+g_{13}c):(g_{21}a+g_{22}b+g_{23}c):(g_{31}a+g_{32}b+g_{33}c)=$ $=A:B:C$ или $(g^{11}A+g^{12}B+g^{13}C):(g^{21}A+g^{22}B+g^{23}C):(g^{31}A+$ $+g^{32}B+g^{33}C)=a:b:c.$

657. $$V=\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}.$$

658. $x=-x'+1,\quad y=-y'+1.$ **659.** $x=6x'+4y'-4,\quad y=$ $=-2x'+6y'+2.$ **660.** $O'=(3,\ -2),\quad e_1'=\{2,\ -1\},\quad e_2'=\{-5,\ 2\}.$ **661.** $O=(0,\ 0),\quad A=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\quad C=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\quad B=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right).$

662. $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}.$ **663.** $x=\frac{1}{3}x'-$ $-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3},\quad y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}.$ **664.** $x'=(x+y)\cos\frac{\omega}{2},\ y'=$ $=(-x+y)\sin\frac{\omega}{2}.$ **665.** $x=\dfrac{-x'\cos\omega+y'}{\sin\omega},\quad y=\dfrac{x'-y'\cos\omega}{\sin\omega}.$

666. $x'=x+y\cos\omega,\quad y'=x\cos\omega+y$ или $x=\dfrac{x'-y'\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad y=$ $=\dfrac{-x'\cos\omega+y'}{\sin^2\omega}.$

667. $x'=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_0y+C_1},\quad y'=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}.$

668. $x'=\dfrac{-x+y-2}{2},\quad y'=\dfrac{2x+y-4}{9}.$ **669.** $14x'+4y'-3=0.$

670. $142x-183y-489=0.$ Указание. Принять данные прямые за новые оси координат, а данную точку P — за единичную точку новой системы координат. **671.** $x-5y+3=0.$ Указание. Принять за новые оси координат данные стороны треугольника, а за единичную точку — точку пересечения его медиан. **672.** $3x+8y-17=0,\ 6x-y-$ $-17=0,\ 9x+7y+17=0.$ Указание. Принять медианы треугольника за новые оси координат, а данную вершину — за единичную точку. **673.** 1) $x=2x'+z'+2,\ y=4x'+4y'+z'+1,\ z=x'+4y'+3;$ 2) $x'=-x+y-z+4,\quad y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{4},\quad z'=3x-2y+$ $+2z-10;$ 3) $O=\left(4,\ -\frac{7}{4},\ -10\right),\quad e_1=\left\{-1,\ \frac{1}{4},\ 3\right\},\quad e_2=\left\{1,\ -\frac{1}{4},\ -2\right\},\quad e_3=\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}.$ **674.** 1) $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2},$

$y'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}$, $z'=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}$; 2) $O'=(-1, 0, 1)$, $e_1'=\{-2, 0, 1\}$, $e_2'=\{-1, -1, 3\}$, $e_3'=\{-1, -1, 1\}$; 3) $O=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $e_1=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$, $e_2=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right\}$, $e_3=\left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. **675.** $x=-x'+1$, $y=-y'+1$, $z=-z'+1$. **676.** $O=(0, 0, 0)$, $A=(-1, 1, 1)$, $B=(1, -1, 1)$, $C=(1, 1, -1)$. **677.** $A=(0, 0, 0)$, $B=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $D=\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $C=(1, 1, -1)$, $A'=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B'=(1, -1, 1)$, $D'=(-1, 1, 1)$, $C'=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **678.** $x=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}$. **679.** $x=x'-\frac{y'}{\sqrt{3}}-\frac{z'}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}y'-\frac{z'}{\sqrt{6}}$, $z=\frac{3}{\sqrt{6}}z'$.

680. $x_1+\omega_{12}x_2+\omega_{13}x_3=\alpha_{11}x_1'+\alpha_{12}x_2'+\alpha_{13}x_3'$, $\omega_{21}x_1+x_2+\omega_{23}x_3=\alpha_{21}x_1'+\alpha_{22}x_2'+\alpha_{23}x_3'$, $\omega_{31}x_1+\omega_{32}x_2+x_3=\alpha_{31}x_1'+\alpha_{32}x_2'+\alpha_{33}x_3'$, где $\omega_{ik}=\omega_{ki}$. **681.** $x'=\frac{x+1}{2}$, $y'=-2x+y$, $z'=\frac{x+2y+3z-6}{16}$. **682.** $x'=x$, $y'=y$, $z'=-\frac{3}{7}(2x+3y-6z+6)$. **683.** $x=-\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-4$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'+2$. **684.** $x=-\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-3$, $y=-\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'-2$. **685.** (2, 3). **686.** $x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'+2$, $y=-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'+3$. **687.** $x=\frac{-x'+3y'}{\sqrt{10}}+\frac{3}{10}$, $y=\frac{-3x'-y'}{\sqrt{10}}+\frac{9}{10}$. **688.** $x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$, $y'=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$. **689.** $x=-\frac{11}{15}x'-\frac{2}{15}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=-\frac{2}{15}x'-\frac{14}{15}y'-\frac{1}{3}z'$, $z=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$. **690.** $x=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'$, $y=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

691. $x=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'+2$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2\sqrt{2}}{3}y'+1$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3\sqrt{2}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'+2$. **692.** $x=\frac{1}{3}x'-$

$-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'$, $z=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$.

693. $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'+\frac{2}{3}$. **694.** $x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$, $y'=\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, $z'=\frac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2+C_3^2}}$.

695. $x'=\frac{x+2y+5z+1}{\sqrt{30}}$, $y'=\frac{2x-y+2}{\sqrt{5}}$, $z'=\frac{-x-2y+z+3}{\sqrt{6}}$.

696. $x'=\frac{-x-y-z+1}{\sqrt{3}}$, $y'=\frac{2x-y-z+1}{\sqrt{6}}$, $z'=\frac{y-z+2}{\sqrt{2}}$.

697. $x^2+y^2-2ax=0$. **698.** Четыре окружности $x^2+y^2 \pm 2rx \pm \pm 2ry=0$. **699.** $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$. **700.** 1) $C=\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $r=\frac{1}{2}$; 2) $C=\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{3}{2}$; 3) $C=(-1, 2)$, $r=\sqrt{5}$; 4) $C=\left(1, -\frac{2}{3}\right)$, $r=\frac{4}{3}$. **701.** $x=a+r\cos t$, $y=b+r\sin t$. **702.** 1) $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$; 2) $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$; 3) $r_1^2<(x-a)^2+(y-b)^2<r_2^2$.

703. 1) Множество всех внутренних точек полукруга, ограниченного окружностью $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ и ее диаметром, лежащим на прямой $y=x$, содержащихся в той полуплоскости, образованной прямой $y=x$, в которой лежит точка $(5, 0)$; 2) множество всех точек большего из двух сегментов, на которые данная прямая разбивает данный круг. **704.** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $(Aa+Bb+C)(Ax+By+C)>0$. **705.** $D^2+E^2-AF>0$, $C=\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$, $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|}$.

706. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$ **707.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$

708. $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c$. **709.** Два решения: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. **710.** Две окружности: $x^2+(y-5)^2=25$, $x^2+\left(y-\frac{45}{4}\right)^2=\left(\frac{45}{4}\right)^2$.

711. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ C & -A & -B & 0 \end{vmatrix}=0.$

712. 1) $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<r$; 2) $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>r$;
3) $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r$.

713. $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$. **714.** $A(x-a)+B(y-b)\pm r\sqrt{A^2+B^2}=0$. **715.** $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+r^2=0$. **716.** $\sigma=x_0^2+y_0^2+2ax_0+2by_0+c$. **717.** Прямая $(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+c_2-c_1=0$. **720.** $(x-4)^2+(y+3)^2=1$. Указание. Центр искомой окружности лежит на пересечении данной прямой с радикальной осью двух данных окружностей. **721.** $(x+3)^2+(y+7)^2=41$. Указание. Центр искомой окружности является радикальным центром трех данных окружностей. **722.** $2a_1a_2+2b_1b_2=c_1+c_2$. **723.** $x^2+y^2-x-3y-10=0$. Указание. Рассмотреть уравнение пучка окружностей

$$x^2+y^2-2x+4y-20+p(x-7y+10)=0.$$

724. $x_0x+y_0y=r^2$. Указание. Пусть $T_1=(x_1, y_1)$ и $T_2=(x_2, y_2)$ — точки прикосновения касательных к окружности, проведенных из точки (x_0, y_0). Уравнения касательных в точках $T_i=(x_i, y_i)$, $i=1, 2$, таковы: $x_ix+y_iy=r^2$. Этим уравнением удовлетворяют координаты точки M_0, т. е. $x_ix_0+y_iy_0=r^2$. Отсюда следует, что точки касания лежат на прямой $x_0x+y_0y=r^2$. **725.** $(rx_0\pm\rho y_0)x+(ry_0\mp\rho x_0)y=r(x_0^2+y_0^2)$, где $\rho=\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}$. **726.** $r(\sqrt{5}-1)$. **727.** (рис. 30).

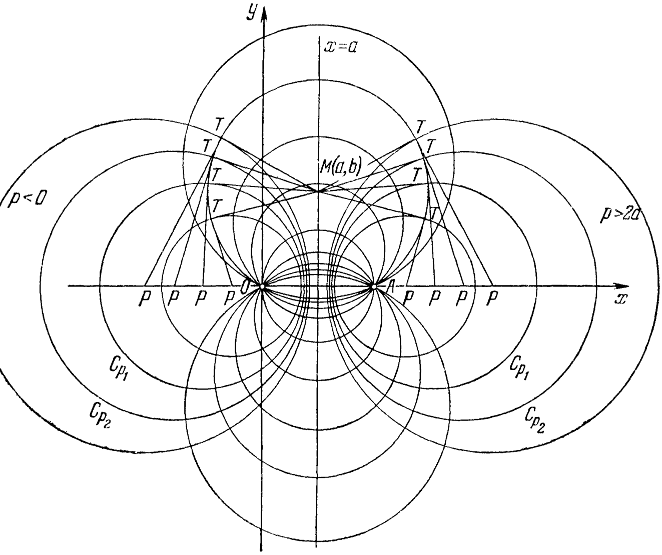

Рис. 30.

1) Или $p>2a$, или $p<0$, $C=(p, 0)$, $r=\sqrt{p(p-2a)}$. 2) $x=a$. 3) $p=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2(x_0-a)}$. Это значение p при ограничениях, наложенных на точку (x_0, y_0) в условии, или отрицательно, или больше $2a$. 4) Если $p>2a$, то $\sigma(2a, 0)=2a(2a-p)<0$, $\sigma(0, 0)=2pa>0$, а если $p<0$,

то $\sigma(2a, 0) > 0$, $\sigma(0, 0) < 0$. 5) $\sigma = a^2 - b^2 = |\overline{OM}|^2 = |\overline{AM}|^2$; отрезки касательных, проведенных из любой точки радикальной оси ко всем окружностям C_p, равны между собой. Иначе: любая окружность, проходящая через точки O и A, пересекает все окружности C_p ортогонально. 6) Если $2a < p_1 < p_2$, то окружности C_{p_1} и C_{p_2} не имеют ни одной общей точки (их уравнения несовместны); при этом точка A лежит внутри обеих окружностей и радиус окружности C_{p_2} больше радиуса окружности C_{p_1}. Для $p_2 < p_1 < 0$ рассуждения аналогичны. 7) Для построения окружности C_p строим точку $P = (p, 0)$ и проводим из точки P касательную PT к любой окружности, проходящей через точки O и A. Окружность C_p имеет центром точку P и радиус PT (T — точка касания). 8) $k = \sqrt{\frac{p}{p-2a}}$. 9) Необходимое и достаточное условие того, что точки $D = (x_1, 0)$ и $F = (x_2, 0)$ гармонически сопряжены относительно точек $O = (0, 0)$ и $A = (2a, 0)$, имеет вид $a(x_1 + x_2) = x_1x_2$. Абсциссы x_1 и x_2 точек D и F пересечения окружности C_p с осью Ox определяется из уравнения $x^2 - 2px + 2pa = 0$. 10) В концентрические окружности с центром A и в диаметры этих окружностей. **728.** 2) $(\lambda_1(a_1 + b_1), \lambda_2(a_2 + b_2))$. 4) $2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + r_2^2 = 0$ **729.** $3x^2 + 5y^2 = 32$. **730.** $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = a^2$. **731.** $x^2 - 4y^2 + 15 = 0$. **733.** Указание. Ввести полярные координаты, принимая за полюс центр эллипса, а за полярную ось — ось эллипса. **734.** $4p\sqrt{3}$. **735.** Окружность $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$. **736.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. **737.** 1) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$; 2) $(y-b)^2 = -2p(x-a)$; 3) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$; 4) $(x-a)^2 = -2p(y-b)$. **738.** $xy - x + 1 = 0$. **739.** Два решения: $xy = 1$, $xy - 2x + 1 = 0$. **740.** $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = 2a$, $|\overline{BC}| = 2a\sqrt{3}$. **741.** $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. **742.** $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Указание. Уравнение искомой линии может быть представлено в виде $y^2 = 2px + qx^2$. **744.** Равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ при $a \neq b$; пара прямых $y = \pm x$ при $a = b$. **745.** Указание. Принять за оси координат асимптоты гиперболы. **746.** p. **747.** Указание. Принять оси парабол за оси координат. **749.** $2x^2 - 8x + 3y - 10 = 0$. **750.** $x^2 - y^2 - 4x + 10y - 12 = 0$. **751.** $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$. Указание. Принять оси эллипса за оси новой прямоугольной системы координат. **752.** $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$. **753.** $4xy + 3y^2 + 4y - 11 = 0$. **754.** $3xy - 2x - 2y = 0$. **755.** Окружность и равносторонняя гипербола, описанные около прямоугольника, если стороны прямоугольника не равны между собой. Указание. Принять за оси координат прямые, соединяющие середины противоположных сторон прямоугольника. **756.** Окружность. **757.** Равносторонняя гипербола, проходящая через точки P и Q с центром в середине отрезка $\overline{PQ}$, одна из асимптот которой параллельна прямой d. **759.** 1) $F_1 = (0, -4)$, d_1: $y = -5$; $F_2 = (0, 4)$, d_2: $y = 5$; 2) $F_1 = (0, -6)$, d_1: $y = -\frac{2}{3}$; $F_2 = (0, 6)$,

d_2: $y=\frac{2}{3}$; 3) $F=\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $d: y=-\frac{1}{3}$. **760.** $F=\left(-2, \frac{1}{6}\right)$, $y=\frac{17}{6}$. **761.** $F=\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, $d: y=-\frac{1}{4a}$. **762.** $F_1=(a, a)$, d_1: $x+y-a=0$; $F_2=(-a, -a)$, d_2: $x+y+a=0$; **763.** $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{147}=1$, $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{48}=1$. **764.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. Второй фокус $(-2, 0)$, вторая директриса $x=-8$. **765.** $3x^2-y^2-36x+96=0$. Второй фокус $(10, 0)$, вторая директриса $x=7$. **766.** $y^2+8x-32=0$. **767.** 1) $\frac{2b^2}{a}$; 2) $\frac{2b^2}{a}$; 3) $2p$. **768.** $-e^2$, где e — эксцентриситет линии. **769.** $\sqrt{2}$. **771.** $e=\frac{4}{5}$. **772.** $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **773.** $e=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **774.** $e'=\frac{1}{e}$. **775.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **776.** $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$. **777.** $y^2=-2p'\left(x-\frac{p+p'}{2}\right)$. **778.** $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}$. **779.** 1) a. 2) b. **781.** Два решения: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{80}=1$. **782.** Два решения: $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; $\frac{(x-1)^2}{13}-\frac{y^2}{156}=1$. **783.** $\frac{(x-3)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **784.** Два решения: $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$; $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **785.** Два решения: $(x+1)^2-(y-1)^2=2$; $(y+1)^2-(x-1)^2=2$. **786.** Два решения: $(x-1)(y+1)=\frac{1}{2}$; $(x-1)(y-1)=-\frac{1}{2}$. **787.** $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$. **788.** $8xy-4x-4y+3=0$. **789.** Половина хорды кривой, проходящей через ее фокус и перпендикулярной к фокальной оси. Указание. Приняв за начало координат вершину кривой, а за ось абсцисс — ее фокальную ось, представить уравнение кривой в виде $y^2=2px+qx^2$. **790.** Парабола. **791.** Две параболы с общим фокусом в центре данной окружности и директрисами, параллельными данной прямой. В случае внешнего касания постоянной и переменной окружности параметр параболы равен $a+r$. В случае внутреннего касания параметр равен $a-r$, где r — радиус окружности, a — расстояние от ее центра до данной прямой. Указание. Найти директрису кривой. **792.** Эллипс $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ и все точки оси Ox. Указание. Воспользоваться фокальным свойством линии второго порядка. **793.** Эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **794.** Окружности с центрами в фокусах гиперболы. **795.** Открытый отрезок касательной в вершине рассматриваемой ветви гиперболы, заключенный между ее асимптотами. **796.** $4x^2+6xy-4y^2-26x+18y-39=0$. **797.** $\rho=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$. **798.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **799.** $\rho=\frac{4}{1-\cos\varphi}$. **800.** $y^2=12x$. **801.** 3. Указание. Воспользоваться полярным уравнением параболы. **802.** Парабола, получающаяся из данной параболы переносом на вектор, идущий из вершины данной параболы в ее фокус. Указание. Воспользоваться полярным уравнением параболы. **803.** Указание. Воспользоваться уравнением линии второго порядка в полярных координатах, принимая за полюс фокус линии. **804.** Ветвь гиперболы с параметром $p=|\overline{AB}|$ и эксцентриситетом $e=2$, фокальной осью которой является прямая AB, а фокусом, лежащим внутри этой ветви, точка A. Указание. Ввести полярные координаты и воспользоваться полярным уравнением линии второго порядка. **805.** 1) Эллипс; большая полуось равна 4, малая полуось равна 3, центр $(3, -2)$, направляющий вектор большой оси $\{1, 0\}$; 2) гипербола; действительная полуось равна 1, мнимая полуось равна 2, центр $(2, -3)$, направляющий вектор действительной оси $\{1, 0\}$; 3) парабола; параметр равен 2, вершина $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $\{1, 0\}$; 4) эллипс; большая полуось равна 5, малая полуось равна 3, центр $(2, -3)$, направляющий вектор большой оси $\{0, 1\}$; 5) гипербола; действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 2, центр $(2, 3)$, направляющий вектор действительной оси $\{0, 1\}$; 6) парабола; параметр равен $\frac{8}{3}$, вершина $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $\{0, -1\}$; 7) пересекающиеся прямые $3x+2y+10=0$, $3x-2y+2=0$; 8) параллельные прямые $x=2$, $x=-3$; 9) парабола с параметром $p=\frac{a^2}{2b}$, вершина $(0, b)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $\{0, -1\}$; 10) гипербола, действительная полуось равна a, мнимая полуось равна b, центр (a, b), направляющий вектор действительной оси $\{1, 0\}$; 11) эллипс; полуоси $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$; центр $(-a, -b)$, оси параллельны осям координат. **806.** При $-\infty<\lambda<-1$ — гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Ox; при $\lambda=-1$ — две пересекающиеся прямые $x-y=0$, $x+y+2=0$; при $-1<\lambda<0$ — гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Oy; при $\lambda=0$ — парабола $x^2=2y$; при $\lambda>0$ — эллипс $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ (при $\lambda=1$ — окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=2$). **807.** 1) Эллипс $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $O'=(2, 3)$, $e_1'=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$ (рис. 31); 2) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1, 1)$, $e_1'=\left\{\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$ (рис. 32); 3) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'=(3, 2)$, $e_1'=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$ (рис. 33); 4) пересекающиеся прямые $x-y-1=0$,

$x-4y+2=0$; 5) параллельные прямые $2x-3y+1=0$, $2x-3y-2=0$; 6) эллипс $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'=\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$,

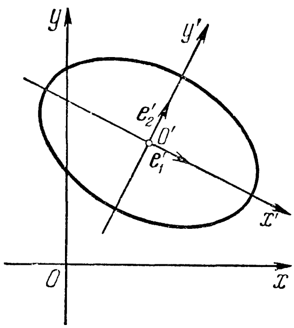

Рис. 31.

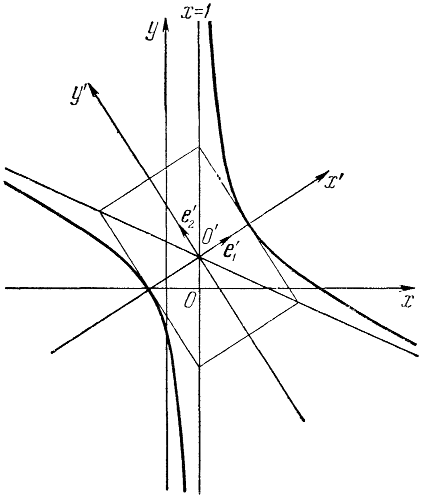

Рис. 32.

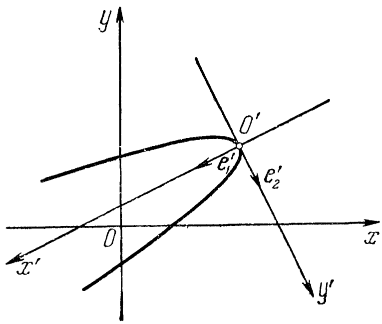

Рис. 33.

$e_2'=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$; 7) гипербола $\frac{x'^2}{1}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(2, -1)$, $e_1'=\left\{\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$; 8) парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'$, $O'=(2, 1)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 9) пересекающиеся прямые $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$; 10) параллельные прямые $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$; 11) эллипс $\frac{x'^2}{\frac{35}{6}}+\frac{y'^2}{\frac{35}{36}}=1$, $O'=\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; 12) гипербола $\frac{x'^2}{\frac{9}{8}}-\frac{y'^2}{\frac{9}{5}}=1$, $O'=(0,1)$, $e_1'=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 13) парабола $y'^2=10x'$; $O'=(-1, 2)$, $e_1'=\left\{\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$; 14) пересекающиеся прямые $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$; 15) параллельные прямые $2x-3y-2=0$, $2x-3y-8=0$; 16) эллипс $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'=(0, 1)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 17) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1, 1)$, $e_1'=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 18) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'=(2, 3)$, $e_1'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$; 19) пересекающиеся прямые $2x+5y+1=0$, $2x+3y-5=0$; 20) параллельные прямые $2x+y+3=0$, $2x+y+5=0$. **808.** При $-\infty<\alpha<-1$ — гипербола $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент, равный -1; при $\alpha=-1$ — две параллельные прямые $x-y\pm 1=0$; при $-1<\alpha<1$ — эллипс $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, большая ось которого имеет угловой коэффициент, равный -1 (при $\alpha=0$ — окружность $x^2+y^2=1$); при $\alpha=1$ — две параллельные прямые $x+y\pm 1=0$; при $\alpha>1$ — гипербола $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент, равный 1. **809.** 1) $\Gamma_1=(-2, 1)$, d_1: $x-3y-4=0$; $F_2=(0, -5)$, d_2: $x-3y-6=0$; 2) $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{10}\right)$, $4x-2y-3=0$. **811.** $I_1=0$, $I_3\neq 0$; $x^2-y^2=|I_3||I_2|^{-\frac{3}{2}}$. **812.** $I_1I_3<0$. **813.** $I_1=0$, $I_3=0$. **815.** $I_2>0$, $I_1I_3<0$, $s=\pi|I_3|I_2^{-\frac{3}{2}}$. **816.** $I_1F(x_0, y_0)<0$. **817.** $I_1F(x_0, y_0)<0$. **818.** $I_1^2=4I_2$, $I_1I_3<0$. **819.** Указание. При доказательстве необходимости условия воспользоваться результатом предыдущей задачи. **820.** $6x^2-4xy+2y^2+12x-99=0$.

823. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & b \end{vmatrix} < 0$. **824.** $F(x, y)=\frac{I_3}{I_2}$. **825.** Указание. Принять за оси координат диагонали ромба и выразить через инварианты расстояния от начала координат до сторон ромба. **828.** $3x+4y-24=0$, $3x-28y-120=0$. **829.** $x=1$, $5x-2y+3=0$. **830.** $x-3y+9=0$, $9x+3y+1=0$. **831.** $y^2=4x$. **832.** 2. **833.** $x+y\pm$

$\pm 5=0$. **834.** $|k|>\frac{b}{a}$. **835.** $y=kx+\frac{p}{2k}$. **836.** $x+y+\frac{p}{2}=0$. **837.** $y^2=$ $=-\frac{p}{4}x$. **838.** $\pm 3x \pm 4y+15=0$. **839.** $y_0x+x_0y=2C$. **840.** $\frac{\pi}{2}$. **841.** Указание. Принять за оси координат асимптоты гиперболы. **842.** $s=ab$. **843.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. **844.** $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. **845.** 1) $0 \neq \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$; 2) при выполнении одного из двух условий: 2′) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, $x_0y_0 \neq 0$; 2″) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$; 3) при выполнении одного из условий: 3′) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$; 3″) $x_0=y_0=0$. **846.** $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<0$. **847.** $\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}+\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}-$ $-\frac{2x_0}{a}=0$. **848.** 1) $a^2A^2+b^2B^2=C^2$; 2) $a^2A^2-b^2B^2=C^2$; 3) $pB^2=2AC$; 4) $4ABk=C^2$. **849.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$. **850.** $a^2A^2+b^2B^2>C^2$, $a^2A^2+b^2B^2=$ $=C^2$, $a^2A^2+b^2B^2<C^2$. **851.** $x \pm y \pm 3=0$. **852.** $x \pm 2y+4=0$. **853.** 1) Окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$; 2) при $a>b$—окружность $x^2+y^2=$ $=a^2-b^2$, за исключением четырех точек ее пересечения с асимптотами гиперболы; при $a=b$ — пустое множество; при $a<b$ — мнимая окружность; 3) прямая $x=-\frac{p}{2}$ — директриса параболы. **854.** $x^2+y^2=$ $=a^2+b^2$. **855.** Точки осей симметрии, лежащие вне кривой. **857.** $x \pm$ $\pm y \pm 3=0$. **858.** $4x^2-12xy+9y^2-24x-36y+36=0$. **859.** x^2-4xy- $-6x+9=0$. **860.** $2x^2-xy-x+y+5=0$.

861.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=0.$$

862. Окружность и гипербола, касающиеся боковых сторон треугольника в концах его основания. **866.** Если кривая — эллипс, то окружность с центром в другом его фокусе и радиусом, равным большой оси эллипса; если кривая — гипербола, то окружность с центром в другом фокусе и радиусом, равным действительной оси; если кривая — парабола, то ее директриса. Указание. Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, M_0 — точка эллипса, а F_2' — точка, симметричная фокусу F_2 относительно касательной к эллипсу точке M_0. Тогда точки F_2', M_0 и F_1 лежат на одной прямой. **867.** Если кривая — эллипс, то окружность, построенная на его большой оси как на диаметре; если кривая — гипербола, то окружность, построенная на ее действительной оси как на диаметре; если кривая — парабола, то касательная в ее вершине. **870.** Четыре точки:

$$\left(\pm\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\ \pm\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right), \qquad \delta=a-b.$$

Указание. Воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса. **871.** Пусть P_1 и P_2 — проекции фокуса F на касательные t_1 и t_2 к параболе в точках M_1 и M_2; точки P_1 и P_2 лежат на касательной к параболе в ее вершине; так как $\angle FP_1M = \angle FP_2M = \frac{\pi}{2}$, то точки F, P_1, P_2, M лежат на одной окружности (с диаметром FM). Значит, $\angle P_1P_2F = \angle P_1MF$ (как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Обозначая через α и β острые углы, образованные касательными к параболе в точках M_1 и M_2 с ее осью FA ($\alpha < \beta$), имеем $\angle M_1FA = 2\beta$, $\angle M_2FA = 2\alpha$, поэтому $\angle M_1FM_2 = 2\beta - 2\alpha$, а из треугольника MM_1F имеем $\angle MM_1F = \pi - \beta$, следовательно, $\angle M_1FM_2 = \beta - \alpha$. **872.** 1) Окружность C, построенная на большей оси эллипса как на диаметре; 2) множество внутренних точек окружности C; 3) множество точек, внешних по отношению к окружности C. **873.** 1) Окружность C, построенная на действительной оси гиперболы как на диаметре; 2) множество точек, внешних по отношению к окружности C; 3) множество внутренних точек окружности C. **874.** 1) Касательная к параболе в ее вершине; 2) открытая полуплоскость, определяемая касательной в вершине параболы, в которой расположена парабола; 3) открытая полуплоскость, определяемая касательной в вершине параболы, не содержащая точек параболы. **875.** 1) $3x + 4y + 14 = 0$, $x + y - 3 = 0$; 2) $x = 3$, $y = -\frac{1}{3}x + 1$. **876.** 1) $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$; 2) $k_1k_2 = \frac{b^2}{a^2}$; 3) $k_1 + k_2 = 0$. **877.** $y = \frac{1}{2}x$. **878.** $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{3}{2}x$. **879.** $32x + 25y - 89 = 0$. **880.** $x = 2$, $x + 4y - 14 = 0$. **881.** Общий диаметр: $3x + y - 7 = 0$; угловые коэффициенты хорд первой и второй кривой, сопряженных этому диаметру: $k_1 = 1$, $k_2 = -6$. **882.** $y = 3x$, $y = 2x$. **883.** $x - 2y - 1 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$. **884.** Диаметры, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного параллелограмма, будут сопряженными диаметрами только в том случае, когда кривая является эллипсом и по крайней мере одна из точек касания является серединой стороны параллелограмма (в этом случае точки касания всех сторон параллелограмма являются их серединами). Диагонали параллелограмма, вписанного в эллипс, будут сопряженными диаметрами, когда отношение сторон параллелограмма к параллельным им диаметрам одно и то же для обеих сторон; диагонали параллелограмма, «вписанного в гиперболу», будут сопряженными диаметрами, если отношение стороны параллелограмма к параллельному ей диаметру, пересекающему гиперболу, равно отношению другой стороны параллелограмма к параллельному ей диаметру, пересекающему сопряженную гиперболу. Указание. Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон параллелограмма, совпадает с точкой пересечения его диагоналей. **889.** Указание. Принять за начало координат центр линии, а за базис — векторы, идущие из центра в точки касания пересекающихся сторон параллелограмма. **890.** $x_2 = \mp \frac{a}{b} y_1$, $y_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$. Указание. Пусть $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ — параметрические уравнения эллипса. Тогда если t_1 — значение параметра, соответствующее точке (x_1, y_1), то $t_2 = t_1 \pm \frac{\pi}{2}$ — значения параметра, соответствующие концам сопряженного диаметра. **891.** $B = \left(2, \frac{1}{2}\right)$, $C = (2, 0)$, $D = \left(3, \frac{7}{2}\right)$.

892. $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$. Указание. Написать уравнение эллипса в системе координат с началом в точке C и базисными векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$. **894.** $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0$. **895.** $x^2+2xy+y^2+5x-y=0$. **896.** $9x^2-24xy+16y^2-60x-16y+256=0$. Указание. Прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой BC, является касательной к искомой параболе. **897.** $x^2-2xy+5y^2-4x-4y+4=0$. **898.** $x^2-2xy+2y^2-2x+1=0$. **899.** $x^2+2xy+2y^2-14x-20y+48=0$. **900.** Прямая, параллельная другой асимптоте гиперболы, проходящая через середину отрезка, заключенного между данной точкой и центром гиперболы, причем из этой прямой надо исключить точки отрезка, один конец которого лежит на асимптоте, а другой является точкой касания касательной к гиперболе, проведенной из данной точки. Указание. Принять за оси координат асимптоты гиперболы и выбрать базис так, чтобы в этой системе координат гипербола имела уравнение $xy=1$, а данная точка — координаты 0,1. **901.** $k'=\frac{4}{3}$. **902.** $y=\pm\frac{1}{2}x$. **903.** $x^2+y^2=1$. **904.** $x^2-y^2=1$. **905.** $y^2=x$. **906.** $xy=1$. **909.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **910.** Указание. Принять за ось абсцисс диаметр M_1M_2, а за ось ординат диаметр, параллельный касательным в точках M_1 и M_2. **911.** Указание. Принять за ось абсцисс диаметр, проходящий через точку M, а за ось ординат — диаметр, параллельный касательной к линии в точке M. **912.** Эллипс или гипербола. **913.** Прямая OC (за исключением точек O и C), являющаяся диагональю параллелограмма $AOBC$, стороны которого имеют данные асимптотические направления. Указание. Принять за начало координат точку O, а за базис — векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. **914.** Множество центров состоит из внутренних точек треугольника, сторонами которого являются средние линии данного треугольника, а также из внутренних точек углов, вертикальных к углам треугольника, образованного средними линиями. Указание. Принять за начало координат одну из вершин треугольника, а за базисные векторы — стороны, выходящие из этой вершины. **915.** $d=2\sqrt{2a^2+2b^2}$, $k=\pm\frac{b}{a}$. **916.** $\operatorname{arctg}\frac{2ab}{c^2}$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **919.** Указание. Взять уравнения эллипса в параметрической форме: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. **924.** Указание. Воспользоваться параметрическими уравнениями сопряженных гипербол $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ и $x=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$.
925. $\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}=\frac{b_{11}-b_{22}}{b_{12}}$. **927.** 1) $g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2=r^2$; 2) $x^2+2xy\cos\omega+y^2=r^2$. **928.** 1) $\frac{a_{11}}{g_{11}}=\frac{a_{12}}{g_{12}}=\frac{a_{22}}{g_{22}}$; 2) $a_{11}=a_{22}=\frac{a_{12}}{\cos\omega}$.
929. 1) $\frac{a_{11}}{g_{11}}=\frac{a_{12}}{g_{12}}=\frac{a_{22}}{g_{22}}$ и число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

имеет знак, противоположный знаку коэффициента a_{11} (или a_{22}); 2) координаты центра находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_1=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_2=0; \end{aligned}\right\}$$

радиус $r=\sqrt{-\frac{g_{11}\Delta}{a_{11}\delta}}$, где $\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. **930.** $a=2\cos\frac{\omega}{2}$, $b=2\sin\frac{\omega}{2}$, $k_1=1$, $k_2=-1$. **934.** 1) Окружность с центром $(-7, 3)$ и радиусом 5; 2) эллипс $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{1}=1$; центр $O'=\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$, угловой коэффициент большей оси $k=-\frac{2}{7}$; 3) гипербола $\frac{x'^2}{5}-\frac{y'^2}{15}=1$; центр $O'=(-1, 2)$, угловой коэффициент действительной оси $k=2$; 4) гипербола $\frac{x'^2}{15}-\frac{y'^2}{1}=1$, центр совпадает с началом координат, угловой коэффициент действительной оси $k=1$; 5) парабола $y'^2=x'\sqrt{3}$; вершина $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{12}\right)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $\{2, 1\}$. **935.** 1) $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$; 2) $a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, где λ_1 — меньший, а λ_2 — больший корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix}=0;$$

$$k_1=-\frac{a_{11}-\lambda_1 g_{11}}{a_{12}-\lambda_1 g_{12}}, \qquad k_2=-\frac{a_{11}-\lambda_2 g_{11}}{a_{12}-\lambda_2 g_{12}}.$$

936. 1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}<0$; 2) $a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}$, где λ_1 — положительный корень, а λ_2 — отрицательный корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix}=0;$$

$$k_1=-\frac{a_{11}-\lambda_1 g_{11}}{a_{12}-\lambda_1 g_{12}}, \quad k_2=-\frac{a_{11}-\lambda_2 g_{11}}{a_{12}-\lambda_2 g_{12}};$$

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$;

$$a=b=\sqrt{-\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}}.$$

937. 1) $p=q\frac{\sqrt{g}}{g_{11}^{3/2}}$, $O'=\left(\frac{qg_{12}^2}{2g_{11}^2}, \ -\frac{qg_{12}}{g_{11}}\right)$; 2) $p=q\sin\omega$, $O'=\left(\frac{q}{2}\cos^2\omega, \ -q\cos\omega\right)$. **938.** Если $\omega<\frac{\pi}{2}$, то $a=\sqrt{2}\cos\frac{\omega}{2}$, $b=\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}$, $k_1=1$, $k_2=-1$; если $\omega>\frac{\pi}{2}$, то $a=\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}$, $b=\sqrt{2}\cos\frac{\omega}{2}$, $k_1=-1$, $k_2=1$. **939.** $a=b=\sqrt{\sin\omega}$ — равносторонняя гипербола; если $\omega<\frac{\pi}{2}$, то $k_1=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)$, $k_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)$; если $\omega>\frac{\pi}{2}$, то

$$k_1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right),\quad k_2=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right).$$

940. $$\begin{vmatrix} a_{11}x+a_{12}y & g_{11}x+g_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y & g_{21}x+g_{22}y \end{vmatrix}=0.$$

941. 1) $(6, -2, 3)$, $r=7$; 2) $(-4, 0, 0)$, $r=4$; 3) $(1, -2, 3)$, $r=6$; 4) $(0, 0, 3)$, $r=4$. **942.** $a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$, $a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$. Указание. При доказательстве необходимости условия заметить, что сечения сферы координатными плоскостями будут окружностями (действительными, нулевыми или мнимыми). **943.** 1) $B^2+C^2+D^2-AE>0$,

$$\left(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}, -\frac{D}{A}\right),\quad r=\frac{\sqrt{B^2+C^2+D^2-AE}}{|A|};$$

2) $B^2+C^2+D^2-AE=0$; 3) $B^2+C^2+D^2-AE<0$.

944. 1) Восемь сфер: $x^2+y^2+z^2\pm 2rx\pm 2ry\pm 2rz+2r^2=0$; 2) восемь сфер: $x^2+y^2+z^2\pm\sqrt{2}\,rx\pm\sqrt{2}\,ry\pm\sqrt{2}\,rz+\frac{r^2}{2}=0$.

945. Центр $\left(\frac{10}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$, радиус равен 3.

946. 1) $(A^2+B^2+C^2)R^2-D^2>0$,

$$\left(-\frac{AD}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{BD}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{CD}{A^2+B^2+C^2}\right),$$

$$\rho=\frac{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)R^2-D^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

2) $(A^2+B^2+C^2)R^2-D^2=0$; точка касания $\left(-\frac{AR^2}{D}, -\frac{BR^2}{D}, -\frac{CR^2}{D}\right)$; 3) $(A^2+B^2+C^2)R^2-D^2<0$. **947.** $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0)=0$ или $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)\times(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2$. **948.** $2x-y+z+14=0$. **949.** $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)\pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$. **950.** $8x+4y+z-100=0$, $2x-2y+z-28=0$. Указание. Рассмотреть пучок плоскостей, осью которого является данная прямая. **951.** Два реше-

ния: $x+2y+2z-9=0$, $y-2=0$. **952.** Два решения: $x^2+y^2+(z+1)^2=12$, $x^2+y^2+(z+4)^2=27$. **953.** $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)\times(x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d)-(Ax+By+Cz+D)(x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ax_0+2by_0+2cz_0+d)=0$. Указание. Искомое уравнение можно представить в виде $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d+\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$. **954.** $x^2+y^2+z^2+22x+16y-6z=0$. **955.** $\frac{D^2}{A^2+B^2}<R^2$. **956.** При условии выполнения неравенств $x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2<0$, $D(Ax_0+By_0+Cz_0+D)<0$. **958.** $x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ax_0+2by_0+2cz_0+d$. **959.** Плоскость $(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+d_2-d_1=0$. **961.** Если две данные сферы не пересекаются, то искомое геометрическое место есть радикальная плоскость данных сфер. Если две данные сферы пересекаются, то искомое геометрическое место есть множество всех точек радикальной плоскости данных сфер за вычетом всех точек круга, ограниченного окружностью, по которой пересекаются эти сферы. **962.** Радикальная ось данных сфер. **963.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=17$. Указание. Центр искомой сферы является радикальным центром четырех данных сфер. **964.** $2a_1a_2+2b_1b_2+2c_1c_2=d_1+d_2$. **965.** $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2$. **966.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=R^2$.

967. 1) $((\mathbf{r}_0, \mathbf{n})-D)^2<R^2(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; 2) $((\mathbf{r}_0, \mathbf{n})-D)^2=R^2(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; 3) $((\mathbf{r}_0, \mathbf{n})-D)^2>R^2(\mathbf{n}, \mathbf{n})$.

968. $(\mathbf{a}, \mathbf{a})R^2-([\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0], [\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0])>0$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a})R^2-([\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0], [\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0])=0$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a})R^2-([\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0], [\mathbf{a}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0])<0$.

969. $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}$, $\rho=\sqrt{R^2-\frac{((\mathbf{r}_0, \mathbf{n})-D)^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}}$.

970. $(\mathbf{a}, \mathbf{a})-D>0$, $\overrightarrow{OC}=-\mathbf{a}$, $R=\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})-D}$.

971. $\frac{(\mathbf{c}, \mathbf{c})}{2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

972. $\mathbf{r}=\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1]+(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3)[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}$.

973. $\mathbf{r}=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{a})[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+(\mathbf{b}, \mathbf{b})[\mathbf{c}, \mathbf{a}]}{2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$. **974.** $\frac{\rho^2-(\mathbf{n}, \mathbf{n})}{2(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{n}$.

975. $\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2=r^2(a^2+b^2+c^2)$. Указание. Воспользоваться формулой расстояния от точки до прямой.

976. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4zx+16x+14y+22z-39=0$.

977. $\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}^2=r^2(a^2+b^2+c^2)$.

978. $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-3=0$. **979.** $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1=0$. **980.** $\gamma^2x^2+(\gamma y-\beta z)^2=\gamma^2r^2$; каноническое уравнение $\gamma^2x'^2+(\gamma^2+\beta^2)y'^2=\gamma^2r^2$. **981.** $4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz-28x+2y+16z+45=0$. Указание. Написать каноническое уравнение цилиндра в системе O', e_1', e_2', e_3' и перейти к исходной системе координат. **982.** $y^2+z^2=1$. **983.** $[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]^2=(a^2+b^2+c^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\cos^2\varphi$. Указание. Воспользоваться формулой для косинуса угла между векторами

u и $\overrightarrow{SM}$, где $M=(x,\ y,\ z)$ — произвольная точка поверхности конуса. **984.** $11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$. **985.** $z^2=\pm 2xy$. **986.** $xy+yz+zx=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-2z'^2=0$. **987.** $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-\frac{1}{2}z'^2=0$. **988.** $z^2+2xy+2\sqrt{2}\,xz+2\sqrt{2}\,yz=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-3z'^2=0$. **989.** $x^2+y^2-\frac{r^2}{c^2-r^2}(z-c)^2=0$. **990.** $\arccos\frac{121}{125}$. **991.** $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(z-6)^2}{36}=0$. **992.** $2xy=(z-a)^2$; каноническое уравнение $x'^2-y'^2-z'^2=0$. **993.** $y^2+2x(z-p)=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-z'^2=0$. **994.** $ayz+bzx+cxy=0$. **995.** $3x^2-3y^2+z^2=0$. **996.** $x^2+y^2-6x-6y+12z+9=0$. **997.** $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz-6x+6y+6z+10=0$. Указание. В каноническом уравнении параболоида вращения $x'^2+y'^2=2pz'$ выражение $x'^2+y'^2$ есть квадрат расстояния произвольной точки параболоида до оси $O'z'$, а $|z'|$ — расстояние той же точки до плоскости $O'x'y'$.

998. $$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2=$$
$$=2p\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)].$$

999. $$\frac{1}{a^2}[\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)]^2+$$
$$+\frac{1}{b^2}\left[\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2\right].$$

1000. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ или $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ в зависимости от того, имеют ли оси неподвижной и подвижной параболы одинаковое или противоположное направление. **1001.** Пересекает. Указание. Написать параметрические уравнения плоскости в виде $x=u$, $y=v$, $z=-2u-2v+3$, подставить полученные выражения для x, y, z в уравнение эллипсоида и определить вид линии пересечения по ее уравнению в координатах u и v. **1002.** По гиперболе. См. указание к предыдущей задаче. **1003.** Гипербола, действительная полуось которой равна 4, мнимая полуось равна 8. Центр в точке (9, 0, 0), действительная ось параллельна оси Oz. **1004.** По двум прямым $x=a$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$; $x=a$, $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$. **1005.** Две плоскости $\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0$. Четыре прямые $x=\pm a$, $\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0$. **1006.** Четыре плоскости $x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $x=\pm 3\sqrt{2}$. **1008.** $p(a^2+b^2)+2c>0$.

1009. Прямая $\left.\begin{aligned} 2x+3y-6&=0,\\ 2x-3y-12&=0.\end{aligned}\right\}$ **1010.** $\sqrt{2}$.

1012. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{(z-2)^2}{16}=1$. **1013.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{108}-\frac{z^2}{36}=-1$.

1014. $\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{3}{4}}=-2(z-6)$. **1015.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$.

1016. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$. **1017.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=2z$.

1018. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{\frac{36}{5}}=1$. **1019.** Два решения: $x^2-y^2+z^2-2z=0$; $x^2-y^2-z^2+4z=0$. **1020.** $x^2-y^2+z=0$. **1022.** $x^2+y^2-4z^2-4z-1=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-4z'^2=0$. **1023.** $x^2+y^2-12x-18y-2z+32=0$. **1024.** Однополостный гиперболоид при $k\neq 1$, гиперболический параболоид при $k=1$. Указание. Принять за начало координат середину O общего перпендикуляра к данным прямым, за ось Oz — этот общий перпендикуляр, а за оси Ox и Oy — прямые, лежащие в плоскости, параллельной данным прямым, и являющиеся биссектрисами углов между проекциями данных прямых на эту плоскость. **1025.** Гиперболический параболоид. **1026.** $x^2+y^2+z^2-2xy-2rx-2ry-2rz+r^2=0$; каноническое уравнение $\frac{x'^2}{\frac{r}{\sqrt{2}}}+\frac{z'^2}{r\sqrt{2}}=2y'$. **1027.** Два эллипсоида:

$$\frac{(x\pm a)^2}{4a^2}+\frac{(y\pm b)^2}{4b^2}+\frac{(z\pm c)^2}{4c^2}=1.$$

1029. Две параболы (без вершин): $y=0$, $x^2=2(p+q)z$, $z\neq 0$; $x=0$, $y^2=-2(p+q)z$, $z\neq 0$. **1031.** Две окружности радиуса a. **1032.** Четыре прямые $x=\pm\frac{z+a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{z-a}{\sqrt{2}}$. **1033.** $C_1=(0, -12, 9)$, $r_1=15$; $C_2=(0, 12, 9)$, $r_2=15$. **1035.** По двум окружностям, лежащим в плоскостях $z=\pm\sqrt{\frac{p}{q}-1}\,y$. **1036.** По двум эллипсам.

