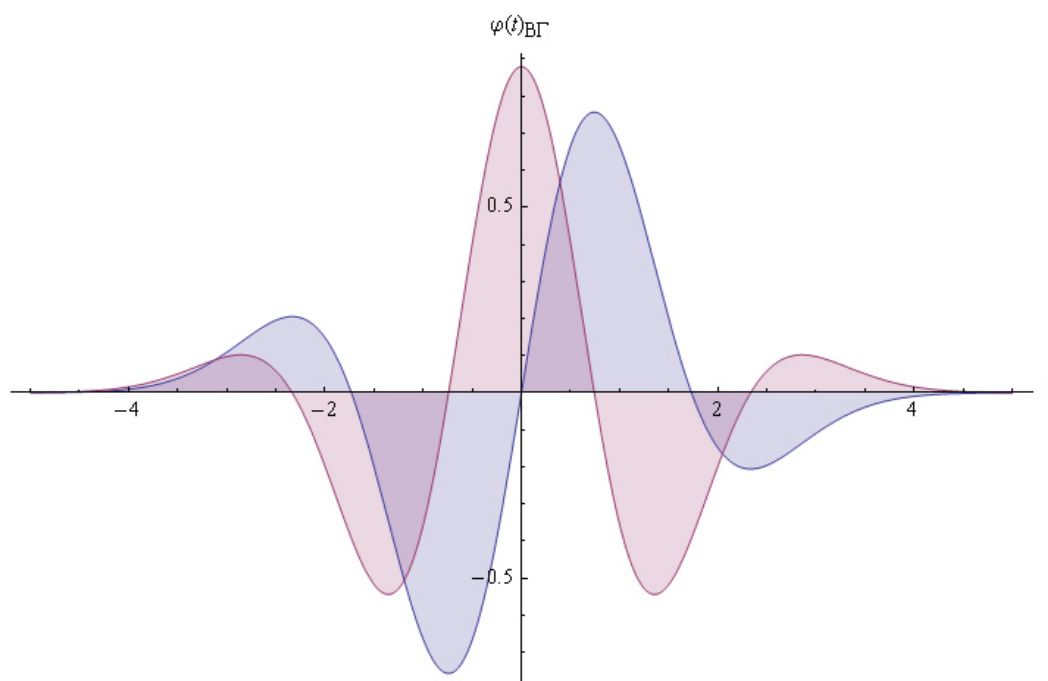


А.Ю. Гришенцев, А.Г. Коробейников, С.А. Арустамов

**ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СВЯЗИ.  
ЧАСТЬ 2. ОКОННЫЕ И ВЕЙВЛЕТ ФУНКЦИИ И  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**



Санкт-Петербург  
2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Гришенцев, А.Г. Коробейников, С.А. Арустамов

**ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СВЯЗИ.  
ЧАСТЬ 2. ОКОННЫЕ И ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ И  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 10.03.01, 10.04.01, 11.03.03, 11.04.03 в  
качестве учебного пособия для реализации  
основных профессиональных образовательных программ  
высшего образования бакалавриата, магистратуры



Санкт-Петербург  
2019

Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г., Арустамов С.А. Цифровые системы широкополосной связи. Часть 2. Оконные и вейвлет-функции и преобразования – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 42 с.

Рецензент:

Копытенко Юрий Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, директор СПбФ ИЗМИРАН, заведующий отделом геомагнитных исследований СПбФ ИЗМИРАН.

В учебном пособии содержится вводная часть в предмет синтеза и анализа оконных и вейвлет-функций, а так же применение оконных и вейвлет-функций в некоторых задачах обработки сигналов, материал подкреплён примерами программ на языке MatLab.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, магистров, обучающихся по направлениям подготовки: 11.03.03, 11.04.03 – «Конструирование и технология электронных средств», 10.03.01, 10.04.01 – «Информационная безопасность»; дисциплины: «Волновые процессы в средах», «Радиотехника».

Работа может быть полезна аспирантам обучающимся по соответствующим направлениям.

Авторы выражают благодарность за ценные замечания к.т.н., доценту Наталии Федоровне Гусаровой.

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© А.Ю. Гришенцев, А.Г. Коробейников, С.А. Арустамов, 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОКОННЫЕ И ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....	6
1.1. Характеристики оконных функций .....	6
1.2. Некоторые распространённые оконные функции.....	8
1.3. Синтез окон в MatLab .....	13
1.4. Оконное преобразование Фурье .....	16
1.5. Оконное преобразование Фурье в MatLab .....	17
1.6. Вейвлет-функции .....	18
1.7. Вейвлет Гаусса .....	20
1.8. Вейвлет Морли.....	22
1.9. b-сплайн вейвлет .....	26
1.10. Вейвлет Шеннона .....	28
1.11. Вейвлет Хаара .....	28
1.12. Синтез некоторых вейвлетов в MatLab .....	29
1.13. Функции Уолша и матрицы Адамара .....	31
1.14. Вейвлет-преобразование .....	34
2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ .....	38
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	40

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие является продолжением (второй частью) комплекса учебных пособий по цифровым системам широкополосной связи. В первой части «Введение в пространства и методы преобразования сигналов» содержится вводная часть в проблему выбора пространств представления и обработки сигналов. В данной (второй) части представлены некоторые вопросы, касающиеся оконных и вейвлет-функций и соответствующих преобразований. Особое внимание уделено некоторым аспектам применения вейвлет-функций для синтеза широкополосных сигналов, при этом следует отметить, что общие вопросы синтеза широкополосных сигналов, вопросы синтеза и анализа фильтров, в том числе с применением оконных функций и вейвлетов являются предметом отдельного обсуждения. В учебном пособии содержатся некоторые тематические справки о функциях MatLab, которые выполняют роль дополнения и иллюстрации основного материала. Следует отметить, что приведённые сведения не являются исчерпывающими, т.к. данное учебное пособие не является справочником по программированию в пакете MatLab. Инструкции по эксплуатации программных пакетов MatLab, Octave, Scilab, Wolfram Mathematica и др., рекомендуется искать на официальных ресурсах сети Интернет. Данные на официальных ресурсах позволяют учесть актуальные изменения функционала программных продуктов и рекомендации разработчиков, что будет способствовать повышению эффективности использования программных средств САПР для решения задач моделирования, синтеза, анализа, а значит, проектирования и разработки в целом.

В составе учебного пособия имеется две части. Первая часть содержит элементы теории и некоторые практические примеры. Вторая часть содержит листинги функций на языке MatLab, реализующие методы, изложенные в первой части.

Данную работу можно рассматривать как вводную часть в теорию оконных и вейвлет-функций и преобразований в цифровых системах широкополосной связи, в рамках курсов: «Волновые процессы в средах», «Радиотехника» читаемых в бакалавриате, по направлению подготовки «Информационная безопасность»; «Обработка цифровых сигналов в системах защиты информации», читаемого в магистратуре, по направлению подготовки «Конструирование и технология электронных средств».

Специфика использования данного учебного пособия в рамках учебных занятий определяется преподавателем. При использовании учебного пособия для самостоятельной подготовки рекомендуется применять метод комплексного анализа литературных источников,

закрывающийся в параллельном освоении нескольких авторитетных изданий по теме предмета.

# 1. ОКОННЫЕ И ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Возможность неограниченной протяжённости сигнала при изменении частотного состава определяет необходимость поиска эффективных методов декомпозиции и синтеза фрагментов сигнала на ограниченных интервалах. В частности, оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование являются динамическими методами спектрального анализа, т.е. такими методами, которые позволяют учитывать и выявлять динамическое изменение спектрального состава сигнала. Оконные функции позволяют эффективно бороться с колебаниями Гиббса<sup>1</sup>, свойственными преобразованию Фурье как результат неравномерной сходимости в точке разрыва [1].

Оконные функции и вейвлеты предоставляют новые возможности для синтеза и преобразования сигналов [2], моделирования физических процессов, операторных методов решения дифференциальных уравнений [3].

## 1.1. Характеристики оконных функций

*Оконные функции (windowing functions)*, также называемые *весовые функции (weighting functions)*, могут быть применены для решения комплекса задач, например: расчёта спектра или оценивания других временных или частотных характеристик некоторого фрагмента сигнала; фильтрации фрагмента сигнала или фрагмента спектра сигнала. По применению оконные функции, или кратко *окна*, обычно разделяют на *окна данных* и *корреляционные окна*. Основное назначение окна данных – уменьшить величину смещения в периодограммных спектральных оценках. Основное назначение корреляционного окна – уменьшить дисперсию коррелогограммной оценки [4].

Будем обозначать оконные функции как  $w(t)$ . Отметим, что оконные функции могут быть применены как во временной, так и в частотной области представления сигнала. В данной работе будем производить исследование окон как функциональных паттернов, заданных во временной области.

Оконные функции являются классом вещественнозначных сигналов, симметричных относительно центрального всплеска с максимальным значением в точке центрального всплеска. Интеграл оконных функций  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt$  имеет конечное ненулевое значение [4].

Оконные функции обладают следующими свойствами [3].

---

<sup>1</sup> Джозайя Уиллард Гиббс (11 февраля 1839 – 28 апреля 1903) – американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики.

Большинство оконных функций симметричны относительно своего центра; если центр несмещённой оконной функции приходится на точку  $t = 0$ , при размещении окна в интервале  $T = [-0.5; 0.5]$  или  $T = [-\pi; \pi]$ , то такие оконные функции обычно называют *корреляционным окном*; если центр окна приходится на точку  $t = 0.5$  при размещении окна в интервале  $T = [0; 1]$  и  $t = \pi$  при размещении окна в интервале  $T = [0; 2\pi]$ , то такие оконные функции обычно называют *окном данных* [4]. Формально большинство окон задаётся в виде окна данных, такое окно удовлетворяет условию каузальности (причинности).

Область ненулевых значений оконной функции строго ограничена во времени интервалом  $t \in [-T/2; T/2]$ , все значения оконной функции вне границ интервала  $[-T/2; T/2]$  считаются равными нулю.

Ограниченность области ненулевых значений оконной функции во времени определяет тот факт, что преобразование Фурье оконной функции теоретически неограниченно.

Эквивалентную длительность окна, с центром в точке  $t = 0$ , можно оценить, используя выражение:

$$T_{\text{Э}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt}{w(0)}, \quad (1)$$

или в дискретном виде для окна с центром в точке  $n = 0$  запишем:

$$T_{\text{Э}} = \frac{\Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]}{w[0]}. \quad (2)$$

Эквивалентную ширину полосы окна можно вычислить как

$$F_{\text{Э}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(f) df}{W(0)}, \quad (3)$$

или в дискретном виде:

$$F_{\text{Э}} = \frac{\Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} W[n]}{W[0]}. \quad (4)$$

При этом для произведения эквивалентной длительности  $T_{\text{Э}}$  и ширины полосы  $F_{\text{Э}}$  выполняется равенство:

$$T_{\text{Э}} F_{\text{Э}} = 1. \quad (5)$$

Одна из основных задач при синтезе оконных функций – это нахождение компромисса между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков преобразования Фурье оконной функции. Снижение уровня боковых лепестков приводит к расширению центрального лепестка и, как следствие, ухудшению разрешения по частоте [4].

Для количественных оценок различных окон используются комплекс традиционных показателей [4, 5]:

- ширина полосы на уровне половинной мощности, т.е. на уровне, который на 3 дБ ниже максимума главного лепестка;
- эквивалентная ширина полосы  $F_{\text{Э}}$ ;
- пиковый уровень боковых лепестков, позволяющий сделать вывод о подавлении «просачивания» частот в области боковых лепестков;



– скорость спадания боковых лепестков, которая позволяет сделать вывод о скорости спадания в области «просачивания» (измеряется в дБ/октава).

## 1.2. Некоторые распространённые оконные функции

В данном разделе рассмотрим некоторые виды оконных функций, получивших наиболее широкое распространение в практике обработки сигналов.

При условии, что единица времени соответствует  $2\pi$ , равномерное прямоугольное окно (рис. 1) задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 1, & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (6)$$

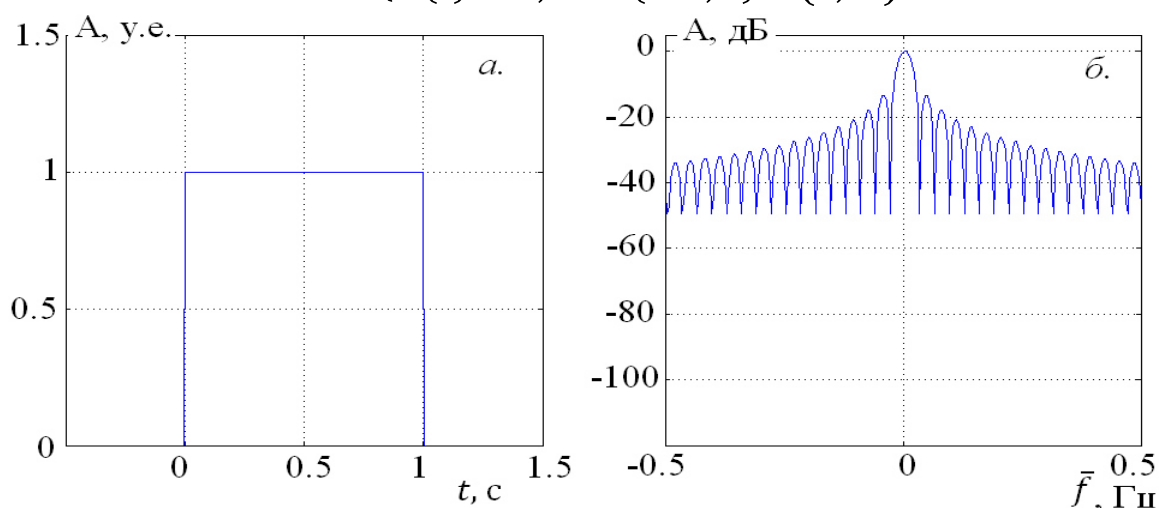


Рисунок 1. *а.* – равномерное прямоугольное окно; *б.* – спектр равномерного прямоугольного окна (частота в нормированных единицах)

Треугольное окно, также называемое окном Бартлетта (рис. 2), задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 1 - |1 - 2t|, & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (7)$$

