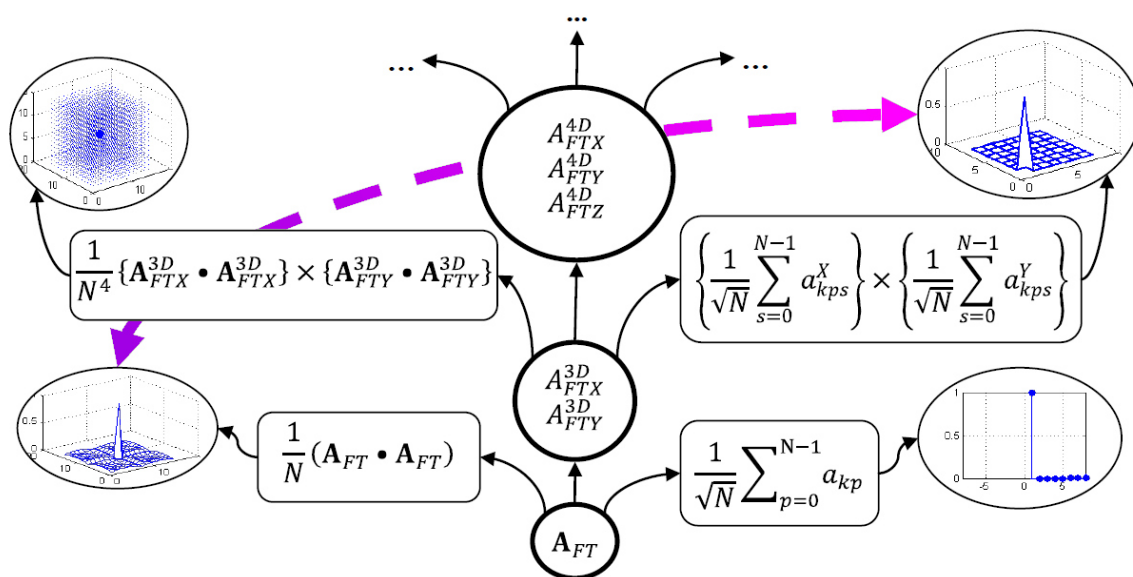


А.Ю. Гришенцев

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СВЯЗИ. ЧАСТЬ 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВА И МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ



Санкт-Петербург
2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Гришенцев

**ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СВЯЗИ.
ЧАСТЬ 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВА И МЕТОДЫ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ**
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 10.03.01, 10.04.01, 11.03.03, 11.04.03 в
качестве учебного пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ
высшего образования бакалавриата, магистратуры

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2019

Гришенцев А.Ю. Цифровые системы широкополосной связи. Часть 1.
Введение в пространства и методы преобразования сигналов – СПб: Университет
ИТМО, 2019. – 72 с.

Рецензент:

Герасимов Игорь Владимирович, д.т.н., профессор, профессор кафедры
САПР СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра САПР СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

Учебное пособие является вводной частью в теорию пространств и
методов преобразования сигналов в цифровых системах широкополосной связи,
материал иллюстрирован примерами программ на языке MatLab.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, магистров, обучающихся по
направлениям подготовки: 11.03.03, 11.04.03 – «Конструирование и технология
электронных средств», 10.03.01, 10.04.01 – «Информационная безопасность»;
дисциплины: «Волновые процессы в средах», «Радиотехника», «Обработка
цифровых сигналов в системах защиты информации».

Работа может быть полезна аспирантам, обучающимся по соответствующим
направлениям.

Автор выражает благодарность за ценные замечания д.т.н., профессору Сергею
Аркадьевичу Арустамову, к.т.н., доценту Владимиру Ивановичу Полякову и
редактору к.т.н., доценту Наталии Федоровне Гусаровой.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и
фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009
году статус национального исследовательского университета. С 2013 года
Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности
российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных
центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО –
становление исследовательского университета мирового уровня,
предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию
всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© Гришенцев А.Ю., 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПРОСТРАНСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ.....	6
1.1. Классическое комплексное евклидово пространство	6
1.2. Современные комплексные векторные пространства	8
1.3. Представление сигналов в векторных пространствах	11
1.4. Линейная система	16
1.5. Свёртка и корреляция	18
1.6. Преобразование Фурье	20
1.7. Функция ступеньки, единичный импульс	28
1.8. Теорема о свёртке	29
1.9. Преобразование Лапласа	30
1.10. Z-преобразование.....	33
1.11. Разностное уравнение, передаточная функция	35
1.12. Преобразование Гильберта, аналитический сигнал.....	36
1.13. Дополнительно о свойствах преобразования Фурье.....	38
1.14. Некоторые особенности вычисления быстрой корреляции	40
1.15. Линейное унитарное преобразование.....	48
1.16. Корреляционные и фрактальные свойства матрицы Фурье.....	49
1.17. Замечания о многомерных сигналах.....	54
1.18. Теоремы о понижении размерности пространства	58
2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ	62
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	69

ВВЕДЕНИЕ

Конвергенция научного знания не обошла стороной теорию и практику радиосвязи, что обеспечивает трансдисциплинарную модель знаний теории связи. Сами по себе современные системы связи достаточно детально классифицированы: по виду исполнения, по назначению и целевому практическому использованию, по принадлежности к однопользовательским или многопользовательским, по пространственному размещению элементов и узлов (наземные, космические, смешанные), по виду модуляции сигнала, виду кодирования сообщений и пр. Различия типов систем связи обуславливает разнообразие теоретического аппарата поддержки, методов анализа, синтеза и проектирования. Одним из краеугольных вопросов современной теории связи является цифровая и смешанная обработка сигналов. В работе [1] достаточно известный исследователь Н. И. Ключев пишет следующее: «Теория передачи сообщений развивалась по двум направлениям. Первое было сформулировано и разработано [2] В. А. Котельниковым¹ – в СССР и Д. Миддлтоном² – в США. Это направление представляет собой теорию статистического обнаружения сигналов на фоне помех или теорию потенциальной помехоустойчивости. Второе направление, основанное на понятии «количества информации», разработано в трудах А. Н. Колмогорова³, К. Шеннона⁴, А. Я. Хинчина⁵ и др. авторов. Длительное время оба направления развивались самостоятельно, и лишь в последние годы (речь идёт о 60-хх гг. XX столетия) оба направления сближаются».

Современная теория связи неразрывно связана с аналоговой, цифровой и смешанной обработкой сигналов, теорией вероятностей и математической статистикой, теорией информации, теорией оптимизации, теорией электромагнитного поля, криптографией и стеганографией, для практической реализации методов и средств связи не обойтись без аппаратных решений микро- и нанoeлектроники, схемотехники, систем автоматизации проектирования (САПР) [3-5], средств автоматизации производства.

Новейшая теория связи, кроме того, дополнилась новым направлением, основанным на квантовой механике. Предоставляемая современными

¹ Владимир Александрович Котельников (24 августа (6 сентября) 1908 – 11 февраля 2005) – российский учёный в области радиофизики, радиотехники, электроники, информатики, радиоастрономии и криптографии. Один из основоположников советской секретной радио- и телефонной связи. Академик АН СССР, академик РАН, вице-президент АН СССР (1970 – 1988 гг), дважды Герой Социалистического Труда.

² Давид Миддлтон (19 апреля 1920 – 16 ноября 2008) – американский учёный один из основоположников статистической теории связи.

³ Андрей Николаевич Колмогоров (урождённый Катаев, 12 (25) апреля 1903 – 20 октября 1987) – российский математик, один из крупнейших математиков XX века.

⁴ Клод Элвуд Шеннон (30 апреля 1916 – 24 февраля 2001) – американский инженер, криптоаналитик и математик.

⁵ Александр Яковлевич Хинчин (1894 – 1959) – российский математик, профессор МГУ, один из наиболее значимых учёных в советской школе теории вероятностей. Член-корреспондент АН СССР (1939). Лауреат Сталинской премии второй степени, полученной совместно с А. Н. Колмогоровым за научные работы по теории вероятностей.

технологиями возможность практического применения квантовых технологий открывает новые перспективы для построения средств связи, вычислений, шифрования информации на основе законов квантового мира. В связи с этим современная теория связи для расширения области знания использует элементы теории квантовой механики.

Данную работу можно рассматривать как вводную часть в теорию пространств и методов преобразования сигналов в цифровых системах широкополосной связи, в рамках курсов: «Волновые процессы в средах», «Радиотехника» читаемых в бакалавриате, по направлению подготовки «Информационная безопасность»; «Обработка цифровых сигналов в системах защиты информации» читаемого в магистратуре, по направлению подготовки «Конструирование и технология электронных средств».

Специфика использования данного учебного пособия, в рамках учебных занятий, определяется преподавателем. При использовании учебного пособия для самостоятельной подготовки рекомендуется применять такие методы, как комплексный анализ литературных источников, заключающийся в параллельном освоении нескольких авторитетных изданий по теме предмета.

В составе учебного пособия имеется две части. Первая часть содержит элементы теории и некоторые практические примеры. Вторая часть содержит листинги функций на языке MatLab, реализующие методы, изложенные в первой части.

1. ПРОСТРАНСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

Одним из существенных вопросов при анализе сигналов и систем связи является определение и выбор формального пространства синтеза и анализа сигналов.

Теория геометрических структур и полей претерпевает существенные изменения в результате непрерывного развития математического аппарата для решения многих прикладных задач [6–9]. С другой стороны, эта теория использует математический аппарат, действующий в выбранном пространстве. Таким аппаратом являются методы обработки (анализа и синтеза) сигналов.

1.1. Классическое комплексное евклидово пространство

Системы связи [10, 11] и системы цифровой [12, 13] и смешанной (аналогово-цифровой) [14] обработки значительное число вычислений производят на поле комплексных чисел \mathbb{C} . При этом ряд определений и положений, известных из классических курсов линейной алгебры [15, 16], функционального анализа [17, 18] и дифференциальной геометрии [8, 19], не всегда достаточен для формализации некоторых операций, выполняемых при практических вычислениях в цифровой и смешанной обработке. Вместе с тем методы современной дифференциальной геометрии [7, 8], современных геометрических структур и полей [6] располагают достаточным математическим аппаратом, который пока не в полной мере интегрирован в практику обработки сигналов.

В работе [20] вводится понятие комплексного векторного евклидова пространства, называемого унитарным [21], для которого выполняется два требования:

I. имеется правило, с помощью которого любым двум элементам \mathbf{x} и \mathbf{y} этого пространства ставится в соответствие комплексное число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырём аксиомам:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$ (где z^* обозначает комплексное сопряжение к $z \in \mathbb{C}$)

2. $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$

3. $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ – вещественное неотрицательное число, обращающееся в ноль лишь в случае, когда \mathbf{x} – нулевой элемент.

Там же (в [20]) определено, что всякое комплексное евклидово пространство является нормированным, если в нём норму любого элемента \mathbf{x} определить соотношением $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, в частности, во всяком евклидовом пространстве с нормой справедливо неравенство треугольника: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Отмечается, что понятие угла между произвольными элементами \mathbf{x} и \mathbf{y} для комплексного евклидова пространства теряет смысл вследствие того, что скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ является, вообще говоря, комплексным числом.

При этом вводится понятие ортогональности для произвольных элементов \mathbf{x} и \mathbf{y} евклидова пространства как случай, когда скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ равно нулю, т.е. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} : \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, что позволяет дать определение и свойства базиса (и ортонормированного базиса) комплексного евклидова пространства. В [20] ортонормированный базис N -мерного комплексного евклидова пространства определён как совокупность элементов $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$, удовлетворяющих следующему соотношению: $\langle \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^{pk}$, $p, k = 0 \dots N - 1$, т.е. попарно ортогональных и имеющих нормы, равные единице, где

$$\delta^{pk} = \begin{cases} 1, p = k \\ 0, p \neq k \end{cases} - \text{символ Кронекера.}$$

Таким образом, в соответствии с определением ортогональности [16, 18, 20, 21], элементы \mathbf{x} и \mathbf{y} комплексного векторного евклидова пространства, скалярное произведение которых равно комплексному числу с нулевой вещественной и ненулевой мнимой частью, не могут считаться ортогональными.

В соответствии с определением [20], каждой мерности комплексного евклидова пространства соответствует двумерное инвариантное подпространство, не содержащее собственных векторов [21]. Или, говоря другими словами, при изменении каждой мерности N -мерного вещественного евклидова пространства с вещественной на комплексную увеличения мерности векторного пространства не происходит, т.к. каждая мерность комплексного евклидова пространства не содержит собственных векторов [21].

Для примера, пусть существует объект \mathbf{x} из N -мерного вещественного евклидова пространства \mathbb{R}^N , причём $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$, что возможно только при $\mathbf{x} \neq 0$. Перенесём объект \mathbf{x} в N -мерное комплексное евклидово пространство \mathbb{C}^N , заменив каждую мерность вещественного евклидова пространства с вещественной на комплексную (при этом элемент \mathbf{x} имеет только вещественные ненулевые значения) и проверим ортогональность элементов \mathbf{x} и $j\mathbf{x}$ (где $j = \sqrt{-1}$), вычислив скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, j\mathbf{x} \rangle$. Вполне очевидно, что скалярное произведение равно комплексному числу $\langle \mathbf{x}, j\mathbf{x} \rangle = z$ с ненулевой мнимой частью и нулевой вещественной частью, т.е. $\langle \mathbf{x}, j\mathbf{x} \rangle \neq 0$, таким образом, в соответствии с определением ортогональности элементы \mathbf{x} и $j\mathbf{x}$ классического векторного комплексного евклидова пространства не являются ортогональными.

В практике обработки многомерных цифровых сигналов, в задачах широкополосной связи достаточно часто возникают ситуации, когда рассмотренного определения комплексного пространства недостаточно, но требуется иное определение комплексного пространства, которое может быть рассмотрено как расширение евклидова пространства. Необходимо определение такого пространства, в котором, в частности, выполняется условие

ортогональности между элементами \mathbf{x} и $j\mathbf{x}$. Определением таких пространств и исследованием свойств объектов в таких пространствах занимается современная дифференциальная геометрия, теория геометрических структур и полей [6–8], положения которой пока не могут в полной мере использоваться в практике решения задач обработки сигналов.

1.2. Современные комплексные векторные пространства

Приведём ряд определений в соответствии с теорией современных геометрических структур и полей [6].

Векторное пространство размерности N будем обозначать как \mathbb{C}^N над полем комплексных чисел \mathbb{C} , образованное всеми векторами вида

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n \\ z_n = a_n + j b_n \end{cases} \quad (1)$$

где z_n – комплексные координаты, $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$ – базис пространства, $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Для векторов $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \mathbf{e}_n$ из пространства \mathbb{C}^{N-1} определены операции:

– сложения,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} (z_n + w_n) \mathbf{e}_n; \quad (2)$$

– умножение на комплексное число:

$$\lambda \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} (\lambda z_n) \mathbf{e}_n. \quad (3)$$

Пространство \mathbb{C}^N можно рассматривать как $2N$ -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $j\mathbf{e}_1, j\mathbf{e}_2, \dots, j\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n \mathbf{e}_n + b_n (j\mathbf{e}_n)), \quad (4)$$

данная операция называется *овеществлением*. Таким образом, овеществлением является отображение объектов из пространства \mathbb{C}^N в пространство \mathbb{R}^{2N} в результате декомпозиции $z_n \in \mathbb{C}$ на $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, притом что $z_n = a_n + j b_n$.

Линейные преобразования комплексного векторного пространства – это отображения, задающиеся матрицами $\mathbf{A} = (a_{np})$, $a_{np} \in \mathbb{C}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$, с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Ax}: \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n, \mathbf{Ax} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{p=1}^{N-1} a_{np} x_p \right) \mathbf{e}_n. \quad (5)$$

Таким образом, линейные преобразования комплексного N -мерного векторного пространства образуют группу $GL(N, \mathbb{C})$ относительно линейных преобразований. Это группа комплексных матриц размером $N \times N$ с определителем, не равным нулю. Матрицы из $GL(N, \mathbb{C})$ с определителем, равным единице, образуют специальную линейную подгруппу $SL(N, \mathbb{C})$ группы $GL(N, \mathbb{C})$.

Векторы $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n$ являются радиус-векторами точек из декартова пространства \mathbb{C}^N . При овеществлении (r) линейные преобразования пространства \mathbb{C}^N переходят в линейные преобразования пространства \mathbb{R}^{2N} . В результате образуется гомоморфизм групп:

$$r: GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2N, \mathbb{R}). \quad (6)$$

Произведём разложение матрицы $\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$ на вещественную и мнимую части: $\mathbf{A} = \text{Re}(\mathbf{A}) + j\text{Im}(\mathbf{A})$. При о вещественнении $r(\mathbf{A})$ матрица \mathbf{A} принимает вид:

$$r(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В работе [6] показано, что произведение $r(\mathbf{A}), \mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$, коммутирует с $r(j)$:

$$r(j)r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})r(j), \quad (8)$$

т.к. умножение на j коммутирует с любым преобразованием $\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$:

$$j\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(j\mathbf{x}). \quad (9)$$

Для объектов $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \mathbf{e}_n$, векторного пространства \mathbb{C}^N скалярное произведение определено как

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n (w_n \mathbf{e}_n)^* = \sum_{n=0}^{N-1} z_n w_n^* \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* = \sum_{n=0}^{N-1} z_n w_n^*, \quad (10)$$

при том, что $\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* = 1$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами ($\lambda \in \mathbb{C}$):

1. $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$
3. $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \wedge \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \neq 0$

Любое скалярное произведение со свойствами 1–3 называется *эрмитовым скалярным произведением*. Если дополнительно выполняется свойство 4, то произведение называют *положительно определённым*.