1037. $\frac{(x-y+1)^2}{32}+\frac{(x+y-2z)^2}{24}+\frac{(x+y+z-1)^2}{3}=1$. Указание. В каноническом уравнении $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}+\frac{z'^2}{1}=1$ величины $|x'|$, $|y'|$, $|z'|$ — расстояния от точки эллипсоида до третьей, второй и первой плоскостей. **1038.** Однополостный гиперболоид

$$4x^2-y^2-z^2-10xy-10xz-y+z=0.$$

Каноническое уравнение $12x'^2-18y'^2+2z'^2=1$. Указание. Если принять плоскости симметрии за координатные плоскости, то уравнение поверхности можно записать в виде $Ax'^2+By'^2+Cz'^2+D=0$, где $|x'|$, $|y'|$, $|z'|$ — расстояния от точки поверхности до плоскостей симметрии. **1039.** Две плоскости $x+y+z\pm 1=0$. **1040.** Круглый цилиндр, если прямые параллельны; конус второго порядка, если прямые пересекаются и не перпендикулярны; однополостный гиперболоид, если прямые скрещиваются и не перпендикулярны; пара взаимно перпендикулярных плоскостей, если прямые пересекаются или скрещиваются под прямым углом. **1041.** 1) Пара пересекающихся плоскостей $x+y+z-1=0$, $x+y-z+1=0$; 2) сфера $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+z^2=\frac{16}{9}$; 3) круглый цилиндр $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$; 4) круглый конус $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=0$; 5) пара параллельных плоскостей $2x-y\pm 6=0$. **1042.** 1) Эллипсоид $\frac{x'^2}{49}+\frac{y'^2}{\frac{49}{4}}+\frac{z^2}{\frac{49}{9}}=1$; центр (3, —1, 2), большая, средняя и малая оси соответственно параллельны осям Ox, Oy, Oz; 2) однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{16}-\frac{z'^2}{16}=-1$; центр (—4, 0, —6), ось вращения параллельна оси Ox; 3) круглый конус $x'^2-\frac{y'^2}{3}+z'^2=0$; вершина (3, 5, —2), ось вращения параллельна оси Oy; 4) параболоид вращения; $p=\frac{5}{12}$, вершина $\left(10, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\{-1, 0, 0\}$. **1043.** 1) Круговой конус $-x'^2+y'^2+z'^2=0$; угол между осью и образующими конуса равен $\frac{\pi}{4}$, вершина (0, 0, 0), направляющий вектор оси конуса $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$; 2) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$; $p=q=1$, вершина (0, 0, 0), направляющие векторы канонической системы координат $O'x'y'z'$: $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $e_3'=\{0, 0, 1\}$; 3) параболический цилиндр $z'^2=5x'$; $O'=(0, 0, 0)$, $p=\frac{5}{2}$, направляющие векторы канонической системы координат $Ox'y'z'$: $e_1'=\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right\}$, $e_2'=\left\{-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right\}$, $e_3'=\{0, 0, 1\}$; 4) круговой конус $-4x'^2+y'^2+z'^2=0$; угол между осью конуса и его образующими равен $\operatorname{arctg} 2$, вершина конуса (0, 0, 0), направляющий вектор оси конуса $\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}$; 5) гиперболический цилиндр $z'^2-2x'^2=1$; действительная полуось равна 1, мнимая полуось равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$; центр гиперболы, являющейся направляющей цилиндра, (0, 0, 0), направляющий вектор действительной оси гиперболы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$; направляющий вектор образующих цилиндра $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$.

1044. 1) Круговой цилиндр $x'^2+z'^2=\frac{4}{25}$ с радиусом $\frac{2}{5}$; ось цилиндра проходит через точку $\left(0,\ 0,\ -\frac{2}{5}\right)$ и имеет направляющий вектор $\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right\}$; 2) параболический цилиндр $x'^2-5y'=0$; параметр параболы $x'^2-5y'=0$, $z'=0$, являющейся направляющей цилиндра, равен $\frac{5}{2}$, вершина параболы $\left(-1,\ -\frac{12}{25},\ -\frac{16}{25}\right)$; направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости $\left\{0,\ -\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right\}$, направляющий вектор образующих цилиндра $\left\{0,\ \frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right\}$; 3) параболический цилиндр $z'=2x'^2$; параметр параболы $z'=2x'^2$, $y'=0$ равен $\frac{1}{4}$, вершина параболы $(0,\ 0,\ 1)$, направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости $\{0,\ 0,\ 1\}$, направляющий вектор образующих цилиндра $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$. **1045.** 1) Однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x'^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y'^2}{\frac{2}{3}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{3}}=1;$$

центр $O'=(1,\ 1,\ -1)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\}$; 2) параболоид вращения $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}z'$; $p=\frac{1}{3}$, вершина $O'=(1,\ 0,\ -1)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\}$; 3) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{2}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{4}}=-1$; центр $O'=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; 4) эллипсоид вращения $x'^2+y'^2+\frac{z'^2}{4}=1$, центр $O'=(1,\ 1,\ 1)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; 5) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{\frac{1}{6}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{6}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{2}}=-1$; центр $O'=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 6) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{1}{6}$; линия центров $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$; 7) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}$; линия центров $x=y=z$; 8) круговой конус $x'^2+y'^2-2z'^2=0$; вершина $O'=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. **1046.** 1) Параболический цилиндр $y'^2=\frac{4}{3}x'$; $p=\frac{2}{3}$, $O'=(2,\ 1,\ -1)$, $e_1'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$; 2) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$; $O'=(0,\ 1,\ 0)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 3) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{\frac{2}{3}}=2z'$; $O'=(2,\ 2,\ 1)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$; 4) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$; $O'=(0,\ 0,\ 1)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$; 5) гиперболический параболоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=2z'$; $O'=(1,\ 2,\ 3)$, $e_1'=\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$, $e_3'=\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\}$; 6) эллипсоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{\frac{2}{3}}=1$; $O'=(1,\ 2,\ -1)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$; 7) двуполостный гиперболоид $\frac{x'^2}{\frac{4}{5}}+\frac{y'^2}{\frac{4}{15}}-\frac{z'^2}{\frac{4}{25}}=-1$; $O'=\left(0,\ 1,\ -\frac{2}{5}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, $e_3'=\{0,\ 0,\ 1\}$; 8) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}+\frac{y'^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2z'$, $O'=\left(-\frac{1}{40},\ -\frac{19}{40},\ \frac{1}{2}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\right.$

$-\frac{2}{\sqrt{6}}\Big\}$, $e_2'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\}$, $e_3'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big\}$; 9) однополостный гиперболоид $\frac{x'^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{6}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{2}}=1$; $O'=\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $e_1'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\}$, $e_2'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\}$, $e_3'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}$; 10) гиперболический цилиндр $x'^2-y'^2=\frac{1}{3}$; $O'=(-1, 0, 0)$, $e_1'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}$, $e_2'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\}$, $e_3'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\}$; 11) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{\frac{4}{3}}=1$, $O'=(-2, -2, 0)$, $e_1'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}$, $e_2'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\}$, $e_3'=\Big\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big\}$. **1047.** 1) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4<0$; 2) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4>0$; 3) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4=0$; 4) $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$ и $I_4>0$; 5) $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$ и $I_4<0$; 6) $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$, $I_4=0$; 7) $I_3=0$, $I_4<0$; 8) $I_3=0$, $I_4>0$. Указание. Воспользоваться правилом знаков Декарта о числе положительных корней алгебраического уравнения. **1049.** 1) $I_4=I_3=0$, $I_2>0$, $I_1I_3^*<0$; 2) $I_4=I_3=0$, $I_2>0$, $I_1I_3^*>0$; 3) $I_4=I_3=I_3^*=0$, $I_2>0$; 4) $I_4=I_3=0$, $I_2<0$, $I_3^*\neq 0$; 5) $I_4=I_3=I_3^*=0$, $I_2<0$; 6) $I_4=I_3=I_2=0$, $I_3^*\neq 0$; 7) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=0$, $I_2^*<0$; 8) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=0$, $I_2^*>0$; 9) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=I_2^*=0$. **1051.** 1) $2x+y=0$, $y+2z-2=0$; 2) $x-2y+3z+2=0$, $x-2y+3z-3=0$; 3) $x+2y+3z+4=0$, $3x-2y+z-6=0$; 4) $2x-3y+z+1\pm\sqrt{6}=0$. **1052.** 1) Эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) конус; 5) эллиптический параболоид; 6) гиперболический параболоид; 7) эллиптический цилиндр; 8) гиперболический цилиндр; 9) параболический цилиндр; 10) гиперболический параболоид; 11) однополостный гиперболоид. **1053.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$. **1054.** $I_3=0$, $I_4\neq 0$, $I_1^2=4I_2$; $p=\frac{\sqrt{-I_4}}{I_2}$. **1055.** $I_1=I_3=0$, $I_4>0$; $p=q=\frac{\sqrt{I_4}}{I_2}$. **1056.** 1) $I_2=-I_1^2$, $I_3=-I_1^3$, $I_4\neq 0$; 2) $x^2+y^2-z^2=\frac{I_4}{I_3^{4/3}}$. **1057.** Все соответствующие коэффициенты их уравнений, кроме, может быть, свободных членов, пропорциональны. **1058.** 1) $\{1, 1, 1\}$; 2) $-\frac{1}{2}<a<1$. **1060.** Два конуса: $2x^2-4xy+(1\pm\sqrt{5})z^2=0$; оси вращения $(1\pm\sqrt{5})x-2y=0$, $z=0$. **1061.** Указание. Принять за начало координат вершину конуса, за ось Oz — его образующую и рассмотреть линию пересечения конуса с плоскостью Oxy.

1062. Число $F(x_0, y_0, z_0)$ должно быть заключено между 0 и $\frac{I_4}{I_3}$.

1063. $I_1F(x_0, y_0, z_0) < 0$. **1064.** $y^2 + z^2 + \frac{p}{r}xy - 2px - 2ry = 0$. Указание. Для конической поверхности $I_4 = 0$.

1065. $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2+b^2}{ab}xy - 2ax - 2by = 0$.

1066. 1) $\frac{2xy}{c^2} + \frac{2yz}{a^2} + \frac{2zx}{b^2} = 1$. 2) Двуполостный гиперболоид. 3) Каноническое уравнение при $a = b = c = 1$: $x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = -1$. **1067.** 1) Эллиптический цилиндр $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2rx - 2ry = 0$. 2) $2x'^2 + z'^2 = r^2$. **1068.** $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0$ и $z^2 - 2xy + 2xz - yz + 4x + 2y - 4 = 0$. **1069.** Сфера. **1070.** Указание. 1) Для доказательства инвариантности I_3 и I_4 воспользоваться формулой, дающей преобразование определителя квадратичной формы при линейном преобразовании переменных. Для доказательства инвариантности I_2 и I_1 рассмотреть функцию $\varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy - \lambda(g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + 2g_{23}yz + 2g_{31}zx + 2g_{12}xy)$ и использовать для этой квадратичной формы φ уже доказанную инвариантность I_3 при линейном преобразовании переменных. 2) Рассмотреть функцию $\psi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a - \lambda(g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + 2g_{23}yz + 2g_{31}zx + 2g_{12}xy)$ и использовать инвариантность I_4.

3) Если $I_3 = I_4 = 0$, то существует система координат, относительно которой уравнение поверхности не содержит z. В такой системе координат

$$I_3^* = g_{33}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}};$$

эта функция не меняется при преобразовании вида $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$.

1071. 1) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$; 2) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1$;

3) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = -1$; 4) $\frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = z + z_0$;

5) $\frac{x_0x}{p} - \frac{y_0y}{q} = z + z_0$; 6) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0$.

1072. $a_1 = a_2 = a = 0$, $a_3 \neq 0$. **1073.** Указание. Принять точку O касания за начало координат, а касательную плоскость в точке O — за плоскость Oxy. **1075.** $3x + 4y - 24 = 0$, $3x - 28y - 120 = 0$. **1076.** Два решения: $z = 2$, $x + 2y = 8$. **1077.** Два решения: $2x - y - 2z - 8 = 0$, $14x - 3y - 6z - 144 = 0$. **1078.** $4x - 5y - 2z + 2 = 0$. **1079.** Два решения: $x + 2y - 2 = 0$, $x + 2y = 0$. **1080.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \pm \frac{z\sqrt{3}}{c} = 1$. **1081.** Два решения: 1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$; $x=a$, $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$; $y=b$, $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$; 2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+$ $+\frac{z}{c}=1$; $x=a$, $\frac{y}{b}=-\frac{z}{c}$; $y=b$, $\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}$. **1082.** $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-$ $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)z=1$. **1083.** $2x+3y-z+32=0$; $\frac{x-4}{1}=\frac{y+24}{2}=\frac{z+32}{8}$, $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+24}{2}=\frac{z+32}{4}$. **1084.** Точки $(1, 1, 1)$, $(-1,-1,-1)$, угол равен $\frac{\pi}{3}$. **1085.** Точка пересечения $(-1,-1, 0)$, угол равен $\frac{\pi}{2}$. **1086.** $\cos\varphi=\frac{83}{85}$. **1087.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{2}$. **1089.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{0}$; $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. **1090.** $\frac{x+48}{4}=\frac{y+36}{-3}=\frac{z}{-24}$. **1091.** Указание. Данная плоскость пересекает параболоид по двум прямым.

1093. 1) $$\left\{a\,\frac{\frac{x_0z_0}{ac}\pm\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\ b\,\frac{\frac{y_0z_0}{bc}\mp\frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\ c\right\}.$$

2) $$\left\{\pm\frac{a}{b}\,y_0,\ \mp\frac{b}{a}\,x_0,\ c\right\}.$$

1094. $$\left\{\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right\},\quad \left\{\sqrt{p},\ -\sqrt{q},\ \frac{x_0}{\sqrt{p}}+\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right\}.$$

1095. Гипербола, получающаяся при пересечении параболоида плоскостью $z=\frac{q-p}{2}$, когда $p\neq q$; пара прямых $\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0$, $z=$ $=0$, когда $p=q$. **1096.** Указание. Принять за ось Oz системы координат образующую линейчатой поверхности. **1098.** $4x^2+y^2-z^2=1$.

1099. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix}=0.$$

1101. 1) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2>D^2$; 2) $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>-D^2$; 3) $pA^2+qB^2>2CD$. **1102.** 1) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2=D^2$; 2) $a^2A^2+b^2B^2-$ $-c^2C^2=D^2$; 3) $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=-D^2$; 4) $pA^2+qB^2=2CD$; 5) pA^2- $-qB^2=2CD$. **1104.** $3x^2-4xy+z^2+2z-3=0$; однополостный гиперболоид $-\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{4}=1$. **1105.** $\{2, 3, 4\}$. **1106.** $x-y=0$, $\{2, 3, 0\}$. **1107.** $4x+3y-12=0$, $\{16, 27, 6\}$. **1108.** $x=a$. **1109.** $3x+2y-z-25=0$. **1115.** 1) $a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_3z=0$, $a_{33}\neq 0$, $a_{12}\neq 0$, $a_3\neq 0$. Указание. Из условия принадлежности осей Ox, Oy поверхности следует, что $a_{11}=a_1=a_2=a_{22}=a=0$; так как диаметр Oz сопряжен с плоскостью Oxy, то $a_{13}=a_{23}=0$. **1119.** $z=xy$. **1120.** $z^2=xy$. **1121.** $a_{11}x^2+a_{22}y^2+$ $+a_{33}z^2+2a_3z=0$. **1122.** $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2=0$. **1123.** $x^2+y^2+z^2=1$.

1124. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

1125.
$$\varphi = \arccos \frac{a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta}{\sqrt{(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)^2 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)^2 + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{32}\gamma)^2}}.$$

1129. $\frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = 0$. **1130.** Две параллельные прямые:

$$\left.\begin{matrix} 4x - 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 5z = 0; \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 4x - 3y - 1 = 0, \\ 3x + 4y - 5z = 0. \end{matrix}\right\}$$

1131.
$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} + D = 0, \\ \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) D + 2z = 0. \end{matrix}\right\}$$

1132. По гиперболе. **1133.** По двум параллельным прямым. **1134.** $1 < e \leqslant \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a}$. **1135.** $cy \pm bz = 0$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

1136. 1) Если $a > b$, то $bz \pm \sqrt{a^2 - b^2}\, y = 0$; полуоси равны a; если $a < b$, то таких плоскостей нет. Указание. Повернуть систему координат вокруг оси Ox. 2) Если $a < b$, то $az \pm \sqrt{b^2 - a^2}\, x = 0$; полуоси гиперболы равны b; если $a > b$, то таких плоскостей нет. **1137.** 1) Если $p > q$, то $y\sqrt{p-q} \pm z\sqrt{q} = 0$; полуоси гипербол равны $\sqrt{pq}$; если $p \leqslant q$, то таких плоскостей нет. 2) Если $p < q$, то $x\sqrt{q-p} \pm z\sqrt{p} = 0$; полуоси гипербол равны $\sqrt{pq}$; если $p \geqslant q$, то таких плоскостей нет. **1138.** 1) Парабола, параметр $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, вершина $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, вектор оси параболы, направленный в сторону вогнутости, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. 2) Эллипс с полуосями $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$, центр $\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$, направляющий вектор большей оси $\{0, 1, 0\}$, направляющий вектор меньшей оси $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. 3) Парабола, параметр $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, вершина $(0, 0, 0)$, вектор оси параболы, направленный в сторону вогнутости, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Указание. Повернуть систему координат вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{4}$. **1139.** Парабола

$y'^2=\frac{3}{\sqrt{2}}x'$, $O'=\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $e_2'=$ $=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$. Указание. Ввести в данной плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке (0, 0, 1) и базисом $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$, написать параметрические уравнения данной плоскости, подставить выражения для x, y, z через u и v в уравнение цилиндра $y^2=2x$ и исследовать полученное уравнение. **1140.** Парабола $y'^2=\frac{4\sqrt{2}}{5}x'$, $O'=\left(-\frac{8}{25}, \frac{6}{25}, \frac{2}{5}\right)$, $e_1'=$ $=\left\{\frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right\}$. Указание. Ввести в данной плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке $(-1, 0, 0)$ и базисом $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $\left\{\frac{16}{15\sqrt{2}}, \frac{13}{15\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$, написать параметрические уравнения данной плоскости, подставить выражения для x, y, z через u, v в уравнение конуса и исследовать полученное уравнение. **1141.** Гипербола $\frac{x'^2}{\frac{6}{7}}-\frac{y'^2}{\frac{54}{49}}=1$, $O'=\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$, $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$. **1142.** $\left(\frac{18}{13}, \frac{24}{13}, -\frac{25}{26}\right)$, $\left(-\frac{18}{13}, -\frac{24}{13}, \frac{25}{26}\right)$. **1143.** $k<-\frac{5}{2}$. Указание. Рассмотреть проекцию линии пересечения конуса и плоскости пучка на плоскость Oyz. **1144.** Две плоскости: $x-y+(-2\pm\sqrt{7})\times$ $\times(2x-z)=0$. Указание. Рассмотреть пучок плоскостей $x-y+$ $+k(2x-z)=0$, проходящих через данную прямую. Ввести в плоскости пучка прямоугольную систему координат с базисом

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\left\{\frac{k-2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}, \frac{-5k-2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}, \frac{2k+2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}\right\},$$

затем записать параметрические уравнения плоскости пучка, подставить полученные выражения x, y, z через u и v в уравнение параболоида и воспользоваться условием $I_1=0$. **1145.** 1) Эллипс; мнимый эллипс; точка (пара мнимых пересекающихся прямых); парабола; 2) гипербола. **1147.** 1) Эллипс, мнимый эллипс, точка (пара мнимых пересекающихся прямых); 2) эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола, две параллельные прямые; 3) эллипс, мнимый эллипс, точка (пара мнимых пересекающихся прямых), гипербола, парабола, пара мнимых параллельных прямых; 4) эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых, прямая («двойная»), точка (пара мнимых пересекающихся прямых); 5) эллипс, мнимый эллипс, точка (пара мнимых пересекающихся прямых), парабола; 6) гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола, одна прямая. **1148.** 1) Эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-D^2>0$; точка, если $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-D^2=0$; мнимый эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-D^2<0$; 2) эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2<0$; гипербола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>0$, $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2-D^2\neq 0$; две пересекающиеся прямые, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2-D^2=0$, $D\neq 0$; парабола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D\neq 0$; две параллельные прямые, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D=0$; 3) эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2<0$, $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2+D^2>0$; мнимый эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2<0$, $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2+D^2<0$; пара мнимых пересекающихся прямых, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2+D^2=0$, $D\neq 0$; гипербола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>0$; парабола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D\neq 0$; пара мнимых параллельных прямых, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D=0$; 4) эллипс, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2<0$, $D\neq 0$; гипербола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>0$, $D\neq 0$; парабола, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D\neq 0$; две пересекающиеся прямые, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>0$, $D=0$; прямая («двойная»), если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=0$, $D=0$; пара мнимых пересекающихся прямых, если $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2<0$, $D\neq 0$; 5) эллипс, если $pA^2+qB^2-2DC>0$, $C\neq 0$; пара мнимых пересекающихся прямых, если $pA^2+qB^2-2DC=0$, $C\neq 0$; мнимый эллипс, если $pA^2+qB^2-2DC<0$, $C\neq 0$; парабола, если $C=0$; 6) гипербола, если $pA^2-qB^2-2DC\neq 0$, $C\neq 0$; две пересекающиеся прямые, если $pA^2-qB^2-2DC=0$, $C\neq 0$; парабола, если $pA^2-qB^2\neq 0$, $C=0$; одна прямая, если $pA^2-qB^2=0$, $C=0$. **1149.** 1) $c\sqrt{a^2-b^2}\,x\pm a\sqrt{b^2-c^2}\,z+D=0$, где $|D|<ac\sqrt{a^2-c^2}$; 2) $c\sqrt{a^2-b^2}\,y\pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z+D=0$, где D — любое действительное число; 3) $c\sqrt{a^2-b^2}\,y+b\sqrt{a^2+c^2}\,z+D=0$, где $|D|>bc\sqrt{b^2+c^2}$; 4) $c\sqrt{a^2-b^2}\,y\pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z+D=0$, где D — любое действительное число, отличное от нуля; 5) $\pm\sqrt{\frac{p-q}{p}}\,y+z+D=0$, где $D<\frac{p-q}{2}$; 6) $\sqrt{a^2-b^2}\,y\pm az+D=0$, где D — любое действительное число. **1150.** 1) Четыре точки $\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ 0,\ \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right)$; 2) четыре точки $\left(0,\ \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}},\ \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right)$; 3) две точки $\left(0,\ \pm\sqrt{q(p-q)},\ \frac{p-q}{2}\right)$. **1151.** b.