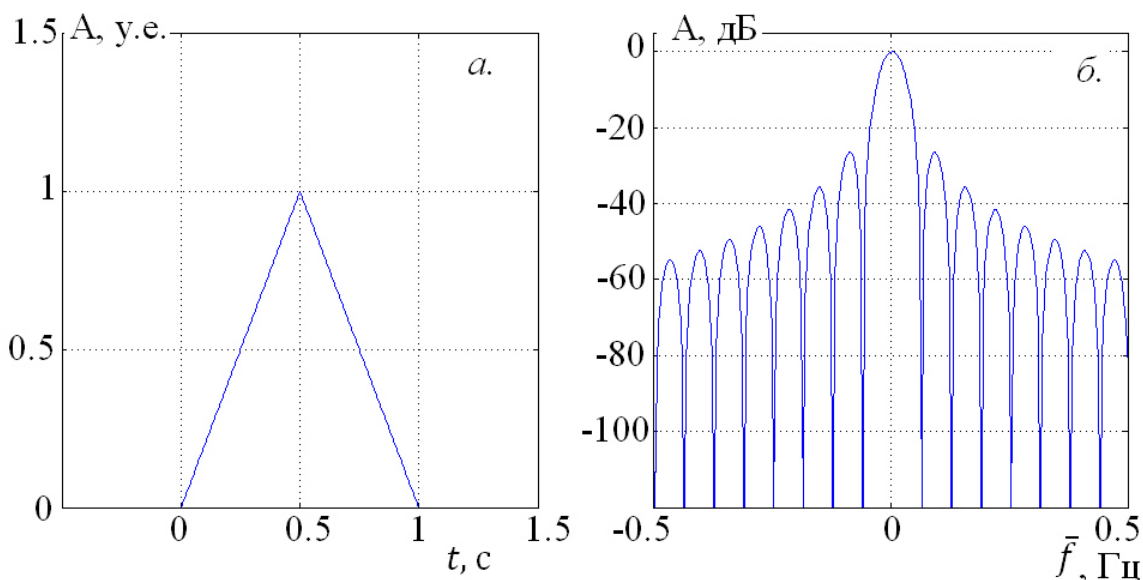


Рисунок 2. *а.* –треугольное окно (окно Бартлетта); *б.* – спектр треугольного окна

Существует целое семейство окон на основе гармонического ряда cos-функции (так называемый ряд взвешенных косинусов), к данному виду относятся окна: Ханна<sup>1</sup>, Хемминга<sup>2</sup>, Наттолла, Блекмана<sup>3</sup>, Блекмана-Наттолла и др. В общем виде данный класс окон можно задать выражением:

$$\begin{cases} w(t) = \sum_{k=0}^K a_k \cos(2\pi t k), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (8)$$

Окно косинус-квадрат, также называемое окном Ханна (рис. 3), задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = \sin^2(\pi t) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi t), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (9)$$

<sup>1</sup> Юлиус Фердинанд фон Ханн (23 марта 1839 – 1 октября 1921) – австрийский метеоролог. Считается отцом современной метеорологии.

<sup>2</sup> Ричард Уэсли Хэмминг (11 февраля 1915 – 7 января 1998) – американский математик, работы которого в сфере теории информации оказали существенное влияние на компьютерные науки и телекоммуникации.

<sup>3</sup> Ральф Биб Блэкманн (29 августа 1904 – 24 мая 1990) – американский математик и инженер.

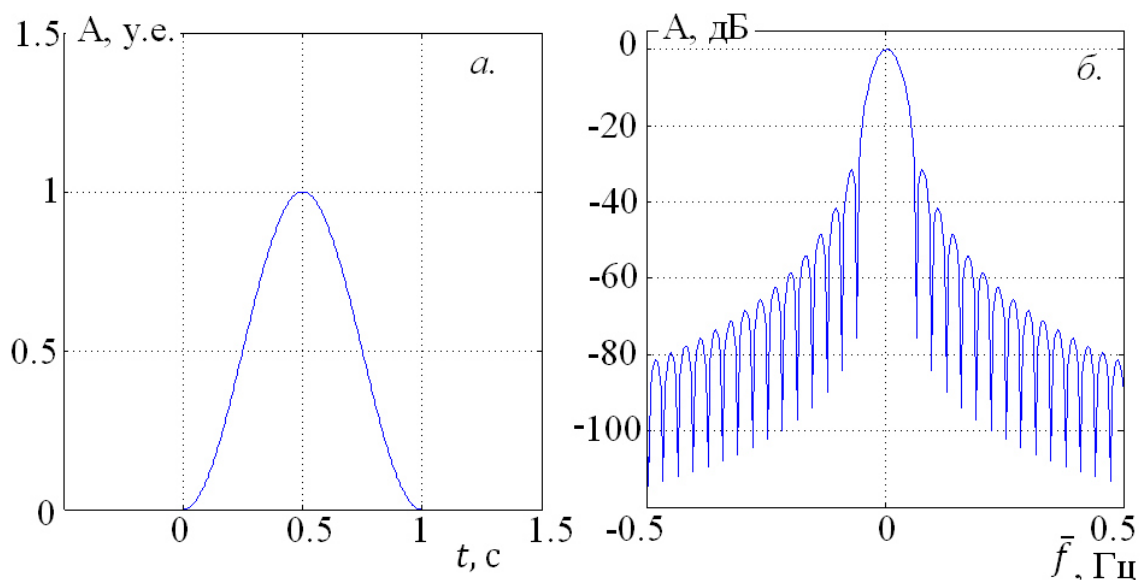


Рисунок 3. *а.* – окно Ханна; *б.* – спектр окна Ханна

Окно Хемминга, также называемое приподнятым косинусом (рис. 4), задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (10)$$

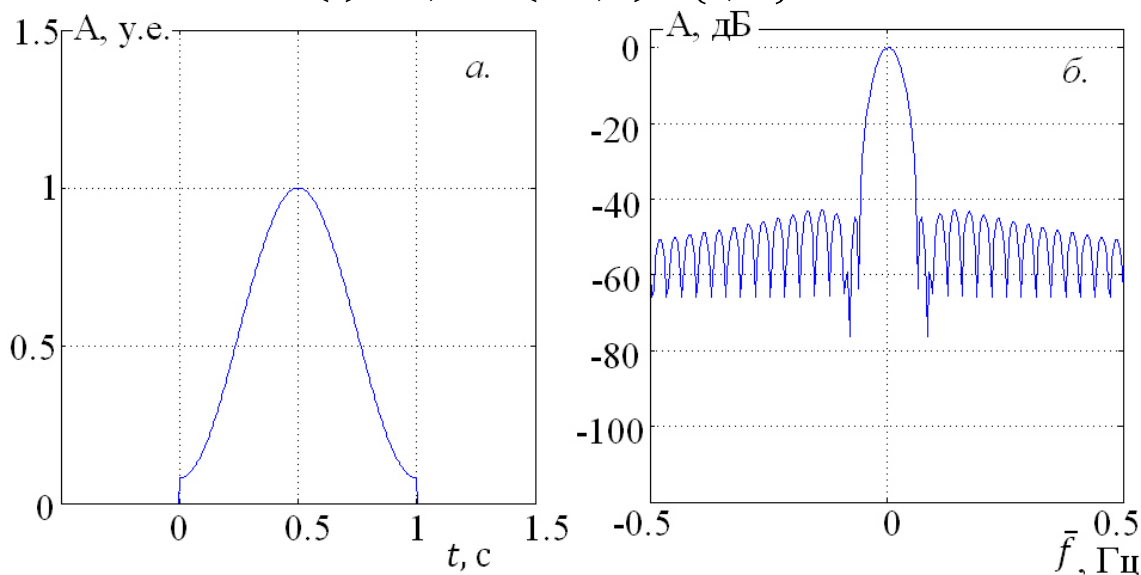


Рисунок 4. *а.* – окно Хемминга; *б.* – спектр окна Хемминга

Окно Наттолла (рис. 5) задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 0.355768 - 0.487396 \cos(2\pi t) + \\ -0.144232 \cos(4\pi t) + 0.012604 \cos(6\pi t), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (11)$$

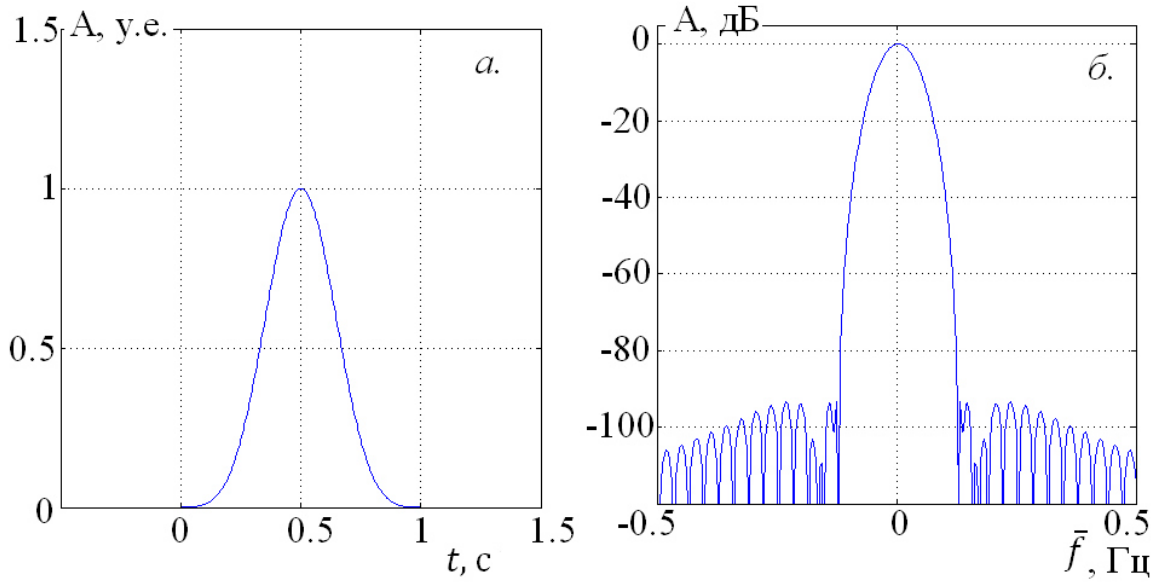


Рисунок 5. *а.* – окно Наттолла; *б.* – спектр окна Наттолла

Окно Блекмана (рис. 6) задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 0.42659 + 0.49656 \cos(2\pi t) - 0.076849 \cos(4\pi t), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases}.$$

(12)

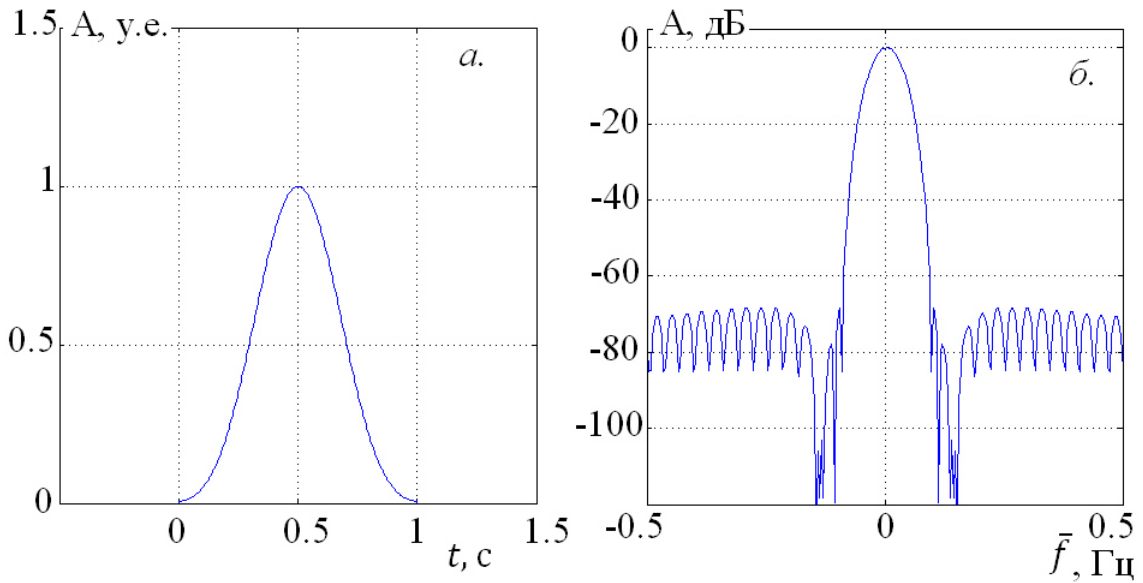


Рисунок 6. *а.* – окно Блекмана; *б.* – спектр окна Блекмана

Окно Блекмана-Наттолла (рис. 7) задаётся выражением:

$$\begin{cases} w(t) = 0.3635819 + 0.4891775 \cos(2\pi t) - \\ -0.1365995 \cos(4\pi t) + 0.0106411 \cos(6\pi t), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases}.$$

(13)

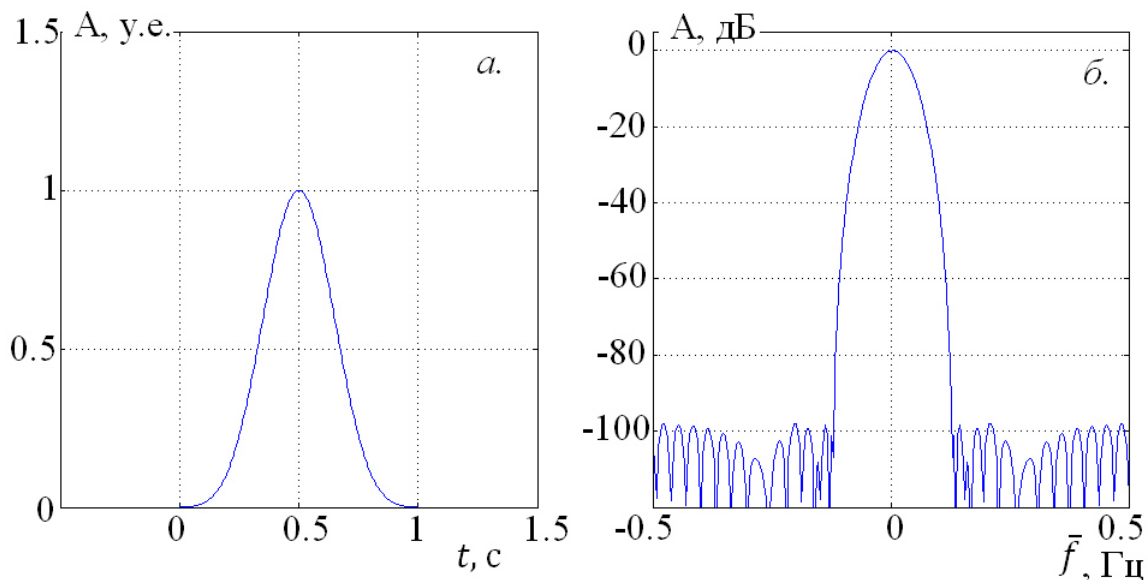


Рисунок 7. Окно Блекмана-Наттолла

Значительный интерес для обработки сигналов представляет семейство окон, задаваемых с помощью распределения Гаусса. В общем виде семейство окон Гаусса можно задать выражением:

$$\begin{cases} w(t) = \exp\left(-\frac{(\alpha(2t-1))^2}{2}\right), & t \in [0; 1] \\ w(t) = 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (14)$$

Варьируя параметр  $\alpha$ , можно менять форму окна и его частотные характеристики (рис. 8).