Для любого положительно определённого эрмитова скалярного произведения существует базис.

Учитывая, что для объектов $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + jb_n) \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} (c_n + jd_n) \mathbf{e}_n$ векторного пространства \mathbb{C}^N скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ можно представить как

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} z_n w_n^* = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + jb_n)(c_n - jd_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n c_n + b_n d_n) + j \sum_{n=0}^{N-1} (b_n c_n - a_n d_n), \end{aligned} \quad (11)$$

можно определить вещественную и мнимую части скалярного произведения:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \text{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + j\text{Im}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle). \quad (12)$$

Лемма. Положительно определённое эрмитово скалярное произведение в \mathbb{C}^N имеет вид:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} + j\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (13)$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} = \text{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$ – вещественное симметричное (евклидово) скалярное произведение в \mathbb{R}^{2N} ; $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Im}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$ – *симплектическое произведение* в \mathbb{R}^{2N} . В частности, эрмитов и вещественный квадраты векторов совпадают: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Аналогичная лемма верна для всех эрмитовых скалярных произведений, в том числе и для неположительно определённых.

Существенным является следующее замечание:

$$\langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = j\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = j\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} - \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (14)$$

с другой стороны,

$$\langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} + j\omega(j\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), получаем:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} = \omega(j\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (16)$$

Это также можно доказать для объектов $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + jb_n) \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} (c_n + jd_n) \mathbf{e}_n$, векторного пространства \mathbb{C}^n используя следующие рассуждения. Запишем:

$$\begin{aligned} \langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} jz_n w_n^* = \sum_{n=0}^{N-1} (ja_n - b_n)(c_n - jd_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n d_n - b_n c_n) + j \sum_{n=0}^{N-1} (a_n c_n + b_n d_n), \end{aligned} \quad (17)$$

сравнивая с (11) получим, что $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} = \omega(j\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ч. т. д. Дополнительно запишем:

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\text{Re}(\langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle). \quad (18)$$

Таким образом, эрмитово скалярное произведение полностью определяется своей мнимой частью – симплектической формой, обозначаемой как $\omega(\cdot, \cdot)$, или вещественной частью – симметричным скалярным произведением, обозначаемым как $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Геометрический смысл симплектической формы скалярного произведения $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ заключается в следующем: симплектическая форма $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является взятой с обратным знаком вещественной частью скалярного произведения, повернутого в результате умножения на поворачивающий множитель j вектора \mathbf{x} , т.е. $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\text{Re}(\langle j\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$.

Обобщение свойств симплектического произведения для объектов \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{t} из пространства \mathbb{C}^n и $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$ записывается в виде:

1. $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $\omega(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{t}) = \lambda^* \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu^* \omega(\mathbf{x}, \mathbf{t})$
3. $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$

Линейное преобразование $\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$ называют *унитарным линейным преобразованием*, если оно сохраняет положительно определённое эрмитово скалярное произведение:

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad (19)$$

для всех векторов $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \mathbf{e}_n$, пространства \mathbb{C}^n .

Условие унитарности линейного преобразования можно записать как

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_{kn} a_{ln}^* = \delta^{kl}, \quad (20)$$

где δ^{kl} – символ Кронекера, или в матричной форме:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}^* = \mathbf{1}. \quad (21)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная матрица \mathbf{A} .

Матрицы, удовлетворяющие соотношению (21), образуют унитарную группу, обозначаемую $GU(N, \mathbb{C})$. Из равенства (21) следует, что

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A})^* = |\det(\mathbf{A})|^2 = 1 \Rightarrow |\det(\mathbf{A})| = 1. \quad (22)$$

Подгруппа, состоящая из унитарных матриц \mathbf{A} с равным по модулю единице определителем $|\det(\mathbf{A})| = 1$, обозначается как $SU(N, \mathbb{C})$.

Эрмитово скалярное произведение полностью определяется своей вещественной частью, поэтому преобразование $\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$ унитарно тогда и только тогда, когда преобразование $r(\mathbf{A})$ ортогонально:

$$r(GU(N, \mathbb{C})) = O(2N, \mathbb{R}) \cap r(GL(N, \mathbb{C})), \quad (23)$$

где $O(2N, \mathbb{R})$ – группа ортогональных векторов в \mathbb{R}^{2N} .

1.3. Представление сигналов в векторных пространствах

Для любой системы линейно независимых векторов можно выполнить процедуру ортогонализации, называемой *ортогонализацией Грама⁶–Шмидта⁷*. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта системы линейно независимых векторов $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_N)$ выражается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{s}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_n = \mathbf{s}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{s}_n, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle} \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad n = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (24)$$

где $\frac{\langle \mathbf{s}_n, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle} \tilde{\mathbf{e}}_k$ – оператор проекции вектора \mathbf{s}_n на вектор $\tilde{\mathbf{e}}_k$, что также обозначается как $proj_{\tilde{\mathbf{e}}_k} \mathbf{s}_n = \frac{\langle \mathbf{s}_n, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle} \tilde{\mathbf{e}}_k$, $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_N)$ – система ортогональных векторов.

Для перехода от ортогональной системы векторов к ортонормированной системе используют процедуру нормирования:

$$\mathbf{e}_n = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n}{\|\tilde{\mathbf{e}}_n\|}, \quad n = 1 \dots N, \quad (25)$$

где $\|\tilde{\mathbf{e}}_n\| = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{e}}_n, \tilde{\mathbf{e}}_n \rangle}$ – норма вектора $\tilde{\mathbf{e}}_n$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_N)$ – система ортонормированных векторов (листинг 2.9 и 2.10).

Если число N ортонормированных векторов совпадает с размерностью евклидова пространства N , то система образует ортонормированный базис пространства.

Для системы ортонормированных векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_N)$ определена квадратная матрица размера $N \times N$ скалярных произведений [6], называемая *матрицей Грама*: $(g_{ml}) = \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_l \rangle$, где $m, l = 1 \dots N$. Для матрицы Грама $(g_{ml}) = \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_l \rangle$ справедливо:

$$\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_l \rangle = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases} \quad (26)$$

Основой геометрического представления сигналов является идея о рассмотрении сигнала как вектора.

Обобщением процедуры декомпозиции по ортогональному базису является следующая процедура. Любой набор из P действительных сигналов из множества $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)\}$ с конечной энергией, определённых на интервале $[0, T)$, может быть представлен в виде линейных комбинаций $K \leq M$ действительных ортонормированных базисных функций $\{b_1(t), b_2(t), \dots, b_K(t)\}$ [10], что можно записать как

⁶ Йорген Педерсен Грам (27 июня 1850 – 29 апреля 1916) – датский математик, известный работами в области математической статистики, теории чисел и линейной алгебры.

⁷ Эрхард Шмидт (14 января 1876 – 6 декабря 1959) – германский математик. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу. Определил и изучил геометрически гильбертово пространство, используя аналогии с геометрией Евклида. Занимался квадратичными формами.

$$\begin{cases} s_{pk} = \int_0^T s_p(t) b_k^*(t) dt \\ s_p(t) = \sum_{k=1}^K s_{pk} b_k(t) \end{cases} \quad (27)$$

где ортонормированный базис $\{b_1(t), b_2(t), \dots, b_K(t)\}$ обладает свойством попарной взаимной ортогональности функций, т.е. образует матрицу Грамма:

$$\int_0^T b_m(t) b_l(t) dt = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases}, \quad m, l = 1 \dots K. \quad (28)$$

Сигнал, состоящий из N отсчётов, в соответствии с интерпретацией, предложенной В. А. Котельниковым и К. Шенноном, считается N -мерным сигналом, а каждый отсчёт – независимым измерением. При такой интерпретации N -мерный сигнал можно рассматривать как вектор в N -мерном пространстве. Поэтому методы анализа и синтеза современной геометрии и векторной алгебры [6] представляют особый интерес для решения задач связи в части анализа и синтеза сигналов.

В практике обработки сигналов достаточно часто возникает необходимость обработки комплекснозначных сигналов. При имеющемся многообразии геометрических пространств определим постановку вопроса: *выбор пространства представления сигналов и соответственно математических методов, позволяющих наиболее эффективно производить анализ сигналов.*

По определению классического комплексного евклидова пространства, каждой мерности пространства соответствует двумерное инвариантное подпространство, не содержащее собственных векторов [15, 16]. Такое пространство не позволяет учитывать взаимную ортогональность комплексных компонент, следовательно, не может быть эффективно использовано для анализа сигнала.

Обращаясь к определению и свойствам современных векторных пространств, мы получаем инструментарий, позволяющий учитывать ортогональность комплексных компонент, при этом определения свойств скалярного произведения и соответственно ортогональности для пространства \mathbb{C}^N и \mathbb{R}^{2N} будут различны.

В пространстве \mathbb{C}^n ортогональными являюся векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} , для которых скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} + j\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть комплексной величиной, не равной нулю, но для взаимно ортогональных векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} обязательно равна нулю вещественная часть скалярного произведения: $\text{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Для векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} из пространства \mathbb{R}^{2n} скалярное произведение всегда имеет вещественное значение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$, в случае ортогональности $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})$ значение скалярного произведения равно нулю: $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Следовательно, при овеществлении пространства \mathbb{C}^N в пространство \mathbb{R}^{2N} элементы \mathbf{x} и \mathbf{y} , будут ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

В пространстве \mathbb{C}^N можно определить N линейно независимых векторов, а в пространстве \mathbb{R}^{2N} можно определить $2N$ линейно независимых векторов соответственно. При этом, как показано в работе [6], преобразование системы ортонормированных векторов из пространства \mathbb{C}^N в пространство \mathbb{R}^{2N} , т.е. операция о веществления, является линейной операцией.

Учитывая теоремы Котельникова и гомоморфизм преобразования групп при о веществлении $r: GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2N, \mathbb{R})$, можно сформулировать следующее заключение в виде леммы.

Лемма. Всякий сигнал с ограниченным спектром от 0 до f_1 можно исследовать без потери информативных качеств в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^N, N = 2f_1$, и при о веществлении в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^{2N} \sim \mathbb{R}^{4f_1}$.

Используя (7), операцию о веществления (r) и учитывая возможность интерпретации по Котельникову и Шенону сигналов $x[n]$ как векторов \mathbf{x} , запишем:

$$r(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{x}) \\ \text{Im}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Запишем и произведём сравнение выражений расчёта энергии, нормы, дистанции и угла между сигналами, используя метрику Минковского в классе $L^2(E)$, т.е. квадратичную или евклидову метрику, для сигналов $x[n] = a[n] + jb[n]$ и $y[n] = c[n] + jd[n]$, где $n = 0 \dots N - 1$, в пространстве \mathbb{C}^N и для о веществлённых образов $r(x[n])$ и $r(y[n])$, где $n = 0 \dots 2N - 1$, в пространстве \mathbb{R}^{2N} .

Расчёт энергии E_x и сигнала $x[n]$ в пространстве \mathbb{C}^N можно производить с помощью выражения

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}^N}(x[n]) &= \langle x[n], x[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} (a[n] + jb[n])(a[n] - jb[n]) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Энергия сигнала есть его скалярное произведение самого с собой, кроме того, энергия сигнала соответствует центральному значению автокорреляционной функции (АКФ). Таким образом, АКФ можно интерпретировать как функцию концентрации энергии в центральной точке АКФ. Анализ выражения для расчёта энергии сигнала (30) позволяет сделать очень полезный вывод: для комплекснозначных сигналов значение центрального элемента АКФ (т.е. энергия сигнала) всегда вещественно, причём образовано суммой квадратов вещественных и мнимых составляющих сигнала, а значения боковых лепестков АКФ могут иметь комплексную величину с ненулевыми вещественной и мнимой частями, таким образом, для комплекснозначных сигналов происходит разделение боковых лепестков АКФ на вещественную и мнимую части, а центральный всплеск концентрируется в вещественной части. Используя свойство принадлежности значений боковых лепестков частично мнимому и частично вещественному пространству, можно производить эффективное разделение АКФ на

вещественную и мнимую часть, а следовательно, способствовать доминированию центрального всплеска АКФ над боковыми лепестками.

Учитывая выражение (29) для оверхествления сигнала, энергия оверхествлённого сигнала $r(x[n])$ в пространстве \mathbb{R}^{2N} будет равна

$$E_{\mathbb{R}^{2N}}(r(x[n])) = \langle r(x[n]), r(x[n]) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a[n]^2 + \sum_{n=0}^{N-1} b[n]^2. \quad (31)$$

Сравнение выражений (30) и (31) показывает, что при оверхествлении полная энергия сигнала остаётся неизменной, что, собственно, является свойством линейной операции оверхествления, т.е. $E_{\mathbb{C}^N} = E_{\mathbb{R}^{2N}} = E$, и следствием закона сохранения энергии. АКФ вещественного сигнала имеет только вещественные значения, таким образом, и центральный всплеск, и боковые лепестки АКФ вещественного сигнала находятся в одном, только вещественном, пространстве.

Норма $\|x[n]\|$ сигнала вектора x в пространстве \mathbb{C}^N :

$$\|x[n]\| = \sqrt{E_{\mathbb{C}^N}(x[n])} = \sqrt{\langle x[n], x[n] \rangle} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2)}. \quad (32)$$

Оверхествлённый сигнал $r(x[n])$ распадается на два сигнала $a[n]$ и $b[n]$ в пространстве \mathbb{R}^{2N} , для каждого из которых норма будет равна

$$\|a[n]\| = \sqrt{E_{\mathbb{R}^{2N}}(a[n])} = \sqrt{\langle a[n], a[n] \rangle} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} a[n]^2} \quad (33)$$

и

$$\|b[n]\| = \sqrt{E_{\mathbb{R}^{2N}}(b[n])} = \sqrt{\langle b[n], b[n] \rangle} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]^2}. \quad (34)$$

Из этого следует, что сигнал $x[n]$, нормированный в пространстве \mathbb{C}^N , при оверхествлении распадается на два, возможно, ненормированных сигнала $\text{Re}(x[n])$ и $\text{Im}(x[n])$.

Физический смысл нормирования связан с определением вектора единичной длины [22]. Вектор единичной длины является мерой или определением единицы измерения. С точки зрения законов сохранения энергии, энергия реальной физической системы не изменяется при смене системы координат. При этом, например, в электротехнике принято определять вещественную и мнимую составляющие тока, напряжения, энергии, мощности, сопротивления [23]. Для вещественной и мнимой составляющих определённой физической величины (тока, напряжения, мощности, энергии, сопротивления) используются общие единицы измерения, а при сложении вещественной и мнимой компонент, имеющих общие единицы измерения, образуется комплексная величина, таким образом, несмотря на единство единиц измерения, фактически существуют отдельные взаимно ортогональные (нормированные) единицы измерения вещественной и мнимой компоненты.

Существенным является вопрос о нормировании сигналов в пространстве \mathbb{R}^{2N} и \mathbb{C}^N . С точки зрения законов сохранения свойств сигнала, при выполнении нормирования в пространстве \mathbb{R}^{2N} эквивалентным нормированием в пространстве \mathbb{C}^N будет нормирование, произведённое отдельно для мнимой и отдельно вещественной части, так что энергия и длина комплекснозначного нормированного вектора будут равны 2 и $\sqrt{2}$ соответственно. Но такой подход не отвечает определению нормированного комплекснозначного вектора, так как по

определению [6, 15] длина и энергия нормированного комплекснозначного вектора равны единице.

Кроме того, если задан комплекснозначный сигнал $x[n] = a[n] + jb[n]$, изначально обладающий неравенством модуля энергии вещественной и мнимой части, т.е. $\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} a[n]^2} \neq \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]^2}$, то при нормировании отдельно мнимой и отдельно вещественной части произойдёт выравнивание энергии (т.е. $\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} a[n]^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]^2} = 1$), что в общем случае недопустимо, так как нарушит качественные свойства единого комплекснозначного сигнала. С другой стороны, выравнивание энергии вещественной и мнимой частей сигнала может быть полезно при синтезе сигналов.

Таким образом, можно сделать следующие заключения. При формировании базиса в комплекснозначном пространстве \mathbb{C}^N как единицы меры необходимо производить совместное нормирование вещественной и мнимой части в соответствии с правилом:

$$\bar{x}[n] = \frac{x[n]}{\|x[n]\|} = \frac{x[n]}{\sqrt{\langle x[n], x[n] \rangle}} = \frac{x[n]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2)}}, \quad (35)$$

где $\bar{x}[n]$ – нормированный комплекснозначный сигнал, тогда получим $E_{\mathbb{C}^N}(\bar{x}[n]) = 1$. При этом мера, полученная в результате нормирования в комплекснозначном пространстве, будет отличаться от меры, полученной в результате нормирования в о вещественном пространстве.

При необходимости сохранения единства меры в комплекснозначном пространстве \mathbb{C}^N и его о вещественном образе \mathbb{R}^{2N} необходимо производить нормирование отдельно вещественной и отдельно мнимой части. Так, для сигнала $x[n] = a[n] + jb[n]$ можно записать:

$$\bar{a}[n] = \frac{a[n]}{\|a[n]\|} = \frac{a[n]}{\sqrt{\langle a[n], a[n] \rangle}} = \frac{a[n]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} a[n]^2}}, \quad (36)$$

и

$$\bar{b}[n] = \frac{b[n]}{\|b[n]\|} = \frac{b[n]}{\sqrt{\langle b[n], b[n] \rangle}} = \frac{b[n]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]^2}}, \quad (37)$$

в результате получим комплекснозначный нормированный сигнал $\bar{x}[n] = \bar{a}[n] + j\bar{b}[n]$, полная энергия которого будет $E_{\mathbb{C}^N}(\bar{x}[n]) = 2$.