1152. 1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\neq 0.$$

2) Координаты x, y, z центра линии сечения определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1&=\lambda A, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2&=\lambda B, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3&=\lambda C, \\ Ax+By+Cz+D&=0. \end{aligned}\right\}$$

1153. 1) $x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi$, $y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi$; 2) $x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi+[x_0(1-\cos\varphi)+y_0\sin\varphi]$, $y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi+[-x_0\sin\varphi+y_0(1-\cos\varphi)]$. **1154.** 1) $x'=kx$, $y'=ky$; 2) $x'=kx+x_0(1-k)$, $y'=ky+y_0(1-k)$. **1155.** $x'=x+\frac{1}{2}y$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}y$. **1156.** $x'=\frac{11}{5}x-\frac{2}{5}y-13$, $y'=-\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}y+9$. **1157.** $x'=x-y+1$, $y'=x+y+2$. **1158.** $x'=5x-3y+8$, $y'=-3x+2y-3$. **1159.** $x'=-x+2y-8$, $y'=4x-3y+24$ (AB); $x'=x+8$, $y'=4x-5y+14$ (BA). **1160.** $(4, 2)$. **1161.** $2x+y-3=0$. **1162.** Два решения: $\{3, -2\}$, $\{3, -5\}$. **1163.** Точка пересечения медиан треугольника ABC. Указание. Ввести систему координат с началом в точке A и базисом $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **1164.** $x'=-3y+4$, $y'=3x-2$. **1165.** Два преобразования:

$$x'=\frac{3}{10}x+\frac{2}{5}y+1,\ y'=-\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y+\frac{3}{2};$$

$$x'=-\frac{3}{10}x+\frac{2}{5}y+\frac{11}{5},\ y'=\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y-\frac{1}{10}.$$

1166. $x'=\frac{12}{5}x-\frac{9}{5}y-1$, $y'=-\frac{9}{5}x-\frac{12}{5}y+7$.

1167. $x'=4x+3y-5$, $y'=-3x+4y-1$; неподвижная точка $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

1168. $x'=\frac{13}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{8}{5}$, $y'=\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{4}{5}$.

1169. $x'=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$, $y'=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y+\frac{1}{2}$.

1170. $x'=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}$, $y'=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}$.

1171. Гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$. Указание. Ввести систему координат с началом в точке A и базисом $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **1172.** Произведение симметрии относительно прямой $x-2y-5=0$ и гомотетии с центром $(1, -2)$ и коэффициентом 5. **1173.** Произведение гомотетии с центром $(1, 3)$ и коэффициентом 5 и поворота вокруг этой точки на угол $\arccos\frac{3}{5}$. **1174.** 1) Произведение поворота вокруг начала координат на угол φ такой, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и гомотетии с коэффициентом $k=\sqrt{a^2+b^2}$ и с центром в начале координат; 2) произведение симметрии относительно прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$, и гомотетии с коэффициентом $\sqrt{a^2+b^2}$ и центром в начале координат.

1175. Инвариантная точка $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$; инвариантные прямые $2x - 2y - 3 = 0$, $4x - y = 0$. **1176.** Инвариантными точками являются все точки прямой $2x + y - 2 = 0$ и только эти точки. Инвариантные прямые: прямая $2x + y - 2 = 0$ и все прямые, перпендикулярные к ней. **1177.** $x'^* = -x^*$, $y'^* = 5y^*$. **1179.** $x' = x - \frac{1}{2}y$, $y' = -\frac{2}{3}y$. **1180.** $x' = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}$, $y' = y$. **1181.** $x' = \frac{17}{12}x - \frac{1}{12}y + \frac{2}{3}$, $y' = -\frac{1}{12}x + \frac{17}{12}y - \frac{1}{3}$. **1182.** $x' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{10}{3}$, $y' = -\frac{11}{3}x + \frac{14}{3}y + \frac{13}{3}$. **1183.** $13x \pm 16y = 0$. **1184.** $\sqrt{k_1^2 - 1}\, x \pm \sqrt{1 - k_2^2}\, y = 0$. **1185.** $y = \pm kx$. **1187.** $\{1, 3\}$ и $\{3, -1\}$. **1188.** $s = \left|\frac{(C-D)(C'-D')}{AB' - A'B}\right|$. Указание. Рассмотреть аффинное преобразование $x' = Ax + By + C$, $y' = A'x + B'y + C'$. **1189.** Два решения: $x - 12y + 57 = 0$, $8x - 9y - 66 = 0$. Указание. Рассмотреть аффинное преобразование, переводящее данные прямые в оси координат. **1190.** $142x - 183y - 489 = 0$. Указание. Рассмотреть аффинное преобразование, переводящее данные прямые в оси координат, а данную точку — в единичную точку. **1191.** 1) $x'^* = \lambda_1 x^*$, $y'^* = \lambda_2 y^*$; 2) $x'^* = \alpha x^* - \beta y^*$, $y'^* = \beta x^* + \alpha y^*$. В случае, когда исходная система координат прямоугольная, это преобразование является преобразованием подобия с центром в неподвижной точке данного преобразования, представляющее собой произведение гомотетии с центром в неподвижной точке и коэффициентом $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ на поворот вокруг той же точки на угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{\alpha}{k}$, $\sin\varphi = \frac{\beta}{k}$; 3) $x'^* = \lambda x^*$, $y'^* = \lambda y^*$ — гомотетия с центром в неподвижной точке данного преобразования и коэффициентом $\lambda = a_{11} = a_{22}$; 4) $x'^* = \lambda x^* + y^*$, $y'^* = \lambda y^*$; 5) $x'^* = \lambda x^*$, $y'^* = y^* + b$; 6) $x'^* = x^* + a$, $y'^* = y^*$ — перенос; 7) $x'^* = x^* + y^*$, $y'^* = y^* + b$. **1192.** $x' = x + z$, $y' = y + z$, $z' = z$. **1193.** $x' = y + z$, $y' = z + x$, $z' = x + y$. **1194.** $x' = -x - y - z + 1$, $y' = x$, $z' = y$; инвариантная точка $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$; инвариантная прямая $\frac{x - \frac{1}{4}}{1} = \frac{y - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{4}}{1}$; инвариантная плоскость $2x + 2z - 1 = 0$. **1195.** Гомотетия с центром в точке пересечения прямых, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противолежащих им граней, и коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Указание. Ввести систему координат с началом в вершине тетраэдра и базисом, составленным из ребер тетраэдра, выходящих из этой вершины. **1196.** Произведение гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом 5 на поворот вокруг оси Oz на угол $\arccos\frac{3}{5}$. **1197.** Указание. Предположив противное, рассмотреть аффинное преобразование относительно системы координат, началом которой является неподвижная точка и в которой инвариантная плоскость имеет уравнение $x=1$. **1199.** Инвариантная точка $(-2,\ 1,\ -3)$; инвариантная прямая $y=1$, $z=-3$; инвариантная плоскость $z=-3$. **1200.** Инвариантная точка $(1,\ 2,\ 3)$; инвариантная прямая $x=1$, $y=2$; инвариантная плоскость $z=3$. **1201.** Не обладает ни инвариантной точкой, ни инвариантной прямой, ни инвариантной плоскостью.

1202. Инвариантная точка $(1,\ 1,\ 1)$; инвариантные прямые: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ и все прямые, лежащие в плоскости $x+2y+3z-6=0$ и проходящие через точку $(1,\ 1,\ 1)$; инвариантные плоскости: $x+2y+3z-6=0$ и все плоскости пучка с осью $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

1203.

$$x'=\frac{7}{9}x+\frac{2}{9}y-\frac{1}{9}z+\frac{2}{9},$$
$$y'=\frac{2}{9}x+\frac{7}{9}y+\frac{1}{9}z-\frac{2}{9},$$
$$z'=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{17}{18}z+\frac{1}{9}.$$

1204. Указание. Подобное преобразование пространства может быть записано в виде

$$x'=k\,(c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z)+x_0,$$
$$y'=k\,(c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z)+y_0,$$
$$z'=k\,(c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z)+z_0,$$

где (c_{ik}) — ортогональная матрица. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных той линейной системы уравнений, из которой определяются координаты неподвижной точки, может быть записан в виде

$$k^3\begin{vmatrix} c_{11}-\frac{1}{k} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-\frac{1}{k} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\frac{1}{k} \end{vmatrix}$$

и при $k\neq 1$ этот определитель отличен от нуля.

1205.

$$x'=c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z+c_1,$$
$$y'=c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z+c_2,$$
$$z'=c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z+c_3,$$

где матрица $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ определяется из соотношения $C=BA$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix};$$

c_1, c_2, c_3 определяются соотношениями:

$$c_1 = x_0' - (c_{11}x_0 + c_{12}y_0 + c_{13}z_0),$$
$$c_2 = y_0' - (c_{21}x_0 + c_{22}y_0 + c_{23}z_0),$$
$$c_3 = z_0' - (c_{31}x_0 + c_{32}y_0 + c_{33}z_0).$$

1206. Эллипс, гомотетичный данному, с коэффициентом гомотетии $\sqrt{2}$, с центром гомотетии, совпадающим с центром эллипса. Указание. Преобразовать аффинно эллипс в окружность и свести задачу к случаю окружности. **1207.** Эллипс, гомотетичный данному, с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и центром гомотетии, совпадающим с центром эллипса (см. указание к предыдущей задаче). **1208.** $\frac{1}{2}$. **1210.** Эллипс. **1211.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1218.** $x' = x\cos\varphi - \frac{a}{b}y\sin\varphi$, $y' = \frac{b}{a}x\sin\varphi + y\cos\varphi$ и $x' = x\cos\varphi + \frac{a}{b}y\sin\varphi$, $y' = \frac{b}{a}x\sin\varphi - y\cos\varphi$. Указание. Искомое преобразование можно рассматривать как произведение трех преобразований CBA, где A: $x_1 = \frac{x}{a}$, $y_1 = \frac{y}{b}$, B: $x_2 = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi$, $y_2 = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$ (или $x_2 = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi$, $y_2 = x_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi$), C: $x_3 = ax_2$, $y_3 = by_2$. **1219.** $x' = -\frac{a}{b}y$, $y' = \frac{b}{a}x$. **1220.** $x' = kx$, $y' = \frac{1}{k}y$ и $x' = ky$, $y' = \frac{1}{k}x$, где k — любое действительное число, отличное от нуля.

1221.
$$x' = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)y,$$
$$y' = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)y$$

и

$$x' = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x - \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)y,$$
$$y' = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)y.$$

Указание. Искомое преобразование может быть представлено как произведение трех преобразований: преобразования α: $x^* = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y^* = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, переводящего данную гиперболу в гиперболу $x^*y^* = 1$; преобразования β: $x'^* = \lambda x^*$, $y'^* = \frac{1}{\lambda}y^*$ или $x'^* = \lambda y^*$, $y'^* = \frac{1}{\lambda}x^*$, переводящего гиперболу $x^*y^* = 1$ в себя; преобразования α^{-1}: $x' = \frac{a}{2}(x'^* + y'^*)$, $y' = -\frac{b}{2}(x'^* - y'^*)$, переводящего гиперболу

$x'^* y'^* = 1$ снова в данную гиперболу. **1222.** $x' = x\sqrt{2} + y$, $y' = x + y\sqrt{2}$ и $x' = x\sqrt{2} - y$, $y' = x - y\sqrt{2}$. **1223.** 1) $x' = \frac{\lambda^2}{2p}(2px - 2\mu y + \mu^2)$, $y' = \lambda(y - \mu)$, где λ и μ — любые числа, причем $\lambda \neq 0$. 2) $x' = \frac{1}{2p}(2px - 2\mu y + \mu^2)$, $y' = y - \mu$, где μ — любое число. **1225.** $x' = x + 2y + 2$, $y' = y + 2$. **1226.** Парабола $y^2 = 2p(x - a)$ (a — расстояние от вершины параболы до хорды, перпендикулярной к оси параболы и отсекающей от параболы сегмент данной площади). Указание. Рассмотреть унимодулярное аффинное преобразование, переводящее произвольную хорду, отсекающую сегмент данной площади, в хорду, перпендикулярную к оси параболы.

1228. $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0(1 - \cos\varphi) + y_0\sin\varphi$,
$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi - x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi)$.

1229. $x = \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(x_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + y_0\right)$.

1230.

$$x' = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi + x_0(1 - \cos 2\varphi) - y_0\sin 2\varphi + d\cos\varphi,$$
$$y' = x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi - x_0\sin 2\varphi + y_0(1 + \cos 2\varphi) + d\sin\varphi.$$

1231. Ось симметрии $y = \frac{y_0}{2}$, вектор переноса $\{x_0, 0\}$.

1232. $x\sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} = 0$. **1233.** Ось симметрии $\dfrac{x - \frac{x_0}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{y - \frac{y_0}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$;

вектор переноса

$$\left\{\frac{1}{2}[x_0(1 + \cos\varphi) + y_0\sin\varphi],\ \frac{1}{2}[x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi)]\right\};$$

канонический вид

$$x'^* = x^* + \left|x_0\cos\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right|, \qquad y'^* = -y^*.$$

1234. Вектор переноса вдоль оси симметрии $\{9, -3\}$. Уравнение оси симметрии $x + 3y + 15 = 0$. Каноническая запись преобразования $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^* + 3\sqrt{10}$. **1235.** $x' = -y + 5$, $y' = -x + 5$.

1236. $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}$.

1237. $x' = x - 2A\dfrac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$, $y' = y - 2B\dfrac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$.

1238. $x' = y$, $y' = -x + 1$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; неподвижная точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1239. $x' = -y$, $y' = -x + 1$; уравнение оси симметрии $y = -x + \frac{1}{2}$;

вектор переноса вдоль оси симметрии $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. 1242. 1) Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right\}$, проходящей через точку (3, —4, 0); канонический вид $x'^* = -y^*$, $y'^* = x^*, z'^* = z^*$; 2) поворот на угол π вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right\}$, проходящей через точку (—5, 0, 1); канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = -y^*$, $z'^* = z$; 3) поворот на угол $\arccos\left(-\frac{29}{30}\right)$ вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{7}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}\right\}$, проходящей через точку (5, 1, 0); канонический вид $x'^* = -\frac{29}{30}x^* - \frac{\sqrt{59}}{30}y^*$, $y'^* = \frac{\sqrt{59}}{30}x^* - \frac{29}{30}y^*$, $z'^* = z^*$; 4) произведение поворота на угол $\arccos\frac{2}{3}$ и переноса вдоль оси вращения на вектор, координата которого на оси вращения равна $3\sqrt{5}$; ось проходит через точку (10, 0, —2) и имеет направляющий вектор $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\}$; канонический вид $x'^* = \frac{2}{3}x^* - \frac{\sqrt{5}}{3}y^*$, $y'^* = \frac{\sqrt{5}}{3}x^* + \frac{2}{3}y^*$, $z'^* = z^* + 3\sqrt{5}$; 5) произведение симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $M = \left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{1}{\sqrt{51}}, -\frac{7}{\sqrt{51}}\right\}$, и поворота на угол $\arccos\frac{7}{10}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$; канонический вид $x'^* = \frac{7}{10}x^* - \frac{\sqrt{51}}{10}y^*$, $y'^* = \frac{\sqrt{51}}{10}x^* + \frac{7}{10}y^*$, $z'^* = -z^*$; 6) произведение симметрии относительно плоскости $2x - 4y - 5 = 0$ и переноса, определяемого вектором $\{0, 0, 3\}$, компланарным плоскости симметрии; канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^*$, $z'^* = z^* + 3$; 7) произведение симметрии относительно плоскости $x + 2y + 3z - 7 = 0$ и переноса, определяемого вектором $\{6, 12, -10\}$, компланарным этой плоскости; канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^* + 2\sqrt{70}$, $z'^* = z^*$; 8) произведение симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $M = \left(9, -3, \frac{3}{2}\right)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{a} = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$, и поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, проходящей через точку M, с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$; канонический вид $x'^* = -y^*$, $y'^* = x^*$, $z'^* = -z^*$; 9) произведение поворота на угол π вокруг оси, проходящей через точку (0, 0, 14) с направляющим вектором

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\right\},$$

и переноса вдоль этой оси, определяемого вектором $\{-1,\ -2,\ -3\}$; канонический вид

$$x'^* = -x^*,\quad y'^* = -y^*,\quad z'^* = z^* + \sqrt{14};$$

10) произведение симметрии относительно плоскости $x+3y+15=0$ и переноса на вектор $\{9, -3, 0\}$, компланарный этой плоскости; канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^* + 3\sqrt{10}$, $z'^* = z^*$; 11) произведение поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и переноса вдоль оси вращения на вектор, координата которого на оси вращения равна -9; ось вращения проходит через точку $(0,\ 0,\ 9)$ и имеет направляющий вектор $\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$; канонический вид $x'^* = -y^*$, $y'^* = x^*$, $z'^* = z^* - 9$; 12) произведение симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $M = (9,\ 9,\ 9)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{a} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{3}{\sqrt{17}}\right\}$, и поворота на угол $\arccos\frac{8}{9}$ вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, проходящей через точку M; канонический вид $x'^* = \frac{8}{9}x^* - \frac{\sqrt{17}}{9}y^*$, $y'^* = \frac{\sqrt{17}}{9}x^* + \frac{8}{9}y^*$, $z'^* = -z^*$; 13) произведение симметрии относительно плоскости $2x-y-5z+15=0$ и переноса, определяемого вектором $\{4,\ 3,\ 1\}$, компланарным этой плоскости; канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^* + \sqrt{26}$, $z'^* = z^*$; 14) произведение поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, проходящей через начало координат, и переноса вдоль этой оси, определяемого вектором $\{2,\ 2,\ 0\}$; канонический вид $x'^* = \frac{1}{2}x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^*$, $y'^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*$, $z'^* = z^* + 2\sqrt{2}$; 15) симметрия относительно плоскости $5x+2y+z+30=0$; канонический вид $x'^* = -x^*$, $y'^* = y^*$, $z'^* = z^*$; 16) произведение симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $M = (-1,\ -1,\ 0)$ и перпендикулярной к вектору

$$\boldsymbol{a} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\},$$

и поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором a; канонический вид

$$x'^* = -\frac{1}{2}x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^*, \quad y'^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* - \frac{1}{2}y^*, \; z'^* = -z^*;$$

17) произведение поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ и переноса вдоль оси вращения на вектор, координата которого на оси вращения равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$; ось вращения проходит через точку $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ и имеет направляющий вектор $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; канонический вид

$$x'^* = -\frac{1}{2}x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^*, \quad y'^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* - \frac{1}{2}y^*, \quad z'^* = z^* + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

18) произведение симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и перпендикулярной к вектору $a = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, и поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором a; канонический вид

$$x'^* = \frac{1}{2}x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^*, \; y'^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*, \; z'^* = -z^*.$$

1243. Поворот на угол π вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}, 0\right\}$, проходящей через точку $\left(0, 0, \frac{c}{2}\right)$; канонический вид $x'^* = x^*$, $y'^* = -y^*$, $z'^* = -z^*$.

1244. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$. **1245.** $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

1246. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **1247.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

1248. $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 14,$
$y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z - 2,$
$z' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + 5.$

1249. $x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 2,$
$y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4,$
$z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 6.$

1250. $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1,$
$y' = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z + 2,$
$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3.$

1251. Тождественное преобразование $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ и симметрия относительно плоскости, проходящей через три данные точки:

$$x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3},$$
$$y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3},$$
$$z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.$$

1252. 1) Изометрическое преобразование, сохраняющее ориентацию: $x' = z + 1$, $y' = x$, $z' = y$ — произведение поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, проходящей через точку $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, и переноса вдоль этой оси на вектор с координатой $\frac{1}{\sqrt{3}}$; каноническая запись преобразования

$$x'^* = -\frac{1}{2}x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^*,$$
$$y'^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* - \frac{1}{2}y^*,$$
$$z'^* = z^* + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

2) преобразование, меняющее ориентацию: $x' = -z + 1$, $y' = x$, $z' = y$ — произведение поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, проходящей через неподвижную точку

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, и симметрии относительно плоскости $x-y+z-\frac{1}{2}=0$; канонический вид преобразования

$$x'^{*}=\frac{1}{2}x^{*}-\frac{\sqrt{3}}{2}y^{*},$$
$$y'^{*}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^{*}+\frac{1}{2}y^{*},$$
$$z'^{*}=-z^{*}.$$

1253. $$\begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{23}{27} & -\frac{10}{27} \\ -\frac{25}{27} & \frac{10}{27} & -\frac{2}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{10}{27} & \frac{25}{27} \end{pmatrix}.$$

1254. $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}\cos\varphi+[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}]\sin\varphi$. Если $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$, $\boldsymbol{a}'=\{x', y', z'\}$, $\boldsymbol{e}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$, то

$$x'=x\cos\varphi+(\beta z-\gamma y)\sin\varphi,$$
$$y'=y\cos\varphi+(\gamma x-\alpha z)\sin\varphi,$$
$$z'=z\cos\varphi+(\alpha y-\beta x)\sin\varphi.$$

1255. $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\cos\varphi+[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}]\sin\varphi+\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r})(1-\cos\varphi)$, где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства, $\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{OM'}$ — радиус-вектор ее образа. Если $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$, $\boldsymbol{r}'=\{x', y', z'\}$, $\boldsymbol{e}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$, то $x'=[\cos\varphi+\alpha^2(1-\cos\varphi)]x+[-\gamma\sin\varphi+\alpha\beta(1-\cos\varphi)]y+[\beta\sin\varphi+\alpha\gamma(1-\cos\varphi)]z$, $y'=[\gamma\sin\varphi+\alpha\beta(1-\cos\varphi)]x+[\cos\varphi+\beta^2(1-\cos\varphi)]y+[-\alpha\sin\varphi+\beta\gamma(1-\cos\varphi)]z$, $z'=[-\beta\sin\varphi+\alpha\gamma(1-\cos\varphi)]x+[\alpha\sin\varphi+\beta\gamma(1-\cos\varphi)]y+[\cos\varphi+\gamma^2(1-\cos\varphi)]z$.

1256. $$x'=\frac{\sigma x}{x^2+y^2}, \quad y'=\frac{\sigma y}{x^2+y^2};$$
$$x=\frac{\sigma x'}{x'^2+y'^2}, \quad y=\frac{\sigma y'}{x'^2+y'^2}.$$

1257. Окружность $c(x^2+y^2)+2a\sigma x+2b\sigma y+\sigma^2=0$, если данная окружность не проходит через начало координат; прямая $2ax+2by+\sigma=0$, если данная окружность проходит через начало координат.