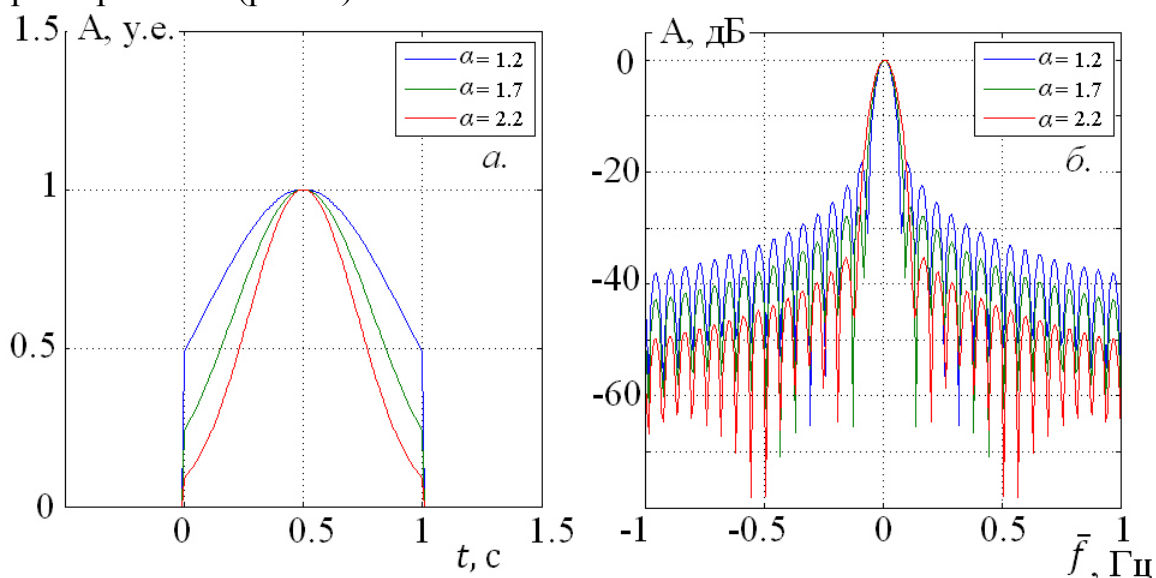


Рисунок 8. *а.* – усечённое окно Гаусса с различными значениями параметра  $\alpha$ ; *б.* – спектр усечённого окна Гаусса с различным значением параметра  $\alpha$

Для возможности сравнения характеристик окон свѣдѣм их в общую таблицу (таблица 1).

Таблица 1. Некоторые характеристики оконных функций

Наименование окна	Эквивалентная ширина полосы	Эквивалентная длительность	Пиковый уровень боковых лепестков, дБ	Скорость спада боковых лепестков, дБ/октава
Прямоугольное	1.00	1.00	-13.39	-6.02
Окно Гаусса $\alpha = 1.2$	3.050	0.804	-18.34	-5.70
Треугольное	2.000	0.500	-26.33	-11.38
Окно Ханна	2.080	0.500	-31.47	-18.62
Окно Хемминга	2.208	0.540	-42.68	-6.07
Окно Наттолла	2.811	0.356	-93.33	-17.45
Окно Блекмана	2.378	0.427	-68.24	-5.12
Окно Блекмана-Наттолла	2.752	0.363	-98.23	-3.91

### 1.3. Синтез окон в MatLab

MatLab содержит развитые средства синтеза, анализа и применения оконных функций для решения различных задач. Так, например, функция `window(fhandle,n,winopt)` позволяет производить синтез различных окон. В качестве параметров функция получает: указатель на соответствующий тип окна из множества `{@barthannwin, @bartlett, @blackman, @blackmanharris, @bohmanwin, @chebwin, @flattopwin, @gausswin, @hamming, @hann, @kaiser, @nuttallwin, @parzenwin, @rectwin, @taylorwin, @triang, @tukeywin}`; параметр `n` – определяет число отсчётов; `winopt` – определяет некоторые дополнительные параметры выбранного окна. Возвращает функция `window(...)` массив, содержащий значения выбранной оконной функции.

Произвести синтез окна можно средствами объектно-ориентированного программирования (ООП) MatLab `sigwin.window`, где `sigwin` – класс оконных функций, `window` – метод синтеза определённого окна из множества `{barthannwin, bartlett, blackman, blackmanharris, bohmanwin, chebwin, flattopwin, gausswin, hamming, hann, kaiser, nuttallwin, parzenwin, rectwin, taylorwin, triang, tukeywin}`.

Графические средства MatLab содержат инструментальный для визуального анализа оконных функций. Функция `wvtool(w1, w2, ..., wN)`, позволяет произвести визуализацию окна (или группы окон), а также преобразование Фурье окна (или группы окон). В качестве параметра функция `wvtool(...)` получает массив оконной функции (один или

несколько) и/или объект окна, синтезированный средствами объектно-ориентированного программирования (ООП) MatLab.

В результате выполнения программы (листинг 1.1) будет произведён синтез двух массивов, соответствующих оконным функциям прямоугольного окна и окна Хэмминга, и одного объекта, соответствующего окну Гаусса с параметром  $\alpha = 1.5$ . В результате выполнения программы на экран будет выведено окно (рис. 9), содержащее три синтезированные оконные функции и модуль преобразования Фурье этих функций.

#### Листинг 1.1. Синтез и визуализация окон

```
clear all;           % очистка переменных
close all;           % закрыть все окна
clc;                 % очистка командного окна
%% =====
N = 100; % число отсчётов
% синтез окон
w1 = ones(N,1);      % прямоугольное окно
w2 = window(@hamming,N); % окно Хемминга
w3 = sigwin.gausswin(N,1.5); % окно Гаусса (alpha = 1.5)
% визуализация окон и их преобразования Фурье
wvtool(w1,w2,w3);
```

На рис. 9 кроме вида оконной функции и её преобразования Фурье содержатся некоторые дополнительные характеристики: *фактор утечки* оконной функции (англ. leakage factor), относительное затухание боковых лепестков (relative sidelobe attenuation) и ширина окна (англ. mainlobe width) на уровне  $-3$  дБ [6]. В данном случае под графиками выведены некоторые характеристики окна Хэмминга (рис. 9).

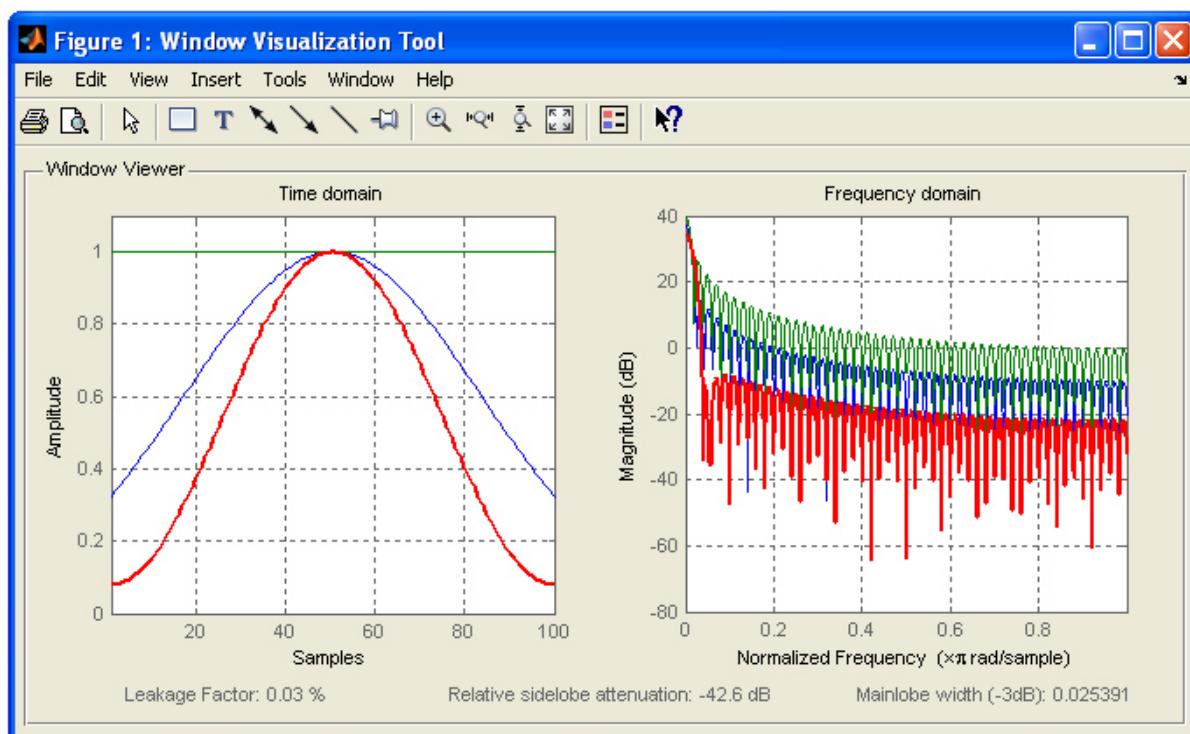


Рисунок 9. Оконные функции и их преобразование Фурье, результат выполнения программы (листинг 1.1) (окно MatLab)

MatLab содержит развитый визуальный инструмент анализа оконных функций, вызываемый командой `wintool` (рис. 10). Интерфейс Window Design & Analysis Tool (рис. 10) вполне очевиден, имеется возможность выбора вида оконной функции из списка, задания параметров оконной функции, можно, задать пользовательскую оконную функцию.



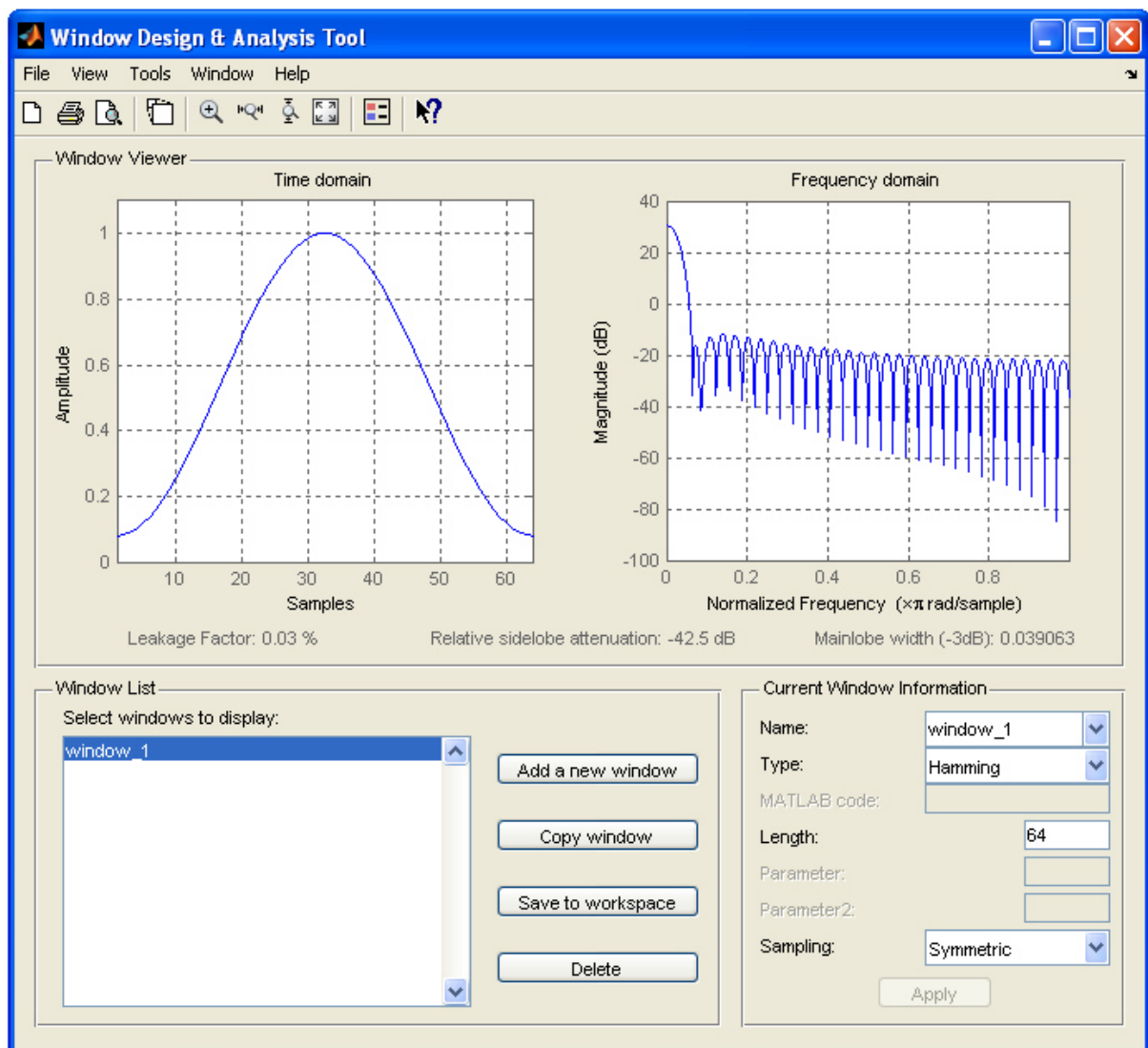


Рисунок 10. Визуальный инструмент MatLab анализа оконных функций (окно MatLab)

#### 1.4. Оконное преобразование Фурье

Одно из значимых практических применений оконных функций – оконное преобразование Фурье:

$$X(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau)x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (15)$$

где  $w(t)$  – оконная функция,  $x(t)$  – преобразуемая функция,  $X(\omega, \tau)$  – образ функции  $x(t)$  в пространстве частота ( $\omega$ ), время ( $\tau$ ).