Евклидову дистанцию между сигналами $x[n]$ и $y[n]$ в пространстве \mathbb{C}^N можно вычислить, используя выражение:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{C}^N}(x[n], y[n]) &= \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - y[n]|^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n] - c[n] + j(b[n] - d[n]))(a[n] - c[n] - j(b[n] - d[n]))} = \\ &= \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2 + c[n]^2 + d[n]^2 - 2a[n]c[n] - 2b[n]d[n])} = \\ &= \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} ((a[n] - c[n])^2 + (b[n] - d[n])^2)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Вполне очевидно, что евклидова дистанция $d_E(x[n], y[n])$ в пространстве \mathbb{C}^N будет всегда положительным вещественным числом.

Дистанция между овеществлёнными сигналами $r(x[n])$ и $r(y[n])$ в пространстве \mathbb{R}^{2N} может быть определена при помощи выражения:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^{2N}}(r(x[n]), r(y[n])) &= \sqrt{\sum_{n=0}^{2N-1} (r(x[n]) - r(y[n]))^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n] - c[n])^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (b[n] - d[n])^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Сравнивая выражения (38) и (39), можно заключить, что евклидова дистанция $d_E(x[n], y[n])$ между сигналами $x[n]$ и $y[n]$ в пространстве \mathbb{C}^N и дистанция $d_E(r(x[n]), r(y[n]))$ между их овеществлёнными образами $r(x[n])$ и $r(y[n])$ в пространстве \mathbb{R}^{2N} сохраняет своё значение: $d_E(x[n], y[n]) = d_E(r(x[n]), r(y[n])) = d_E$.

Косинус угла между векторами сигналов $x[n]$ и $y[n]$ в пространстве \mathbb{C}^N вычислим как

$$\begin{aligned} d_{cos}(x[n], y[n]) &= \frac{\langle x[n], y[n] \rangle}{\|x[n]\| \|y[n]\|} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]c[n] + b[n]d[n]) + j \sum_{n=0}^{N-1} (b[n]c[n] - a[n]d[n])}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2)} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (c[n]^2 + d[n]^2)}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Для овеществлённых сигналов $r(x[n])$ и $r(y[n])$ косинусная мера в пространстве \mathbb{R}^{2N} вычисляется как

$$\begin{aligned} d_{cos}(r(x[n]), r(y[n])) &= \frac{\langle r(x[n]), r(y[n]) \rangle}{\|r(x[n])\| \|r(y[n])\|} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]c[n] + b[n]d[n])}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (a[n]^2 + b[n]^2)} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (c[n]^2 + d[n]^2)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из выражений (40) и (41) следует, что величина $d_{cos}(x[n], y[n])$ является комплексной и её вещественной частью является значение, совпадающее с величиной $d_{cos}(r(x[n]), r(y[n]))$. Мнимая часть величины $d_{cos}(x[n], y[n])$ образована симплектической формой $\omega(x[n], y[n])$ скалярного произведения $\langle x[n], y[n] \rangle$ и, в соответствии с геометрическим смыслом симплектической формы, характеризует взятую с обратным знаком величину косинуса угла между вектором сигнала $y[n]$ и вектором сигнала $x[n]$, повернутым в результате умножения на поворачивающий множитель j .

1.4. Линейная система

Линейная система – это система, удовлетворяющая свойствам аддитивности и однородности (рис. 1).

Формально записать свойства линейности можно следующим образом.

Аддитивность:

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t), \quad (42)$$

или в альтернативной форме:

$$((x_1 + x_2) * h)(t) = (x_1 * h)(t) + (x_2 * h)(t), \quad (43)$$

где $(*)$ – операция свёртки (о ней – далее), $h(t)$ – собственная характеристика системы, называемая *импульсной характеристикой*, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – входные сигналы. Сигнал, входящий в линейную систему, также называют *возмущающим сигналом* (*возмущающим воздействием*), а выходной сигнал – *откликом* линейной системы.

Однородность:

$$(c \cdot x(t)) * h(t) = c \cdot (x(t) * h(t)), \quad (44)$$

или в альтернативной форме:

$$((c \cdot x) * h)(t) = c \cdot ((x * h)(t)), \quad (45)$$

где c – константа, $x(t)$ – возмущающий сигнал.

Линейная система полностью характеризуется во временном пространстве импульсной характеристикой $h(t)$, а в операционном пространстве – передаточной функцией, в соответствии с видом операционного пространства: $H(\omega)$ – для преобразования Фурье⁸, $H(s)$ – для преобразования Лапласа⁹, $H[z]$ – для z-преобразования и т. д.

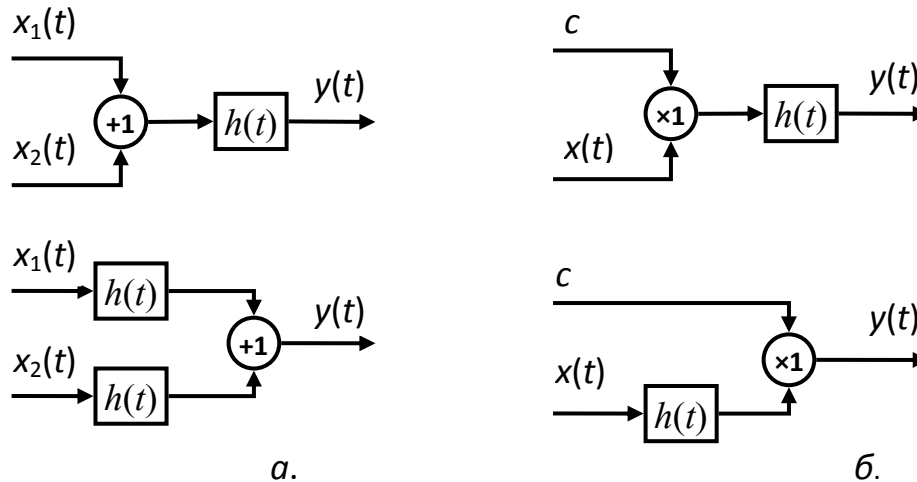


Рисунок 1. Блок-схемы визуализации свойств аддитивности (а.) и однородности (б.)

Обобщение свойств линейной системы можно записать в виде:

$$((c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2) * h)(t) = c_1 \cdot (x_1 * h)(t) + c_2 \cdot (x_2 * h)(t), \quad (46)$$

или

$$((c \cdot (x_1 + x_2)) * h)(t) = c \cdot ((x_1 * h)(t) + (x_2 * h)(t)), \quad (47)$$

где c, c_1, c_2 – постоянные множители.

⁸ Жан-Батист Жозеф Фурье (21 марта 1768 – 16 мая 1830), французский математик и физик, один из основоположников направления математики численных методов решения дифференциальных уравнений.

⁹ Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (23 марта 1749 – 5 марта 1827) – французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук.

1.5. Свёртка и корреляция



Рисунок 2. а. – аналоговая система; б. – цифровая система

Для линейной системы непрерывного времени (рис. 2, а.) пусть $x(t)$ есть входящий сигнал, $h(t)$ – собственная характеристика системы, называемая *импульсной характеристикой*, тогда выходной сигнал $y(t)$, который также называют откликом системы на входной сигнал, определяется через операцию *свёртки*:

$$\begin{aligned}(x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau = y(t),\end{aligned}\quad (48)$$

где символ (*) является компактным обозначением операции свёртка.

В случае если система является казуальной или причинной, т.е. выход такой системы зависит только от входных сигналов прошедшего времени, но не зависит от входных сигналов будущего времени, то уравнение (48) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}(x * h)(t) &= \int_0^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau = y(t).\end{aligned}\quad (49)$$

Для дискретной неказуальной системы (рис. 2, б.) уравнение свёртки будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}(x * h)[n] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n - m] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n - m]h[m] = y[n],\end{aligned}\quad (50)$$

для дискретной казуальной системы:

$$\begin{aligned}(x * h)[n] &= \sum_{m=0}^{+\infty} x[m]h[n - m] = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} x[n - m]h[m] = y[n].\end{aligned}\quad (51)$$

В реальных дискретных системах число отсчётов входной последовательности $x[n]$ и импульсной характеристики $h[n]$ обычно ограничено, поэтому уравнение свёртки (51) можно записать в следующем виде:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n - m],\quad (52)$$

где M – длина импульсной характеристики $h[n]$, при этом если длина входного сигнала (последовательности) $x[n]$ составляет N отсчётов, то выходной сигнал будет иметь длину $N+M-1$ отсчётов.

Операция свёртки имеет ряд свойств, которые записаны ниже для сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ с комплексными значениями.

- коммутативность:

$$(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t);\quad (53)$$

- ассоциативность:

$$((x_1 * x_2) * x_3)(t) = (x_1 * (x_2 * x_3))(t); \quad (54)$$

- дистрибутивность по отношению к операции сложения сигналов (эквивалент аддитивности):

$$(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = ((x_1 * x_2) + (x_1 * x_3))(t); \quad (55)$$

- дистрибутивность по отношению к операции умножения сигналов не выполняется:

$$(x_1 * (x_2 \cdot x_3))(t) \neq ((x_1 * x_2) \cdot (x_1 * x_3))(t). \quad (56)$$

Операция свёртки реализует линейную систему, поэтому удовлетворяет свойствам аддитивности:

$$(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = ((x_1 * x_2) + (x_1 * x_3))(t); \quad (57)$$

и однородности:

$$((c_1 \cdot x_1) * (c_2 \cdot x_2))(t) = c_1 c_2 \cdot (x_1 * x_2)(t), \quad (58)$$

где c_1, c_2 – константы.

Существенной операцией в теории обработки сигналов является *взаимно корреляционная функция* (ВКФ) или кратко *корреляция*. Корреляция – это функция, которая позволяет вычислить сходство между двумя сигналами, т.е. корреляция – это мера подобия. Запишем выражение для расчёта корреляции, которое позволяет оценить сходство между сигналами $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau + t) x_2^*(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2^*(\tau - t) d\tau = s(t), \end{aligned} \quad (59)$$

где \bullet – краткое обозначение корреляционной функции, $x^*(t)$ – функция, значения которой являются комплексно сопряжёнными к значениям функции $x(t)$.

Корреляцию дискретных последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ можно вычислить следующим образом:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k + n] x_2^*[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2^*[k - n]. \quad (60)$$

В случае если длина последовательности $x_1[n]$ составляет N отсчётов, а длина последовательности $x_2[n]$ составляет K отсчётов, то длина последовательности $s[n]$, полученной в результате вычисления корреляционной функции, составит $N+K-1$, а выражение для расчёта корреляционной функции можно записать как [24]

$$s[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x_1[k + n] x_2^*[k] = \sum_{k=0}^{K-1} x_1[k] x_2^*[k - n]. \quad (61)$$

В связи с тем, что в операции корреляции присутствует комплексное сопряжение только одного аргумента, то различный порядок записи аргументов будет давать различный результат, т.е. коммутативность не выполняется. Операция корреляции обладает рядом свойств, которые записаны ниже для сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ с комплексными значениями:

- коммутативность не выполняется:

$$(x_1 x_2)(t) \neq (x_2 x_1)(t); \quad (62)$$

- ассоциативность не выполняется:

$$((x_1 x_2) x_3)(t) \neq (x_1 (x_2 x_3))(t); \quad (63)$$

- дистрибутивность, по отношению к операции сложения сигналов:

$$(x_1(x_2 + x_3))(t) = ((x_1x_2) + (x_1x_3))(t); \quad (64)$$

- дистрибутивность по отношению к операции умножения сигналов, не выполняется:

$$(x_1(x_2 \cdot x_3))(t) \neq ((x_1x_2) \cdot (x_1x_3))(t). \quad (65)$$

Для корреляции справедливо следующее свойство:

$$(x_1x_2)(t) = (x_2x_1)^*(-t), \quad (66)$$

где $(-t)$ означает обратное следование аргумента, т.е. фактически переворачивание ряда значений соответствующей функции относительно нулевого (для дискретных последовательностей – относительно центрального) отсчёта. Используя свойства корреляции и свёртки, можно записать выражения, связывающие свёртку и корреляцию:

$$(x_1x_2)(t) = x_1(t) * x_2^*(-t), \quad (67)$$

и

$$(x_1 * x_2)(t) = x_1(t)x_2^*(-t). \quad (68)$$

Корреляция является линейной операцией, так как удовлетворяет свойству аддитивности:

$$(t) = ((x_1x_2) + (x_1x_3))(t); \quad (69)$$

и свойству однородности:

$$((c_1 \cdot x_2)(c_2 \cdot x_2))(t) = c_1c_2 \cdot (x_1 * x_2)(t). \quad (70)$$

Особым применением операции корреляция является расчёт корреляции сигнала с самим собой, т.е. *автокорреляция* или *автокорреляционная функция* (АКФ):

$$(x_1x_1)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t + \tau) x_1^*(\tau) d\tau, \quad (71)$$

очевидно, что в результате комплексного сопряжения в формуле корреляции центральное значение АКФ всегда будет вещественным числом.

1.6. Преобразование Фурье

В обработке сигналов, теории автоматического управления, электротехнике, теории колебаний и других дисциплинах широко используют операторные преобразования. Наиболее распространенные операторные преобразования – это *преобразование Фурье*, *преобразование Лапласа* и *z-преобразование*, *преобразование Карсона-Хевисайда*. Операторные преобразования позволяют отобразить сигнал из временного пространства (или любого иного) в операторное пространство. Так, например, если гармонический сигнал, полученный функцией $\sin(t)$, во временном пространстве имеет бесконечную протяжённость, то в операторном пространстве преобразования Фурье образ сигнала $\sin(t)$ имеет нулевую протяжённость. На этом свойстве операторных преобразований базируются операторные методы решения дифференциальных уравнений, когда система дифференциальных уравнений путём операторных преобразований

трансформируется в систему линейных уравнений. Другими замечательными свойствами операторных преобразований являются следующие возможности: анализ систем на устойчивость, например, при помощи z-преобразования, преобразования Лапласа; анализ спектрального состава и динамики изменения переходных режимов сигналов характеризующих систему; синтез и анализ фильтров и пр.

Прямое преобразование Фурье [18] для вещественных непрерывных функций (сигналов), выраженное через гармонические функции, имеет вид:

$$\begin{cases} A[k] = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) dt \\ B[k] = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) dt \end{cases} \quad (72)$$

где $A[k]$, $B[k]$ – члены гармонического ряда или коэффициенты ряда Фурье; $k = 0, 1, 2, \dots$; $x(t)$ – функция (сигнал), раскладываемая в ряд Фурье. Прямое преобразование Фурье построено на основе вычисления корреляции некоторой функции (сигнала) $x(t)$ с парами взаимно ортогональных гармонических функций.

Обратное преобразование Фурье для образования пары с прямым преобразованием (1.4.1) будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{A[0]}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [A[k] \cos(2\pi kt) + B[k] \sin(2\pi kt)]. \quad (73)$$

Очевидно, что вычисление гармонических коэффициентов (72) основано на расчёте функции корреляции между сигналом $x(t)$ и гармоническими компонентами, причем рассчитывается только центральный элемент корреляционной функции.

Выражения (72) и (73) позволяют производить преобразования Фурье для вещественных сигналов. Если сигнал $x(t)$ имеет комплексные значения, необходимо использовать пару преобразования Фурье комплексных сигналов:

$$\begin{cases} X[k] = A[k] + jB[k] = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) \right] dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [A[k] + jB[k]] \left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi kt}{2\pi}\right) \right] \end{cases} \quad (74)$$

где j – мнимая единица, т.е. $j^2 = -1$; $X[k]$ – комплексный частотный образ или Фурье-образ сигнала $x(t)$; минус перед функцией $\sin(\dots)$ образуется в результате комплексного сопряжения при расчёте корреляции.

Интересно пронаблюдать, что происходит с нормирующими множителями при переходе от вещественной формы преобразования Фурье к комплексной. Для вещественных гармонических функций получим:

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi} = \sqrt{\pi}. \quad (75)$$

Для комплексной пары гармонических функций, получим:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_0^{2\pi} (\cos \varphi + j \sin \varphi)(\cos \varphi - j \sin \varphi) d\varphi} = \\ & = \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{j\varphi} e^{-j\varphi} d\varphi} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned} \quad (76)$$

В результате того, что в выражениях (72) – (74) нормирование производится только при обратном преобразовании Фурье, получаем нормирующие множители: $\frac{1}{\pi}$ – для вещественного преобразования Фурье; $\frac{1}{2\pi}$ – для комплексного преобразования Фурье. Для постоянной составляющей $A[0]$ вещественного преобразования Фурье $\sqrt{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi} = \sqrt{2\pi}$, следовательно, нормирующий множитель равен $\frac{1}{2\pi}$.