1259. 1) Центр $\left(-\frac{a\sigma}{c}, -\frac{b\sigma}{c}\right)$; радиус $r'=\left|\frac{\sigma}{c}\right|\sqrt{a^2+b^2-c}$.

1260. Окружность $C(x^2+y^2)+A\sigma x+B\sigma y=0$, проходящая через начало координат, если данная прямая не проходит через начало координат; сама прямая $Ax+By=0$, если данная прямая проходит через начало координат. **1263.** Пусть M — точка пересечения двух окружностей C_1 и C_2, а M' — образ этой точки при инверсии (O, σ). Рассмотрим две окружности K_1 и K_2, каждая из которых проходит через точки M и M', причем окружность K_1 касается окружности C_1 в точке M, а окружность K_2 касается окружности C_2 в той же точке

M. При инверсии (O, σ) окружности K_1 и K_2 инвариантны, а окружности C_1 и C_2 перейдут в окружности C_1' и C_2', проходящие через точку M' и касающиеся в этой точке M' соответственно окружностей $K_1 (= K_1')$ и $K_2 (= K_2')$. **1264.** 1) $d = \dfrac{|\sigma|}{2\sqrt{a^2+b^2}}$; 2) $n = \{a, b\}$. **1265.** $4(a^2+b^2) = |\sigma|$. **1266.** $|\overline{A'B'}| = |\sigma| \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}|}$. **1267.** Указание. Примем полюс O за начало координат. Если полюс O лежит вне окружности $C: x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, то $c>0$; если же O лежит внутри окружности C, то $c<0$. При инверсии $x = \dfrac{\sigma x'}{x'^2+y'^2}$, $y = \dfrac{\sigma y'}{x'^2+y'^2}$ левая часть уравнения окружности C принимает вид

$$\frac{c(x'^2+y'^2)+2a\sigma x'+2b\sigma y'+\sigma^2}{(x'^2+y'^2)^2} = c\,\frac{x'^2+y'^2+2\dfrac{a\sigma}{c}x'+2\dfrac{b\sigma}{c}y'+\dfrac{\sigma^2}{c}}{(x'^2+y'^2)^2}.$$

Для точек, лежащих вне окружности C, $x^2+y^2+2ax+2by+c>0$; значит, $x'^2+y'^2+2\dfrac{a\sigma}{c}x'+2\dfrac{b\sigma}{c}y'+\dfrac{\sigma^2}{c}>0$ (так как $c>0$). **1270.** При условии, что C пересекает окружность инверсии. **1271.** Указание. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \sigma$, $\dfrac{\overrightarrow{ON'}}{\overrightarrow{ON}} = \dfrac{\sigma}{\varkappa}$, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = \varkappa$; перемножить почленно два последних соотношения и сравнить результат с первым соотношением. **1272.** Данная прямая при инверсии (O, σ) переходит в некоторую окружность C, проходящую через полюс инверсии. Та полуплоскость от данной прямой, где лежит полюс O, переходит в множество всех точек, лежащих вне окружности C; точки другой полуплоскости отображаются во внутренние точки окружности C. **1273.** Общая часть внутренних точек окружностей $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. **1274.** Область, состоящая из точек, лежащих вне окружности $(x-1)^2+y^2=1$, но внутри окружности $(x-2)^2+y^2=4$ (серп). **1276.** $\rho' = \dfrac{\sigma}{p}(1-e\cos\varphi)$ — улитка Паскаля в случае эллипса и гиперболы; кардиоида $\rho' = \dfrac{\sigma}{p}(1-\cos\varphi)$ в случае параболы. **1277.** 1) Парабола $y^2=x$; 2) множество всех внешних точек этой параболы.

1280. $x' = \dfrac{\sigma x}{x^2+y^2+z^2}$, $y' = \dfrac{\sigma y}{x^2+y^2+z^2}$, $z' = \dfrac{\sigma z}{x^2+y^2+z^2}$;

$$x = \frac{\sigma x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y = \frac{\sigma y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z = \frac{\sigma z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

1281. Сфера

$$d(x^2+y^2+z^2)+2a\sigma x+2b\sigma y+2c\sigma z+\sigma^2=0,$$

если данная сфера S не проходит через полюс инверсии ($d \neq 0$).

Если данная сфера проходит через начало координат, то S' — плоскость $2ax+2by+2cz+\sigma=0$. **1282.** Сфера $D(x^2+y^2+z^2)+A\sigma x+B\sigma y+C\sigma z=0$, проходящая через начало координат, если данная плоскость не проходит через начало координат; сама плоскость $Ax+By+Cz=0$, если данная плоскость проходит через начало координат. **1284.** Указание. Рассмотреть две сферы, пересекающиеся по данной окружности. **1285.** Центр $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, радиус $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1287.** Указание. Принять за начало координат точку O, а за единицу масштаба — диаметр сферы S. Тогда уравнения окружности λ будут $x^2+y^2+z^2-z=0$, $x_0x+y_0y+\left(z_0-\frac{1}{2}\right)z-\frac{z_0}{2}=0$, где (x_0, y_0, z_0) — вершина конуса. Произвести инверсию $(O, 1)$. **1288.** Указание. При инверсии сохраняется касание окружностей и углы между пересекающимися окружностями. **1289.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат, принимая за начало координат точку O, за базисный вектор оси Oz — вектор $\overrightarrow{OP}$, а за направление оси Oy — направление диаметра AB. Тогда уравнение сферы S будет $x^2+y^2+z^2-z=0$; уравнения плоскостей, содержащих окружности семейства C_λ, будут $y=\lambda$, где $|\lambda|<\frac{1}{2}$, а уравнения плоскостей, содержащих окружности семейства C_μ, будут $\mu x+2z=1$ (μ принимает все действительные значения). Далее воспользоваться инверсией $(O, 1)$. Уравнения семейств C'_λ и C'_μ будут

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2\lambda x+1&=0,\\ z&=1; \end{aligned}\right\} \qquad (C'_\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2\mu x-1&=0,\\ z&=1. \end{aligned}\right\} \qquad (C'_\mu)$$

1290. $x_1 : x_2 = x$. **1291.** $x_1 : x_2 = 1 : x$. **1292.** 1) $1 : -1$; 2) $1 : -\lambda$. Указание. В пучке прямых, реализующих проективную прямую, единичная прямая $(1 : 1)$ должна быть параллельна проективно-аффинной прямой.

1293. 1)

$$\lambda x_1' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad \lambda x_2' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}};$$

2) $$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_{11}\rho_1 x_1' + a_{12}\rho_2 x_2',\\ \lambda x_2 &= a_{21}\rho_1 x_1' + a_{22}\rho_2 x_2', \end{aligned}$$

где ρ_1 и ρ_2 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2 &= b_1,\\ a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2 &= b_2. \end{aligned}\right\}$$

1294. 1) $\lambda x_1 = \frac{x-a_2}{b-a_2}$, $\lambda x_2 = \frac{x-a_1}{b-a_1}$;

2) $x=\dfrac{a_1\rho_1x_1+a_2\rho_2x_2}{\rho_1x_1+\rho_2x_2}$, где ρ_1 и ρ_2 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1\rho_1+a_2\rho_2&=b,\\ \rho_1+\rho_2&=1. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Перейти к однородным координатам и воспользоваться результатом предыдущей задачи. **1295.** $(ABCD)=\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_3}:\dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_4}$.
1296. Указание. Если принять точку O за начало аффинной системы координат Oxy, то

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}},$$

где $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$, $C=(c_1, c_2)$, $D=(d_1, d_2)$; координаты точек A', B', C', D' пропорциональны координатам точек A, B, C, D.

1297. $$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}.$$

1298. $x_1:x_2$. **1299.** $x_1:x_2$. **1300.** Прямая, проходящая через точку A параллельно BC. **1301.** Биссектриса смежного угла. **1302.** Прямая, соединяющая вершину O прямого угла с серединой отрезка гипотенузы, отсекаемого на ней биссектрисами внутреннего и внешнего угла при вершине O. **1305.** Указание. Принять две инвариантные точки за базисные, а третью инвариантную точку за единичную. **1307.** $\lambda x_1'=\rho_1a_1x_1+\rho_2b_1x_2$, $\lambda x_2'=\rho_1a_2x_1+\rho_2b_2x_2$, где ρ_1 и ρ_2 определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1a_1+\rho_2b_1&=c_1,\\ \rho_1a_2+\rho_2b_2&=c_2. \end{aligned}\right\}$$

1308. $\lambda x_1'=x_2$, $\lambda x_2'=x_1$. **1309.** 1) $(1:-1)$ и $(1:2)$; 2) $(1:0)$; 3) инвариантных точек нет. **1310.** 1) $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}<0$; 2) $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}>0$; 3) $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0$; 4) $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=a_{21}=0$.

1311. 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}<0$. **1312.** 1) Параболическое преобразование; 2) тождественное преобразование; 3) гиперболическое преобразование, сохраняющее ориентацию; 4) гиперболическое преобразование, меняющее ориентацию; 5) эллиптическое преобразование. **1313.** 1) $(1:-1)$; 2) $(1:1)$ и $(1:-1)$; 3) $(1:-(1+\sqrt{2}))$ и $(1:(\sqrt{2}-1))$; 4) инвариантных точек нет. **1314.** 1) $\lambda x_1' = kx_1$, $\lambda x_2' = x_2$; 2) $k > 0$; 3) сжатие к оси Ox_2 с коэффициентом k, $0 \neq k \neq 1$, по направлению оси Ox_1. **1315.** 1) $\lambda x_1' = x_1 + kx_2$, $\lambda x_2' = x_2$; 2) сдвиг по направлению оси Ox. **1316.** $\lambda x_1' = x_1 + x_2$, $\lambda x_2' = x_2$.

1317. $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0.$

1318. Указание. Принять точки A и B за базисные, а C — за единичную точку проективной системы координат. **1321.** Циклическое преобразование с периодом 4. **1322.** Ни одного, если $(AB'BA') < 0$; два, если $(AB'BA') > 0$. Указание. Положить $A = (1:0)$, $B = (0:1)$, $A' = (1:1)$. **1323.** Указание. Положить $A = (1:0)$, $M = (0:1)$, $M' = (1:1)$. **1324.** $\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\lambda x_2' = a_{21}x_1 - a_{11}x_2$. **1325.** 1) $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} > 0$; 2) $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} < 0$; 3) таких инволюционных преобразований нет. **1328.** 1) $\lambda x_1' = x_1$, $\lambda x_2' = -x_2$; 2) $E' = (1:-1)$. **1329.** $x' = -x$. **1330.** Симметрия относительно одной инвариантной прямой в направлении другой. **1331.** 1) $x' = \frac{k}{x}$. 2) При $k < 0$. 3) При $k > 0$; инвариантные точки имеют координаты $\pm\sqrt{k}$. **1332.** 4) Если $A_2 \neq A_1'$ $(a_1 \neq 0)$, то $\lambda x_1' = -b_2x_1 + b_1x_2$, $\lambda x_2' = -\frac{a_2b_2}{a_1}x_1 + b_2x_2$; если $A_2' \neq A_1$ $(b_2 \neq 0)$, то $\lambda x_1' = a_1x_1 - \frac{a_1b_1}{b_2}x_2$, $\lambda x_2' = a_2x_1 - a_1x_2$. **1333.** $\lambda x_1' = kx_2$, $\lambda x_2' = x_1$, где k — любое действительное число, отличное от нуля; если $k > 0$, то инволюция гиперболическая, если $k < 0$, то эллиптическая. **1337.** Указание. Принять точки A и B за базисные точки проективной системы координат. **1344.** $a_{21}x^2 - 2a_{11}xy - a_{12}y^2 = C$. Если эти линии эллиптического типа, то инволюция эллиптическая, если линии гиперболического типа, то инволюция гиперболическая. **1345.** Указание. Пусть A' — образ A, а A'' — образ A' при данном преобразовании П. Рассмотрим инволюцию I, для которой точка A' инвариантна, а точка A переходит в A''. Тогда произведение $I\Pi$ преобразует A в A', а A' в A, т. е. является инволюцией. **1346.** $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. **1347.** 1) $M = (3:2:-1)$; 2) $N = (12, 9)$; 3) $R = (5:0:-3)$; 4) $P = (1:1:0)$. **1348.** Прямые пересекаются на одной из сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$. **1349.** 1) Ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

равен двум; 2) ранг матрицы M равен 1;

$$3) \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

1350. $(120:14:-203)$. **1351.** $\lambda x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1$, $\lambda x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2$, $\lambda x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3$. **1352.** 1) $3x_1 + x_2 + 9x_3 = 0$; 2) $\lambda x_1 = 3\alpha - \beta$, $\lambda x_2 = 3\beta$, $\lambda x_3 = -\alpha$; 3) $\alpha = 0$, $\beta = 1$; несобственная точка $(-1:3:0)$.

1353.

$$1)\ \lambda x_1'=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13}\\ x_2 & a_{22} & a_{23}\\ x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad \lambda x_2'=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13}\\ a_{21} & x_2 & a_{23}\\ a_{31} & x_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}},\quad \lambda x_3'=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1\\ a_{21} & a_{22} & x_2\\ a_{31} & a_{32} & x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}};$$

$$\begin{aligned} 2)\ \lambda x_1&=a_{11}\rho_1x_1'+a_{12}\rho_2x_2'+a_{13}\rho_3x_3',\\ \lambda x_2&=a_{21}\rho_1x_1'+a_{22}\rho_2x_2'+a_{23}\rho_3x_3',\\ \lambda x_3&=a_{31}\rho_1x_1'+a_{32}\rho_2x_2'+a_{33}\rho_3x_3',\end{aligned}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 определяются из системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\rho_1+a_{12}\rho_2+a_{13}\rho_3&=b_1,\\ a_{21}\rho_1+a_{22}\rho_2+a_{23}\rho_3&=b_2,\\ a_{31}\rho_1+a_{32}\rho_2+a_{33}\rho_3&=b_3.\end{aligned}\right\}$$

1354. $$\begin{aligned}\lambda x_1&=8x_1'-4x_2',\\ \lambda x_2&=2x_1'-4x_2'+4x_3',\\ \lambda x_3&=2x_1'-x_2'+x_3'.\end{aligned}$$

1355. $$\lambda x_1'=\frac{a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3}{a_1e_1+b_1e_2+c_1e_3},\quad \lambda x_2'=\frac{a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3}{a_2e_1+b_2e_2+c_2e_3},$$
$$\lambda x_3'=\frac{a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3}{a_3e_1+b_3e_2+c_3e_3}.$$

1356. 1) $$\lambda y_1=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1},\quad \lambda y_2=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2},$$
$$\lambda y_3=\frac{A_3x+B_3y+C_3}{A_3x_0+B_3y_0+C_3};$$

2) $$\lambda y_1=\frac{A_1x_1+B_1x_2}{A_1x_0+B_1y_0+C_1},\quad \lambda y_2=\frac{A_2x_1+B_2x_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2},$$
$$\lambda y_3=\frac{A_3x_1+B_3x_2}{A_3x_0+B_3y_0+C_3};$$

3) $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & (A_1x_0+B_1y_0+C_1)\,y_1\\ A_2 & B_2 & (A_2x_0+B_2y_0+C_2)\,y_2\\ A_3 & B_3 & (A_3x_0+B_3y_0+C_3)\,y_3\end{vmatrix}=0.$$

1357. $(0:1:-1)$. **1358.** $x_1+x_2=0$ (ось Ox); $x_1-x_2=0$ (ось Oy); $x_1+x_2+2x_3=0$ (несобственная прямая). **1359.** $(15:-4:24)$.

1360. 1) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0;$ 2) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0.$

1361. 1) $u_2x_2+u_3x_3=0$; 2) $(0:-x_3:x_2)$. **1363.** $M_1=(0:x_2:x_3)$, $M_2=(x_1:0:x_3)$, $M_3=(x_1:x_2:0)$. **1364.** $u_2x_2+u_3x_3=0$, $u_3x_3+u_1x_1=0$, $u_1x_1+u_2x_2=0$. **1365.** $(u_2:-u_1:0)$, $(0:u_3:-u_2)$, $(u_3:0:-u_1)$.

1366. $x_1 : x_2$. **1367.** 1) $[0:1:-1]$, $[1:0:-1]$, $[1:-1:0]$; 2) $[1:1:-1]$, $[-1:1:1]$, $[1:-1:1]$. **1368.** 1) $F_1=(0:1:-1)$, $F_2=(1:0:-1)$, $F_3=(1:-1:0)$; 2) $A_1F_1=[0:1:1]$, $A_2F_2=[1:0:1]$, $A_3F_3=[1:1:0]$.

1370. 1) $\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right)$, где a, b, c — длины сторон треугольника ABC;

2) $(\cos A : \cos B : \cos C)$; 3) $\left(\frac{1}{\cos A}:\frac{1}{\cos B}:\frac{1}{\cos C}\right)$.

1371. 1) $x_1+x_2+x_3=0$; 2) $ax_1+bx_2+cx_3=0$; 3) $x_1 \sin 2A+x_2 \sin 2B+x_3 \sin 2C=0$; 4) $x_1 \cos A+x_2 \cos B+x_3 \cos C=0$. **1373.** Указание. 1) Ввести проективную систему координат $A_1A_2A_3E$; 2) ввести проективную систему координат $a_1a_2a_3e$, где $a_1=A_2A_3$, $a_2=A_3A_1$, $a_3=A_1A_2$. **1376.** 1) $\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}$; 2) $\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}$. Указание. 1) Ввести на проективной прямой AB проективную систему координат, принимая точки A и B за базисные. В такой системе координат $C=(\alpha:\beta)$, $D=(\lambda:\mu)$. 2) Ввести проективную систему координат в пучке прямых, определяемом прямыми a и b, принимая прямые a и b за базисные. В этой системе координат $c=[\alpha:\beta]$, $d=[\lambda:\mu]$. **1377.** $D=((\lambda\alpha a_1+\beta b_1):(\lambda\alpha a_2+\beta b_2):(\lambda\alpha a_3+\beta b_3))$. **1378.** $(ABCD)=-9$. **1379.** $(abcd)=-\frac{1}{4}$.

1380. $D=(4:0:-1)$. **1381.** A_3M: $\frac{x_1}{x_1^0}-\frac{x_2}{x_2^0}=0$; l: $\frac{x_1}{x_1^0}+\frac{x_2}{x_2^0}=0$. **1382.** $x_1 : x_2$.

1383. $\left[\frac{1}{x_1}:\frac{1}{x_2}:\frac{1}{x_3}\right]$. **1384.** Указание. Принять точки P, Q, R за базисные точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ проективной системы координат, а точку S — за единичную. **1386.** $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$. **1388.** Точка $(1:2:0)$ переходит в точку $(-3:4:0)$.

1389. $x'=\frac{-15x+43y}{5x-9y+16}$, $y'=\frac{7x-3y}{5x-9y+16}$.

1390.
$$\lambda x_1'=2x_1+3x_2-7x_3,$$
$$\lambda x_2'=3x_1-5x_2+4x_3,$$
$$\lambda x_3'=8x_1-9x_2+x_3.$$

1391. $\lambda u_1'=\frac{a_1}{a_1'}u_1$, $\lambda u_2'=\frac{a_2}{a_2'}u_2$, $\lambda u_3'=\frac{a_3}{a_3'}u_3$.

1392. 1)
$$\lambda u_1'=A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3,$$
$$\lambda u_2'=A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3,$$
$$\lambda u_3'=A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице (a_{ij});

2)
$$\lambda x_1=A_{11}x_1'+A_{21}x_2'+A_{31}x_3',$$
$$\lambda x_2=A_{12}x_1'+A_{22}x_2'+A_{32}x_3',$$
$$\lambda x_3=A_{13}x_1'+A_{23}x_2'+A_{33}x_3';$$

3)
$$\lambda u_1=a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3',$$
$$\lambda u_2=a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3',$$
$$\lambda u_3=a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3'.$$

1393. 1) $\lambda x'_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3,$
$\lambda x'_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3,$
$\lambda x'_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3,$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице (a_{ij});

2) $\lambda u_1 = A_{11}u'_1 + A_{21}u'_2 + A_{31}u'_3,$
$\lambda u_2 = A_{12}u'_1 + A_{22}u'_2 + A_{32}u'_3,$
$\lambda u_3 = A_{13}u'_1 + A_{23}u'_2 + A_{33}u'_3;$

3) $\lambda x_1 = a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3,$
$\lambda x_2 = a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3,$
$\lambda x_3 = a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3.$

1394. $\lambda x'_1 = \lambda_1 x_1$, $\lambda x'_2 = \lambda_2 x_2$, $\lambda x'_3 = \lambda_3 x_3$. В связке это три сжатия с коэффициентами λ_1, λ_2, λ_3 к плоскостям A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 связки по направлению прямых A_1, A_2, A_3. **1395.** $\lambda x'_1 = x_3$, $\lambda x'_2 = x_1$, $\lambda x'_3 = x_2$. **1396.** $\lambda x'_1 = x_2 + x_3$, $\lambda x'_2 = x_3 + x_1$, $\lambda x'_3 = x_1 + x_2$.

1397. $\lambda x'_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$
$\lambda x'_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3,$
$\lambda x'_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$

1398. $\lambda x'_1 = e_1 x_1$, $\lambda x'_2 = e_2 x_2$, $\lambda x'_3 = e_3 x_3$.

1399. 1) $\lambda x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_3$, $\lambda x'_2 = \alpha x_2 + \gamma x_3$, $\lambda x'_3 = x_3$. 2) При $\alpha \neq 1$ — гомотетия с центром $\left(\frac{\beta}{1-\alpha}, \frac{\gamma}{1-\alpha}\right)$ и коэффициентом α; при $\alpha = 1$ — перенос.

1400. 1) $\lambda x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$
$\lambda x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$
$\lambda x'_3 = x_3;$

2) $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$ (аффинное преобразование); (x, y) — координаты собственной точки M, а x', y' — координаты ее образа в аффинной системе координат Oxy, соответствующей данной однородной системе.

1401. $\lambda x'_1 = a_{11}\rho_1 x_1 + a_{12}\rho_2 x_2 + a_{13}\rho_3 x_3,$
$\lambda x'_2 = a_{21}\rho_1 x_1 + a_{22}\rho_2 x_2 + a_{23}\rho_3 x_3,$
$\lambda x'_3 = a_{31}\rho_1 x_1 + a_{32}\rho_2 x_2 + a_{33}\rho_3 x_3,$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 определяются из системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2 + a_{13}\rho_3 &= b_1, \\ a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2 + a_{23}\rho_3 &= b_2, \\ a_{31}\rho_1 + a_{32}\rho_2 + a_{33}\rho_3 &= b_3. \end{aligned}\right\}$$

1402. $\lambda x'_1 = a_{11}x_1$, $\lambda x'_2 = a_{23}x_3$, $\lambda x'_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3$.