Оконное преобразование Фурье [7] позволяет производить анализ динамики: амплитуды, частоты и фазы. На рис. 11 приведён пример оконного преобразования Фурье сигнала вида  $x(t) = \sin(t^3)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ , с применением окна Хемминга.

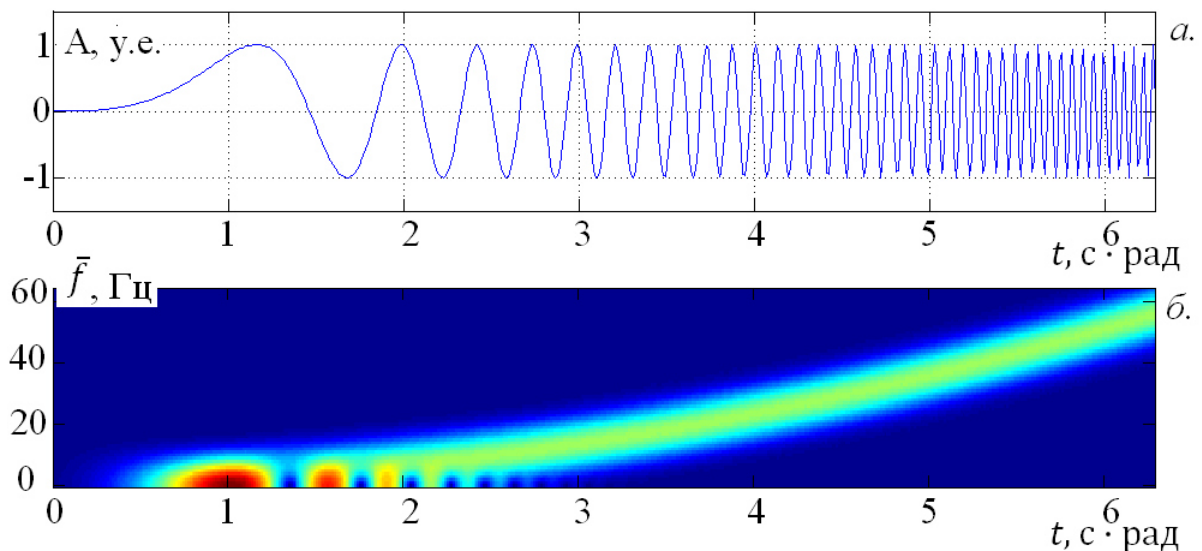


Рисунок 11. Сигнал с нарастающей частотой и его спектрограмма

Очевидно, что при выполнении свёртки или корреляции с оконной функцией амплитуда результирующей функции будет отличаться от исходной. Для возможности учёта и коррекции данного эффекта применяют так называемый коэффициент ослабления оконной функции, равный отношению постоянной составляющей оконной функции  $w(t)$  к постоянной составляющей прямоугольного окна  $w_{\text{пр}}(t)$ :

$$\beta = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt}{\frac{1}{T} \int_0^T w_{\text{пр}}(t) dt} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt. \quad (16)$$

С учётом коэффициента ослабления выражение (3.10) можно записать в виде:

$$X(\omega, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (17)$$

### 1.5. Оконное преобразование Фурье в MatLab

Средства MatLab поддерживают оконное преобразование Фурье. Функция `[S,F,T]=spectrogram(x>window,noverlap,F,fs)` предназначена для оконного преобразования Фурье с заданным окном и рядом других параметров, а также для синтеза спектрограммы сигнала. Функция `spectrogram(...)` может работать в нескольких режимах в зависимости от формата вызова функции и задания параметров. Обязательным параметром является  $x$  – вектор сигнала для оконного преобразования. Все остальные параметры могут не указываться. Более подробно сведения о параметрах по умолчанию можно найти в руководстве по MatLab.

Параметр `window` определяет заданное в виде массива окно для преобразования Фурье. Параметр `noverlap` определяет число перекрытий (в отсчётах) при смещении окна. Параметр `F` определяет длину выборки для преобразования Фурье. Напомним, что число отсчётов определяет разрешение по частоте. Таким образом, увеличивая число отсчетов, можно

повысить разрешение по частоте преобразования Фурье. Параметр `fs` определяет частоту выборок, указание данного параметра позволяет производить анализ в реальных единицах времени и частоты.

Программа (листинг 1.2) содержит пример использования функции `spectrogram(...)`, а на рис. 12 приведен результат работы программы.

#### Листинг 1.2. Построение спектрограммы средствами MatLab

```
clear all;           % очистка переменных
close all;           % закрыть все окна
clc;                 % очистка командного окна
%% =====
% функция для оконного преобразования Фурье
xt = sin(linspace(0,2*pi,512).^3);
% окно Хэмминга
wpu = 0.54-0.46.*cos(linspace(0,2*pi,32));
% синтез и вывод спектрограммы
spectrogram(xt, wpu, 31, 128, 1);
```

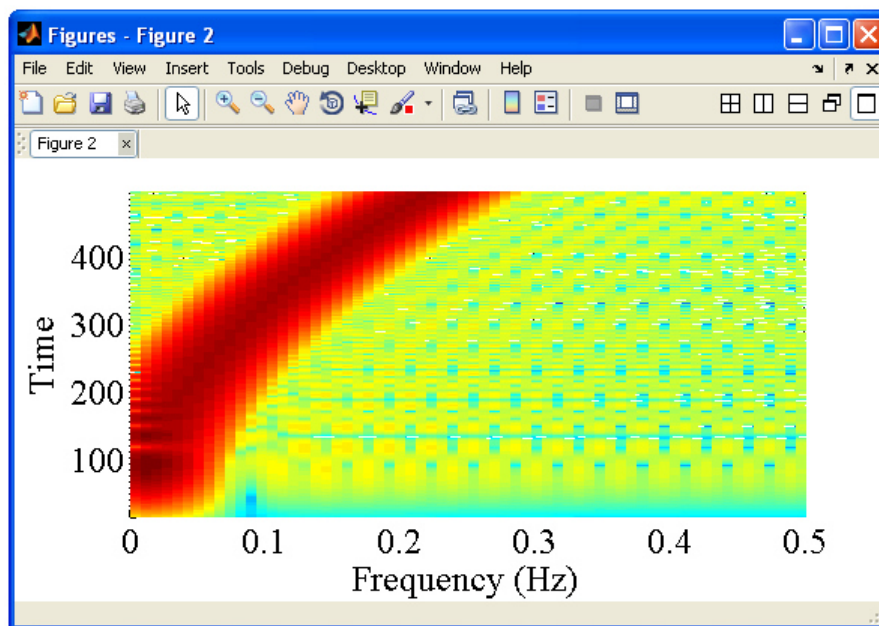


Рисунок 12. Оконное преобразование Фурье с помощью функции `spectrogram(...)` (окно MatLab)

По изображению спектра (рис. 12) видно, что происходит повышение частоты с ростом времени, что определяется свойством заданной для анализа функции (листинг 1.2). Нормирование, выполненное средствами MatLab, позволяет отобразить корректные масштабы и единицы измерения по осям координат спектрограммы.

### 1.6. Вейвлет-функции

*Вейвлетом* (от англ. wavelet) называется функция типа маленькой волны с ненулевыми значениями в центральной области и достаточно

быстро убывающая до нуля по мере удаления от центра [8]. В соответствии с определением множество вейвлет-функций бесконечно велико. Поэтому рассмотрим лишь некоторые семейства вейвлет-функций или кратко семейства вейвлетов. Следует отметить, что существуют семейства вейвлетов, порождающие вещественные и комплексные функции [9-12]. Остановим внимание преимущественно на семействах гладких вейвлет-функций, порождающих комплексные функции.

К вейвлет-функциям традиционно относят функции, которые обладают рядом совокупных свойств:

- вейвлет-функция должна быть локализована, т.е. при удалении от центрального всплеска по оси аргумента значения вейвлет-функции *достаточно быстро* устремляются к нулю;

- образ преобразования Фурье вейвлет-функции должен быть локализован по частоте, что позволяет путём сжатия и растяжения вейвлет функции получить вейвлет с произвольной локализацией частоты;

- среднее значение вейвлет-функции должно быть равно нулю:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 0$ , где  $\varphi(t)$  – вейвлет-функция.

Семейство вейвлет-функций получается в результате масштабирования и смещения базового вейвлета. В случае комплекснозначных вейвлетов имеется две базовые вейвлет-функции: вещественная, обычно называемая *отцовская вейвлет-функция*, и мнимая – *материнская вейвлет-функция* [13].

Следует отличать класс вейвлет-функций от семейства вейвлет функций. Класс вейвлет-функций может включать в себя несколько семейств вейвлет-функций, полученных на базе различных, но достаточно подобных друг другу родительских вейвлетов. В случае если вейвлет задаётся аналитически, то обычно класс вейвлет-функций может быть описан одним общим уравнением.

Сравнивая свойства вейвлет-функций и оконных функций, можно заметить их сходства и различия. Основным различием является то, что для вейвлетов среднее значение функции  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 0$ , в результате этого свойства, можно, получать взаимно ортогональные семейства вейвлет-функций во временной области, т.е. такие что:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t)\varphi_m(t)dt = \begin{cases} 0, p \neq m \\ 1, p = m \end{cases}$ , где  $\varphi_p(t)$  и  $\varphi_m(t)$  – вейвлеты из одного семейства. Таким образом, вейвлет является знакопеременной функцией, а оконные функции, *как правило*, знакопостоянны. К этим правилам следует добавить слово *обычно*. Строго говоря, не все вейвлеты из одного семейства должны удовлетворять условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 0$ , один вейвлет из семейства может иметь знакопостоянную форму, как в семействе (ряде) гармонических функций, используемых для преобразования Фурье, имеется знакопостоянная функция, соответствующая нулевой частоте (т.е.

при  $f = 0$ ), получим  $\cos\left(\frac{2\pi ft}{T}\right) = \cos(0) = 1$ . С другой стороны, вполне можно задать оконную функцию, имеющую знакопеременную форму, и такие оконные функции известны и применяются, например, взвешенное окно с плоской вершиной (англ. flat top weighted window).

### 1.7. Вейвлет Гаусса

Достаточно распространённым для синтеза сигналов является семейство *вейвлетов Гаусса* (ВГ) (англ. Gaussian wavelet). Класс ВГ получают с помощью вычисления производных различных порядков от функции распределения Гаусса (рис. 13). Следует отметить, что в результате масштабирования каждый вейвлет из класса ВГ может порождать семейство ВГ. В общем виде уравнение из класса ВГ можно записать как:

$$\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \tau^{n-0.5} e^{-\tau} d\tau}} \frac{d^n e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{dt^n}, \quad (18)$$

где  $\int_0^\infty \tau^{n-0.5} e^{-\tau} d\tau = \Gamma(n + 0.5)$  – гамма-функция,  $n$  – порядок производной,  $\mu$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение, чаще всего в качестве значений используют  $\mu = 0.0$  и  $\sigma = 1.0$ , тогда выражение ВГ принимает вид:

$$\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \tau^{n-0.5} e^{-\tau} d\tau}} \frac{d^n e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^n}, \quad (19)$$

Энергия нормированной функции ВГ может быть вычислена с помощью выражения:

$$E_{\text{ВГ}} = \int_{-\infty}^\infty |\varphi_{\text{ВГ}}(t)|^2 dt = 1. \quad (20)$$

В результате выполнения условия чётности или нечётности для ВГ и удовлетворения критерию  $\int_{-\infty}^\infty \varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t) dt = 0$  все ВГ точно удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_{\text{ВГ}}^{(n_1)}(t) \varphi_{\text{ВГ}}^{(n_2)}(t) dt = \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2 \\ 1, & n_1 = n_2 \end{cases}. \quad (21)$$

Преобразование Фурье ВГ имеет следующий вид:

$$\Upsilon_{\text{ВГ}}^{(n)}(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \tau^{n-0.5} e^{-\tau} d\tau}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{d^n e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^n}\right) e^{-j\omega t} dt. \quad (22)$$

При определённом значении  $n$ , например,  $n = 1$ , преобразование Фурье имеет вид:

$$\Upsilon_{\text{ВГ}}^{(1)}(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\varphi_{\text{ВГ}}^{(1)}(t)\right\} = j \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (23)$$

В общем случае для вычисления преобразования Фурье ВГ можно воспользоваться связью производных высших порядков и пары преобразования Фурье.