Для произвольного периода T запишем пару преобразований Фурье комплексных сигналов:

$$\begin{cases} X[k] = A[k] + jB[k] = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] dt \\ x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} [A[k] + jB[k]] \left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \end{cases} \quad (77)$$

Используя уравнение Эйлера, выражающее гармонические функции через экспоненту:

$$r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = re^{j\varphi}; \quad (78)$$

где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, φ – угол поворота, запишем выражение для пары преобразования Фурье в экспоненциальной форме:

$$\begin{cases} X[k] = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt \\ x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{+\infty} X[k] e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \end{cases} \quad (79)$$

где $e^{\frac{j2\pi k}{T}} = e^{j\omega}$ – оператор преобразования Фурье, $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ – круговая частота. Следует отметить, что часто вместо обозначения $X[k]$ используют $X(\omega)$ при $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, при таком обозначении полученный ряд гармонических членов $X(\omega) = X\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$ может иметь нецелочисленные значения аргументов, соответствующие круговой частоте $\omega = \frac{2\pi k}{T}$. Фактически для нумерации гармонических членов используется изменяющийся компонент k аргумента $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, поэтому запись $X(\omega)$ можно считать эквивалентной $X[k]$. Таким образом, запись $X(\omega)$ выражает последовательность комплексных гармонических составляющих от реальной круговой частоты, а запись $X[k]$ выражает последовательность гармонических составляющих от условного номера гармоники, связанного с круговой частотой через выражение $\omega = \frac{2\pi k}{T}$. Таким образом, выражение (79) можно записать в виде

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (80)$$

Учитывая фактическое расположение положительных и отрицательных частотных составляющих, т.е. при изменении $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, пару преобразования Фурье (80) можно записать в следующей форме:

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (81)$$

Форма преобразования Фурье, учитывающая равное количество энергии в пространстве времени и пространстве частот, в соответствии с теоремой Парсеваля имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (82)$$

Очевидно, что приращение частоты в спектре сигнала будет $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, при устремлении $\Delta\omega \rightarrow 0$ получим $T = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\Delta\omega} \rightarrow \infty$, при этом дискретно изменяющееся множество значений $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ перейдёт в непрерывную частоту ω , таким образом, пара преобразования Фурье непрерывного спектра будет иметь вид:

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (83)$$

В общем случае соотношения, образующие пару преобразования Фурье, принято классифицировать так:

- преобразование непрерывного времени;
- преобразование дискретного времени;
- преобразование непрерывного спектра;
- преобразование дискретного спектра.

Выражения производных высших порядков через пару преобразования Фурье:

$$\begin{cases} \frac{dX^{(n)}(\omega)}{d\omega^{(n)}} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t) e^{-j\omega t} dt \\ \frac{dx^{(n)}(t)}{dt^{(n)}} = (j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (84)$$

Геометрический смысл вычисления производной функции через преобразование Фурье [25] состоит в следующем. С учётом комплексного сопряжения, при расчёте корреляции в прямом преобразовании Фурье, благодаря поворачивающему множителю j , $\cos(\dots)$ -ные составляющие превращаются в $-\sin(\dots)$ -ные составляющие, а $-\sin(\dots)$ -ные – в $-j^2 \cos(\dots) = \cos(\dots)$ -ные составляющие; множитель ω (или t) позволяет учесть скорость изменения гармонических функций, гармонические компоненты с более высокой частотой обеспечивают большую скорость изменения (скорость приращения) функции, т.е. большие значения производной, соответственно с ростом частоты возрастает множитель ω , причём для положительных частот множитель ω положителен, а для отрицательных множитель ω отрицателен; показатель степени n , соответствующий порядку производной, осуществляет соответствующее изменение

поворачивающего множителя j и круговой частоты ω . В приложении (листинг 2.2) имеется функция `mi_diff_fft()`, вычисляющая производную через быстрое преобразование Фурье. Пример использования функции `mi_diff_fft()` приведён в программе (листинг 1.1). В этом примере (листинг 1.1) использованы не библиотечные функции MatLab вычисления сигнала со случайным спектром в заданном диапазоне `mi_signoise()` (листинг 2.12) и функция `mi_diff()` (листинг 2.1) вычисления производной для циклического сигнала, эти функции также можно найти в приложении. Кроме того, в приложении имеется ряд других функций, используемых в программах данной работы.

Листинг 1.1. Пример использования функции расчёта производной через преобразование Фурье, MatLab

```
%% пример расчёта производной через преобразование Фурье
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 1;             % минимальная частота
Fu = 12;            % максимальная частота;
Nc = 64;            % размер вектора сигнала
sx = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 ); % вектор сигнала
% аргумент сигнала (время, с*рад)
st = linspace(-pi*Nc, pi*Nc, Nc);

%% отыскание производной
dfftstx = mi_diff_fft(sx);
dsx = mi_diff(sx);
%% =====
```

На рис. 3 приведён результат выполнения программы (листинг 1). По оси абсцисс отложено нормированное время $\bar{t} \in [-\pi N; \pi N]$ в единицах условного времени $c \cdot \text{рад}$, по оси ординат – амплитуда в условных единицах (y.e.). Некоторый сдвиг между результатом, полученным с помощью преобразования Фурье и при помощи разности сдвинутого и исходного сигнала, является следствием сдвига дискретного сигнала при вычислении производной при помощи сдвига. Фактическая дистанция сдвига между результатом, полученным с помощью преобразования Фурье и при помощи разности сдвинутого и исходного сигнала, составляет половину отсчёта. Направление сдвига будет определяться сдвигом сигнала при вычислении производной, функция `mi_diff_rep()` даёт сдвиг производной на половину отсчёта влево. Вычисление производной с помощью преобразования Фурье позволяет получить производную, расположенную без сдвига относительно исходного сигнала.

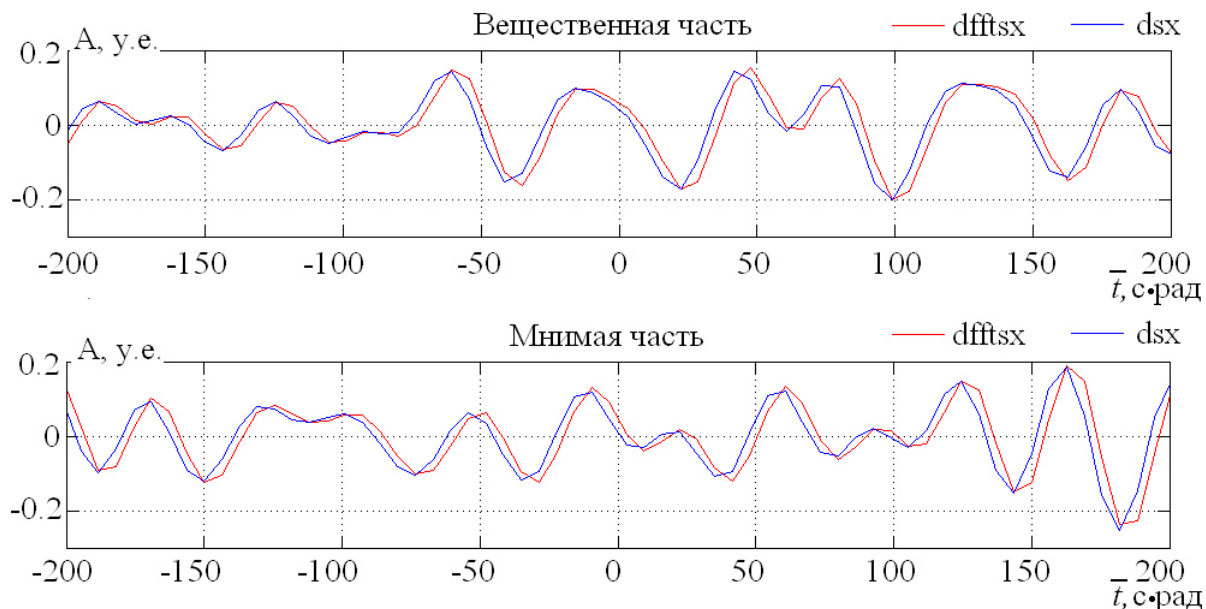


Рисунок 3. Производная комплексной функции, вычисленная с помощью преобразования Фурье (dfftsx) и при помощи разности сдвинутого и исходного сигнала (dsx)

Пара преобразования Фурье дискретного времени для дискретного сигнала $x[m]$ длиной N отсчётов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \\ x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \end{cases} \quad (85)$$

где $\frac{2\pi k}{N}$ – круговая частота k -ой гармоники. Следует отметить, что максимальный элемент круговой частоты, например при $n = 1$, будет иметь значение $\frac{2\pi(N-1)}{N}$, что на $\frac{2\pi}{N}$ меньше 2π , т.е. $2\pi - \frac{2\pi(N-1)}{N} = \frac{2\pi}{N}$, это связано с цикличностью преобразования Фурье, или в общем случае $2\pi n - \frac{2\pi n(N-1)}{N} = \frac{2\pi n}{N}$, т.е. для преобразования Фурье в точке, где круговая частота $2\pi n/N$, начинается спектр другого более высокочастотного сигнала. С другой стороны, в точке $x[N]$ начинается интервал следующего сигнала и поэтому в расчёт предыдущего не входит.

Длительность одного отсчёта равна $\Delta t = \frac{T}{N-1}$, где T – длительность сигнала, N – число отсчётов на интервал T , при этом, как уже было сказано, последний отсчёт формально относится к следующему интервалу, а нумерация отсчётов начинается с нуля (заметим, что в некоторых языках программирования, например, MatLab, индексация массивов начинается с единицы). Частоту дискретизации можно вычислить как $f_D = \frac{N-1}{T}$. Следовательно, частота дискретизации и длительность одного отсчёта – взаимнообратные величины:

$\Delta t = \frac{1}{f_D}$. Введём понятие *нормированного времени* как отношения текущего времени к длительности одного отсчёта: $\bar{t} = \frac{t}{\Delta t} = t f_D = \frac{t(N-1)}{T}$. Нормированная частота определяется как отношение текущей частоты к частоте дискретизации: $\bar{f} = \frac{f}{f_D} = f \Delta t = \frac{fT}{(N-1)}$. Из полученных выражений можно записать соотношение текущих и нормированных значений времени и частоты: $tf = \bar{t}\bar{f}$. В случае если необходимо вычислить нормированную круговую частоту, применяют следующую формулу: $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f} = \frac{2\pi f}{f_D} = 2\pi f \Delta t = \frac{2\pi fT}{(N-1)}$. Таким образом, модуль нормированной частоты принадлежат диапазону: $|\bar{f}| = [0; 0.5]$ и $|\bar{\omega}| = [0; \pi]$. Если максимальная частота в спектре преобразования Фурье составляет 0.5 Гц (условных), то интервал времени Δt между соседними отсчётами равен одной (условной) секунде или 2π , таким образом, период всего сигнала T будет образовывать интервал $[0; 2N\pi)$ или $[-N\pi; N\pi)$ “условных секунд”, умноженных на радиан (с·рад), в силу цикличности преобразования Фурье правая граница не входит в период сигнала T .

Величина приращения частоты в дискретном спектре сигнала, полученном в результате преобразования Фурье, будет иметь значение частоты первой гармонической составляющей в этом спектре, т.е. $\Delta f = \frac{2\pi}{T}$. Учитывая, что $T = \Delta t(N-1)$ и $N-1 = f_D T$, можно записать: $\Delta t \Delta f = \frac{2\pi}{(N-1)} = \frac{2\pi}{f_D T}$.

На основании анализа полученных выражений можно сделать важные выводы. При неизменном числе отсчётов расширение интервала преобразования Фурье некоторой функции позволяет увеличить разрешение по частоте Δf и уменьшить разрешение по времени Δt , частоту дискретизации f_D и максимальную частоту f_{max} в составе спектра преобразования Фурье. Расширение интервала преобразования Фурье обычно производят за счёт дополнения последовательности дискретной функции во времени нулевыми значениями.

При неизменном интервале преобразования Фурье увеличение числа отсчётов на единицу интервала позволяет увеличить частоту дискретизации f_D , разрешение по времени Δt , максимальную частоту f_{max} в составе спектра преобразования Фурье и сохранить неизменным разрешение по частоте Δf .

При расширении интервала преобразования Фурье и сохранении плотности отсчётов (т.е. при пропорциональном увеличении числа отсчётов) можно увеличить разрешение по частоте и сохранить неизменной максимальную частоту f_{max} в составе спектра преобразования Фурье.

Краткое обозначение пары преобразования Фурье имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \\ x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \end{cases} \quad (86)$$

где $\mathcal{F}\{x(t)\}$ – прямое преобразование Фурье сигнала $x(t)$, $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$ – обратное преобразование Фурье, частотного образа $X(\omega)$, сигнала $x(t)$, фигурные скобки означают, что операция прямого и обратного преобразования производится над множеством значений.

Преобразование Фурье обладает следующими фундаментальными свойствами для сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ с комплексными значениями.

Преобразование Фурье является линейным преобразованием, т.е. удовлетворяет свойству аддитивности:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ \mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1}\{X_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega) + X_2(\omega)\} \end{cases} \quad (87)$$

и однородности:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{c \cdot x_1(t)\} = c \cdot \mathcal{F}\{x_1(t)\} \\ \mathcal{F}^{-1}\{c \cdot X_1(\omega)\} = c \cdot \mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega)\} \end{cases} \quad (88)$$

где c – константа.

Равенство, выражающее свойство сохранения энергии сигнала при переходе из временной в частотную область, называют *уравнением Парсеваля* [26], с парой преобразования Фурье (81) уравнение Парсеваля имеет вид:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (89)$$

В радиофизике уравнение Парсеваля также называется *общей формулой Рэлея* [28, 28]. Для дискретных сигналов уравнение Парсеваля имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \quad (90)$$

Сдвиг сигнала $x(t)$ во времени приводит к сдвигу фазы частотного образа (спектра) $X(\omega)$:

$$\mathcal{F}\{x(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} X(\omega), \quad (91)$$

где $\omega\tau$ – фазовый сдвиг. Данное свойство называется *теоремой о задержке* и доказывается следующим образом: выполним преобразование Фурье задержанного сигнала $x(t - \tau)$, $\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$; произведя замену $t - \tau = \xi$, тогда $t = \xi + \tau$ и $dt = d(\xi + \tau) = d\xi$, так как задержка $\tau = const$, получим: $\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi} e^{-j\omega\tau} d\xi = X(\omega) e^{-j\omega\tau}$, ч.т.д.

Для сдвига по частоте справедливо следующее выражение

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\} = x(t) e^{-j\omega_0 t}, \quad (92)$$

т.е. задержка сигнала приводит к изменению фазочастотной характеристики, показывающей отношение гармонических компонент: $\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)}$.

Связь изменения преобразования Фурье $X(\omega)$ с изменением масштаба времени (сжатием и растяжением) сигнала $x(t)$ можно выразить как

$$\mathcal{F}\{x(ct)\} = \frac{1}{c} X\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad (93)$$

где c – константа. Данное утверждение несложно доказать с помощью выражения

$$\mathcal{F}\{x(ct)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(ct) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\frac{\omega}{c} t} dt.$$

1.7. Функция ступеньки, единичный импульс

Функция единичной ступеньки, также называемая функцией Хевисайда¹⁰, определяется следующим выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (94)$$

При необходимости смещения функции: $1(t - \tau)$ – смещение вправо на τ ; $1(t + \tau)$ – смещение влево на τ .

Производной от функции Хевисайда является дельта-функция, также называемая функцией Дирака¹¹, определяемая следующим выражением:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (95)$$

При этом $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$, из чего следует, что $\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t)$.

Одним из особенных свойств единичной функции является то, что отклик линейной системы с импульсной характеристикой $h(t)$ на возмущение единичной функцией равен импульсной характеристике данной системы, т.е.

$$(\delta * h)(t) = h(t). \quad (96)$$

Преобразование Фурье дельта-функции можно вычислить как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, из чего следует, что спектр единичной функции имеет амплитуду $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и неограниченную протяжённость по частоте. И наоборот, спектр неограниченной гармонической функции будет иметь вид единичного импульса. Подобные свойства относят к дуализму преобразования Фурье. Если отличные от нуля значения функции локализованы во времени, то спектр такой функции не ограничен (не локализован), и напротив, если спектр некоторой функции локализован по частоте, то сама функция не ограничена по времени. Подобные свойства преобразования Фурье хорошо соотносятся с принципом неопределённости Гейзенберга¹² квантовых объектов, который ограничивает применение к микрообъектам классических понятий и представлений [24]. Если взглянуть более внимательно на изложенный выше принцип дуальности пар преобразований Фурье, то можно заметить, что функция единичного импульса $\delta(t)$ локализована в точке $t = 0$, а её частотный образ $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$ не ограничен по протяжённости (не локализован), таким образом, функции $\delta(t)$ и $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$

¹⁰ Оливер Хевисайд (18 мая 1850 – 3 февраля 1925) – английский учёный-самоучка, математик, физик, инженер. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, переформулировал уравнения Максвелла в терминах трехмерных векторов, напряжённостей электрического и магнитного полей и электрической и магнитной индукций, и, независимо от других математиков, создал векторный анализ.

¹¹ Поль Адриен Морис Дирак (8 августа 1902 – 20 октября 1984) – английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года (совместно с Эрвином Шрёдингером). Член Лондонского королевского общества (1930), а также ряда академий наук мира, в том числе иностранный член Академии наук СССР (1931), Национальной академии наук США (1949) и Папской академии наук (1961).

¹² Гейзенберг Вернер Карл (5 декабря 1901 – 1 февраля 1976) – немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1932). Член ряда академий и научных обществ мира.

несоизмеримы друг с другом, как несоизмерим, например, радиус и длина окружности. Фактически эти две функции имеют различные меры, что и приводит к невозможности ограничения спектра или протяжённости, в зависимости от направления преобразования. Попытка измерения (а преобразование Фурье – это мера, построенная на корреляционных отношениях базисных гармонических функций и сигнала) несоизмеримых величин приводит к возникновению неопределённостей. Проявлением таких неопределённостей являются колебания Гиббса¹³.