1403. 1) $\lambda x'_1 = kx_1$, $\lambda x'_2 = x_2$, $\lambda x'_3 = x_3$; 2) $x' = kx$, $y' = y$ (сжатие к оси Oy с коэффициентом k по направлению оси Ox); 3) $x' = kx$, $y' = ky$ (гомотетия). **1404.** 2) $\lambda x'_1 = ax_1$, $\lambda x'_2 = x_2$, $\lambda x'_3 = x_3$. **1405.** 2) $\lambda x'_1 = -x_1$, $\lambda x'_2 = x_2$, $\lambda x'_3 = x_3$; 3) $x' = -x$, $y' = y$ (симметрия относительно оси Oy по направлению оси Ox); 4) $x' = -x$, $y' = -y$. **1406.** Симметрия относительно плоскости π связки по направлению прямой связки, пересекающей плоскость π. **1409.** 1) $\lambda x'_1 = x_1 + ax_3$,

$\lambda x_2' = x_2$, $\lambda x_3' = x_3$, $a \neq 0$; 2) $\lambda x_1' = x_1 + (k-1)x_3$, $\lambda x_2' = x_2$, $\lambda x_3' = x_3$; 3) $x' = x + a$, $y' = y$ (перенос). **1410.** Сдвиг относительно плоскости связки по направлению прямой связки, лежащей в этой плоскости. **1411.** Указание. 2) Пусть параболическая гомология задана осью o, центром O (лежащим на оси o) и парой соответственных точек M, M'. Пусть O_1 — точка, гармонически сопряженная с точкой O относительно пары точек M, M'. Тогда гармонические гомологии с центрами O и O_1 и осью o являются искомыми, так как для первой гомологии точка M инвариантна, а вторая гомология переводит эту точку в M'. **1412.** $(a_{13} : a_{23} : 0)$. **1415.** 1) $kx_1' = \lambda_1 x_1$, $kx_2' = \lambda_2 x_2$, $kx_3' = \lambda_3 x_3$; 2) $kx_1' = \lambda_1 x_1$, $kx_2' = \alpha x_2 - \beta x_3$, $kx_3' = \beta x_2 + \alpha x_3$; 3) $kx_1' = sx_1 + x_2$, $kx_2' = sx_2$, $kx_3' = \lambda_3 x_3$; 4) $kx_1' = sx_1$, $kx_2' = sx_2$, $kx_3' = \lambda_3 x_3$; 5) $kx_1' = sx_1 + x_2$, $kx_2' = sx_2 + x_3$, $kx_3' = sx_3$; 6) $kx_1' = sx_1 + x_2$, $kx_2' = sx_2$, $kx_3' = sx_3$; 7) $kx_1' = x_1$, $kx_2' = x_2$, $kx_3' = x_3$. **1416.** 1) Инвариантные точки: A_1, A_2, A_3, инвариантные прямые: A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; 2) инвариантная точка A_1; инвариантная прямая A_2A_3; 3) инвариантные точки A_1 и A_3, инвариантные прямые A_1A_3 и A_1A_2; 4) инвариантные точки: A_3 и все точки прямой A_1A_2, инвариантные прямые: прямая A_1A_2 и пучок прямых с центром A_3 (гиперболическая гомология); 5) инвариантная точка A_1, инвариантная прямая A_1A_2; 6) инвариантные точки: все точки прямой A_2A_3, инвариантные прямые: пучок прямых с центром A_2 (параболическая гомология); 7) тождественное преобразование. **1419.** Указание. Принять данные четыре точки за базисные точки $A_1 = (1:0:0)$, $A_2 = (0:1:0)$, $A_3 = (0:0:1)$ и единичную точку $E = (1:1:1)$ проективной системы координат. **1421.** $\lambda u_1 = 2x_1$, $\lambda u_2 = x_2 + x_3$, $\lambda u_3 = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$. **1422.** $(1:1:1)$ и $(7:3:5)$. **1423.** $\lambda u_1 = x_1$, $\lambda u_2 = x_2$, $\lambda u_3 = x_3$. **1426.** $\lambda u_1 = k_1 x_1$, $\lambda u_2 = k_2 x_2$, $\lambda u_3 = k_3 x_3$. **1430.** Указание. 1) Принять треугольник ABC за базисный треугольник проективной системы координат; 2) принять треугольник ABC за базисный треугольник, а точку O — за единичную точку проективной системы координат. **1433.** 1) $\varphi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$; 2) φ — положительно определенная квадратичная форма; 3) φ — неопределенная квадратичная форма.

1434.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
или
$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 = 0,$$
где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1436. Указание. Приписать точкам A_i координаты $0:1:\pm 1$, $\pm 1:0:1$, $1:\pm 1:0$. **1438.** 1) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + (a_{31} + a_{13})x_1x_3 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 = 0$; 2) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$. **1439.** $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 + 36x_3^2 = 0$. **1440.** $x_1x_2 - x_3^2 = 0$. **1441.** $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. **1442.** $2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$. **1443.** $a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$. **1444.** 1) Действительная нераспадающаяся линия; 2) действительная нераспадающаяся линия; 3) две действительные прямые; 4) действительная нераспадающаяся линия; 5) пара мнимых прямых; 6) две совпадающие прямые. **1445.** $\frac{U_1U_3}{U_1^0U_3^0}-\frac{U_2U_4}{U_2^0U_4^0}=0$, где $U_i^0=u_{i1}x_1^0+u_{i2}x_2^0+u_{i3}x_3^0$, $i=1, 2, 3, 4$. **1446.** $5x_1^2+16x_1x_2+5x_2^2-5x_1x_3-5x_2x_3=0$. Указание. Составить уравнения прямых AB: $F_1=0$; CD: $F_2=0$; AC: $F_3=0$; BD: $F_4=0$. Записать искомое уравнение в виде $F_1F_2+kF_3F_4=0$ и потребовать, чтобы эта линия прошла через точку E. **1448.** 1) $x_1x_2-x_3^2=0$; 2) гипербола; 3) парабола. **1450.** $a_1^2+a_2^2-a_3^2<0$.

$$\textbf{1451.}\quad 1)\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}<0;\quad 2)\ \Delta=0;\quad 3)\ \Delta>0.$$

1464. $x_1x_3=x_2^2$. **1467.** 1) $\lambda x_1'=x_3$, $\lambda x_2'=x_2$, $\lambda x_3'=x_1$; для собственных точек (x, y) эллипса $x^2+y^2=1$, отличных от точек $(0, \pm 1)$, $x'=\frac{1}{x}$, $y'=\frac{y}{x}$; точки (0, 1) и (0, —1) преобразуются в несобственные точки $(1:1:0)$ и $(1:-1:0)$ асимптот $x^2-y^2=0$ гиперболы $x^2-y^2=1$; 2) $\lambda x_1'=x_3$, $\lambda x_2'=x_1-x_2$, $\lambda x_3'=x_1+x_2$; $x'=\frac{1}{x+y}$, $y'=\frac{x-y}{x+y}$; несобственная точка $(1:-1:0)$ асимптоты гиперболы $x^2-y^2=1$ переходит в несобственную точку $(0:1:0)$ параболы $y=x^2$; вторая несобственная точка $(1:1:0)$ гиперболы переходит в начало координат O, принадлежащее параболе $y=x^2$; 3) $\lambda x_1'=x_1$, $\lambda x_2'=-x_2+x_3$, $\lambda x_3'=x_2+x_3$; все собственные точки эллипса $x^2+y^2=1$, кроме точки (0, —1), преобразуются по формулам $x'=\frac{x}{1+y}$, $y'=\frac{1-y}{1+y}$; точка (0, —1) переходит в несобственную точку параболы $y=x^2$, однородные координаты которой $(0:1:0)$; 4) $\lambda x_1'=x_1$, $\lambda x_2'=x_3$, $\lambda x_3'=x_2$; все точки данных пересекающихся прямых, кроме точки их пересечения, преобразуются по формулам $x'=\frac{x}{y}$, $y'=\frac{1}{y}$; точка (0, 0) пересечения данных прямых переходит в несобственную точку $(0:1:0)$, присоединенную к паре параллельных прямых $x^2-1=0$.

1468. 1)
$$\lambda x_1'=\pm\, ab\,(x_1\operatorname{ch}t+ax_3\operatorname{sh}t),$$
$$\lambda x_2'=\pm\, b^2\,(x_1\operatorname{sh}t+ax_3\operatorname{ch}t),$$
$$\lambda x_3'=ax_2$$

с любым набором знаков +, —; 2) собственные точки данной гиперболы, отличные от ее вершин, преобразуются по формулам $x'=\pm\frac{b}{y}(x\operatorname{ch}t+a\operatorname{sh}t)$, $y'=\pm\frac{b^2}{ay}(x\operatorname{sh}t+a\operatorname{ch}t)$; вершины $(\pm a, 0)$ гиперболы переходят в несобственные точки $(a:\pm b:0)$ ее асимптот. **1470.** $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3=0$. **1471.** $\lambda x_1'=-x_1$, $\lambda x_2'=x_2$, $\lambda x_3'=x_3$ (гармоническая гомология с осью A_2A_3 и центром A_1).

1473. $x-6y+8=0$. **1474.** $(-3,\ 1)$. **1475.** $y=1$. **1476.** $(-28,\ -2)$. **1477.** $7x^2+2xy-6x-10y+15=0$. **1478.** $2x^2-xy+y^2-3x+y=0$. **1482.** Указание. Диаметр линии второго порядка есть поляра несобственной точки сопряженных ему хорд. **1488.** Указание. Проекции фокуса F на касательные к линии C лежат на окружности, если C — эллипс или гипербола, и на прямой, если C — парабола.

1489. Указание. Принимая за начало координат фокус F параболы, можно записать ее уравнение в виде $y^2-2px-p^2=0$. Поляра точки $P=(X,\ Y)$ имеет уравнение $pX-yY+px+p^2=0$. Отсюда $p=-\dfrac{px-yY}{X+p}$, и, значит, следующее уравнение будет следствием двух предыдущих (уравнения параболы и уравнения поляры точки относительно параболы):

$$y^2+2x\frac{px-yY}{X+p}-\frac{(px-yY)^2}{(X+p)^2}=0$$

или

$$(2pX+p^2)\,x^2-2xyXY+[(X+p)^2-Y^2]\,y^2=0.$$

Но это уравнение однородное относительно x и y и, значит, оно является уравнением двух прямых, проходящих через начало координат и точки пересечения параболы с полярой. Условие ортогональности этих прямых

$$(X+p)^2-Y^2+2pX+p^2=0$$

или

$$(X+2p)^2-Y^2=2p^2$$

— уравнение равносторонней гиперболы. **1491.** Прямая $[u_1 : u_2 : u_3]$, координаты которой

$$\lambda u_1=a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0,$$
$$\lambda u_2=a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0,$$
$$\lambda u_3=a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0$$

(поляра точки M_0). **1496.** $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=0$. **1499.** $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$; A_1, A_2 — внешние точки, A_3 — внутренняя точка. **1500.** $y_1(a_{11}x_1+{}$ $+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+y_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+y_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)\equiv$ $\equiv x_1(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)+x_2(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3)+x_3(a_{31}y_1+a_{32}y_2+{}$ $+a_{33}y_3)\equiv a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3+a_{23}(x_2y_3+x_3y_2)+a_{31}(x_3y_1+{}$ $+x_1y_3)+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)=0$.

1501.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

или

$$A_{11}u_1v_1+A_{22}u_2v_2+A_{33}u_3v_3+A_{23}(u_2v_3+u_3v_2)+{}$$
$$+A_{31}(u_3v_1+u_1v_3)+A_{12}(u_1v_2+u_2v_1)=0,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1502. $\lambda x_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3,$
$\lambda x_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3,$
$\lambda x_3 = A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3,$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

или

$$\lambda x_1 = \begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \lambda x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} \\ a_{21} & u_2 & a_{23} \\ a_{31} & u_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \lambda x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix}.$$

1506. $2x_1x_2 + x_3^2 = 0$. **1509.** $a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 + x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) = 0$, $a_{11}y_1z_1 + a_{22}y_2z_2 + a_{33}y_3z_3 + a_{23}(y_2z_3 + y_3z_2) + a_{31}(y_3z_1 + y_1z_3) + a_{12}(y_1z_2 + y_2z_1) = 0$, $a_{11}z_1x_1 + a_{22}z_2x_2 + a_{33}z_3x_3 + a_{23}(z_2x_3 + z_3x_2) + a_{31}(z_3x_1 + z_1x_3) + a_{12}(z_1x_2 + z_2x_1) = 0$.
1511. Указание. Треугольники ABC и PQR, вписанные в линию второго порядка, автополярны при поляритете, для которого треугольник ABC автополярный, а точка P переходит в прямую QR.
1515. $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$. **1516.** $(-2:1:1:0)$, **1517.** $(1:2:6:0)$.
1518. $M = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$.

1519. $$\lambda x_1 = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}, \quad \lambda x_2 = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2},$$
$$\lambda x_3 = \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3}, \quad \lambda x_4 = \frac{A_4x + B_4y + C_4z + D_4}{A_4x_0 + B_4y_0 + C_4z_0 + D_4}.$$

1522.

1) $\lambda x_1 = a_{11}\rho_1x_1' + a_{12}\rho_2x_2' + a_{13}\rho_3x_3' + a_{14}\rho_4x_4',$
$\lambda x_2 = a_{21}\rho_1x_1' + a_{22}\rho_2x_2' + a_{23}\rho_3x_3' + a_{24}\rho_4x_4',$
$\lambda x_3 = a_{31}\rho_1x_1' + a_{32}\rho_2x_2' + a_{33}\rho_3x_3' + a_{34}\rho_4x_4',$
$\lambda x_4 = a_{41}\rho_1x_1' + a_{42}\rho_2x_2' + a_{43}\rho_3x_3' + a_{44}\rho_4x_4',$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2 + a_{13}\rho_3 + a_{14}\rho_4 = b_1, \\ a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2 + a_{23}\rho_3 + a_{24}\rho_4 = b_2, \\ a_{31}\rho_1 + a_{32}\rho_2 + a_{33}\rho_3 + a_{34}\rho_4 = b_3, \\ a_{41}\rho_1 + a_{42}\rho_2 + a_{43}\rho_3 + a_{44}\rho_4 = b_4. \end{aligned}\right\}$$

2) $$\lambda x_1' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}, \quad \lambda x_2' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & x_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}},$$

$$\lambda x_3' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & x_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}, \quad \lambda x_4' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}.$$

1523. $$\left.\begin{aligned} 3x_1+11x_2+2x_4=0, \\ 7x_1+27x_2-17x_3-x_4=0. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Первое уравнение есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Второе уравнение есть уравнение проходящей через данную точку плоскости пучка, осью которого является прямая пересечения данных плоскостей. **1524.** $\lambda x_1=8\alpha+45\beta$, $\lambda x_2=27\alpha-36\beta$, $\lambda x_3=-20\alpha+30\beta$, $\lambda x_4=-16\alpha+5\beta$. Указание. Найти точки пересечения данной плоскости с данными прямыми. **1525.** 1) Плоскость π проходит через вершину $A_1=(1:0:0:0)$; 2) плоскость π проходит через ребро A_1A_2; 3) плоскость π совпадает с гранью $A_1A_2A_3$.

1528. 1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=0;$ 2) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}=0;$

3) $$(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4)(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4)= \\ =(b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3+b_4u_4)(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4).$$

1529. $M_1=(0:x_2:x_3:x_4)$, $M_2=(x_1:0:x_3:x_4)$, $M_3=(x_1:x_2:0:x_4)$, $M_4=(x_1:x_2:x_3:0)$. **1532.** $(ABCD)=\dfrac{\lambda\beta}{\alpha\mu}$. **1533.** 1) $E_1=(0:1:1:1)$, $E_2=(1:0:1:1)$, $E_3=(1:1:0:1)$, $E_4=(1:1:1:0)$; $F_1=(-1:1:1:1)$, $F_2=(1:-1:1:1)$, $F_3=(1:1:-1:1)$, $F_4=(1:1:1:-1)$; 2) $E_{12}=(1:1:0:0)$, $E_{13}=(1:0:1:0)$, $E_{14}=(1:0:0:1)$, $E_{23}=(0:1:1:0)$, $E_{24}=(0:1:0:1)$, $E_{34}=(0:0:1:1)$; $F_{12}=(1:-1:0:0)$, $F_{13}=(1:0:-1:0)$, $F_{14}=(1:0:0:-1)$, $F_{23}=(0:1:-1:0)$, $F_{24}=(0:1:0:-1)$, $F_{34}=(0:0:1:-1)$; 3) $G_{1234}=(1:1:-1:-1)$, $G_{1324}=(1:-1:1:-1)$, $G_{1423}=(1:-1:-1:1)$. **1534.** $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

1539 $$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}},$$
$$y'=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}},$$
$$z'=\frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}};$$

2) $a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=0;$

3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

1540. $$\lambda x_1' = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4}{a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_{14}b_4},$$
$$\lambda x_2' = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4}{a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 + a_{24}b_4},$$
$$\lambda x_3' = \frac{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4}{a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 + a_{34}b_4},$$
$$\lambda x_4' = \frac{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4}{a_{41}b_1 + a_{42}b_2 + a_{43}b_3 + a_{44}b_4}.$$

1541. $$\lambda x_1' = a_{11}\rho_1 x_1 + a_{12}\rho_2 x_2 + a_{13}\rho_3 x_3 + a_{14}\rho_4 x_4,$$
$$\lambda x_2' = a_{21}\rho_1 x_1 + a_{22}\rho_2 x_2 + a_{23}\rho_3 x_3 + a_{24}\rho_4 x_4,$$
$$\lambda x_3' = a_{31}\rho_1 x_1 + a_{32}\rho_2 x_2 + a_{33}\rho_3 x_3 + a_{34}\rho_4 x_4,$$
$$\lambda x_4' = a_{41}\rho_1 x_1 + a_{42}\rho_2 x_2 + a_{43}\rho_3 x_3 + a_{44}\rho_4 x_4,$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2 + a_{13}\rho_3 + a_{14}\rho_4 = b_1, \\ a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2 + a_{23}\rho_3 + a_{24}\rho_4 = b_2, \\ a_{31}\rho_1 + a_{32}\rho_2 + a_{33}\rho_3 + a_{34}\rho_4 = b_3, \\ a_{41}\rho_1 + a_{42}\rho_2 + a_{43}\rho_3 + a_{44}\rho_4 = b_4. \end{array}\right\}$$

Обратно: координаты прообраза $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ через координаты образа $(x_1' : x_2' : x_3' : x_4')$ выражаются соотношениями:

$$\lambda x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2' & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_3' & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x_4' & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}, \quad \lambda x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1' & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x_2' & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_3' & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & x_4' & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}},$$

$$\lambda x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1' & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & x_2' & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x_3' & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & x_1' & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}, \quad \lambda x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}.$$

1542. $\lambda x_1' = \lambda_1 x_1$, $\lambda x_2' = \lambda_2 x_2$, $\lambda x_3' = \lambda_3 x_3$, $\lambda x_4' = \lambda_4 x_4$.

1543. $\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$
$\lambda x_3' = a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \quad \lambda x_4' = a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$

1544. $\lambda x_1' = \alpha x_1, \ \lambda x_2' = \alpha x_2, \ \lambda x_3' = x_3, \ \lambda x_4' = x_4.$

1545. $\lambda x_1' = a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \quad \lambda x_2' = a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$
$\lambda x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2, \quad \lambda x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2.$

1546. $\lambda x_1' = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \quad \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$
$\lambda x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4, \quad \lambda x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3.$

1547. $\lambda x_1' = x_2 + x_3 + x_4, \quad \lambda x_2' = x_1 + x_3 + x_4,$
$\lambda x_3' = x_1 + x_2 + x_4, \quad \lambda x_4' = x_1 + x_2 + x_3.$

1548. 1) $\lambda x_1' = a_{11}x_1$, $\lambda x_2' = a_{22}x_2$, $\lambda x_3' = a_{33}x_3 + a_{34}x_4$, $\lambda x_4' = a_{43}x_3 + a_{44}x_4$, где $(a_{33} - a_{44})^2 + 4a_{34}a_{43} < 0$. 2) На прямой A_1A_2 это преобразование порождает гиперболическое преобразование, которое будет инволюционным в случае $a_{11} + a_{22} = 0$. На прямой A_3A_4 это преобразование порождает эллиптическое преобразование; оно будет инволюционным в случае $a_{33} + a_{44} = 0$. **1549.** 1) $\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, $\lambda x_3' = a_{33}x_3 + a_{34}x_4$, $\lambda x_4' = a_{43}x_3 + a_{44}x_4$, где $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$, $(a_{33} - a_{44})^2 + 4a_{34}a_{43} < 0$. 2) Эллиптические преобразования. **1550.** 1) $\lambda x_1' = a_{11}x_1$, $\lambda x_2' = a_{22}x_2$, $\lambda x_3' = x_3$, $\lambda x_4' = x_4$. 2) Гиперболическая гомология с центром A_1 и осью A_3A_4. 3) На ребре A_3A_4 — тождественное преобразование. На остальных ребрах — гиперболическое проективное преобразование. **1551.** 1) $\lambda x_1' = a_{11}x_1$, $\lambda x_2' = a_{22}x_2$, $\lambda x_3' = a_{33}x_3 + a_{34}x_4$, $\lambda x_4' = a_{44}x_4$. 2) Гиперболическое преобразование, если $a_{33} \neq a_{44}$; параболическое преобразование, если $a_{33} = a_{44}$. **1552.** Гиперболическая гомология с центром A_3 и осью A_1A_2. **1553.** $\lambda x_1' = x_1 + \alpha x_4$, $\lambda x_2' = x_2$, $\lambda x_3' = x_3$, $\lambda x_4' = \beta x_4$.

1554. $\lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$, $\lambda x_2' = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$, $\lambda x_3' = a_{33}x_3$, $\lambda x_4' = a_{44}x_4$. **1555.** 1) $\lambda x_1' = x_2$, $\lambda x_2' = -x_1$, $\lambda x_3' = x_4$, $\lambda x_4' = -x_3$. 2) Инвариантных точек и плоскостей нет; инвариантные прямые A_1A_2 и A_3A_4. 3) Эллиптические инволюции. **1556.** 1) $\lambda x_1' = x_1$, $\lambda x_2' = x_2$, $\lambda x_3' = x_3$, $\lambda x_4' = kx_4$ (гиперболическая гомология проективного пространства). 2) Инвариантными плоскостями являются плоскость $A_1A_2A_3$ и связка плоскостей с центром A_4. Инвариантными прямыми являются все прямые, лежащие в плоскости $A_1A_2A_3$, и все прямые связки с центром A_4. 3) При условии $k = -1$ (гармоническая гомология пространства). 4) Гиперболические гомологии с центром A_4, осью которых являются прямые пересечения плоскости $A_1A_2A_3$ с плоскостью, проходящей через прямую A_4E. При $k = -1$ эти гомологии будут гармоническими. **1557.** 1) $\lambda x_1' = x_2$, $\lambda x_2' = x_1$, $\lambda x_3' = x_4$, $\lambda x_4' = x_3$. 2) Две прямые инвариантных точек: $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ (l_1); $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ (l_2). Инвариантные плоскости образуют два пучка плоскостей с осями l_1 и l_2. Инвариантные прямые: l_1 и l_2 и все прямые, пересекающие обе эти прямые (линейная конгруэнция). 3) Гиперболические инволюции с инвариантными точками: $(1:1:0:0)$, $(1:-1:0:0)$ на прямой A_1A_2 и $(0:0:1:1)$ и $(0:0:1:-1)$ на прямой A_3A_4. **1558.** 1) $\lambda x_1' = x_4$, $\lambda x_2' = x_1$, $\lambda x_3' = x_2$, $\lambda x_4' = x_3$. 2) Инвариантные точки $E = (1:1:1:1)$ и $E' = (1:-1:1:-1)$. Инвариантные плоскости $e = [1:1:1:1]$ и $e' = [1:-1:1:-1]$. Инвариантные прямые EE' и ee'. 3) Гиперболическая инволюция на прямой EE', эллиптическая инволюция на прямой ee'.