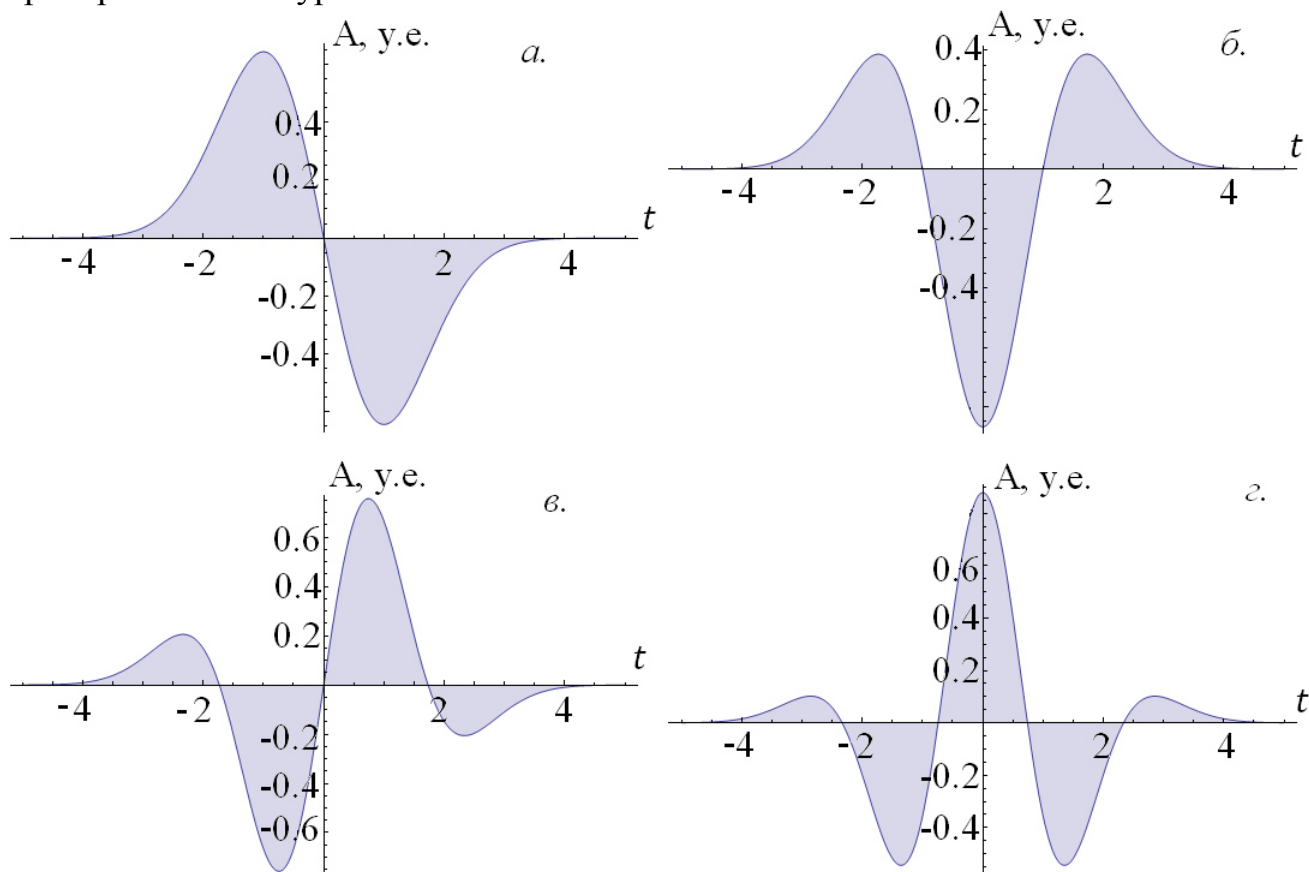


Рисунок 13. Вейвлеты Гаусса получены в результате производной функции Гаусса: *а.* – первая производная; *б.* – вторая производная; *в.* – третья производная; *г.* – четвёртая производная

При необходимости получить комплексные пары вейвлетов Гаусса (КВГ) применяют следующую форму:

$$\varphi_{\text{КВГ}}^{(n)}(t) = \varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t) + j\varphi_{\text{ВГ}}^{(n+1)}(t). \quad (24)$$

Очевидно, что тот вейвлет, который был при производной порядка  $\varphi_{\text{КВГ}}^{(n)}(t)$  мнимой частью, при производной порядка  $\varphi_{\text{КВГ}}^{(n+1)}(t)$  становится вещественной. Такая система построения семейства комплексных ВГ используется в рамках MatLab. Следует отметить, что есть и другие системы построения семейств ВГ.

Для практического использования ВГ используется не из  $t \in [-\infty, \infty]$ , а из ограниченного интервала  $t \in [a, b]$  (где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ ), что переопределяет некоторые свойства ВГ и вызывает отличие частотной характеристики от характеристики ВГ на интервале  $t \in [-\infty, \infty]$ . Обычно  $|a| = |b|$  и  $a < 0$ ,  $b > 0$ , при этих условиях определим интервал как  $t \in [-0.5T_{\text{ВГ}}, +0.5T_{\text{ВГ}}]$ , где  $T_{\text{ВГ}}$  – полная длительность ВГ и запишем

критерий выбора  $c_{\text{ВГ}}$  по условию максимально возможных значений функции ВГ за границами интервала  $t \in [-0.5T_{\text{ВГ}}, +0.5T_{\text{ВГ}}]$ :

$$\begin{cases} |\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t)| \leq c_{\text{ВГ}} \\ |t| \geq 0.5T_{\text{ВГ}} \end{cases} \quad (25)$$

Можно записать условие выбора интервала по критерию  $e_{\text{ВГ}}$  допустимой неравномерности распределения энергии:

$$\begin{cases} |\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t)|^2 \leq e_{\text{ВГ}} \\ |t| \geq 0.5T_{\text{ВГ}} \end{cases} \quad (26)$$

Можно использовать интегральный критерий:

$$E_{\text{ВГ}} \geq \int_{-0.5T_{\text{ВГ}}}^{0.5T_{\text{ВГ}}} |\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t)|^2 dt \geq eE_{\text{ВГ}}, \quad (27)$$

где  $eE_{\text{ВГ}}$  – критерий минимальной энергии ВГ на интервале  $t \in [-0.5T_{\text{ВГ}}, +0.5T_{\text{ВГ}}]$ . Учитывая, что вейвлеты используются в нормированном виде, а значит, имеют постоянное значение энергии, подобные критерии можно считать также относительными критериями.

Преобразование Фурье ВГ в ограниченном интервале  $t \in [-0.5T_{\text{ВГ}}, +0.5T_{\text{ВГ}}]$  имеет следующий вид:

$$\gamma_{\text{ВГ}}^{(n)}(j\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_{\text{ВГ}}^{(n)}(t)\} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \tau^{n-0.5} e^{-\tau} d\tau}} \sqrt{\frac{1}{T_{\text{ВГ}}}} \int_{-0.5T_{\text{ВГ}}}^{0.5T_{\text{ВГ}}} \left( \frac{d^n e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^n} \right) e^{-j\omega t} dt. \quad (28)$$

При определённом значении  $n$ , например,  $n = 1$ , преобразование Фурье на интервале  $t \in [-0.5T_{\text{ВГ}}, +0.5T_{\text{ВГ}}]$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ВГ}}^{(1)}(j\omega) &= \mathcal{F}\{\varphi_{\text{ВГ}}^{(1)}(t)\} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{T_{\text{ВГ}}\sqrt{\pi}}} \left( e^{-\frac{1}{8}T_{\text{ВГ}}(T_{\text{ВГ}}+4j\omega)} (-1 + e^{jT_{\text{ВГ}}\omega}) + je^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega \sqrt{\frac{\pi}{2}} (a_1 - a_2) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\text{Erf}(\dots)$  – функция ошибки (англ. error function):  $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$ ,  $a_1 = \text{Erf}\left(\frac{-T_{\text{ВГ}}+2j\omega}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $a_2 = \text{Erf}\left(\frac{T_{\text{ВГ}}+2j\omega}{2\sqrt{2}}\right)$ .

## 1.8. Вейвлет Морли

Класс функций *вейвлет Морли*<sup>1</sup> (ВМ) (англ. Morlet wavelet). ВМ является результатом модуляции функцией гауссова распределения гармонических сигналов (рис. 14). ВМ имеет комплексную форму. Класс ВМ относится к неортогональным вейвлетам [14]. В комплексной форме ВМ cos-составляющая соответствует вещественной ( $\text{Re}[\dots]$ ) части, sin-составляющая – мнимой ( $\text{Im}[\dots]$ ) части. Уравнение, задающее ВМ с нормированной по энергии сигнала амплитудой, имеет вид:

<sup>1</sup> Жан Морли (13 января 1931 – 27 апреля 2007) – французский геофизик, основоположник работы в области вейвлет анализа, в 1975 году он впервые использовал термин вейвлет для описания классов особых функций.

$$\varphi_{\text{ВМ}}(t) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi f_b}} e^{j2\pi f_c t - \frac{t^2}{f_b}}, \quad (30)$$

где  $f_b$  – частотная полоса ВМ;  $f_c$  – центральная частота ВМ.

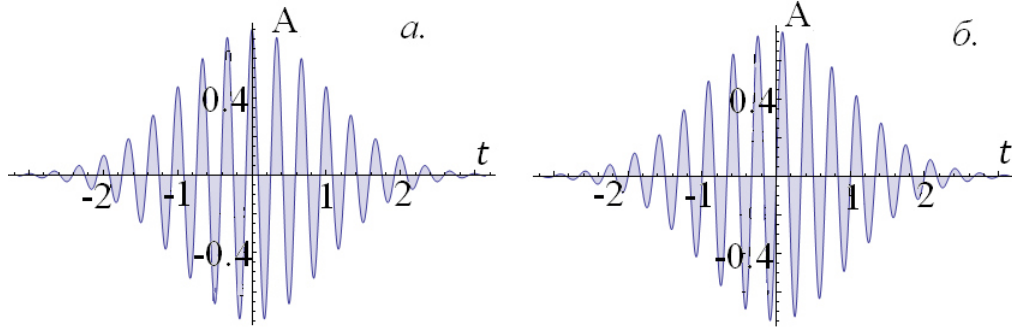


Рисунок 14. Вейвлет Морли с параметрами ( $f_b = 2$ ,  $f_c = 3$ ): а. – вещественная; б. – мнимая части

Энергия нормированной функции ВМ может быть вычислена с помощью выражения:

$$E_{\text{ВМ}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\text{ВМ}}(t)|^2 dt = 1. \quad (31)$$

В частотной области ВМ имеет форму функции плотности распределения Гаусса, при этом преобразование Фурье для ВМ легко вычислимо аналитически:

$$\begin{aligned} Y_{\text{ВМ}}(j\omega) &= \mathcal{F}\{\varphi_{\text{ВМ}}(t)\} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{2}{\pi f_b}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{j2\pi f_c t - \frac{t^2}{f_b}} \right) e^{-j\omega t} dt = \sqrt[4]{\frac{f_b}{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}f_b(\omega - 2\pi f_c)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля можно записать:

$$E_{\text{ВМ}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\text{ВМ}}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y_{\text{ВМ}}(j\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (33)$$

Записав уравнение ВМ в тригонометрической форме:

$$\varphi_{\text{ВМ}}(t) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi f_b}} e^{-\frac{t^2}{f_b}} (\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)), \quad (34)$$

и зафиксировав значения  $f_b = \text{const}$  и  $f_b \in \mathbb{N}$  (частотной полосы ВМ), получим систему уравнений, на основе которых можно определить отклонение от ортогональности комплексных компонент ВМ:



$$\left\{ \begin{array}{l} ort_{cos,cos}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi f_b}} e^{-\frac{2t^2}{f_b}} \cos(2\pi f_{c,1}t) \cos(2\pi f_{c,2}t) dt \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 0, f_{c,1} \neq f_{c,2} \\ 0.5, f_{c,1} = f_{c,2} \end{cases} \\ ort_{sin,sin}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi f_b}} e^{-\frac{2t^2}{f_b}} \sin(2\pi f_{c,1}t) \sin(2\pi f_{c,2}t) dt \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 0, f_{c,1} \neq f_{c,2} \\ 0.5, f_{c,1} = f_{c,2} \end{cases} \\ ort_{cos,sin}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi f_b}} e^{-\frac{2t^2}{f_b}} \cos(2\pi f_{c,1}t) \sin(2\pi f_{c,2}t) dt \rightarrow 0 \\ f_{c,1}, f_{c,2} \in \mathbb{N} \end{array} \right. , (35)$$

где значение 0.5 при равенстве ( $f_{c,1} = f_{c,2}$ ) является следствием определения нормы для комплексной функции ВМ (31) и равного распределения энергии между мнимой и вещественной частями ВМ. Необходимым в данной записи (35), но не обязательным в общем случае, является ограничение  $f_{c,1}, f_{c,2} \in \mathbb{N}$ . Вычисление интегралов выражения (35) даёт следующий результат:

– для cos-ных (т.е. для вещественных) составляющих ВМ:

$$ort_{cos,cos}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \frac{1 + e^{2f_b f_{c,1} f_{c,2} \pi^2}}{2\sqrt{e^{f_b(f_{c,1} + f_{c,2})^2 \pi^2}}}; \quad (36)$$

– для sin-ных (т.е. для мнимых) составляющих ВМ:

$$ort_{sin,sin}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \frac{-1 + e^{2f_b f_{c,1} f_{c,2} \pi^2}}{2\sqrt{e^{f_b(f_{c,1} + f_{c,2})^2 \pi^2}}}; \quad (37)$$

– для cos-ных на sin-ные (т.е. для вещественных на мнимые) составляющих ВМ тождественно равно нулю:

$$ort_{cos,sin}(f_{c,1}, f_{c,2}) = 0. \quad (38)$$

Анализ выражений (11) и (12), позволяет сделать вывод о повышении степени ортогональности при увеличении разности ( $f_{c,1} - f_{c,2}$ ) между частотами.

Положим, что имеется постоянное значение  $f_b = \text{const}$ , а частоты  $f_{c,1}$  и  $f_{c,2}$  изменяются по следующему закону:  $f_{c,1}$  принимает значения от 1 до  $f_{max}$ , т.е.  $f_{c,1} = 1 \dots f_{max}$ , при этом  $f_{c,2} = f_{max} - f_{c,1} + 1$ . Используя указанные условия выражение (36), можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} ort_{cos,cos}(f_{c,1}, f_{c,2}) = \frac{1 + e^{2f_b f_{c,1} f_{c,2} \pi^2}}{2\sqrt{e^{f_b(f_{c,1} + f_{c,2})^2 \pi^2}}}, \\ f_{c,2} = f_{max} - f_{c,1} + 1 \\ f_b = \text{const} \end{array} \right. , \quad (39)$$

полученная система уравнений позволяет вычислить  $ort_{cos,cos}(f_{c,1}, f_{c,2})$  в зависимости от разности  $(f_{c,1} - f_{c,2})$  между частотами.

Выбор групп вейвлетов по критерию наибольшего соответствия ортогональности может быть полезен для формирования базиса синтеза и анализа сигналов и других задач обработки сигналов.

Для практического использования ВМ используется не из  $t \in [-\infty, \infty]$ , а из ограниченного интервала  $t \in [a, b]$  (где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ ), что собственно усиливает неортогональность комплексных компонентов ВМ и вызывает отличие частотной характеристики от характеристики ВМ на интервале  $t \in [a, b]$ . Обычно  $|a| = |b|$  и  $a < 0, b > 0$ . На величину выбора интервала  $[a, b]$  оказывает влияние параметр  $f_b$ , определяющий характер и скорость затухания ВМ при удалении от центральной части (где  $t = 0$ ).