1.8. Теорема о свёртке

Теорема. Теорема о свёртке определяет соответствие свёртки сигналов во временной области $(x_1 * x_2)(t)$ поэлементному умножению сигналов в частотной области $\mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x_2(t)\}$:

$$(x_1 * x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x_2(t)\}\}. \quad (97)$$

Доказательство. Запишем уравнение свёртки двух сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в виде $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$. Выполним преобразование Фурье обеих частей уравнения свёртки, получим: $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = Y(\omega)$, из чего следует, что $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau e^{-j\omega t}dt$ далее сделаем замену переменных $t - \tau = \xi$ (тогда $t = \tau + \xi$, $e^{-j\omega t} = e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega\xi}$) и запишем: $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(\xi)d\tau e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega\xi}d\xi$. Изменив порядок интегрирования, получим:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau x_2(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi = X_1(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega), \text{ ч.т.д.}$$

Верным является и следующее «обратное» свойство:

$$(x_1 \cdot x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1(t)\} * \mathcal{F}\{x_2(t)\}\}. \quad (98)$$

На базе эквивалентности свёртки сигналов во временной области умножению сигналов в частотной области, посредством быстрого преобразования Фурье (БПФ) реализуют операцию, называемую *быстрой свёрткой*. Быстрая свёртка позволяет реализовать свёртку с меньшими вычислительными затратами при размерах сигнала от 60 и более отсчётов [29]. При практической реализации требуется учитывать необходимость выравнивания длины данных, так как большинство алгоритмов реализации быстрого преобразования Фурье работает с сигналами, длина которых кратна 2^k , где k – целое положительное число. Использование быстрой свёртки и быстрой корреляции в некоторых случаях позволяет существенно снизить вычислительные затраты [30, 31].

¹³ Джозайя Уиллард Гиббс (11 февраля 1839 – 28 апреля 1903) – американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики.

На основе быстрой свертки можно эффективно реализовать обратную свёртку (англ. deconvolution). Так как $X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = Y(\omega)$, то $X_1(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X_2(\omega)}$, следовательно:

$$x_1(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{Y(\omega)}{X_2(\omega)} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{x_2(t)\}} \right\}. \quad (99)$$

Связь преобразования Фурье и корреляции имеет следующий вид:

$$(x_1 x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}^* \{x_2(t)\} \}, \quad (100)$$

а также

$$(x_1 x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x_2^*(-t)\} \}. \quad (101)$$

1.9. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа является операторным преобразованием [32], связь между оригиналом сигнала $x(t)$ во времени (прообразом) и изображением (образом) устанавливается с помощью интеграла Лапласа:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt, \quad (102)$$

где $s = \sigma + j\omega$ – оператор преобразования Лапласа.

Используя для преобразования Лапласа запись вида

$$X(\sigma, \omega) = \int_0^\infty [x(t) e^{-j\omega t}] e^{-\sigma t} dt, \quad (103)$$

несложно заметить, что преобразование Лапласа обращается в преобразование Фурье при значении $\sigma = 0$. В общем случае, если преобразование Фурье позволяет с помощью вычисления корреляции разложить сигнал на гармонические составляющие, то преобразование Лапласа позволяет разложить сигнал на гармонические и экспоненциальные (для σ – вещественной части показателя степени $s = \sigma + j\omega$) составляющие.

Совокупность гармонической и экспоненциальной формы сигнала характерна для множества переходных и стационарных процессов. Например, такие переходные процессы, как свободно затухающие колебания маятника или затухающие колебания тока и напряжения в RLC-контуре, отключённом от источника питания, имеют форму произведения $A_0 e^{-tk} \sin(\omega t + \varphi_0)$, где A_0 , φ_0 – начальная амплитуда и фаза, ω – круговая частота колебаний, t – время колебаний. Если находящийся в состоянии покоя RLC-контур подключить к источнику питания с синусоидальной формой напряжения, близкой к частоте резонанса ω_0 колебательного контура, то в контуре начнётся переходной процесс, сопряжённый с ростом амплитуды тока и напряжения, который в общем виде можно выразить как

$$A_0(1 - e^{-tk}) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - e^{-tk} \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

По экспоненциальному закону затухают электромагнитные колебания в длинных линиях, колебания резиновой мембраны или расходящиеся круги от брошенного в воду камня. С другой стороны, стационарные процессы могут не содержать в своём составе вещественных экспоненциальных компонент, но

содержат гармонические компоненты (в том числе нулевую гармонику в виде постоянной составляющей).

Для процессов, функциональное описание которых содержит суммы произведений экспоненциальных и гармонических функций, преобразование Лапласа позволяет перейти от дифференциальных уравнений к обычным алгебраическим уравнениям [32, 33].

Обратное преобразование Лапласа имеет следующий вид:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad (104)$$

где σ_0 – абсцисса абсолютной сходимости интеграла Лапласа [34].

Для неказуальных систем интеграл Лапласа имеет следующий вид:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (105)$$

Краткое обозначение пары преобразования Лапласа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \end{cases}. \quad (106)$$

где $\mathcal{L}\{x(t)\}$ – прямое преобразование Лапласа сигнала $x(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ – обратное преобразование Лапласа, образа $X(s)$.

Преобразование Лапласа сигналов дискретного времени имеет следующий вид:

$$X[s] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-sn}. \quad (107)$$

Нули – это области, где функция $X(s)$, полученная в результате преобразования Лапласа, обращается в ноль; полюсы – это области, где функция, полученная в результате преобразования Лапласа, обращается в бесконечность. Они определяют характер функции-прообраза $x(t)$. Существенным качеством преобразования Лапласа является возможность определения устойчивости функции или системы, если преобразование Лапласа выполнено над импульсной характеристикой системы. Когда полюсы расположены в левой полуплоскости комплексной s -плоскости, система устойчива, когда в правой – неустойчива. При этом s -плоскость $s = \sigma + j\omega$ задаётся взаимно ортогональными векторами вещественной и мнимой единицы. При наличии нескольких полюсов устойчивость системы определяется полюсом с наименьшей устойчивостью (рис. 4). Таким образом, чтобы система была устойчива, все её полюсы должны быть расположены в левой полуплоскости s -плоскости [13].

На рис. 4 построены графики функций $x(t)$ и расположение их полюсов, найденных с помощью преобразования Лапласа и позволяющих оценить устойчивость:

– (рис. 4, а) $x(t) = e^{-t} \sin(t)$, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$, все полюсы расположены в области устойчивости (левая полуплоскость s -плоскости);

– (рис. 4, б) $x(t) = \sin(t)$, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, все полюсы расположены в области безразличия (ось $\sigma = 0$, s -плоскости);

– (рис. 4, в) $x(t) = e^t \sin(t)$, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$, все полюсы расположены в области неустойчивости (правая полуплоскость s-плоскости).

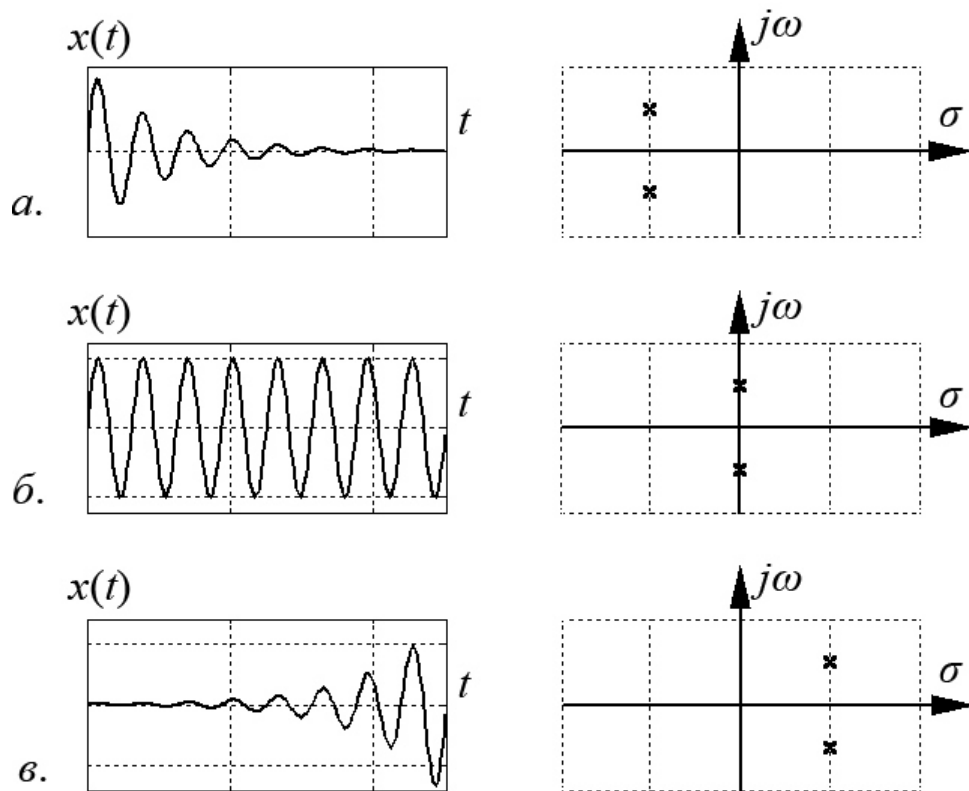


Рисунок 4. Графическое отображение исходных функций $x(t)$ и их полюса на s-плоскости

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

Оно является линейным преобразованием, т.е. для сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с комплексными значениями удовлетворяет свойству аддитивности:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x_1(t)\} + \mathcal{L}\{x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s) + X_2(s)\} \end{cases} \quad (108)$$

и однородности:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{k \cdot x_1(t)\} = k \cdot \mathcal{F}\{x_1(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{k \cdot X_1(s)\} = k \cdot \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} \end{cases} \quad (109)$$

где k – константа.

Изображение Лапласа производной функции порядка n можно определить, используя выражение:

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n \left[X(s) - \frac{x(0)}{s} - \frac{x'(0)}{s^2} - \dots - \frac{x^{(n-1)}(0)}{s^n} \right], \quad (110)$$

где $x(0)$ – начальные условия при $t = 0$.

Изображение интеграла, взятого в пределе от 0 до t , будет иметь вид:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(t) dt\right\} = \frac{X(s)}{s}. \quad (111)$$

Свёртка сигналов во временной области $(x_1 * x_2)(t)$ эквивалентна умножению сигналов в операторной s -области $\mathcal{L}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\}$ (теорема о свёртке в s -области), т.е.

$$(x_1 * x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\}\}. \quad (112)$$

1.10. Z-преобразование

Для анализа дискретных систем, наряду с преобразованием Лапласа, преимущественно используют z -преобразование. При выполнении z -преобразования используется оператор $z = re^{j\omega}$. Выражение для прямого z -преобразования дискретного сигнала $x[n]$ имеет вид:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}. \quad (113)$$

Записав z -преобразование в виде

$$X[r, \omega] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}, \quad (114)$$

легко заметить связь z -преобразования с преобразованием Лапласа и преобразованием Фурье. Очевидно, что при $r = 1$ z -преобразование обращается в преобразование Фурье, а сам результат преобразования будет отображён на z -плоскость вдоль единичной окружности.

Обратное z -преобразование можно выполнить, используя следующее выражение:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz, \quad (115)$$

где C – любой замкнутый контур обхода области сходимости подынтегральной функции, охватывающий все её особые точки и начало координат.

Как и преобразование Лапласа, z -преобразование позволяет исследовать устойчивость систем. Отличием является координатная система s -плоскости от z -плоскости и, следовательно, картирование расположения нулей и полюсов и критериев устойчивости. При анализе систем на устойчивость с помощью z -преобразования считают, что система устойчива – если все полюсы находятся внутри единичной окружности; неустойчива – если хоть один полюс находится за пределами единичной окружности (рис. 5). При этом z -плоскость $z = re^{j\omega}$ задаётся в полярном виде: ω – угол, r – радиус вектор.

На рис. 5 построены графики функций $x(t)$ и расположение их полюсов, найденных с помощью z -преобразования и позволяющих оценить устойчивость:

– (рис. 5, а) $x(t) = e^{-t} \sin(t)$, $Z\{x(t)\} = X(z) = \frac{ez \sin(1)}{1+(ez)^2-2ez \cos(1)}$, все полюсы расположены в области устойчивости (внутри единичной окружности z -плоскости);

– (рис. 5, б) $x(t) = \sin(t)$, $Z\{x(t)\} = X(z) = \frac{z \sin(1)}{1+(z)^2-2z \cos(1)}$, все полюсы расположены в области безразличия (единичная окружность z -плоскости);

– (рис. 5, в) $x(t) = e^t \sin(t)$, $Z\{x(t)\} = X(z) = \frac{ez \sin(1)}{e^2 + z^2 - 2ez \cos(1)}$, все полюсы расположены в области неустойчивости (за пределами единичной окружности z -плоскости).

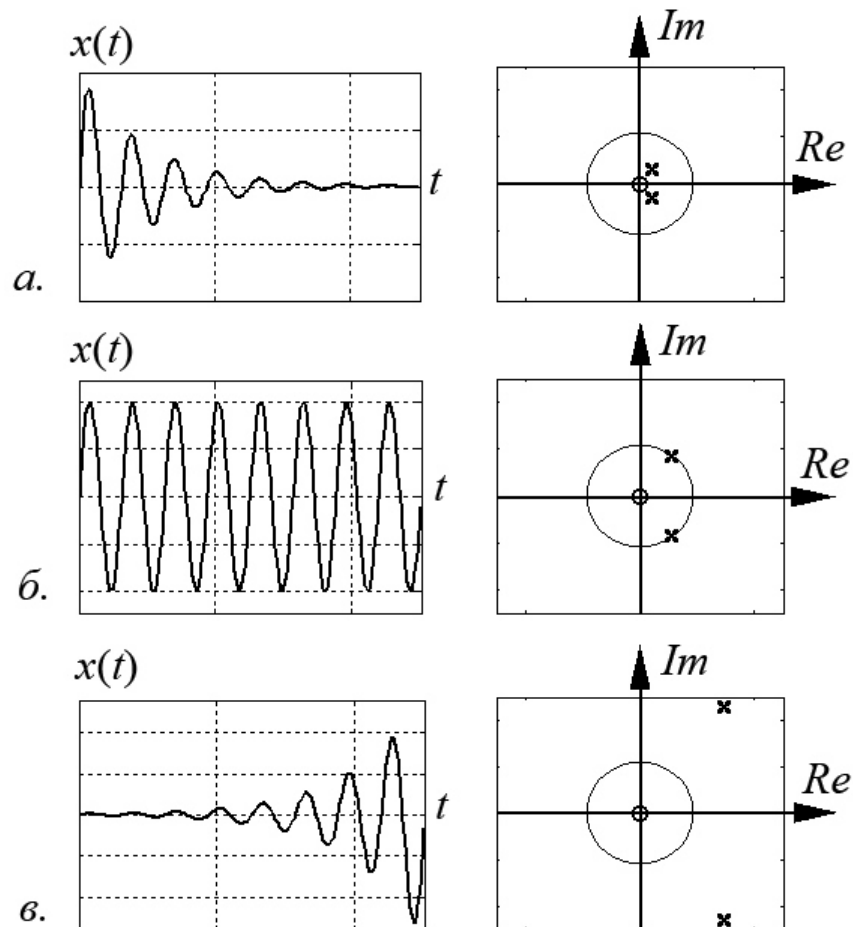


Рисунок 5. Графическое отображение исходных функций $x(t)$ и их полюса, на Z -плоскости

Краткое обозначение пары z -преобразования имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X[z] = Z\{x[n]\} \\ x[n] = Z^{-1}\{X[z]\} \end{cases} \quad (116)$$

где $Z\{x[n]\}$ – прямое z -преобразование сигнала $x[n]$, $Z^{-1}\{X[z]\}$ – обратное z -преобразование, образа $X[z]$.

Z -преобразование удовлетворяет следующими фундаментальным свойствам.

Z -преобразование является линейным преобразованием, т.е. для сигналов $x_1[n]$ и $x_2[n]$ с комплексными значениями удовлетворяет свойству аддитивности:

$$\begin{cases} Z\{x_1[n]\} + Z\{x_2[n]\} = Z\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ Z^{-1}\{X_1[z]\} + Z^{-1}\{X_2[z]\} = Z^{-1}\{X_1[z] + X_2[z]\} \end{cases} \quad (117)$$

и однородности:

$$\begin{cases} Z\{k \cdot x_1[n]\} = k \cdot Z\{x_1[n]\} \\ Z^{-1}\{k \cdot X_1[z]\} = k \cdot Z^{-1}\{X_1[z]\} \end{cases} \quad (118)$$

где k – константа.

Свойство z -преобразования задержанной последовательности: z -преобразование задержанной на m отсчётов последовательности $x[n - m]$ равно z -преобразованию незадержанной последовательности, умноженной на z^{-m} , что можно символически записать как

$$Z\{x[n - m]\} = z^{-m} Z\{x[n]\}. \quad (119)$$

Доказательство свойства (119) следует из следующих рассуждений. Для последовательности $x[n - m]$, задержанной на m отсчётов, z -преобразование равно

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - m] z^{-n}, \quad (120)$$

используя замену $k = n - m$ и меняя параметр суммы, получим:

$$X[z] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-m} z^{-k} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-k}. \quad (121)$$

При умножении последовательности $x[n]$ на экспоненциальную последовательность z_0^n , z -преобразование имеет вид

$$Z\{z_0^n x[n]\} = X\left[\frac{z}{z_0}\right]. \quad (122)$$

Дифференцирование z -преобразования:

$$Z\{nx[n]\} = -z \frac{dX[z]}{dz}. \quad (123)$$

Сопряжение последовательности:

$$Z\{x^*[n]\} = X^*[z^*]. \quad (124)$$

Обращение последовательности:

$$Z\{x^*[-n]\} = X^*\left[\frac{1}{z^*}\right]. \quad (125)$$

Z -преобразование свёртки последовательностей эквивалентно произведению операторных образов z -преобразования (теорема о свёртке в z -области):

$$Z\{(x_1 * x_2)[n]\} \leftrightarrow Z\{x_1[n]\} \cdot Z\{x_2[n]\}. \quad (126)$$

1.11. Разностное уравнение, передаточная функция

Уравнение аналоговой линейной системы в дифференциальной форме имеет следующий вид:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{M-1} b(m) \frac{d^m x(t)}{dt^m} - \sum_{k=1}^{K-1} a(k) \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \quad (127)$$

где $y(t)$ – выходной отклик системы, $x(t)$ – входное возмущение системы, $b(m)$ и $a(k)$ – коэффициенты разностного дифференциального уравнения, причём $a(k)$ отвечает за обратную связь в линейной системе.