1561. 1) $kx'_1=\lambda_1x_1$, $kx'_2=\lambda_2x_2$, $kx'_3=\lambda_3x_3$, $kx'_4=\lambda_4x_4$;

2) $kx'_1=\lambda_1x_1$, $kx'_2=\lambda_2x_2$, $kx'_3=\alpha x_3-\beta x_4$, $kx'_4=\beta x_3+\alpha x_4$;

3) $kx'_1=\alpha x_1-\beta x_2$, $kx'_2=\beta x_1+\alpha x_2$, $kx'_3=\gamma x_3-\delta x_4$, $kx'_4=\delta x_3+\gamma x_4$;

4) $kx'_1=\lambda_1x_1$, $kx'_2=\lambda_2x_2$, $kx'_3=sx_3+x_4$, $kx'_4=sx_4$;

5) $kx'_1=\lambda_1x_1$, $kx'_2=\lambda_2x_2$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=sx_4$;

6) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=\alpha x_3-\beta x_4$, $kx'_4=\beta x_3+\alpha x_4$;

7) $kx'_1=sx_1$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=\alpha x_3-\beta x_4$, $kx'_4=\beta x_3+\alpha x_4$;

8) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=tx_3+x_4$, $kx'_4=tx_4$;

9) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=tx_3$, $kx'_4=tx_4$;

10) $kx'_1=sx_1$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=tx_3$, $kx'_4=tx_4$;

11) $kx'_1=\alpha x_1-\beta x_2+x_3$, $kx'_2=\beta x_1+\alpha x_2+x_4$, $kx'_3=\alpha x_3-\beta x_4$, $kx'_4=\beta x_3+\alpha x_4$;

12) $kx'_1=\alpha x_1-\beta x_2$, $kx'_2=\beta x_1+\alpha x_2$, $kx'_3=\alpha x_3-\beta x_4$, $kx'_4=\beta x_3+\alpha x_4$;

13) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2+x_3$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=\lambda_4x_4$;

14) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=\lambda_4x_4$;

15) $kx'_1=sx_1$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=\lambda_4x_4$;

16) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2+x_3$, $kx'_3=sx_3+x_4$, $kx'_4=sx_4$;

17) а) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2+x_3$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=sx_4$, б) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=sx_3+x_4$, $kx'_4=sx_4$;

18) $kx'_1=sx_1+x_2$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=sx_4$;

19) $kx'_1=sx_1$, $kx'_2=sx_2$, $kx'_3=sx_3$, $kx'_4=sx_4$.

1562. 1) Инвариантные точки: A_1, A_2, A_3, A_4; инвариантные плоскости: $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3$; инвариантные прямые: A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4; 2) инвариантные точки A_1, A_2; инвариантные плоскости: $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$; инвариантные прямые: A_1A_2, A_3A_4; 3) инвариантных точек и плоскостей нет; инвариантные прямые: A_1A_2 и A_3A_4; 4) инвариантные точки: A_1, A_2, A_3; инвариантные плоскости: $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_3$; инвариантные прямые: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, A_3A_4; 5) инвариантные точки: A_1, A_2 и все точки прямой A_3A_4; инвариантные плоскости: $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ и все плоскости пучка с осью A_1A_2; инвариантные прямые: A_1A_2, A_3A_4 и любые прямые двух пучков с центрами A_1 и A_2, лежащих соответственно в плоскостях $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$; 6) инвариантная точка A_1; инвариантная плоскость $A_1A_3A_4$; инвариантные прямые: A_1A_2 и A_3A_4; 7) инвариантные точки: все точки прямой A_1A_2; инвариантные плоскости: все плоскости пучка с осью A_3A_4; инвариантные прямые: A_1A_2 и A_3A_4; 8) инвариантные точки: A_1, A_3; инвариантные плоскости: $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$; инвариантная прямая A_1A_3; 9) инвариантные точки: A_1 и все точки прямой A_3A_4; инвариантные плоскости: $A_1A_3A_4$ и все плоскости пучка с осью A_1A_2; инвариантные прямые: A_1A_2, A_3A_4 и любая прямая пучка с центром A_1 в плоскости $A_1A_3A_4$; 10) инвариантные точки: все точки прямых A_1A_2 и A_3A_4; инвариантные плоскости: все плоскости двух пучков с осями A_1A_2 и A_3A_4; инвариантные прямые: A_1A_2, A_3A_4 и все прямые, пересекающие прямые A_1A_2 и A_3A_4 (линейная конгруэнция); 11) инвариантных точек и инвариантных плоскостей нет; инвариантная прямая A_1A_2;

12) инвариантных точек и инвариантных плоскостей нет; инвариантные прямые: A_1A_2 и A_3A_4; 13) инвариантные точки: A_1 и A_2; инвариантные плоскости: $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$; инвариантные прямые: A_1A_2 и A_1A_4; 14) инвариантные точки: A_1, A_3, A_4 и все точки прямой A_2A_3; инвариантные плоскости: $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$; инвариантные прямые: A_1A_4 и все прямые двух пучков с центрами A_1 и A_2, лежащих соответственно в плоскостях $A_1A_2A_3$ и $A_4A_2A_3$; 15) инвариантные точки: A_4 и все точки плоскости $A_1A_2A_3$; инвариантные плоскости: $A_1A_2A_3$ и все плоскости связки с центром A_4; инвариантные прямые: все прямые плоскости $A_1A_2A_3$ и все прямые связки прямых с центром A_4; 16) инвариантная точка A_1; инвариантная плоскость $A_1A_2A_3$; инвариантная прямая A_1A_2; 17) а) инвариантные точки: A_1 и все точки прямой A_3A_4; инвариантные плоскости: $A_1A_3A_4$ и все плоскости пучка с осью A_1A_2; инвариантные прямые: A_3A_4 и все прямые пучка с центром A_1, лежащего в плоскости $A_1A_3A_4$; б) инвариантные точки: все точки прямой A_1A_3; инвариантные плоскости: все плоскости пучка с осью A_2A_4; инвариантные прямые: A_1A_3 и A_2A_4; 18) инвариантные точки: A_1 и все точки плоскости $A_2A_3A_4$; инвариантные плоскости: $A_2A_3A_4$ и все плоскости связки с центром A_1; инвариантные прямые: все прямые, лежащие в плоскости $A_2A_3A_4$, и все прямые связки прямых с центром A_1; 19) тождественное преобразование.

1565.
$$\begin{aligned}\lambda u_1 &= a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\ \lambda u_2 &= -a_{12}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\ \lambda u_3 &= -a_{13}x_1 - a_{23}x_2 + a_{34}x_4,\\ \lambda u_4 &= -a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3.\end{aligned}$$

1568. 1) $y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) + y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4) + y_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4) = 0$;

2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1569. 1) Двуполостный гиперболоид дополняется несобственными точками всех образующих его асимптотического конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, т. е. точками $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ несобственной овальной линии второго порядка

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \qquad x_4 = 0;$$

2) эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ дополняется одной несобственной точкой $(0 : 0 : 1 : 0)$ его диаметров;

3) однополостный гиперболоид дополняется несобственными точками всех образующих его асимптотического конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, т. е. точками $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ несобственной овальной линии второго порядка $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0,\qquad x_4=0$;

4) гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ дополняется всеми несобственными точками пары плоскостей $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0$, т. е. точками пары несобственных прямых $\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=0,\qquad x_4=0$;

5) конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ дополняется несобственными точками несобственной овальной линии второго порядка $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$, $x_4=0$;

6) эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ дополняется одной несобственной точкой $(0:0:1:0)$ его образующих;

7) гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ дополняется всеми несобственными точками пары плоскостей $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, т. е. точками пары несобственных прямых $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=0,\qquad x_4=0$;

8) параболический цилиндр $y^2=2px$ дополняется всеми несобственными точками его диаметральных плоскостей $y=b$, т. е. точками несобственной прямой $x_2=0$, $x_4=0$.

1570. 1) $\lambda x_1'=x_1$, $\lambda x_2'=x_2$, $\lambda x_3'=x_4$, $\lambda x_4'=x_3$; собственные точки, не лежащие в плоскости Oxy, преобразуются так: $x'=\frac{x}{z}$, $y'=\frac{y}{z}$, $z'=\frac{1}{z}$; собственные точки $(x, y, 0)$, лежащие в плоскости Oxy, переходят в несобственные точки $(x:y:1:0)$; 2) $\lambda x_1'=x_1$, $\lambda x_2'=x_2$, $\lambda x_3'=\frac{-x_3+x_4}{2}$, $\lambda x_4'=x_3+x_4$; собственные точки, не лежащие в плоскости $z+1=0$, преобразуются так: $x'=\frac{x}{1+z}$, $y'=\frac{y}{1+z}$, $z'=\frac{1-z}{2(1+z)}$; собственные точки $(x, y, -1)$, лежащие в плоскости $z+1=0$, переходят в несобственные точки $(x:y:1:0)$. **1571.** $\lambda x_1'=x_1$, $\lambda x_2'=x_3$, $\lambda x_3'=x_2+x_4$, $\lambda x_4'=\frac{1}{2}(-x_2+x_4)$. Преобразование собственных точек:

$x'=\frac{2x}{1-y}$, $y'=\frac{2z}{1-y}$, $z'=2\frac{1+y}{1-y}$. **1572.** 1) Действительная овальная поверхность второго порядка; 2) действительная невырождающаяся линейчатая поверхность второго порядка; 3) действительный конус второго порядка; 4) пара плоскостей $2x_1-3x_2+x_4=0$, $x_1+x_2+x_3-x_4=0$.

1573. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} < 0.$$

1575. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1576. $(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0)\,x_2+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0)\,x_3+(a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0)\,x_4=0$.

1579. $F(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)-P^2=0$, где $P=(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0)\,x_2+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0)\,x_3+(a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0)\,x_4$. 2) $P=0$ или подробнее: $(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0)\,x_2+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0)\,x_3+(a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0)\,x_4=0$. Плоскость $P=0$ является полярой точки M_0 относительно данной поверхности. **1580.** $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{24}x_2x_4=0$. **1581.** Указание. Отнести поверхность к автополярному тетраэдру $A_1A_2A_3A_4$, две вершины которого $A_1=(1:0:0:0)$, $A_2=(0:1:0:0)$ совпадают с вершинами конусов, описанных около поверхности. Пусть $\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0$ — уравнение данной поверхности. Уравнения конусов: $\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0$, $\lambda_1x_1^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0$. **1582.** 1) $x_1x_2-x_3x_4=0$; 2) $x_1=ux_3$, $ux_2=x_4$; $x_1=vx_4$, $vx_2=x_3$. **1583.** $F-\lambda x_1^2=0$. **1584.** $F-\lambda x_1x_2=0$.

1586.
$$\begin{aligned}
\lambda x_1&=a^{11}u_1+a^{12}u_2+a^{13}u_3+a^{14}u_4,\\
\lambda x_2&=a^{21}u_1+a^{22}u_2+a^{23}u_3+a^{24}u_4,\\
\lambda x_3&=a^{31}u_1+a^{32}u_2+a^{33}u_3+a^{34}u_4,\\
\lambda x_4&=a^{41}u_1+a^{42}u_2+a^{43}u_3+a^{44}u_4,
\end{aligned}$$

где (a^{ij}) — матрица, обратная для матрицы (a_{ij}), или

$$\lambda x_1=\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ u_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \lambda x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & u_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & u_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & u_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\lambda x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & u_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & u_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & u_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \lambda x_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_4 \end{vmatrix}.$$

1587. 1) $(u_1 : u_2 : u_3 : -u_4)$; 2) $(u_1 : u_2 : -u_3 : u_4)$.

1588. 1)
$$\begin{gathered}
y_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)+\\
+y_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4)+\\
+y_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4)+\\
+y_4(a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4)\equiv\\
\equiv x_1(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4)+\\
+x_2(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4)+\\
+x_3(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4)+\\
+x_4(a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4)\equiv\\
\equiv a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3+a_{44}x_4y_4+\\
+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+a_{13}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{14}(x_1y_4+x_4y_1)+\\
+a_{23}(x_2y_3+x_3y_2)+a_{24}(x_2y_4+x_4y_2)+a_{34}(x_3y_4+x_4y_3)=0;
\end{gathered}$$

2)
$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4\\
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0
\end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{gathered}
v_1(A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3+A_{14}u_4)+v_2(A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3+A_{24}u_4)+\\
+v_3(A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3+A_{34}u_4)+v_4(A_{41}u_1+A_{42}u_2+A_{43}u_3+A_{44}u_4)\equiv\\
\equiv u_1(A_{11}v_1+A_{12}v_2+A_{13}v_3+A_{14}v_4)+u_2(A_{21}v_1+A_{22}v_2+A_{23}v_3+A_{24}v_4)+\\
+u_3(A_{31}v_1+A_{32}v_2+A_{33}v_3+A_{34}v_4)+u_4(A_{41}v_1+A_{42}v_2+A_{43}v_3+A_{44}v_4)\equiv\\
\equiv A_{11}u_1v_1+A_{22}u_2v_2+A_{33}u_3v_3+A_{44}u_4v_4+A_{12}(u_1v_2+u_2v_1)+\\
+A_{13}(u_1v_3+u_3v_1)+A_{14}(u_1v_4+u_4v_1)+A_{23}(u_2v_3+u_3v_2)+\\
+A_{24}(u_2v_4+u_4v_2)+A_{34}(u_3v_4+u_4v_3)=0,
\end{gathered}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}.$$

1591. 1) Ребро A_1A_4 пересекает поверхность S в точках $(1:0:0:1)$ и $(1:0:0:-1)$, уравнения касательных плоскостей α_1, α_2 к поверхности S в этих точках: $x_1-x_4=0$, $x_1+x_4=0$; ребро A_2A_4 пересекает поверхность S в точках $(0:1:0:1)$ и $(0:1:0:-1)$, уравнения касательных плоскостей β_1 и β_2 к поверхности S в этих точках: $x_2-x_4=0$, $x_2+x_4=0$; ребро A_3A_4 пересекает поверхность S в точках $(0:0:1:1)$ и $(0:0:1:-1)$, уравнения касательных плоскостей γ_1 и γ_2 к поверхности S в этих точках: $x_3-x_4=0$, $x_3+x_4=0$. 2) Через единичную точку E проходят плоскости α_1, β_1, γ_1, т. е. плоскости $x_1-x_4=0$, $x_2-x_4=0$, $x_3-x_4=0$. 3) $(\pm 1:\pm 1:\pm 1:\pm 1)$ с любым набором знаков $+$ и $-$. **1592.** 1) Ребро A_1A_4 пересекает поверхность S в точках $(1:0:0:1)$ и $(1:0:0:-1)$, уравнения касательных плоскостей α_1, α_2 к поверхности S в этих точках: $x_1-x_4=0$, $x_1+x_4=0$; ребро A_1A_3

пересекает поверхность S в точках $(1:0:1:0)$ и $(1:0:-1:0)$, уравнения касательных плоскостей β_1, β_2 к поверхности S в этих точках: $x_1-x_3=0$, $x_1+x_3=0$; ребро A_2A_3 пересекает поверхность S в точках $(0:1:1:0)$ и $(0:1:-1:0)$, уравнения касательных плоскостей γ_1, γ_2 к поверхности S в этих точках: $x_2-x_3=0$, $x_2+x_3=0$; ребро A_2A_4 пересекает поверхность S в точках $(0:1:0:1)$ и $(0:1:0:-1)$, уравнения касательных плоскостей δ_1, δ_2 к поверхности S в этих точках: $x_2-x_4=0$, $x_2+x_4=0$. 2) Через единичную точку E проходят четыре плоскости α_1, β_1, γ_1, δ_1, т. е. $x_1-x_3=0$, $x_1-x_4=0$, $x_2-x_3=0$, $x_2-x_4=0$. 3) $(\pm 1:\pm 1:\pm 1:\pm 1)$ с любым набором знаков $+$, $-$. **1593.** 1) Уравнения касательных плоскостей α_1, α_2, проходящих через ребро $A_1A_2: x_3-x_4=0$, $x_3+x_4=0$, точки касания $(0:0:1:1)$ и $(0:0:1:-1)$; уравнения касательных плоскостей β_1, β_2, проходящих через ребро A_2A_3: $x_1-x_4=0$, $x_1+x_4=0$, точки касания $(0:0:1:1)$ и $(0:0:1:-1)$; уравнения касательных плоскостей γ_1, γ_2, проходящих через ребро A_3A_1: $x_2-x_4=0$, $x_2+x_4=0$, точки касания $(0:1:0:1)$ и $(0:1:0:-1)$. 2) Плоскости α, β, γ (по одной плоскости из каждой пары $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$) пересекаются в восьми точках $(\pm 1:\pm 1:\pm 1:\pm 1)$ с любым набором знаков $+$, $-$. **1594.** 1) Уравнения касательных плоскостей α_1, α_2, проходящих через ребро A_1A_3: $x_2-x_4=0$, $x_2+x_4=0$, точки касания $(0:1:0:1)$ и $(0:1:0:-1)$; уравнения касательных плоскостей β_1, β_2, проходящих через ребро A_1A_4: $x_2-x_3=0$, $x_2+x_3=0$, точки касания $(0:1:1:0)$ и $(0:1:-1:0)$; уравнения касательных плоскостей γ_1, γ_2, проходящих через ребро A_2A_3: $x_1-x_4=0$, $x_1+x_4=0$, точки касания $(1:0:0:1)$ и $(1:0:0:-1)$; уравнения касательных плоскостей δ_1, δ_2, проходящих через ребро A_2A_4: $x_1-x_3=0$, $x_1+x_3=0$, точки касания $(1:0:1:0)$ и $(1:0:-1:0)$. 2) Плоскости α, β, γ, δ (по одной плоскости из каждой пары α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2) пересекаются в восьми точках $(\pm 1:\pm 1:\pm 1:\pm 1)$ с любым набором знаков $+$, $-$. **1595.** Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы: $3\boldsymbol{a}_1-5\boldsymbol{a}_2+7\boldsymbol{a}_3=0$. **1596.** Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно независимы, $\boldsymbol{a}_3=\frac{7}{5}\boldsymbol{a}_1-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4=\frac{4}{5}\boldsymbol{a}_1-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_2$. Указание. Воспользоваться методом Гаусса. **1597.** Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ линейно независимы, $\boldsymbol{a}_3=\frac{3}{5}\boldsymbol{a}_1-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}_2$. **1598.** Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно независимы, $\boldsymbol{a}_4=2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3$. **1599.** Новый базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{e}_4=-\frac{1}{8}\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_3$. **1600.** Векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{b}_n$ линейно независимы. **1601.** $\boldsymbol{y}=\{2, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{z}=\{-1, 1, 3, 5\}$. **1602.** Базис суммы мы получим, присоединяя к системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p$ последовательно те из векторов системы $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_q$, которые не являются линейными комбинациями прежде взятых векторов. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p$; $\boldsymbol{b}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_r}$ — базис суммы подпространств A и B. Если $r=q$, то V есть прямая сумма подпространств A и B. Предположим, что $r<q$, и пусть $\boldsymbol{b}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{j_{q-r}}$ — те из векторов $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_q$, которые не вошли в базис суммы подпространств A и B. Тогда $\boldsymbol{b}_{j_k}=$

$=\alpha_1^k a_1+\ldots+\alpha_p^k a_p+\beta_{i_1}^k b_{i_1}+\ldots+\beta_{i_r}^k b_{i_r}$, $k=1, \ldots, q-r$, что можно переписать в виде

$$\alpha_1^k a_1+\ldots+\alpha_p^k a_p=b_{j_k}-\beta_{i_1}^k b_{i_1}-\ldots-\beta_{i_r}^k b_{i_r}=c_k,$$

$k=1, 2, \ldots, q-r$. Векторы $c_1, \ldots, c_{q-r}$ составляют базис пересечения подпространств A и B. **1603.** Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_1; базис пересечения: $c_1=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2=\{1, 2, 2, 1\}$, $c_2=2a_1+2a_3=b_1+b_3=\{2, 2, 2, 2\}$. **1604.** Базис суммы: a_1, a_2, b_1; базис пересечения: $c=a_1+a_2=b_1+b_2=\{2, 3, 1, 1\}$. **1605.** Базис суммы: $a_1=\{1, 2, 0, 1\}$, $a_2=\{1, 1, 1, 0\}$, $b_1=\{1, 0, 1, 0\}$; базис пересечения: $c=a_1+a_2=\{2, 3, 1, 1\}$. **1606.** Базис суммы: $a_1=\{1, 1, -1, -1\}$, $a_2=\{1, -1, 1, -1\}$, $a_3=\{1, -1, -1, 1\}$, $b_1=\{0, 0, 1, 1\}$; базис пересечения:

$$c_1=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{4}a_2-\frac{1}{4}a_3=-\frac{3}{2}b_1+b_2=\left\{0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\},$$

$$c_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_2+\frac{1}{4}a_3=-\frac{3}{2}b_1+b_3=\left\{1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Указание $b_2=\{0, 1, 1, 1\}$, $b_3=\{1, 0, 1, 1\}$.

1607. $y=\{5, 0, 0, 0\}$, $z=\{-4, 2, 3, 4\}$.