Параметр определяет вещественную экспоненту  $e^{-\frac{t^2}{f_b}}$  уравнения ВМ. Учитывая симметрию  $e^{-\frac{t^2}{f_b}}$  относительно оси ординат, интервал  $t \in [a, b]$  можно определить как  $t \in [-0.5T_{BM}, +0.5T_{BM}]$ , где  $T_{BM}$  – полная длительность ВМ и записать критерий выбора  $c_{BM}$  по условию максимально возможных значений функции ВМ за границами интервала  $t \in [-0.5T_{BM}, +0.5T_{BM}]$ :

$$\begin{cases} |\varphi_{BM}(t)| \leq c_{BM} \\ |t| \geq 0.5T_{BM} \end{cases}. \quad (40)$$

Можно записать условие выбора интервала по критерию  $e_{BM}$  допустимой неравномерности распределения энергии:

$$\begin{cases} |\varphi_{BM}(t)|^2 \leq e_{BM} \\ |t| \geq 0.5T_{BM} \end{cases}. \quad (41)$$

Интегральный критерий будет иметь вид:

$$E_{BM} \geq \int_{-0.5T_{BM}}^{0.5T_{BM}} |\varphi_{BM}(t)|^2 dt \geq eE_{BM}, \quad (42)$$

где  $eE_{BM}$  – критерий минимальной энергии ВМ на интервале  $t \in [-0.5T_{BM}, +0.5T_{BM}]$ . Учитывая, что вейвлеты используются в нормированном виде, а значит, имеют постоянное значение энергии, подобные критерии можно считать также относительными критериями.

Спектр ВМ в ограниченном интервале  $t \in [-0.5T_{BM}, +0.5T_{BM}]$  можно вычислить как:

$$\begin{aligned} Y_{BM}(j\omega) = F\{\varphi_{BM}(t)\} &= \sqrt[4]{\frac{2}{\pi f_b}} \sqrt{\frac{1}{T_{BM}}} \int_{-\frac{T_{BM}}{2}}^{\frac{T_{BM}}{2}} \left( e^{j2\pi f_c t - \frac{t^2}{f_b}} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= j \sqrt{\frac{1}{2T_{BM}}} \sqrt[4]{\frac{\pi f_b}{2}} e^{-\frac{1}{4}f_b(\omega - 2\pi f_c)^2} \left( \int_0^{\frac{2f_b f_c \pi - jT_{BM} - f_b \omega}{2\sqrt{f_b}}} e^{-t} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{2f_b f_c \pi + jT_{BM} - f_b \omega}{2\sqrt{f_b}}} e^{-t} dt \right). \end{aligned} \quad (43)$$

### 1.9. b-сплайн вейвлет

Уравнение класса нормированных по энергии комплекснозначных *b-сплайн вейвлет* (bCB) функций имеет вид (рис.15):

$$\varphi_{bCB}(t) = \sqrt{\frac{f_b}{\pi}} \left( \text{sinc} \left( \frac{f_b t}{Q} \right) \right)^Q e^{j2\pi f_c t}, \quad (44)$$

где  $f_b$  – определяет частотную полосу bCB;  $f_c$  – центральная частота bCB;  $Q$  – параметр, определяющий скорость затухания sinc-функции ( $Q = 1, 2, 3, \dots$ ).

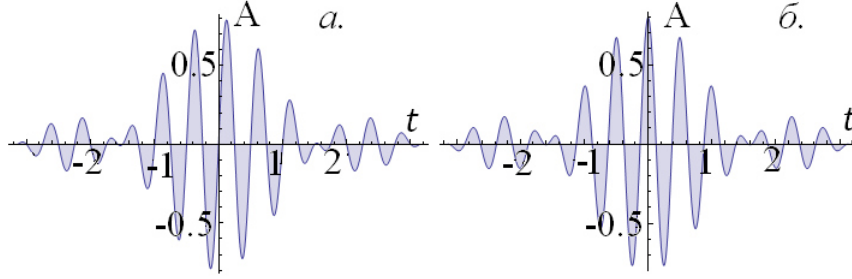


Рисунок 15. b-сплайн вейвлет с параметрами ( $f_b = 2, f_c = 2, Q = 1$ ): *а.* – вещественная; *б.* – мнимая части

Энергия нормированной функции bCB может быть вычислена с помощью выражения:

$$E_{bCB} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{bCB}(t)|^2 dt. \quad (45)$$

При  $Q = 1$  получим  $E_{bCB} = 1$ , при иных значениях ( $Q \neq 1$ ) нормировку необходимо производить с учётом параметра  $Q$ , например, в виде:

$$\varphi_{bCB}(t) = \sqrt{\frac{f_b}{\pi\sqrt[Q]{Q}}} \left( \text{sinc} \left( \frac{f_b t}{Q} \right) \right)^Q e^{j2\pi f_c t}, \quad (46)$$

при этом значения энергии близки к единице  $E_{bCB} \approx 1$ . При требовании более точной нормировки необходимо вычислять показатель  $a$  степени корня  $\sqrt[Q]{Q}$ . Например, для  $Q = 2$  хорошее нормирование даст значение  $a = 2,41$  ( $E_{bCB} \approx 1,00007$ ); для  $Q = 3$  – значение  $a = 2,2$  ( $E_{bCB} \approx 1,00141$ ); для  $Q = 4$  – значение  $a = 2,13$  ( $E_{bCB} \approx 1,00016$ ); для  $Q = 30$  – значение  $a = 2,0309$  ( $E_{bCB} \approx 1,00031$ ).

В частотной области образ bCB достаточно легко вычислим аналитически, через преобразование Фурье, так, при значении параметра  $Q = 1$  получим:

$$\begin{aligned} Y_{bCB}(j\omega) = F\{\varphi_{bCB}(t)\} &= \sqrt{\frac{f_b}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sinc}(f_b t) e^{j2\pi f_c t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\text{sign}(f_b + 2f_c\pi - \omega) + \text{sign}(f_b - 2f_c\pi + \omega)}{2\sqrt{2}f_b}, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|} \in \{-1, 1\}$  – функция знака. Идеальная локализация спектра обусловлена наличием sinc-функции [15, 16] в уравнении bCB (5), как известно, sinc-функция является импульсной характеристикой идеального низкочастотного фильтра.

Расчёты показывают, что на интервале  $t \in [-\infty, \infty]$  bCB удовлетворяет условию ортогональности с точностью 10 знаков и более, на практике, когда bCB используется из ограниченного промежутка как  $t \in [-0.5T_{bCB}, +0.5T_{bCB}]$ , где  $T_{bCB}$  – полная длительность bCB, условие ортогональности необходимо рассчитывать индивидуально. Следует отметить, что sinc-функция является колебательной, знакопеременной, именно она определяет характер затухания bCB при удалении от центра, предпочтительнее для определения границ промежутка  $t \in [-0.5T_{bCB}, +0.5T_{bCB}]$  выбирать такие значения  $0.5T_{bCB}$  в которых sinc-функция обращается в ноль, т.е.  $|0.5T_{bCB}| = \pi k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, гармонические функции, также образующие bCB, при целом значении  $f_c$  будут использованы на периоде гармонических функций, что также способствует выполнению условия ортогональности.

В общем случае оценку выбора интервала  $t \in [-0.5T_{bCB}, +0.5T_{bCB}]$  по критерию  $c_{bCB}$ , ограничивающему максимальные значения функции за границей интервала можно произвести по формуле:

$$\begin{cases} |\varphi_{bCB}(t)| \leq c_{bCB} \\ |t| \geq 0.5T_{bCB} \end{cases} \quad (48)$$

Если в качестве критерия использовать допустимый максимум энергии сигнала за границами интервала, то необходимо использовать условия:

$$\begin{cases} |\varphi_{bCB}(t)|^2 \leq e_{bCB} \\ |t| \geq 0.5T_{bCB} \end{cases} \quad (49)$$

Можно использовать интегральный критерий:

$$E_{bCB} \geq \int_{-0.5T_{bCB}}^{0.5T_{bCB}} |\varphi_{bCB}(t)|^2 dt \geq eE_{bCB}, \quad (50)$$

где  $eE_{bCB}$  – критерий минимальной энергии bCB на интервале  $t \in [-0.5T_{bCB}, +0.5T_{bCB}]$ .

Спектр bCB в интервале  $t \in [-0.5T_{bCB}, +0.5T_{bCB}]$  можно оценить как:

$$\begin{aligned} Y_{bCB}(j\omega) &= F\{\varphi_{bCB}(t)\} = \sqrt{\frac{f_b}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{T_{bCB}}} \int_{-0.5T_{bCB}}^{0.5T_{bCB}} (\text{sinc}(f_b t) e^{j2\pi f_c t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\text{sign}\left(\frac{T_{bCB}}{2}(f_b + 2f_c\pi - \omega)\right) + \text{sign}\left(\frac{T_{bCB}}{2}(f_b - 2f_c\pi + \omega)\right)}{\sqrt{\pi f_b T_{bCB}}}. \end{aligned} \quad (51)$$

### 1.10. Вейвлет Шеннона

Класс комплекснозначных вейвлетов Шеннона<sup>1</sup> (ВШ) (рис. 16) задан функцией вида:

$$\varphi_{\text{ВШ}}(t) = \text{sinc}(\pi t f_b) e^{-2j\pi t f_c}, \quad (52)$$

где  $f_b$  – определяет частотную полосу ВШ;  $f_c$  – центральная частота ВШ. ВШ можно рассматривать как частный случай bCB.

Класс ВШ образует множество попарно взаимно ортогональных функций. Скорость затухания ВШ определяется входящей в состав выражения (52)  $\text{sinc}(\pi t f_b)$ -функцией.

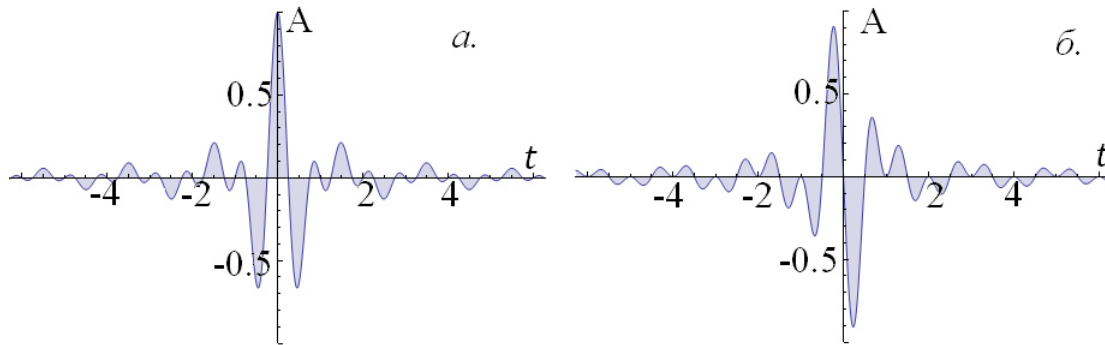


Рисунок 16. Вейвлет Шеннона с параметрами ( $f_b = 1, f_c = 1$ ):  
а. – вещественная; б. – мнимая часть

Преобразование Фурье ВШ имеет следующий вид:

$$Y_{\text{ВШ}}(j\omega) = F\{\varphi_{\text{ВШ}}(t)\} = \frac{\text{sign}(\pi f_b - 2\pi f_c - \omega) + \text{sign}(\pi f_b + 2\pi f_c + \omega)}{2f_b \sqrt{2\pi}}. \quad (53)$$

При ограничении интервала использования ВШ  $t \in [-0.5T_{\text{bCB}}, +0.5T_{\text{bCB}}]$  можно использовать правила, сформулированные ранее при определении bCB.

### 1.11. Вейвлет Хаара

Семейство комплекснозначных вейвлетов Хаара<sup>2</sup> (ВХ) отличается от рассмотренных ранее гладких вейвлет-функций меандр-подобной формой (рис. 17).

Комплексная пара родительских ВХ задаётся уравнением:

$$\begin{cases} \text{Re}(\varphi_{\text{ВХ}}(t)) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \\ \text{Im}(\varphi_{\text{ВХ}}(t)) = \begin{cases} j, & t \in [0, 0.5) \\ -j, & t \in [0.5, 1) \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \end{cases}. \quad (54)$$

<sup>1</sup> Клод Элвуд Шеннон (30 апреля 1916 – 24 февраля 2001) – американский инженер, криптоаналитик и математик. Считается «отцом информационного века».

<sup>2</sup> Альфред Хаар (11 октября 1885 – 16 марта 1933) – венгерский математик.

При нормировании по энергии уравнения родительских ВХ имеют следующий вид:

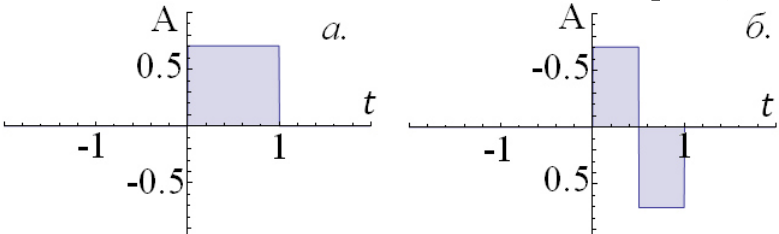
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\varphi_{\text{ВХ}}(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t \in [0, 1) \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \\ \operatorname{Im}(\varphi_{\text{ВХ}}(t)) = \begin{cases} \frac{j}{\sqrt{2}}, & t \in [0, 0.5) \\ -\frac{j}{\sqrt{2}}, & t \in [0.5, 1) \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \end{cases} \quad (55)$$


Рисунок 17. Нормированный вейвлет Хаара:  
а. – вещественная; б. – мнимая части

Известно, что спектр идеальных меандровых функций неограничен, но несмотря на этот факт приближённые меандр-подобные функции (с ограниченным спектром) находят достаточно широкое применение в радиолокации и связи [17].

Преобразование Фурье нормированной по энергии функции ВХ (55) имеет следующий вид:

$$Y_{\text{ВХ}}(j\omega) = F\{\varphi_{\text{ВХ}}(t)\} = \frac{e^{-j\omega} \left( (1+j) - 2e^{\frac{j\omega}{2}} + (1-j)e^{j\omega} \right)}{2\omega\sqrt{\pi}} \quad (56)$$

Из выражения (56) вполне очевидно что при бесконечной протяжённости спектр ВХ достаточно быстро затухает обратно пропорционально частоте  $\omega$ , что является следствием дуализма преобразования Фурье sinc(...)-функции и одиночной меандроподобной функции. При сглаживании ВХ можно получить вовсе ограниченный спектр.

Сглаженные функции из семейства ВХ можно получить при обратном преобразовании Фурье функции (56) с ограниченной полосой частот  $\omega$ .