Для дискретных линейных систем, получающих на вход возмущение $x[n]$ и производящих отклик $y[n]$, аналог уравнения (127) имеет вид:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b[m] x[n - m] - \sum_{k=1}^{K-1} a[k] y[n - k]. \quad (128)$$

Уравнения (127) и (128), как и свёртка возмущающего сигнала с импульсной характеристикой, являются исчерпывающим описанием линейных систем. Следует отметить, что ненулевые коэффициенты $a(k)$ (или $a[k]$) присущи системам с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Но имеются исключения, т.е. такие системы, в разностных уравнениях которых есть ненулевые значения коэффициентов $a(k)$ (или $a[k]$), но при этом у системы конечная импульсная характеристика (КИХ). Примером такой системы является однородный фильтр.

В операторном пространстве характеристикой линейной системы является передаточная функция – операторный образ импульсной характеристики, т.е. отношение операторного преобразования отклика системы к операторному преобразованию возмущающего воздействия. В общем виде это можно определить как

$$H(v) = \frac{Y(v)}{X(v)}, \quad (129)$$

где v – некоторый оператор преобразования, например, для преобразования Лапласа $v = s = \sigma + j\omega$, $H(v)$ – передаточная функция, $X(v)$ – возмущающее воздействие на систему, $Y(v)$ – отклик системы.

Рассмотрим получение уравнения передаточной функции для системы характеризуемой разностным уравнением вида (128), на примере z -преобразования:

$$Z\{y[n]\} = Z\{\sum_{m=0}^{M-1} b[m]x[n-m] - \sum_{k=1}^{K-1} a[k]y[n-k]\}. \quad (130)$$

Выполняя z -преобразование, получим:

$$Y[z] = X[z] \sum_{m=0}^{M-1} b[m]z^{-m} - Y[z] \sum_{k=1}^{K-1} a[k]z^{-k}, \quad (131)$$

далее легко получить уравнение передаточной функции в дробно-рациональном виде, выраженное через коэффициенты разностного уравнения:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b[m]z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} a[k]z^{-k}}. \quad (132)$$

1.12. Преобразование Гильберта, аналитический сигнал

Преобразование Гильберта ¹⁴ не относится к классу операторных преобразований. Преобразование Гильберта во временной области реализуется с помощью операции свёртки с импульсной характеристикой вида (рис. 6)

$$h_{GT}(t) = \frac{1}{\pi t}. \quad (133)$$

В соответствии с теоремой о свёртке, в частотной области преобразование Гильберта можно реализовать с помощью поэлементного умножения спектра сигнала на спектр функции $h(t)$. Вычислим спектр $h(t)$:

¹⁴ Давид Гильберт (23 января 1862 – 14 февраля 1943) – немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. Член многих академий наук, в том числе Берлинской, Гёттингенской, Лондонского королевского общества, иностранный почётный член Академии наук СССР (1934). Лауреат премии имени Н. И. Лобачевского (1903). В 1910 – 1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков.

$$H_{GT}(\omega) = \mathcal{F}\{h_{GT}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = -j \operatorname{sign}(\omega), \quad (134)$$

где $\operatorname{sign}(\omega)$ – функция знака, которая определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ 1, & \omega > 0 \end{cases}. \quad (135)$$

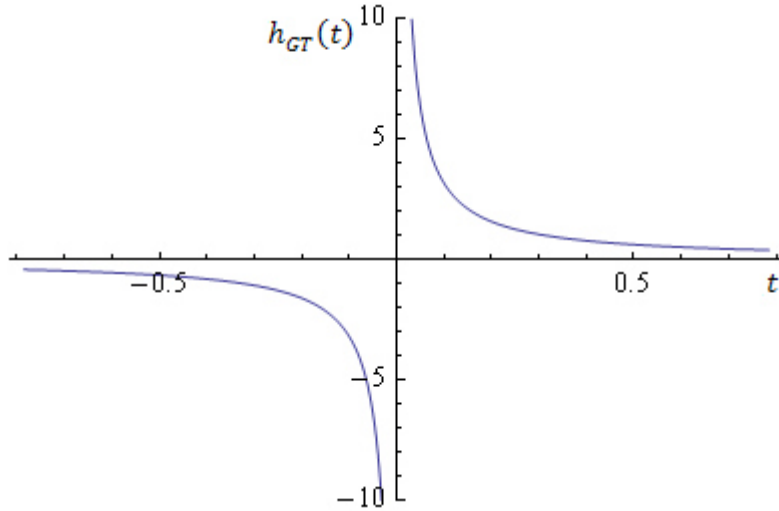


Рисунок 6. Функция импульсной характеристики преобразования Гильберта

Из выражения (134) вполне очевидно, что спектр преобразования Гильберта является чисто мнимым (не содержит вещественных составляющих отличных от нуля).

Для сигнала $x(t)$ преобразование Гильберта можно реализовать во временной области, выполнив свёртку:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = (x * h_{GT})(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (136)$$

В частотной области выполняется умножение спектра $X(\omega)$ сигнала $x(t)$ на спектр $H_{GT}(\omega)$:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{X}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega) \cdot H_{GT}(\omega)\}. \quad (137)$$

В силу того, что операция свёртки является линейным преобразованием, преобразование Гильберта также является линейным преобразованием. Линейность преобразования Гильберта означает выполнение всех свойств линейности и их следствия. Например, если сигнал $x(t)$ имеет распределение Гаусса, то и сигнал $\hat{x}(t) = (x * h_{GT})(t)$ будет иметь распределение Гаусса [27].

Частотная характеристика $H_{GT}(\omega)$ позволяет сделать следующие выводы о свойствах преобразования Гильберта:

- подавляет составляющую сигнала на нулевой частоте, т.е. постоянную составляющую во времени;
- вращает фазу сигнала.

Благодаря умножению спектра сигнала на мнимую единицу j , при преобразовании Гильберта в частотном пространстве чисто вещественного или

чисто мнимого сигнала на выходе получится сигнал $\hat{x}(t)$, ортогональный к входному сигналу $x(t)$, так как синусные составляющие трансформируются в косинусные, а косинусные в синусные, поэтому сигнал, полученный в результате преобразования Гильберта, также называют ортогональным дополнением.

Преобразование Гильберта связано с понятием аналитического сигнала. Аналитический сигнал – это сигнал $y(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$, где $x(t)$ – чисто вещественный сигнал, а $\hat{x}(t)$ – ортогональное дополнение к $x(t)$. Преобразование Фурье аналитического сигнала $y(t)$ позволяет выявить его свойства [35]:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) + j\hat{x}(t)\} = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + j(X(\omega) \cdot H_{GT}(\omega)), \quad (138)$$

таким образом, с учётом (134), можно записать:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) + j^2 X(\omega) = 0, & \omega < 0 \\ X(\omega) = 0, & \omega = 0 \\ X(\omega) - j^2 X(\omega) = 2X(\omega), & \omega > 0 \end{cases}. \quad (139)$$

Из полученного выражения вполне очевидно, что спектр аналитического сигнала отличен от нуля только в области частот $\omega > 0$, а постоянная составляющая и спектр в области отрицательных частот обращается в ноль. Данное свойство аналитического сигнала применяется в решениях задач модуляции сигналов, содержащих только положительную часть спектра.

Преобразование Гильберта позволяет ввести определение огибающей вещественного сигнала [36] как мгновенного значения амплитуды:

$$s(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}. \quad (140)$$

1.13. Дополнительно о свойствах преобразования Фурье

Приведём некоторые дополнительные замечания о свойствах преобразования Фурье, которые имеют существенное значение для синтеза и анализа сигналов.

Для последовательности и наглядности изложения свойств воспользуемся взаимными преобразованиями комплекснозначных функций. Сформируем таблицу различных взаимных преобразований комплекснозначных функций (таблица 1), а всевозможные значения рассматриваемых комплекснозначных функций обозначим как $x(t) = (\mp a(t) \mp jb(t))$ or $(\mp b(t) \mp ja(t))$. Тогда в клетках таблицы будут находиться возможные значения $x(t)$ и операции взаимных преобразований.

Таблица 1. Взаимные преобразования комплекснозначных функций

$a(t)+jb(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$-b(t)+ja(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$-a(t)-jb(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$b(t)-ja(t)$
$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$
$a(t)-jb(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$-b(t)-ja(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$-a(t)+jb(t)$	$\Rightarrow \times(+j) \Rightarrow$ $\Leftarrow \times(-j) \Leftarrow$	$b(t)+ja(t)$

Из таблицы очевидно, что умножение вектора $(b(t) + ja(t))$ на $+j$ поворачивает вектор на $\pi/2$ против часовой стрелки (в положительном направлении полярной системы координат), умножение на $-j$ поворачивает вектор $(b(t) + ja(t))$ на $\pi/2$ по часовой стрелке (в отрицательном направлении). Свойства поворачивающих множителей хорошо известны и вполне очевидны из уравнения умножения и деления комплексных чисел $z_1 = |z_1|e^{j\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2|e^{j\varphi_2}$ в показательной форме:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (141)$$

и

$$\frac{z_1}{z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (142)$$

Теперь выполним преобразования комплекснозначных функций $x(t)$, но используя преобразование Фурье (таблица 2).

Таблица 2. Взаимные преобразования комплексных функций с использованием преобразования Фурье

$a(t)+jb(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$-b(t)+ja(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$-a(t)-jb(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$b(t)-ja(t)$
$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$		$\Downarrow (x(t))^* \Uparrow$
$a(t)-jb(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$-b(t)-ja(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$-a(t)+jb(t)$	$\mathcal{F}^{-1}\{j \times \mathcal{F}\{x\}\} \Rightarrow$ $\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{-j \times \mathcal{F}\{x\}\}$	$b(t)+ja(t)$

Отметим, что, если задан сигнал $x(t)$, то найти комплексно сопряжённый сигнал можно с помощью преобразования Фурье $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, выполнив следующие действия: развернуть преобразование Фурье в обратном порядке, что можно записать как $X(-\omega)$ с последующим комплексным сопряжением и обратным преобразованием Фурье: $x^*(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X^*(-\omega)\}$. На языке MatLab комплексное сопряжение через преобразование Фурье можно записать в виде программы (листинг 1.2.).

Листинг 1.2. Комплексное сопряжение через преобразование Фурье

```
%% комплексное сопряжение через преобразование Фурье
%% =====
clear all;           % очистка переменных
close all;           % закрыть все окна
clc;                 % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 1;              % минимальная частота
Fu = 7;              % максимальная частота;
Nc = 16;             % размер вектора сигнала
sx = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 );

% комплексное сопряжение через преобразование Фурье
% комплексно сопряжённый спектр сигнала
RFSX = conj(fft(sx));
```



```

RFSX(end:-1:2) = RFSX(2:1:end); % реверс спектра
% комплексно сопряжённый сигнал к сигналу sx
csx = ifft(RFSX);
%% =====

```

Следует уделить внимание процедуре разворачивания последовательности преобразования Фурье $X(\omega)$. Нулевой элемент последовательности $X(\omega)$ соответствует постоянной составляющей исходного сигнала $x(t)$, поэтому процедура разворачивания последовательности преобразования Фурье начинается не с нулевого элемента, а с первого, таким образом, последний элемент ставится на место первого, а первый на место последнего, предпоследний на место второго, а второй на место предпоследнего и т.д. Происходит взаимообмен элементов положительной части спектра с элементами отрицательной части спектра. В соответствии со сказанным, комплексное сопряжение дискретного сигнала $x[t]$ через преобразование Фурье, можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \\ x^*[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(X^*[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^*[N-k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \right) \end{cases} \quad (143)$$

Таким образом, запись $X(-\omega)$ имеет условный формальный характер, что необходимо учитывать при практической реализации.

1.14. Некоторые особенности вычисления быстрой корреляции

Как было показано ранее, связь преобразования Фурье и корреляции имеет следующий вид:

$$(x_1 x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}^*\{x_2(t)\}\}, \quad (144)$$

а также

$$(x_1 x_2)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x_2^*(-t)\}\}. \quad (145)$$

При этом необходимо учесть, что вычисление корреляции можно интерпретировать как вычисление свёртки, при условии, что один сигнал реверсивно развёрнут и комплексно сопряжён (67, 68). Для анализа вычисления корреляции через преобразование Фурье произведём анализ изменения спектра развёрнутого (реверсивного) и комплексно сопряжённого сигналов по отношению к исходному сигналу.

Листинг 1.3 содержит пример программы MatLab для вычисления преобразования Фурье некоторого исходного сигнала и развёрнутого (реверсивного) по отношению к исходному.

Программный код MatLab (листинг 3) вполне очевиден: в первых строках производится очистка памяти, далее задаются параметры функции `mi_signoise()` (листинг 1.2), производящей синтез случайного сигнала `sx` с заданным частотным спектром, затем вычисляются аргументы сигнала `st` в диапазоне $[-\pi; \pi]$ и спектра `sf` в диапазоне $[-0.5; 0.5]$ (с нормированной частотой), далее производится

разворот (реверс) сигнала и вычисление спектра прямого sx и реверсированного сигнала rsx . Отметим, что функция `fftshift()` перегруппировывает выходные массивы функций `fft()` и `fft2()`, размещая нулевую частоту в центре спектра, что позволяет отображать результат преобразования Фурье в более привычном для частотных характеристик виде.

Листинг 1.3. Реверс сигнала и расчёт спектра прямого и реверсивного сигналов, MatLab

```
%% расчёт спектра прямого и реверсивного сигналов
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 2;             % минимальная частота
Fu = 12;            % максимальная частота
Nc = 31;            % размер вектора сигнала
sx = mi_sinoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 );
% аргумент сигнала (время, с·рад)
st = linspace(-pi*Nc, pi*Nc, Nc);
% аргумент спектра (норм. частота, Гц)
sf = linspace(-0.5, 0.5, Nc);

%% разворачивание сигнала и расчёт преобразования Фурье
rsx = sx(end:-1:1); % реверс (разворот) сигнала
FSX = (1/sqrt(Nc)).*fftshift(fft(sx));
FRSX = (1/sqrt(Nc)).*fftshift(fft(rsx));
%% =====
```

На (рис. 7 и 8) приведена визуализация результатов выполнения программы (листинг 1.3). Изображение (рис. 7) содержит графики вещественной $\text{Re}\{\dots\}$ и мнимой $\text{Im}\{\dots\}$ составляющих условно прямого sx и условно реверсированного rsx сигналов. Изображение (рис. 8) содержит графики спектральных характеристик сигналов sx и rsx , а именно: вещественные и мнимые составляющие, амплитуду (абсолютное значение) и фазу преобразования Фурье в координатах с нормированной частотой по оси абсцисс; таким образом, изображение (рис. 8) содержит комплекс частотных характеристик. FSX – преобразования Фурье условно прямого сигнала sx и $FRSX$ преобразования Фурье условно реверсированного сигнала rsx , соответственно.

Вполне очевидно, что спектр $\text{abs}\{FRSX\}$ реверсированного сигнала rsx развёрнут относительно центра по отношению к спектру $\text{abs}\{FSX\}$ прямого сигнала sx , причём нулевой отсчёт, соответствующий постоянной составляющей, остаётся на прежнем месте. Учитывая графики вещественной $\text{Re}\{\dots\}$ и мнимой $\text{Im}\{\dots\}$ составляющих преобразования Фурье условно прямого и реверсированного сигналов, а также график фазы $\text{angle}\{\dots\}$, можно заключить, что

при реверсировании сигнала произошло реверсирование амплитуды спектра (т.е. взаимообмен положительной и отрицательной частей спектра) при одновременном изменении фазы (соотношения \cos -ных и \sin -ных составляющих) и сохранении амплитуды. Сохранение амплитуды объяснимо тем, что в результате реверса сигнала его спектральный состав не меняется, но *может* измениться фазовый характер гармонических составляющих, что и наблюдается в результатах выполнения программы (листинг 3).