1608. $y=\left\{-4, -2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $z=\left\{5, 4, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

1610. Указание. Необходимость условия следует из существования невырожденной квадратной матрицы C порядка k такой, что $B=CA$. Достаточность условий вытекает из того, что подпространство с базисом $a_1, \ldots, a_k$ может быть задано системой $n-k$ линейно независимых уравнений, левые части которых суть миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix},$$

получающиеся окаймлением отличного от нуля минора матрицы A. **1612.** $x_1=-1+3t_1+2t_2$, $x_2=1-2t_1+t_2$, $x_3=3t_1+7t_2$, $x_4=1+3t_1+5t_2$, $x_5=5-5t_1-4t_2$; $17x_1+15x_2-7x_3+2=0$, $13x_1+9x_2-7x_4+11=0$, $13x_1+2x_2+7x_5-24=0$. **1613.** $x_1=-9+t_2$, $x_2=8+\frac{1}{3}t_1-2t_2-\frac{2}{3}t_3$, $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, $x_5=t_3$. **1614.** $3x_1-4x_2+x_3-2x_4+1=0$. **1615.** Параметрические уравнения: $x_1=t_2$, $x_2=2+t_1$, $x_3=3+t_1$, $x_4=3+t_2$; общие уравнения: $x_1-x_4+3=0$, $x_2-x_3+1=0$. **1616.** Прямая принадлежит гиперплоскости. **1617.** Прямая параллельна плоскости. **1618.** $x_1+x_2+3x_3-3x_4+2=0$. **1619.** $x_1-x_2-x_3+x_4=0$, $x_1-x_2-x_3+x_4+1=0$. **1621.** 1) Плоскости α и β абсолютно скрещиваются, т. е. не имеют общих точек и нет прямых, параллельных обеим плоскостям; плоскостью минимальной размерности, содержащей α и β, является все (5-мерное) пространство; 2) плоскости α и β имеют единственную общую точку (1, 1, 0, 0, 0); плоскость минимальной размерности, содержащая обе плоскости α и β, определяется точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ и имеет размерность 4; 3) плоскости α и β не имеют общих точек и не параллельны; они параллельны прямым с направляющим вектором $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1=\{1, 1, 0, 0, 0\}$ и лежат в четырехмерной плоскости, определяемой точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\overrightarrow{AB}$; 4) плоскости α и β пересекаются и лежат в трехмерной плоскости, определяемой точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$; 5) плоскости α и β параллельны и лежат в трехмерной плоскости, определяемой точкой A и векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\overrightarrow{AB}$; 6) плоскости α и β совпадают. **1622.** 1) Если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\overrightarrow{AB}$ линейно независимы, то плоскости абсолютно скрещиваются, т. е. они не имеют общих точек и нет прямых, параллельных одновременно обеим плоскостям; минимальная размерность плоскости, содержащей обе данные плоскости, равна 5; 2) если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно независимы, а вектор $\overrightarrow{AB}$ является их линейной комбинацией, то плоскости имеют единственную общую точку; минимальная размерность плоскости, содержащей обе данные плоскости, равна 4; 3) если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно зависимы, но какие-нибудь три из них линейно независимы и вектор $\overrightarrow{AB}$ не является их линейной комбинацией, то плоскости не имеют общих точек и непараллельны, но существуют прямые, параллельные обеим плоскостям; 4) если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно зависимы, но какие-нибудь три из них линейно независимы и вектор $\overrightarrow{AB}$ является их линейной комбинацией, то плоскости пересекаются по прямой и существует трехмерная плоскость, содержащая обе данные плоскости; 5) если каждые три из четырех векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно зависимы, но вектор $\overrightarrow{AB}$ не является их линейной комбинацией, то плоскости параллельны и существует плоскость размерности 3, содержащая обе плоскости; 6) если каждые три из четырех векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно зависимы и вектор $\overrightarrow{AB}$ является их линейной комбинацией, то плоскости совпадают. **1623.** 1) При $R=6$ плоскости не имеют общих точек и нет прямых, параллельных обеим плоскостям (плоскости абсолютно скрещиваются); 2) при $r=R=5$ плоскости имеют единственную общую точку; 3) при $r=4$, $R=5$ плоскости не имеют общих точек и не параллельны, но существуют прямые, параллельные обеим плоскостям; 4) при $r=R=4$ плоскости имеют общую прямую и лежат в трехмерной плоскости; 5) при $r=3$, $R=4$ плоскости параллельны и лежат в трехмерной плоскости; 6) при $r=R=3$ плоскости совпадают. **1628.** Если плоскости π_1 и π_2 параллельны, то π совпадает с π_1; если же плоскости π_1 и π_2 скрещиваются и плоскость π_1 определяется точкой A_1 и подпространством V_1, а плоскость π_2 — точкой A_2 и подпространством V_2, то плоскость π определяется точкой A_1 и подпространством V_1+V_2. **1630.** 1) $\frac{1}{n}$. **1632.** 2) $\frac{n-k}{k+1}$. **1633.** $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$, $\left\{\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}\right\}$, $\left\{\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right\}$,

$\left\{\frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right\}$. **1634.** $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right\}$, $\left\{-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{2}{\sqrt{42}}, \frac{6}{\sqrt{42}}, 0\right\}$, $\{0, 0, 0, 0, 1\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right\}$. **1635.** $\boldsymbol{y}=\left\{\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{23}{5}, \frac{27}{5}\right\}$, $\boldsymbol{z}=\left\{\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$. **1640.** $\{1, -1, -1, 5\}$. **1641.** $\{5, -5, -2, -1\}$.

1642. 1) $\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{s}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}_i$; 2) $\boldsymbol{y}=\eta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\eta_s\boldsymbol{b}_s$, где $\eta_1, \ldots, \eta_s$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)\,\eta_1+(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)\,\eta_2+\ldots+(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_s)\,\eta_s=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}),\\ (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1)\,\eta_1+(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)\,\eta_2+\ldots+(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_s)\,\eta_s=(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_1)\,\eta_1+(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_2)\,\eta_2+\ldots+(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_s)\,\eta_s=(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{x}).\end{array}\right\}$$

1643. 2) $\varphi=\arccos\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}$. **1644.** $\frac{\pi}{3}$. **1645.** $\frac{\pi}{3}$. **1646.** 2) $\frac{\pi}{4}$.

1647. Решение. Пусть A и B — два подпространства евклидова пространства, пересечение которых есть подпространство C. Если $C\neq 0$, то углом между подпространствами A и B называется угол между подпространствами A' и B', лежащими соответственно в A и B и являющимися ортогональными дополнениями к C. Если пересечение подпространств A и B есть нуль-вектор, то углом между A и B называется наименьший угол между вектором одного подпространства и его ортогональной проекцией на другое. Пусть A и B — подпространства евклидова пространства, пересечение которых есть 0; $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ — их ортонормальные базисы. Пусть $\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\xi_r\boldsymbol{a}_r$ — вектор подпространства A, $\boldsymbol{y}=\eta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\eta_s\boldsymbol{b}_s$ — ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство B. Тогда

$$\begin{array}{l}\eta_1=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1)\,\xi_1+\ldots+(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_r)\,\xi_r,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_s=(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{a}_1)\,\xi_1+\ldots+(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{a}_r)\,\xi_r.\end{array}$$

Полагая $\alpha_{ij}=(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)$, $i=1, 2, \ldots, r$; $j=1, 2, \ldots, s$, будем иметь

$$\begin{array}{l}\eta_1=\alpha_{11}\xi_1+\ldots+\alpha_{r1}\xi_r,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_s=\alpha_{1s}\xi_1+\ldots+\alpha_{rs}\xi_r,\end{array}$$

$$|\boldsymbol{y}|^2=\eta_1^2+\ldots+\eta_s^2=(\alpha_{11}\xi_1+\ldots+\alpha_{r1}\xi_r)^2+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_{1s}\xi_1+\ldots+\alpha_{rs}\xi_r)^2=q(\boldsymbol{x}).$$

Если φ — угол между вектором x подпространства A и его ортогональной проекцией y на подпространство B, то $\cos\varphi = \frac{|y|}{|x|}$. При $|x| = 1$ имеем $\cos\varphi = |y| = \sqrt{q(x)}$. Но $\max q(x)$ при $|x| = 1$ есть наибольшее характеристическое число матрицы квадратичной функции $q(x)$. Пусть $\max q(x) = \lambda_0$; тогда угол между подпространствами A и B равен $\arccos\sqrt{\lambda_0}$. **1648.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\arccos\frac{1}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$. **1649.** $\arccos\frac{2}{3}$. **1651.** Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица, где $a_{ij} = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_j)$, A^* — матрица, транспонированная к матрице A; тогда искомые векторы — собственные векторы оператора с матрицей A^*A. **1653.** $a\sqrt{n}$. **1654.** $\frac{1}{n}$. **1655.** $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4$, $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$, $x_1 = -x_2 = -x_3 = x_4$; $\frac{\pi}{3}$. **1656.** При нечетном n перпендикулярных диагоналей нет; при $n = 2k$ искомое число равно $\frac{1}{2}C_n^k = C_{2k-1}^{k-1}$. **1657.** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$. **1658.** $\arccos\sqrt{\frac{k}{n}}$. **1659.** 2) $\frac{a}{\sqrt{n}}$. **1662.** $\sqrt{14}$; (2, 1, 2, 9). **1663.** 5; (2, —2, —3, 2). **1664.** Плоскость и прямая абсолютно скрещиваются, уравнения общего перпендикуляра $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = \frac{3}{2} + t$, $x_4 = \frac{3}{2} + t$; длина общего перпендикуляра равна $\frac{1}{2}$. **1665.** Прямая параллельна плоскости; расстояние между ними равно 5. **1666.** Плоскости не имеют общих точек и параллельны одному и тому же направлению, определяемому вектором $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_2B_2} = \{1, 2, 2, 2\}$; расстояние между ними равно 3. **1667.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1668. $\dfrac{|a_1x_1^0 + \ldots + a_nx_n^0 + b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$. **166 .** $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n^2}$.

1670.

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2 - \frac{[\lambda_1(b_1 - a_1) + \ldots + \lambda_n(b_n - a_n)]^2}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}}.$$

1671.

$$h = \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{vmatrix}} : \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{n-1}) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1}) \end{vmatrix}}.$$

1673. $h = \sqrt{\dfrac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}$. **1674.** $\arccos\frac{2}{3}$.

1675. $x_1=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'+\frac{1}{2}$,

$$x_2=-\frac{1}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'+\frac{1}{2},$$

$$x_3=-\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'+\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'+\frac{1}{2},$$

$$x_4=-\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'+\frac{1}{2}.$$

1680. Указание. Если размерность пространства больше 1, взять два линейно независимых вектора и применить оператор A как к этим векторам, так и к их сумме. **1681.** $C=BA^{-1}$, где A и B — матрицы, столбцы которых состоят из координат векторов $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. **1682.** $x_1'=2x_1-11x_2+6x_3$, $x_2'=x_1-7x_2+4x_3$, $x_3'=2x_1-x_2$, $x_4'=2x_4$.

1683. $x_1'=15x_1-23x_2+10x_3$, $x_2'=10x_1-18x_2+10x_3$, $x_3'=2x_1-7x_2+7x_3$, $x_4'=-x_4$. **1684.** 1) e_1; 2) e_1, e_2; 3) e_1, e_2, e_3; 4) e_1, e_2, e_3, e_4. **1690.** Подпространство с базисом $e_1=\{1, 0, 0, 0\}$, $e_2=\{0, 1, 0, 0\}$. **1692.** Указание. Если k — размерность инвариантного подпространства, выбрать первые k базисных векторов, принадлежащих этому подпространству. **1694.** Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора A, то инвариантными подпространствам будут нулевое подпространство, все пространство и каждое подпространство, базисом которого является любая подсистема множества векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Число инвариантных подпространств равно 2^n.

1698. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1699. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства, то инвариантными подпространствами будут линейные оболочки систем базисных векторов e_1; e_1, e_2; $\ldots$; $e_1, e_2, \ldots, e_n$. **1701.** Указание. Векторы $x, Ax, \ldots, A^kx$ линейно зависимы. **1702.** Указание. Если $\lambda=\mu^2$ — собственное значение оператора A^2, то $A^2-\lambda E=(A+\mu E)(A-\mu E)$. **1703.** Указание. Если все характеристические числа линейного оператора принадлежат основному полю, то каждое инвариантное подпространство содержит одномерное инвариантное подпространство. **1704.** Указание. Пусть x — собственный вектор оператора AB, соответствующий собственному значению $\lambda \neq 0$. Тогда вектор $Bx \neq 0$ будет собственным вектором оператора BA с тем же собственным значением λ. **1705.** Указание. Первый вектор e_1; e_n — прообраз вектора e_1 при преобразовании $(A-\alpha E)^{n-1}$; $e_{n-1}=(A-\alpha E)e_n, \ldots, e_2=(A-\alpha E)^{n-2}e_n$.

1706. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. **1707.** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1708. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **1709.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1721. Указание. Пусть $y = Ax + b$ — изометрическое преобразование точечного евклидова пространства E, A — изометрическое преобразование векторного пространства V, соответствующего точечному пространству E, $V = V_1 + V_2$ — представление пространства V в виде ортогональной суммы собственного подпространства V_1, соответствующего собственному значению $+1$, и его ортогонального дополнения V_2. Вектор $b = b_1 + b_2$ — представление вектора переноса в виде суммы векторов b_1 и b_2, принадлежащих соответственно подпространствам V_1 и V_2. Если преобразование $y = Ax + b$ не имеет неподвижной точки, то оно обладает инвариантной прямой с направляющим вектором b_1, проходящей через неподвижную точку преобразования $y = Ax + b_2$. **1729.** Функция $b(x, y)$ должна быть кососимметрической. **1732.** $x_1'y_2' - x_2'y_1' + x_3'y_4' - x_4'y_3'$; $\{1, 0, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0, 0\}$, $\{1, -1, 0, 0\}$, $\{1, -1, 0, 1\}$. **1733.** Указание. Представить билинейную функцию в виде суммы симметрической и кососимметрической билинейных функций и перейти к базису, в котором симметрическая функция имеет канонический вид. **1737.** $a > 0$, $a - b > 0$, $a + (n-1)b > 0$.

1742. 1) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right\}$, $\left\{\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right\}$; $-2x_1'^2 - 2x_2'^2 + 7x_3'^2$;

2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right\}$ $\left\{\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{3}{\sqrt{12}}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 3x_4'^2$;

3) $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, $2x_1'^2 + 4x_2'^2 - 2x_3'^2 - 4x_4'^2$;

4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$; $2x_1'^2+8x_2'^2+12x_3'^2-4x_4'^2$.

1745. Искомые значения параметра t находятся из уравнения $Q(u)t^2+2[B(u, x_0)+L(u)]t+c'=0$, где $c'=Q(x_0)+2L(x_0)+c$, а $B(x, y)$ — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции $Q(x)$. **1746.** $B(u, x)+L(u)=0$, где $B(x, y)$ — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции $Q(x)$. **1747.** $B(x_0, x)+L(x)+L(x_0)+c=0$, где $B(x, y)$ — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции $Q(x)$. **1752.** (I) $\min(k, n-k)$; (II) $\min(k-1, n-k)$; (III) $\min(k, n-k-1)$. **1759.** Указание. Вектор b не принадлежит области значений оператора A и может быть представлен в виде суммы $b=b'+b''$, где b', а следовательно, и $-b'$, принадлежат области значений оператора A, а $b''\neq 0$ — вектор, ортогональный к этому подпространству. Следовательно, существует вектор x_0^* такой, что $Ax_0^*+b'=0$. Вектор x_0^* определяется из соотношения $A^2x_0^*+Ab=0$; тогда $b'=-Ax_0^*$, $b''=b-b'=b+Ax_0^*$. Искомый вектор x_0 может быть представлен в виде $x_0^*+b''t$, где t определяется соотношением:

$$t=-\frac{(b+b'', x_0^*)+c}{2(b'', b'')}.$$

1760. Указание. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — отличные от нуля собственные значения оператора A с учетом их кратности; $e_1', \ldots, e_r'$ — ортонормальная система собственных векторов этого оператора. (I) Если $R-r\leqslant 1$, то $e_{r+1}', \ldots, e_n'$ — векторы, дополняющие систему $e_1', \ldots, e_r'$ до ортонормального базиса. Координаты $x_1^0, \ldots, x_n^0$ находятся из уравнений для определения центра. Свободный член преобразованного уравнения $c'=b_1x_1^0+\ldots+b_nx_n^0+c$. (II) Если $R-r=2$, то вектор $b=\{b_1, \ldots, b_n\}$ представляется в виде $b=b'+b''$, где b' приналежит области значений оператора с матрицей A, а $b''\neq 0$ принадлежит ядру этого оператора; тогда $\mu=|b''|$ и $e_{r+1}'=\frac{b''}{|b''|}$. Векторы $e_{r+2}', \ldots, e_n'$ находятся как векторы, дополняющие систему $e_1', \ldots, e_r', e_{r+1}'$ до ортонормального базиса. Радиус-вектор x_0 начала O' определяется следующим образом: $x_0=x_0^*+tb''$, где x_0^* находится из уравнения $A^2x_0^*+Ab=0$, а t определяется из равенства

$$t=-\frac{(b+b'', x_0^*)+c}{2(b'', b'')}.$$

1761. См. предыдущую задачу.

1763. 1) $-\frac{x_1^2}{9}-\frac{x_2^2}{9}-\frac{x_3^2}{9}+\frac{x_4^2}{3}=1$, $O'=(0, 1, 2, 3)$,

$e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right\}$,

$e_3'=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}\right\}$, $e_4'=\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$;

2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$, $O'=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$,

$$e_1'=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\},\quad e_2'=\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\},$$
$$e_3'=\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\},\quad e_4'=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\};$$

3) $\dfrac{x_1^2}{\sqrt{7}}+\dfrac{x_2^2}{\sqrt{7}}-\dfrac{x_3^2}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=2x_4$, $O'=(0,\ 0,\ 0,\ -1)$,

$$e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right\},\qquad e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ 0\right\},$$
$$e_3'=\left\{\frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{3}{\sqrt{21}}\right\},\quad e_4'=\left\{\frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ -\frac{2}{\sqrt{7}}\right\}.$$

1764. $(\lambda x+b,\ a)=0$, где λ — отличное от нуля собственное значение оператора A, а a — соответствующий ему собственный вектор. Указание. Воспользоваться уравнением диаметральной плоскости.

1765. 1) Указание. При преобразовании ω квадратичная форма Q многочлена P преобразуется так же, как и при соответствующем однородном ортогональном преобразовании γ. Инвариантность $I_1, \ldots, I_n$ следует из инвариантности коэффициентов характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ квадратичной формы Q относительно ортогонального преобразования γ. Далее:

$$K'_{n+1}=\begin{vmatrix} a'_{11}\ldots a'_{1n} & b'_1\\ \cdots\cdots & \cdot\\ a'_{n1}\ldots a'_{nn} & b'_n\\ b'_1\ \ldots b'_n & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} & b_1\\ \cdots\cdots & \cdot\\ a_{n1}\ldots a_{nn} & b_n\\ b_1\ \ldots b_n & c\end{vmatrix}\begin{vmatrix} t_{11}\ldots t_{1n} & t_1\\ \cdots\cdots & \cdot\\ t_{n1}\ldots t_{nn} & t_n\\ 0\ \ldots 0 & 1\end{vmatrix}^2=$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} & b_1\\ \cdots\cdots & \cdot\\ a_{n1}\ldots a_{nn} & b_n\\ b_1\ \ldots b_n & c\end{vmatrix}\begin{vmatrix} t_{11}\ldots t_{1n}\\ \cdots\cdots\\ t_{n1}\ldots t_{nn}\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} & b_1\\ \cdots\cdots & \cdot\\ a_{n1}\ldots a_{nn} & b_n\\ b_1\ \ldots b_n & c\end{vmatrix}=K_{n+1}.$$

2) Указание. Рассмотрим многочлен

$$R=P-\lambda\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)=$$
$$=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c-\lambda\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right).$$

При однородном ортогональном преобразовании $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, многочлен R перейдет в многочлен

$$R'=P'-\lambda\left(x_1'^2+\ldots+x_n'^2\right)=$$
$$=\sum_{i,\ j=1}^{n} a'_{ij}x'_ix'_j+2\sum_{i=1}^{n} b'_ix'_i+c-\lambda\left(x_1'^2+\ldots+x_n'^2\right).$$

Далее, воспользовавшись инвариантностью дискриминанта K_{n+1} для многочлена R при ортогональном преобразовании, получим:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda \dots a'_{1n} & & b'_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & \dots a'_{nn}-\lambda & b'_n \\ b'_1 & \dots b'_n & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda \dots a_{1n} & & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots a_{nn}-\lambda & b_n \\ b_1 & \dots b_n & c \end{vmatrix}.$$

Остается приравнять коэффициенты при λ при одинаковых степенях λ в левой и в правой частях этого тождества относительно λ. 3) Указание. Пусть при некотором однородном ортогональном преобразовании α многочлен P преобразуется в многочлен P^*, не содержащий переменной x_n^*: $P^* = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^* x_i^* x_j^* + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_i^* x_i^* + c$. Пусть при произвольном неоднородном ортогональном преобразовании ω многочлен P перейдет в многочлен P'. Обозначим через K_n семиинвариант многочлена P, а через K'_n — семиинвариант многочлена P'. Семиинвариант K_n^* многочлена P^*, который будет равен семиинварианту K_n для многочлена P, имеет вид

$$K_n = K_n^* = \begin{vmatrix} a_{11}^* & \dots a_{1,\,n-1}^* & b_1^* \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,1}^* & \dots a_{n-1,\,n-1}^* & b_{n-1}^* \\ b_1^* & \dots b_{n-1}^* & c \end{vmatrix},$$

так как остальные $n-1$ слагаемых, входящие в выражение для K_n^*, равны нулю. Рассмотрим ортогональное преобразование $\omega\alpha^{-1}$. Представим его в виде произведения однородного ортогонального преобразования β на перенос τ: $\omega\alpha^{-1} = \beta\tau$; отсюда $\omega = \beta\tau\alpha$. При преобразовании α многочлен P переходит в многочлен P^*, не содержащий x_n^*, а семиинвариант K_n переходит в равный ему семиинвариант K_n^*. При переносе τ многочлен P^* перейдет в многочлен P^{**}, также не содержащий последнюю переменную x_n^{**}, а семиинвариант K_n^* перейдет в равный ему семиинвариант K_n^{**}:

$$K_n^* = K_n^{**} = \begin{vmatrix} a_{11}^{**} & \dots a_{1,\,n-1}^{**} & b_1^{**} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,1}^{**} & \dots a_{n-1,\,n-1}^{**} & b_{n-1}^{**} \\ b_1^{**} & \dots b_{n-1}^{**} & c^* \end{vmatrix}^{*)}.$$

---

*) Это обстоятельство является следствием более общего утверждения, доказанного выше, а именно: K_{n+1} есть инвариант неоднородного ортогонального преобразования; мы применяем это положение для преобразования переноса τ переменных $x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^*$ многочлена P^*, не содержащего x_n^*; K_n^* играет роль определителя K_{n+1}, но для евклидова пространства размерности $n-1$.

Наконец, при преобразовании β многочлен P^{**} перейдет в многочлен P', в который переходит многочлен P при преобразовании $\omega=\beta\tau\alpha$. А так как K_n^{**} есть семиинвариант многочлена P^{**}, рассматриваемого как функция от n переменных $x_1^{**}, \ldots, x_{n-1}^{**}, x_n^{**}$, а β — однородное ортогональное преобразование, то значение семиинварианта K_n^{**}, вычисленного для многочлена P^{**}, будет равно значению семиинварианта K_n', вычисленному для многочлена P', т. е. $K_n^{**}=K_n'$. Итак, $K_n=K_n'$. Остальные утверждения этого пункта доказываются аналогично: надо рассмотреть однородное ортогональное преобразование α, переводящее многочлен P в многочлен P^*, содержащий лишь переменные $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$, и заметить, что для преобразованного многочлена P^* семиинвариант K_{r+1}^* равен одному определителю:

$$K_{r+1}^*=\begin{vmatrix} a_{11}^* & \ldots & a_{1r}^* & b_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}^* & \ldots & a_{rr}^* & b_r^* \\ b_1^* & \ldots & b_r^* & c \end{vmatrix}$$

(а не сумме нескольких определителей).

П.С. МОДЕНОВ, А.С. ПАРХОМЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