### 1.12. Синтез некоторых вейвлетов в MatLab

В разделе “Некоторые примеры программной реализации” приведён текст функций (листинг 2.1-2.3) синтеза некоторых вейвлетов, нашедших достаточно широкое применение для синтеза широкополосных сигналов [17-19].

В программе (листинг 1.3) приведён пример практического использования функций синтеза вейвлетов. Код MatLab (листинг 1.3) содержит: синтез, оценку ортогональности о вещественных комплекснозначных компонент по их скалярному произведению и построение графиков комплекснозначных вейвлетов, отдельно мнимой и отдельно вещественной части.

### Листинг 1.3. Синтез комплекснозначных вейвлетов

```
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% =====
% параметры
Lb = -pi; % нижняя граница аргумента
Ub = pi; % верхняя граница аргумента
N = 128; % число отсчётов
Fc = 4; % центральная частота
%% синтез комплекснозначных вейвлетов
% гармонический вейвлет
[PSI_cg,X_cg] = mi_cgarm( Lb, Ub, N, Fc );
% модулированный гармонический вейвлет
[PSI_cwg,X_cwg] = mi_cwgarm( Lb, Ub, N, Fc );
% меандроподобный вейвлет
[PSI_cm,X_cm] = mi_cmeandr( Lb, Ub, N, Fc );

%% =====
fprintf('Оценка ортогональности \n');
fprintf('овещественных комплексных компонент \n');
fprintf('по их скалярному произведению \n');
fprintf('гармонический вейвлет: dt = %f \n',...
        dot(real(PSI_cg),imag(PSI_cg)));
fprintf('модулированный гарм. вейвлет: dt = %f \n',...
        dot(real(PSI_cwg),imag(PSI_cwg)));
fprintf('меандроподобный вейвлет: dt = %f \n',...
        dot(real(PSI_cm),imag(PSI_cm)));

%% =====
%% визуализация
figure();
subplot(3,2,1); plot(X_cg,real(PSI_cg)); grid on;
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('real(PSI\_cg)');
subplot(3,2,2); plot(X_cg,imag(PSI_cg)); grid on;
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('imag(PSI\_cg)');
subplot(3,2,3); plot(X_cwg,real(PSI_cwg)); grid on;
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('real(PSI\_cwg)');
subplot(3,2,4); plot(X_cwg,imag(PSI_cwg)); grid on;
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('imag(PSI\_cwg)');
subplot(3,2,5); stairs(X_cm,real(PSI_cm)); grid on;
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('real(PSI\_cm)');
subplot(3,2,6); stairs(X_cm,imag(PSI_cm)); grid on;
```

```
axis([Lb Ub -1.5 1.5]); title('imag(PSI\_cm)');
```

Графический результат выполнения программы приведён на рис. 18.

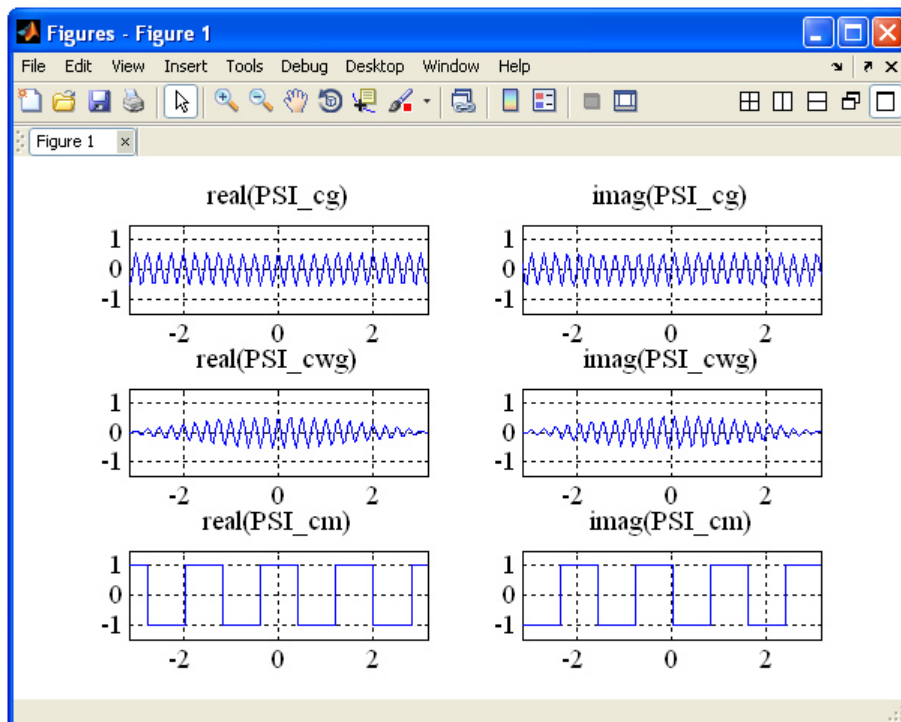


Рисунок 18. Вейвлет функции, полученные в результате выполнения программы (листинг 1.3) (окно MatLab)

### 1.13. Функции Уолша и матрицы Адамара

Протяжённость функций Уолша<sup>1</sup> ограничена целым положительным числом, большинство функций Уолша  $w(t)$  знакопеременны и имеют равный нулю интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 0$ , поэтому функции Уолша можно отнести к вейвлет-функциям. Следует отметить, что знакопостоянные функции Уолша не будут иметь равный нулю интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt \neq 0$ , а спектр меандроподобных функций Уолша плохо локализован и имеет длинные «хвосты». Функции Уолша позволяют синтезировать ансамбли меандроподобных попарно ортогональных функций, частным случаем является вейвлет Хаара. Функции Уолша получили широкое распространение в задачах анализа и синтеза сигналов [20-24].

Распространённый метод синтеза основан на построении матриц Адамара<sup>2</sup> размера  $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$  с помощью алгоритма (правила)

<sup>1</sup> Джозеф Леонард Уолш (англ. Joseph Leonard Walsh; 21 сентября 1895 – 6 декабря 1973) – американский математик известный работами в области анализа функций и теории кодирования.

<sup>2</sup> Жак-Саломон Адамар (англ. Jacques Salomon Hadamard, 8 декабря 1865 – 17 октября 1963) — французский математик, физик, автор множества фундаментальных работ по алгебре, геометрии,



Сильвестра<sup>1</sup>, в основе которого лежит последовательное рекуррентное удвоение размера матрицы Адамара с помощью кронекеровского произведения матриц ( $\otimes$ ). В качестве основы можно взять матрицу Адамара размером  $2 \times 2$ , так называемую простейшую матрицу Адамара:  $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Дальнейшая последовательность действий заключается в рекуррентном выполнении операции кронекеровского произведения:

$$H_4 = H_2 \otimes H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_8 = H_4 \otimes H_2$$

и т.д., что в общем виде можно записать:

$$\begin{cases} H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ H_{2^{n+1}} = H_{2^n} \otimes H_2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (57)$$

Каждая строка (или столбец) матрицы Адамара является дискретной функцией Уолша (или вектором Уолша), векторы Уолша из одной матрицы Адамара попарно перпендикулярны и образуют базис соответствующего размера  $N = 2^n$ .

Результат поэлементного произведения двух функций Уолша длиной  $N$  является функцией Уолша.

Следует отметить, что в общем случае матрицы Адамара – это матрицы максимума детерминанта, т.е. матрицы фиксированного порядка (размера), с элементами, не превосходящими по модулю заданного значения и имеющие наибольшее значение определителя среди всех матриц такого же порядка. Поэтому рассмотренная матрица Адамара  $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  является частным случаем обобщённого множества матриц Адамара. Отметим, что найдены матрицы Адамара, имеющие размер, не принадлежащий ряду, образованному числами  $2^n, n \in \mathbb{N}$ , комплекснозначные матрицы Адамара. Поэтому не все матрицы Адамара позволяют получить векторы Уолша, а только матрицы Адамара с элементами из множества  $\{\pm 1\}$ . Анализ технической литературы показывает, что говоря о матрицах Адамара, многие авторы имеют в виду матрицы из множества (57). Матрицы Адамара нашли широкое применение в задачах синтеза ансамблей широкополосных сигналов, в задачах кодирования, цифровой обработки сигналов, анализе биологических систем (матричной генетике) и др.

---

функциональному анализу, дифференциальной геометрии, математической физике, топологии, теории вероятностей, механике, гидродинамике и др.

<sup>1</sup> Джеймс Джозеф Сильвестр (англ. James Joseph Sylvester; 3 сентября 1814 – 15 марта 1897) – английский математик, автор многих работ по теории матриц, теории чисел и комбинаторике. Основатель Американского математического журнала.

Существует способ поиска и определения функций Уолша через произведение функций Радемахера<sup>1</sup>: множество функций Уолша есть множество произведений всевозможных функций Радемахера [21].

Функции Радемахера, в свою очередь, часто определяют уравнением вида  $r_k(t) = \text{sign}(\sin(2^k \pi t))$  на интервале  $[0,1)$ , тогда в системе нумерации Уолша-Пэли функции Уолша можно определить следующим образом [21]: разложим номер функции Уолша в двоичной системе исчисления:  $n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + \dots + n_m 2^{m-1}$ , где  $n_i \in \{0,1\}$ ,  $n_m = 1$ , тогда на интервале  $[0,1)$ :

$$w_n(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (r_k(t))^{n_{k+1}}, \quad (58)$$

где число  $m$  – число, равное числу разрядов в двоичной форме записи числа  $n$ , и находится из условия  $2^{m-1} \leq n < 2^m$ . Отметим, что основные функции Уолша совпадают с функциями Радемахера:  $w_1(t) = r_0(t)$ ,  $w_2(t) = r_1(t)$ , ...,  $w_{2^n}(t) = r_n(t)$ , также в данное определение не входит монополярная (знакопостоянная) функция Уолша. Знакопостоянную функцию Уолша можно определить как  $w_0(t) = 1$  на интервале  $[0,1)$ .

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется условие: интеграл функции Уолша на интервале  $[0,1)$  равен нулю:

$$\int_0^1 w_n(t) dt = 0; \quad (59)$$

Для любого  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$  система функций Уолша ортонормированна на интервале  $[0,1)$ , т.е.:

$$\int_0^1 w_{n_1}(t) w_{n_2}(t) dt = \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2 \\ 1, & n_1 = n_2 \end{cases}. \quad (60)$$

Пример синтеза матрицы Адамара приведён в программе (листинг 1.4). В этой же программе содержится расчёт автокорреляции матрицы Адамара, далее имеется окно, сформированное в результате работы программы (рис. 19).

#### Листинг 1.4. Синтез и автокорреляция матрицы Адамара

```
clear all;           % очистка переменных
close all;           % закрыть все окна
clc;                 % очистка командного окна
%% =====
% Синтез и автокорреляция матрицы Адамара
NN = 16; % размер матрицы
MH = hadamard(NN); % синтез матрицы Адамара
XCMH = xcorr2(MH); % автокорреляция

%% визуализация
figure();
% матрица Адамара
subplot(1,2,1); pcolor(MH);
% автокорреляция
```

<sup>1</sup> Ганс Адольф Радемахер (3 апреля 1892 – 7 февраля 1969) – германский математик.

```
subplot(1,2,2); mesh(XCMH);
```

В приведённом окне (рис. 19) содержится отображение бинарной матрицы Адамара, образованной векторами (строками или столбцами) Уолша, а также визуализация функции автокорреляции матрицы Адамара. На графическом изображении автокорреляции матрицы Адамара заметен значительный всплеск в центральной части. Такие автокорреляционные свойства, доминирование центрального пика над боковыми лепестками, используют для синтеза и анализа (распознавания) некоторых широкополосных сигналов.

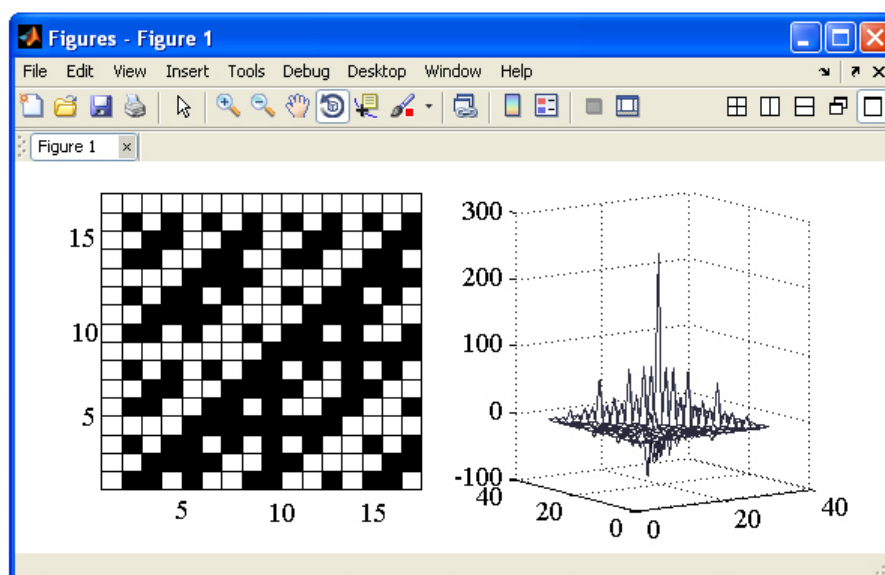


Рисунок 19. Визуализация матрицы Адамара  $16 \times 16$  и её автокорреляционной функции (окно MatLab)

#### 1.14. Вейвлет-преобразование

Некоторые сигналы, обычно присущие сложным системам, наилучшим образом подвергаются декомпозиции с помощью вейвлет-функций. В рамках вейвлет-преобразования (англ. WT – *wavelet transform*) исходные вейвлет-функции также называют порождающими родительскими вейвлетами. Порождающий или родительский вейвлет (или комплексная пара вейвлет-функций) связан с порождённым семейством через параметры  $u$  – масштаба (растяжения, сжатия) и  $p$  – сдвига. Порождённые вейвлеты имеют вид:

$$\varphi_{u,p}(t) = \frac{1}{\sqrt{|u|}} \varphi\left(\frac{t-p}{u}\right). \quad (61)$$

Прямое преобразование (анализ) [25-27] непрерывного сигнала  $x(t)$  выполняется на основании выражения:

$$X(u,p) = \text{WT}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_{u,p}^*(t) dt, \quad (62)$$

где  $u$  – параметр растяжения или сжатия вейвлета,  $p$  – параметр временного сдвига вейвлета. Очевидно, что выражение (62) есть расчёт корреляции сигнала  $x(t)$  и вейвлета  $\frac{1}{\sqrt{|u|}} \varphi\left(\frac{t-p}{u}\right)$ .