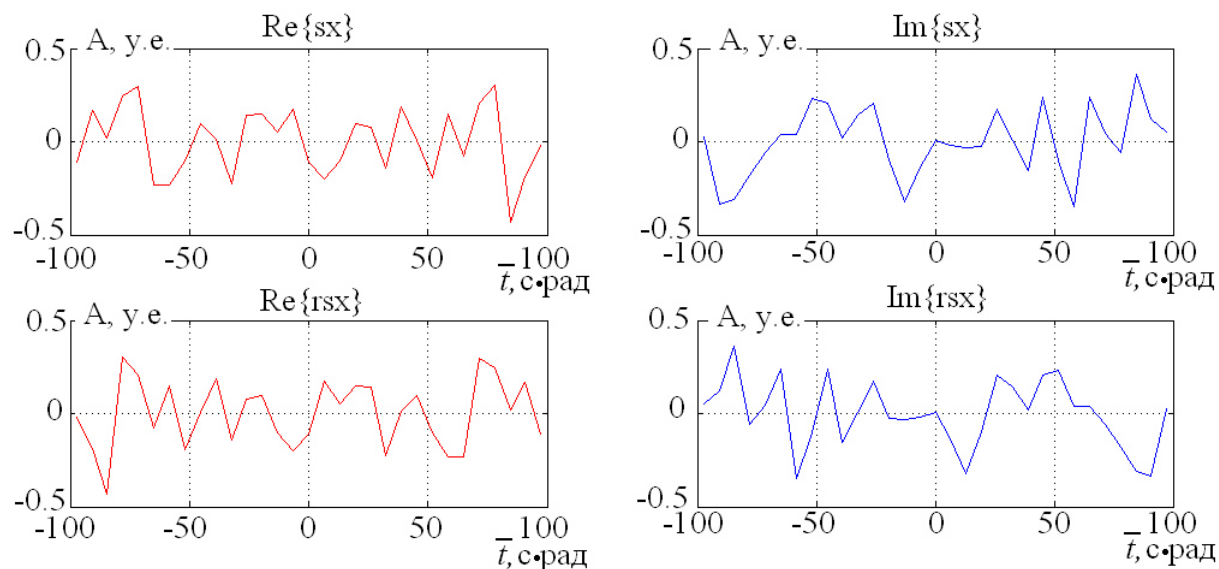


Рисунок 7. Графики: sx – исходного условно прямого и rsx – реверсированного сигналов

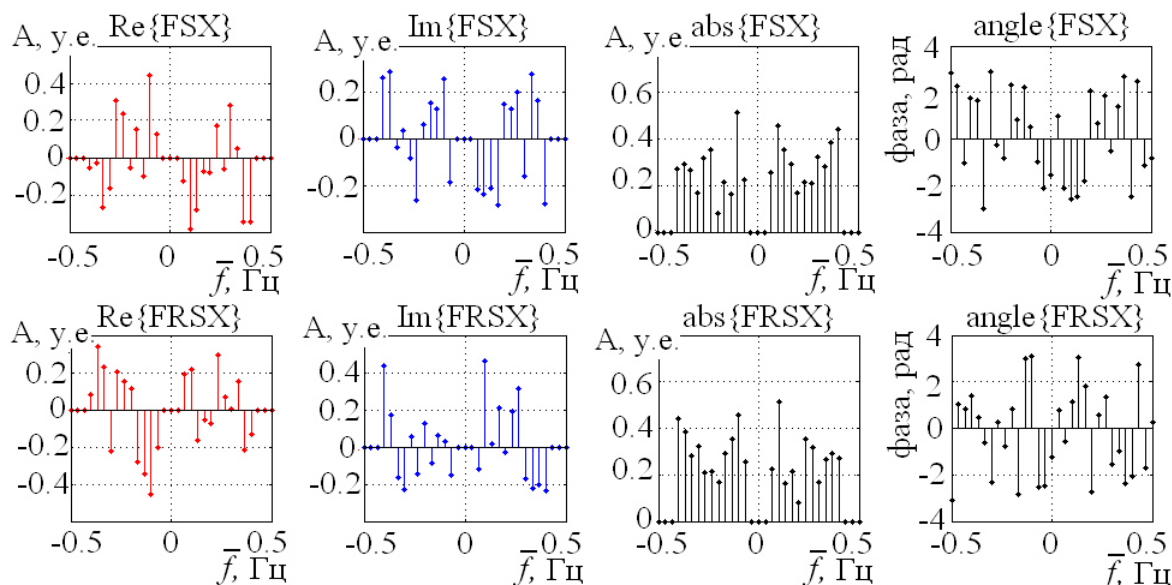


Рисунок 8. Графики спектральных характеристик FSX условно прямого sx и $FRSX$ условно реверсированного rsx сигналов

Теперь выполним анализ различий спектра сигнала $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ и спектра комплексно сопряженного сигнала $\mathcal{F}\{x^*(t)\}$. Пример вычисления преобразования Фурье исходного и комплексно сопряжённого к исходному сигналов приведён в программе MatLab (листинг 1.4).

Листинг 1.4. Расчёт спектра исходного и комплексно сопряженного сигналов, MatLab

```
%% расчёт спектра
% исходного и комплексно сопряженного сигналов
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 2;             % минимальная частота
Fu = 12;            % максимальная частота
Nc = 31;            % размер вектора сигнала
sx = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 );
% аргумент сигнала (время, с·рад)
st = linspace(-pi*Nc, pi*Nc, Nc);
% аргумент спектра (норм. частота, Гц)
sf = linspace(-0.5, 0.5, Nc);
%% комплексное сопряжение сигнала и преобразование Фурье
csx = conj(sx);
FSX = fftshift(fft(sx));
FCSX = fftshift(fft(csx));
%% =====
```

Спектр комплексно сопряжённого сигнала эквивалентен развёрнутому комплексно сопряжённому спектру исходного сигнала, т.е. $\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-\omega)$ (рис. 9).

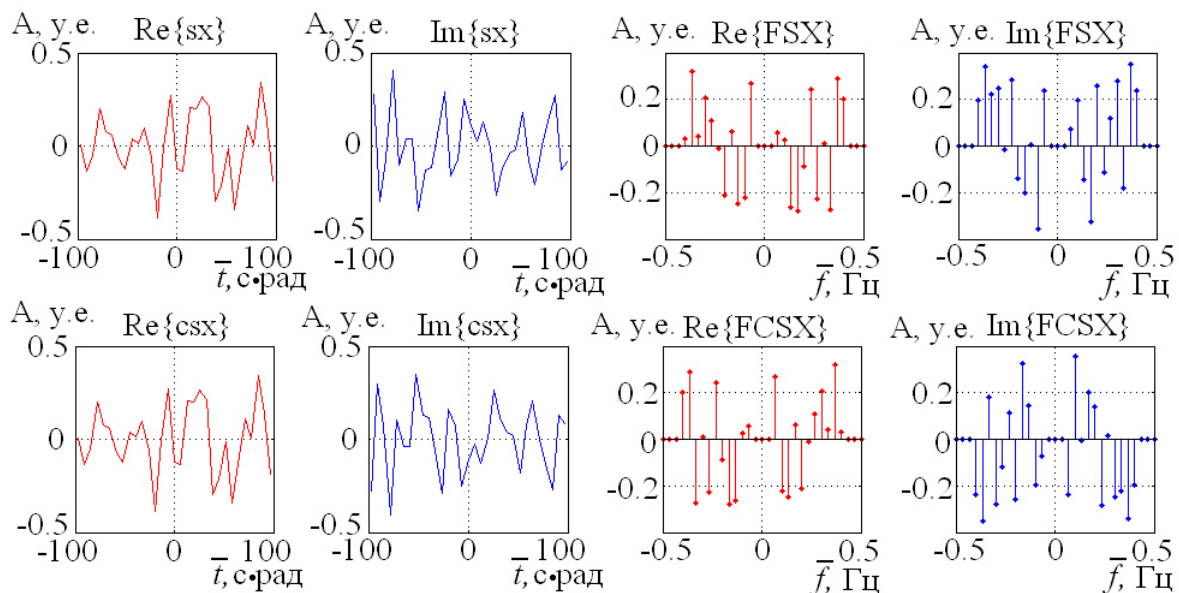


Рисунок 9. Графики исходного sx и комплексно сопряжённого csx сигналов и их преобразования Фурье

Сопоставление влияния реверса и комплексного сопряжения сигнала на результат преобразования Фурье позволяет произвести анализ сходства и различий результатов быстрого вычисления корреляции. Произведём расчёт (листинг 1.5) и сравним результаты (рис. 10, 11) вычисления автокорреляции тремя различными способами:

1. непосредственно через функцию корреляции $(x \bullet x)(t) = s(t)$;
2. через перемножение спектров исходного сигнала и реверсированного комплексно сопряжённого двойника $s(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x^*(-t)\}\}$;
3. через перемножение спектра и комплексно сопряжённого спектра $s(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}^*\{x(t)\}\}$.

Листинг 1.5. Расчёт автокорреляции тремя способами

```
%% Расчёт автокорреляции
% для шумоподобного сигнала различными способами
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 2;             % минимальная частота
Fu = 12;            % максимальная частота
Nc = 31;            % размер вектора сигнала

sx = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 );
% аргумент сигнала (время, с·рад)
cst = linspace(-pi*Nc, pi*Nc, 2*Nc-1);
% аргумент спектра (норм. частота, Гц)
csf = linspace(-0.5, 0.5, 2*Nc-1);
% вектор нулей дополнения сигнала
sxdop = zeros(1, Nc-1);
%% =====
%% вычисление автокорреляции
% 1 способ
csx1 = xcorr(sx);
FCSX1 = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(fft(csx1));
%% =====
% 2 способ
rsx = conj(sx(end:-1:1));
FSX = fft([sx sxdop]);
FRSX = fft([rsx sxdop]);
FCSX = FSX.*FRSX;
csx2 = ifft(FCSX);
FCSX2 = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(FCSX);
%% =====
```

```
% 3 способ
FCSX = FSX.*conj(FSX);
csx3 = ifft(FCSX); % развёрнутая форма АКФ
% csx3 = fftshift(ifft(FCSX)); % привычная форма АКФ
FCSX3 = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(FCSX);
%% =====
```

На рис. 10 приведён пример результата выполнения программы (листинг 1.5). Анализ изображений (рис. 10) показывает, что вид и спектр автокорреляционных функций, рассчитанных первым и вторым способом, совпадают. Автокорреляционная функция, рассчитанная третьим способом, а также её спектр отличаются от первых двух.

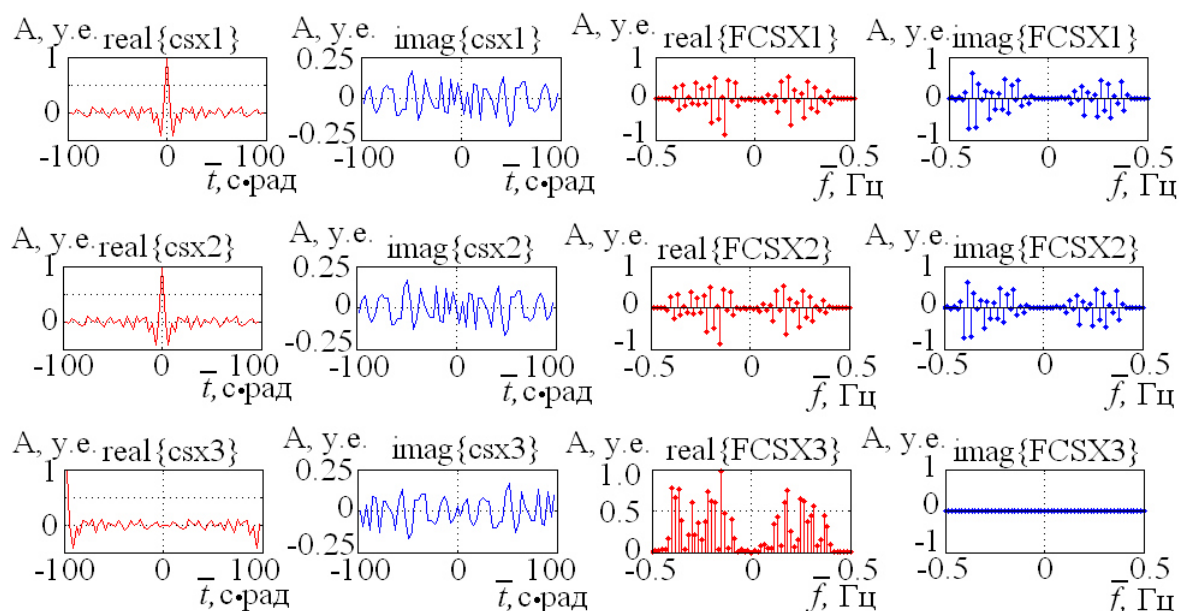


Рисунок 10. Результат выполнения программы (листинг 1.5) расчёта автокорреляции тремя способами, расположение по строкам: первая строка – первый способ; вторая строка – второй способ; третья строка – третий способ.

Слева – вещественные и мнимые функции автокорреляции, справа – вещественные и мнимые составляющие спектра автокорреляции

Существенно, что АКФ, рассчитанная третьим способом, развёрнута относительно центральных точек отрезков, полученных делением пополам интервала определения АКФ. Спектр такой АКФ имеет вещественный характер. Для восстановления формы АКФ, соответствующей полученной первым и вторым способом, можно применить функцию `fftshift()`, т.е. реализовать третий способ вычисления АКФ следующим образом: `fftshift(ifft(FSX.*conj(FSX)))`.

Для сокращения потребления частотного ресурса в системах связи достаточно часто используют односторонний спектр [27, 36, 37]. Таким образом, актуальным вопросом является изучение особенностей автокорреляционной функции для сигнала с односторонним спектром. Как было показано ранее,

автокорреляция вычислима через преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}^*\{x(t)\}\}$, при таком вычислении спектр автокорреляционной функции будет вещественным и знакоположительным, причём вещественная часть АКФ является суммой ряда $\cos(\dots)$ функций, а мнимая часть АКФ – сумма ряда $\sin(\dots)$ функций. Соответственно, для одностороннего спектра исходной функции $x(t)$ получим односторонний спектр АКФ $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}^*\{x(t)\}\}$. Учитывая правила вычисления производной гармонических функций, т.е. $\cos'(t) = -\sin(t)$ и $\sin'(t) = \cos(t)$, а также правила вычисления производной функции через её разложение в ряд Фурье (84), получим, что мнимая часть АКФ близка по форме к производной от вещественной части АКФ (и наоборот). Отличие от производной заключается в отсутствии выполнения того правила, что гармонические компоненты с более высокой частотой обеспечивают большую скорость изменения (скорость приращения) функции, т.е. большие значения производной, что выражается в умножении гармонических коэффициентов на соответствующую частоту (84). В результате того, что вещественная часть АКФ с односторонним спектром будет представлена $\cos(\dots)$ составляющими, а мнимая – $\sin(\dots)$ составляющими, между комплексными компонентами АКФ функций с односторонним спектром будет выполняться условие ортогональности на интервалах, в которые целиком уместается целое число периодов гармонических функций:

$$\begin{cases} (xx)(t) = s(t) \\ \int_{-0.5T}^{0.5T} \operatorname{Re}[s(t)] \operatorname{Im}[s(t)] dt = 0 \end{cases} \quad (146)$$

Иначе говоря, мнимая часть АКФ $\operatorname{Im}[s(t)]$ функции с односторонним спектром и нулевой постоянной составляющей эквивалентна преобразованию Гильберта вещественной части АКФ той же функции $\operatorname{Re}[s(t)]$. Для комплексного сигнала $x(t)$ только с положительным спектром и нулевой постоянной составляющей можно записать:

$$\begin{cases} (xx)(t) = s(t) \\ \operatorname{Im}[s(t)] = \mathcal{H}\{\operatorname{Re}[s(t)]\} \end{cases} \quad (147)$$

Для комплексного сигнала $x(t)$ только с отрицательным спектром и нулевой постоянной составляющей можно записать:

$$\begin{cases} (xx)(t) = s(t) \\ \operatorname{Im}[s(t)] = -\mathcal{H}\{\operatorname{Re}[s(t)]\} \end{cases} \quad (148)$$

Таким образом, АКФ $(x \bullet x)(t) = s(t)$ комплекснозначного сигнала $x(t)$ с положительным спектром и нулевой постоянной составляющей является аналитическим сигналом $s(t) = \operatorname{Re}[s(t)] + j\widehat{\operatorname{Re}}[s(t)]$, или с использованием формулы Эйлера $s(t) = |s(t)|(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$, а АКФ $(x \bullet x)(t) = s(t)$ комплекснозначного сигнала с отрицательным спектром и нулевой постоянной составляющей является комплексно сопряжённым аналитическим сигналом. На практике указанные закономерности можно использовать для разделения АКФ на

вещественную и мнимую составляющие за счёт ортогональности $Re[s(t)]$ и $\widehat{Re}[s(t)]$ для сигналов с односторонним спектром.

В листинге 1.6 представлена программа вычисления автокорреляции сигнала с полным (всем) спектром (ВС), только положительным спектром (ПС) и только отрицательным спектром (ОС). Вычисление АКФ производится через преобразование Фурье. Для получения корректной формы АКФ применяется функция MatLab `fftshift()`. Также для каждой вещественной части АКФ ВС, ПС и ОС производится расчёт преобразования Гильберта при помощи функции MatLab вычисления аналитического сигнала `hilbert()`.

Листинг 1.6. Расчёт автокорреляции сигнала с полным и с односторонним спектром

```
%% Расчёт автокорреляции сигнала
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% синтез сигнала
Fl = 1;             % минимальная частота
Fu = 15;            % максимальная частота
Nc = 31;            % размер вектора сигнала
sx = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, 1, 2 );
% аргумент сигнала (время, с·рад)
cst = linspace(-pi*Nc, pi*Nc, 2*Nc-1);
% аргумент спектра (норм. частота, Гц)
csf = linspace(-0.5, 0.5, 2*Nc-1);
% вектор нулей дополнения сигнала
sxdop = zeros(1, Nc-1);
%% вычисление автокорреляции
FSXFS = fft([sx sxdop]);
%% =====
% полный (весь) спектр (ВС)
csxfs = fftshift(ifft(FSXFS.*conj(FSXFS))); % вычисление АКФ
hfs = imag(hilbert(real(csxfs))); % преобразование Гильберта
% спектр для визуализации
VFSXFS = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(FSXFS);
%% =====
% положительный спектр (ПС)
FSXPS = FSXFS;
% обнуление отрицательного спектра
FSXPS(floor(end/2)+2:end) = 0;
csxps = fftshift(ifft(FSXPS.*conj(FSXPS))); % вычисление АКФ
hps = imag(hilbert(real(csxps))); % преобразование Гильберта
% спектр для визуализации
VFSXPS = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(FSXPS);
%% =====
% отрицательный спектр (ОС)
```



```

FSXNS = FSXFS;
% обнуление положительного спектра
FSXNS(2:floor(end/2)+1) = 0;
csxns = fftshift(iffshift(FSXNS.*conj(FSXNS))); % вычисление АКФ
hns = imag(hilbert(real(csxns))); % преобразование Гильберта
% спектр для визуализации
VFSXNS = (1/sqrt(2*Nc-1)).*fftshift(FSXNS);

```

На рис. 11 приведён пример результата выполнения программы (листинг 1.6), в каждой строке слева представлена вещественная и мнимая части АКФ, справа – спектр исходного сигнала. Вместе с мнимой частью АКФ для визуального сравнения отображён график преобразования Гильберта вещественной части АКФ. Очевидно, что для сигнала только с положительным спектром мнимая часть АКФ и преобразование Гильберта вещественной части АКФ полностью совпадают, а для сигнала только с отрицательным спектром мнимая часть АКФ и преобразование Гильберта вещественной части АКФ равны в каждой точке равны по модулю и противоположны по знаку.