Обратное преобразование (синтез) непрерывного сигнала  $x(t)$  выполняется на основании выражения:

$$x(t) = WT^{-1}(X(u, p)) = \frac{1}{C_\varphi} \frac{1}{u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(u, p) \varphi_{u,p}(t) du dp, \quad (63)$$

где  $C_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathcal{F}\{\varphi(t)\}|^2}{|\omega|} d\omega$  – постоянная допустимости.

Вейвлет преобразование является линейным преобразованием, т.к. удовлетворяет свойствам:

– аддитивности

$$\begin{cases} WT\{x_1(t)\} + WT\{x_2(t)\} = WT\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ WT^{-1}\{X_1(j\omega_1 k)\} + WT^{-1}\{X_2(j\omega_1 k)\} = WT^{-1}\{X_1(j\omega_1 k) + X_2(j\omega_1 k)\} \end{cases} \quad (64)$$

– однородности

$$\begin{cases} WT\{k \cdot x_1(t)\} = k \cdot WT\{x_1(t)\} \\ WT^{-1}\{k \cdot X_1(j\omega_1 k)\} = k \cdot WT^{-1}\{X_1(j\omega_1 k)\} \end{cases} \quad (65)$$

где  $k$  – некоторый постоянный коэффициент.

Вейвлет преобразование инвариантно относительно сдвига и масштабирования. Сдвиг сигнала на  $\Delta t$  приводит к эквивалентному сдвигу вейвлет-преобразования на  $\Delta t$ :

$$X(u, p - \Delta t) = WT\{x(t - \Delta t)\}. \quad (66)$$

Масштабирование (растяжение или сжатие) сигнала на  $u_0$  приводит к эквивалентному масштабированию вейвлет-преобразования на  $u_0$ :

$$\frac{1}{u_0} X\left(\frac{u}{u_0}, \frac{p}{u_0}\right) = WT\left\{x\left(\frac{t}{u_0}\right)\right\}. \quad (67)$$

Свойства дифференцирования вейвлет-преобразования:

$$\frac{d^n WT\{x(t)\}}{dt^n} = WT\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} \quad (68)$$

и

$$WT\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d^n \varphi_{u,p}(t)}{dt^n} dt. \quad (69)$$

Вейвлет-преобразование на базе ортогональных и биортогональных вейвлетов сохраняет энергию сигнала [28], что можно обозначить как аналог теоремы Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\varphi} \frac{1}{u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(u, p) X^*(u, p) du dp. \quad (70)$$

Особенностью вейвлет-преобразования является то, что оно позволяет получить образ сигнала в пространстве  $(u, p)$ , т.е. фактически в пространстве частота-время. Таким образом, вейвлет-преобразование позволяет локализовать спектр сигнала, подобно оконному преобразованию Фурье.

В качестве примера рассмотрим визуализацию результата вейвлет-преобразования сигнала  $x(t) = \sin\left(\left(\frac{\pi t}{128} - 4\pi\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi t}{128} - 4\pi\right)\right)$ , полученного на основе показательной и гармонических функций. График сигнала изображён на рис. 20.

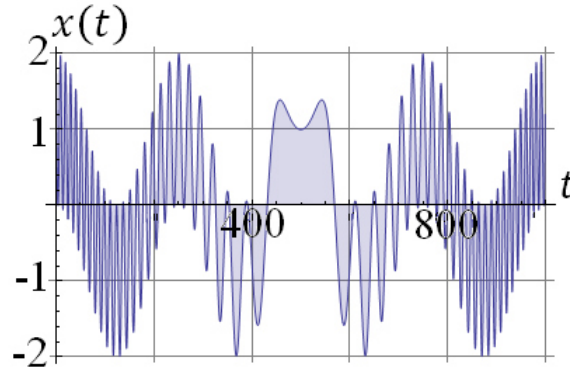


Рисунок 20. Сигнал  $x(t)$

Результаты преобразования приведены на рис. 21, подобные графики визуализации коэффициентов вейвлет-преобразования, в зарубежной литературе называют *Wavelet Scalogram* (англ.) [29]. В отечественной литературе подобные графики обычно называют вейвлет-спектрограмма. Анализ вейвлет, спектрограмм позволяет сделать вывод о достаточно хорошей идентификации спектра сигналов, выявлена низкочастотная составляющая ( $\cos(\dots)$ -ная) и составляющая с нарастающей частотой к краям от центра определения сигнала ( $\sin(\dots)$ -ная). Причём благодаря гармоническому характеру ВМ гармонические частотные составляющие определены без разрывов (рис. 21, а.), в то время как использование ВГ даёт спектрограмму с явными периодическими провалами в спектре (рис. 21, б.), что обусловлено формой ВГ, который даёт существенно большие значения корреляции в области (всплесков) максимумов и минимумов гармонических функций. Таким образом, для эффективного анализа сигналов необходимо тщательно выбирать семейство анализирующих вейвлетов. В некоторых случаях, учитывая специфику сигнала, необходимо синтезировать специальные вейвлеты, используя которые, можно ожидать наилучший результат преобразования. Это является одной из причин значительного многообразия вейвлет-функций, многие из которых ориентированы на вейвлет-преобразование определённых классов сигналов и другие задачи анализа и синтеза.

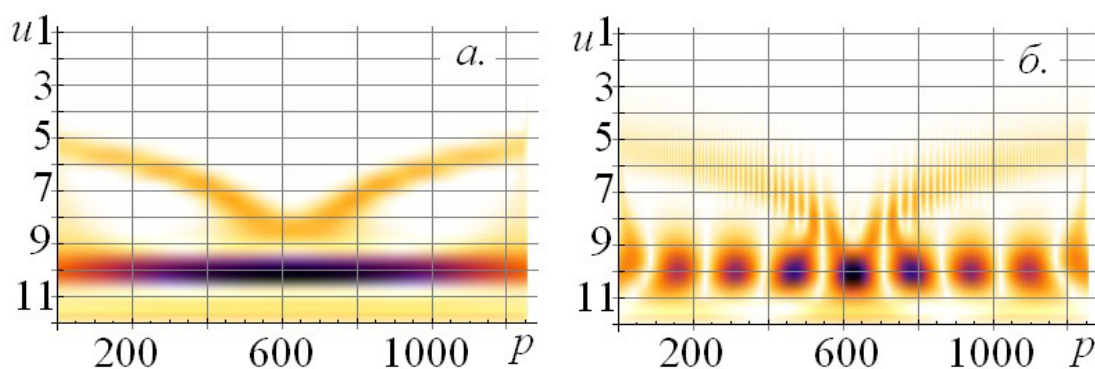


Рисунок 21. Визуализация результата вейвлет-преобразования: *а.* – для преобразования использован ВМ; *б.* – для преобразования использован ВГ (вторая производная)

Программная среда MatLab имеет развитые инструменты применения вейвлет-функций в задачах практического анализа [28, 29]. MatLab позволяет пользователю производить традиционный анализ с помощью написания кода, использовать визуальный дизайнер, вызываемый функцией `wavemenu`, применять средства визуального программирования Simulink.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В данном разделе представлены некоторые функции, разработанные в среде САПР MatLab для анализа и синтеза широкополосных сигналов. Каждая функция содержит комментарии, а благодаря ясному и лаконичному языку MatLab коды функций достаточно легко воспринимаются.

### Листинг 2.1. Функция синтеза комплексного гармонического вейвлета

```
function [PSI,X] = mi_cgarm( Lb, Ub, N, Fc )
%% =====
%% mi_cgarm - функция синтеза
%               комплексного гармонического вейвлета
% входные параметры:
%   LB - меньшая граница аргумента
%   UB - большая граница аргумента
%   N  - число точек в результирующем массиве
%   FC - центральная частота
% возвращает: [PSI,X]
%   PSI - отсчёты гармонического вейвлета
%   X   - аргумент
%% =====
X = linspace(Lb,Ub,N); % аргумент гармонического вейвлета
PSI = ((pi)^(-0.5)).*exp(2*i*pi*Fc*X);
end
```

### Листинг 2.1. Функция синтеза комплексного модулированного гармонического вейвлета

```
function [PSI,X] = mi_cwgarm( Lb, Ub, N, Fc )
%% =====
%% mi_cwgarm - функция синтеза
%               комплексного модулированного гармонического вейвлета
% входные параметры:
%   LB - меньшая граница аргумента
%   UB - большая граница аргумента
%   N  - число точек в результирующем массиве
%   FC - центральная частота
% возвращает: [PSI,X]
%   PSI - отсчёты модулированного гармонического вейвлета
%   X   - аргумент
%% =====
X = linspace(Lb,Ub,N); %
Xmult = sin(linspace(0,pi,N)); %
PSI = ((pi)^(-0.5)).*Xmult.*exp(2*i*pi*Fc*X);
end
```

### Листинг 2.3. Функция синтеза комплексного меандрового вейвлета

```
function [PSI,X] = mi_cmeandr( Lb, Ub, N, Fc )
```

```

%mi_sgarm - функция синтеза комплексного меандрового вейвлета
% входные параметры:
%   LB - меньшая граница аргумента
%   UB - большая граница аргумента
%   N   - число точек в результирующем массиве
%   FC  - центральная частота
% возвращает: [PSI,X]
%   PSI - отсчёты меандрового вейвлета
%   X   - аргумент меандрового вейвлета
%% =====
X = linspace(Lb,Ub,N); % аргумент меандрового вейвлета
NP2 = round(N/(2*Fc));
psi_re = zeros(1,N);
psi_im = zeros(1,N);
arg = -1;
for ns = 1:NP2:N
    if N-ns < NP2
        psi_im(ns:end) = arg;
        break;
    end
    psi_im(ns:ns+NP2-1) = arg;
    arg = -arg;
end
psi_re = circshift(psi_im, [0 round(NP2/2)]);
PSI = psi_re + 1i.*psi_im;
end

```



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонина А. И., Улахович Д. А., Арбузов С. М., Соловьёва Е. Б. Основы цифровой обработки сигналов. Курс лекций // изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.: ил.
2. Гришеницев А.Ю., Коробейников А.Г. Применение некоторых вейвлетов для генерации широкополосных сигналов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 8. С.: 712-720
3. Дворкович В. П., Дворкович А. В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов // М.: Техносфера, 2014. – 112 с.
4. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.: ил.
5. Heinzel G., Rüdiger A., Schilling R. Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows // Max Planck Institute (MPI) für Gravitationsphysik, 2002. – 84 p.
6. Harris F.J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform // Proceedings of the IEEE. Vol. 66, 1978, pp. 51–83.
7. Гришеницев А.Ю. Цифровые системы широкополосной связи. Часть 1. Введение в пространства и методы преобразования сигналов // СПб: Университет ИТМО, 2019. – 76 с.
8. Гришеницев А.Ю., Коробейников А.Г. Декомпозиция n-мерных цифровых сигналов по базису прямоугольных всплесков // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 75-79.
9. Смоленицев Н.К. Вейвлет-анализ в MatLab. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 448 с.: ил.
10. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing – Academic Press, 1999. – 637 p.
11. Nikookar H. Wavelet radio adaptive and reconfigurable wireless systems based on wavelets – Cambridge University Press, 2013. – 224 p.
12. MatLab: Wavelet Toolbox – Обработка сигналов и изображений // Центр компетенций MatLab, 2019. URL: <http://matlab.exponenta.ru/wavelet/faq/faq.php>
13. Wavelet Analysis. Wolfram Language & System // Wolfram, 2019. URL: <http://reference.wolfram.com/language/guide/Wavelets.html>
14. MorletWavelet // Wolfram Language & System Documentation Center, 2019. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/MorletWavelet.html>
15. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е издание, испр. // М.: Техносфера, 2009. – 856 с.: ил.

16. *Ярлыков М.С.* Меандровые и шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых и радионавигационных системах // М.: Радиотехника, 2017. – 416 с.
17. *Гришенцев А.Ю.* Эффективное сжатие изображений на базе дифференциального анализа // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 11. С. 10.
18. *Беспалов М.С.* Дискретные функции Уолша и их приложения // Владимир: изд-во ВлГУ, 2014. – 68 с.
19. *Беспалов М.С.* Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 2. Введение в прикладной гармонический анализ // Владимир: ВлГУ. 2007. – 244 с.
20. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Алгоритм поиска, некоторые свойства и применение матриц с комплексными значениями элементов для стеганографии и синтеза широкополосных сигналов // Журнал радиоэлектроники. 2016. № 5. С. 9.
21. *Гришенцев А.Ю.* Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 6. С. 1074-1083. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
22. *Гришенцев А.Ю.* Способ синтеза и применение шумоподобных широкополосных сигналов в задачах организации защищенных каналов связи // Радиотехника. 2017. № 9. С. 101-107
23. *Merry R. J. E.* Wavelet Theory and Applications // Eindhoven University of Technology, Eindhoven, June 7, 2005. – 49 p.
24. *Lee T. L. Daniel, Yamamoto A.* Wavlet Analysis: Theory and Applications // Hewlett-Packard journal, Dec. 1994. – P.: 44-52 URL: <http://www.hparchive.com/Journals/HPJ-1994-12.pdf>
25. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Методы и модели цифровой обработки изображений // Монография. СПб: Изд. центр Университета ИТМО, 2014. – 189 с.
26. *Mertins A.* Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications // John Wiley & Sons Ltd. University of Wollongong, Australia, 1999. – P.: 330
27. Wavelet Scalogram // Wolfram Language & System Documentation Center, 2017. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/WaveletScalogram.html>
28. *Коробейников А.Г., Гришенцев А.Ю.* Разработка и исследование многомерных математических моделей с использованием систем компьютерной алгебры. – СПб: НИУ ИТМО, 2014. – 100 с.
29. *Коробейников А.Г.* Проектирование и исследование математических моделей в средах MatLab и Maple. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2012. – 160 с.

**Гришенцев Алексей Юрьевич,  
Коробейников Анатолий Григорьевич,  
Арустамов Сергей Аркадьевич**

**Цифровые системы широкополосной связи.  
Часть 2. Оконные и вейвлет функции и преобразования**

**Учебное пособие**

В авторской редакции  
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО  
Зав. РИО Н. Ф. Гусарова  
Подписано к печати  
Заказ №  
Отпечатано на ризографе