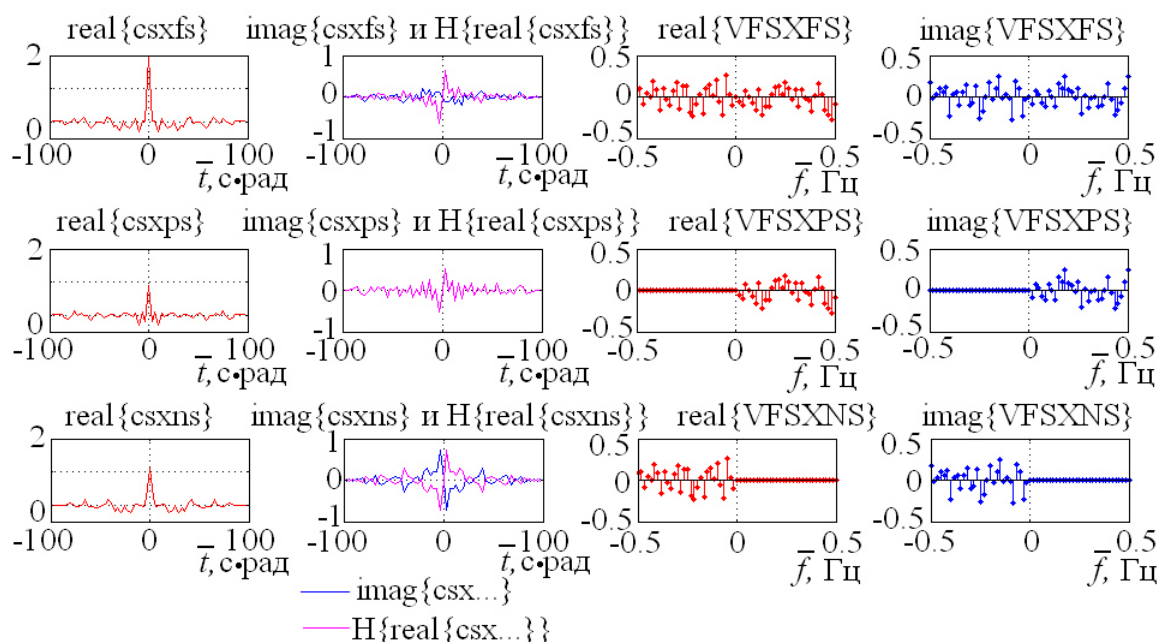


Рисунок 11. Результат выполнения программы (листинг 1.6), автокорреляционная функция и спектр сигнала: первая строка – полный спектр; вторая строка – только положительный спектр; третья строка – только отрицательный спектр

1.15. Линейное унитарное преобразование

Пару преобразования Фурье

$$\begin{cases} X[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \\ x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \end{cases} \quad (149)$$

взаимного отображения сигнала $x[n]$, длительностью N отсчётов, и его частотного образа $X[m]$ можно интерпретировать как линейное унитарное преобразование в пространстве \mathbb{C}^N и записать в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{A}_{FT} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} = \mathbf{A}_{FT}^* \mathbf{X} \end{cases} \quad (150)$$

где \mathbf{x} – вектор сигнала в пространстве координат-отсчётов по времени, \mathbf{X} – вектор сигнала в пространстве координат-отсчётов по частоте. Значения элементов матрицы линейного унитарного преобразования Фурье \mathbf{A}_{FT} , вычислимы как

$$\mathbf{A}_{FT} = (a_{kp}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] - j \sin \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{-j \frac{2\pi kp}{N}} \right), \quad (151)$$

где $k, p = 0 \dots N-1$. Отметим, что матрица \mathbf{A}_{FT} является симметричной, т.е. $\mathbf{A}_{FT}^T = \mathbf{A}_{FT}$ и $(a_{kp}) = (a_{pk})$. Строки (столбцы) матрицы являются линейно независимыми, т.е. ортогональными, векторами. Поэтому, используя символ Кронекера, можно записать:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} a_{ln}^* = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{-j \frac{2\pi mn}{N}} \right) \left(e^{j \frac{2\pi ln}{N}} \right) = \delta^{ml}. \quad (152)$$

где $m, l, n = 0 \dots N-1$, или в матричной форме:

$$\mathbf{A}_{FT}^T \mathbf{A}_{FT}^* = \mathbf{E} \Rightarrow \det(\mathbf{A}_{FT}^T \mathbf{A}_{FT}^*) = 1. \quad (153)$$

Таким образом, пара преобразования Фурье образует линейное унитарное преобразование координат.

Интерпретация преобразования Фурье как линейного унитарного преобразования на основе матрицы \mathbf{A}_{FT} , кроме того, может быть полезна для понимания сущности алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) [38].

1.16. Корреляционные и фрактальные свойства матрицы Фурье

Вполне очевидно, что абсолютное значение каждого элемента матрицы \mathbf{A}_{FT} линейного унитарного преобразования Фурье равно

$$|a_{kp}| = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{-j \frac{2\pi kp}{N}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\cos^2 \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] + \sin^2 \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] \right)} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (154)$$

Выражение (4) показывает, что энергия матрицы \mathbf{A}_{FT} , вычисляемая как $E_{AFT} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} a_{kp} a_{kp}^*$, равномерно распределена между её элементами, что является положительным фактором для синтеза широкополосных корреляционных сигналов, задачей которых является равномерное распределение энергии сигнала в пространстве частота-время с возможностью последующей концентрации энергии при помощи АКФ (листинг 1.7).

Листинг 1.7. Преобразование Фурье как унитарное линейное преобразование

```
%% Преобразование Фурье как унитарное линейное преобразование
%% =====
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% =====
```

```

% параметры
Nn = 8; % размер матрицы унитарного преобразования Фурье (МПФ)
%% формируем матрицу ФП и сигнал
CN_MFT = mi_matrixFT( Nn );
sx = zeros(Nn,1); % сигнал вектор-столбец
sx(:,1) = mi_sinfoise( 1, Nn/2, Nn, 1, 2 );

%% овеществление матрицы ФП
R2N_MFT = [real(CN_MFT) -imag(CN_MFT); ...
           imag(CN_MFT) real(CN_MFT)];

% проверка унитарности линейного преобразования
fprintf('критерий: модуль определителя МПФ = %f \n', abs(det(CN_MFT)));
fprintf('критерий: единичная матрица \n');
ONM = abs(CN_MFT.'*conj(CN_MFT))
% корреляция и визуализация
XCMFT = xcorr2(CN_MFT);
figure();
subplot(1,2,1); mesh(real(XCMFT));
subplot(1,2,2); mesh(imag(XCMFT));

XR2MFT = xcorr2(R2N_MFT);
figure();
subplot(1,2,1); mesh(real(XR2MFT));
subplot(1,2,2); mesh(imag(XR2MFT));

%% преобразование Фурье
% прямое
FSX = CN_MFT*sx; % через матрицу
FTSX = (1/sqrt(Nn)).*fft(sx); % традиционное
% обратное
rsx = conj(CN_MFT)*FSX; % через матрицу
% визуализация спектров
figure();
subplot(2,2,1); stem(real(FSX));
subplot(2,2,2); stem(imag(FSX));
subplot(2,2,3); stem(real(FTSX));
subplot(2,2,4); stem(imag(FTSX));
% визуализация сигналов
figure();
subplot(2,2,1); plot(real(sx));
subplot(2,2,2); plot(imag(sx));
subplot(2,2,3); plot(real(rsx));
subplot(2,2,4); plot(imag(rsx));
%% =====

```

На рис. 12 показан характерный вид вещественной $\text{Re}(\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT})$ и мнимой $\text{Im}(\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT})$ частей АКФ матрицы \mathbf{A}_{FT} размером 32×32 отсчёта. Как известно,

центральное значение АКФ всегда вещественно. Практические исследования матриц \mathbf{A}_{FT} показывают характерную особенность: АКФ матриц \mathbf{A}_{FT} имеет однородно низкий уровень боковых лепестков при ярко выраженном центральном всплеске. Такое свойство АКФ матриц \mathbf{A}_{FT} очень полезно для выявления сигнала на фоне помех и точной локализации пикового значения АКФ во времени [39-42].

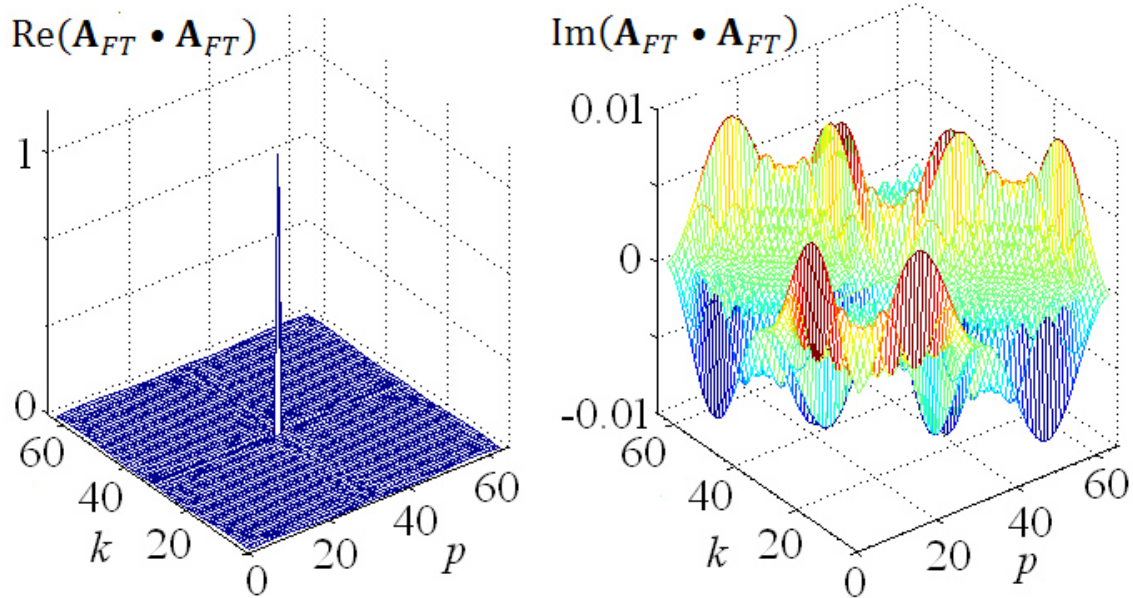


Рисунок 12. Характерный вид нормированной АКФ для матрицы \mathbf{A}_{FT} размером 32×32 отсчёта

Пусть матрица АКФ $\mathbf{C}_{AFT} = (c_{dv}) = \mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT}$, где (\bullet) – оператор корреляции, d и v – индексы матрицы АКФ $d, v = 1 \dots 2N - 1$, тогда используя выражение (154), можно вычислить зависимость центрального пика АКФ как функцию от размера N матрицы \mathbf{A}_{FT} :

$$\begin{aligned} c_{(N-1)(N-1)}(N) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} a_{kp} a_{kp}^* = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \left(\cos \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] - j \sin \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] \right) \left(\cos \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] + j \sin \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \left(\cos^2 \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] + \sin^2 \left[\frac{2\pi kp}{N} \right] \right) = N. \end{aligned} \quad (155)$$

Обратную величину центрального пика АКФ (155) $(c_{(N-1)(N-1)}(N))^{-1} = \frac{1}{N}$ можно использовать в качестве нормирующего множителя $\frac{1}{N} (\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT})$ для получения единичной амплитуды центрального пика АКФ.

Теорема. Автокорреляционная функция $\frac{1}{N} (\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT})$ матрицы линейного унитарного преобразования Фурье $\mathbf{A}_{FT} = (a_{kp}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{-j \frac{2\pi kp}{N}} \right)$ размером $N \times N$ имеет форму двумерного дискретного единичного импульса.

Доказательство. Как известно, преобразование Фурье единичного импульса (δ -функция Дирака) имеет равномерный неограниченный спектр, матрица \mathbf{A}_{FT}

размером $N \times N$ образована последовательностью гармонических функций с одинаковой амплитудой и ограниченным спектром. Вычислим векторы, полученные путём суммирования матрицы матриц \mathbf{A}_{FT} по строкам $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_{kp}$, что может быть интерпретировано как обратное преобразование Фурье сигнала в частотной области с равномерным распределением спектра [43]. Полученный результат суммирования матрицы матриц \mathbf{A}_{FT} по строкам $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_{kp}$ по своей форме является дискретным образом одномерного единичного импульса, а при неограниченном увеличении размера матрицы \mathbf{A}_{FT} , т.е. $N \rightarrow \infty$, указанная сумма даст одномерный единичный импульс. В силу симметрии матрицы \mathbf{A}_{FT} тот же результат можно получить в результате суммирования по столбцам $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} a_{kp}$.

С другой стороны, при выполнении операции корреляции через перемножение спектров преобразования Фурье имеем:

$$\frac{1}{N} (\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT}) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ \mathbf{A}_{FT} \} \times \mathcal{F}^* \{ \mathbf{A}_{FT} \} \}, \quad (156)$$

где символ (\times) означает поэлементное умножение матриц; \mathcal{F} – прямое и \mathcal{F}^{-1} – обратное преобразование Фурье (в данном случае двумерное преобразование Фурье), которое можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \mathbf{A}_{FT} \} &= \mathbf{X}_{FT} = (x_{nl}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_{kp} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \right\} e^{-\frac{j2\pi pl}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{-\frac{j2\pi kp}{N}} \right) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \right\} e^{-\frac{j2\pi pl}{N}} = \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(kp+nk+pl)}{N}}. \end{aligned}$$

Далее запишем:

$$\mathcal{F} \{ \mathbf{A}_{FT} \} \cdot \mathcal{F}^* \{ \mathbf{A}_{FT} \} = \frac{1}{N^3} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(kp+nk+pl)}{N}} \times \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(kp+nk+pl)}{N}}.$$

Учитывая свойство умножения комплексного числа на сопряжённое $(\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2$, в результате перемножения $\mathbf{X}_{FT} \cdot \mathbf{X}_{FT}^* = \mathcal{F} \{ \mathbf{A}_{FT} \} \times \mathcal{F}^* \{ \mathbf{A}_{FT} \}$ получим матрицу размером $N \times N$ с одинаковыми значениями элементов, каждый из которых равен N^{-1} . Как известно, обратное преобразование Фурье такого массива даст двумерный единичный импульс, ч.т.д.

Следовательно, матрицы \mathbf{A}_{FT} различных размеров $N \times N$ имеют идеальную форму АКФ с точки зрения отношения центральный всплеск/боковые лепестки при равномерном распределении энергии по элементам матрицы \mathbf{A}_{FT} .

Как было сказано ранее, суммирование матрицы матриц \mathbf{A}_{FT} по строкам или по столбцам даёт дискретный образ единичного импульса в одномерном пространстве, в то же время автокорреляция матрицы \mathbf{A}_{FT} позволяет получить единичный импульс, но уже в двумерном пространстве. Таким образом, проявляются фрактальные свойства – циклические повторения характерных геометрических форм в пространствах различной мерности [44].

Следуя проведённым рассуждениям, можно показать, что отмеченные фрактальные свойства наследуются для многомерных пространств [45]. Так, матрица \mathbf{A}_{FT} позволяет реализовать одномерное преобразование Фурье. Для

двумерного преобразования Фурье необходимо иметь два трёхмерных массива (рис. 13).

Каждый массив (рис. 13, *a*, *b*) получен в результате объединения N матриц \mathbf{A}_{FT} размером $N \times N$, один вдоль оси X , другой вдоль оси Y соответственно. Таким образом, получается два массива \mathbf{A}_{FTX}^{3D} и \mathbf{A}_{FTY}^{3D} , каждый размером $N \times N \times N$. В обозначениях массивов \mathbf{A}_{FTX}^{3D} и \mathbf{A}_{FTY}^{3D} верхние индексы означают трёхмерность, а нижние FTX и FTY – преобразование Фурье по координате X и Y соответственно. Суммирование $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^X$ и $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^Y$ массивов $\mathbf{A}_{FTX}^{3D} = (a_{kps}^X)$ и $\mathbf{A}_{FTY}^{3D} = (a_{kps}^Y)$ вдоль оси Z (рис. 13, *c*, *d*), с последующим поэлементным перемножением результата $\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^X \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^Y \right\}$, является аналогом обратного двумерного преобразования Фурье: $\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{A}_{FTX}^{3D}\} \times \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{A}_{FTY}^{3D}\}$, результат подобного преобразования – двумерный дискретный единичный импульс, что вполне очевидно из изображения (рис. 13, *e*).

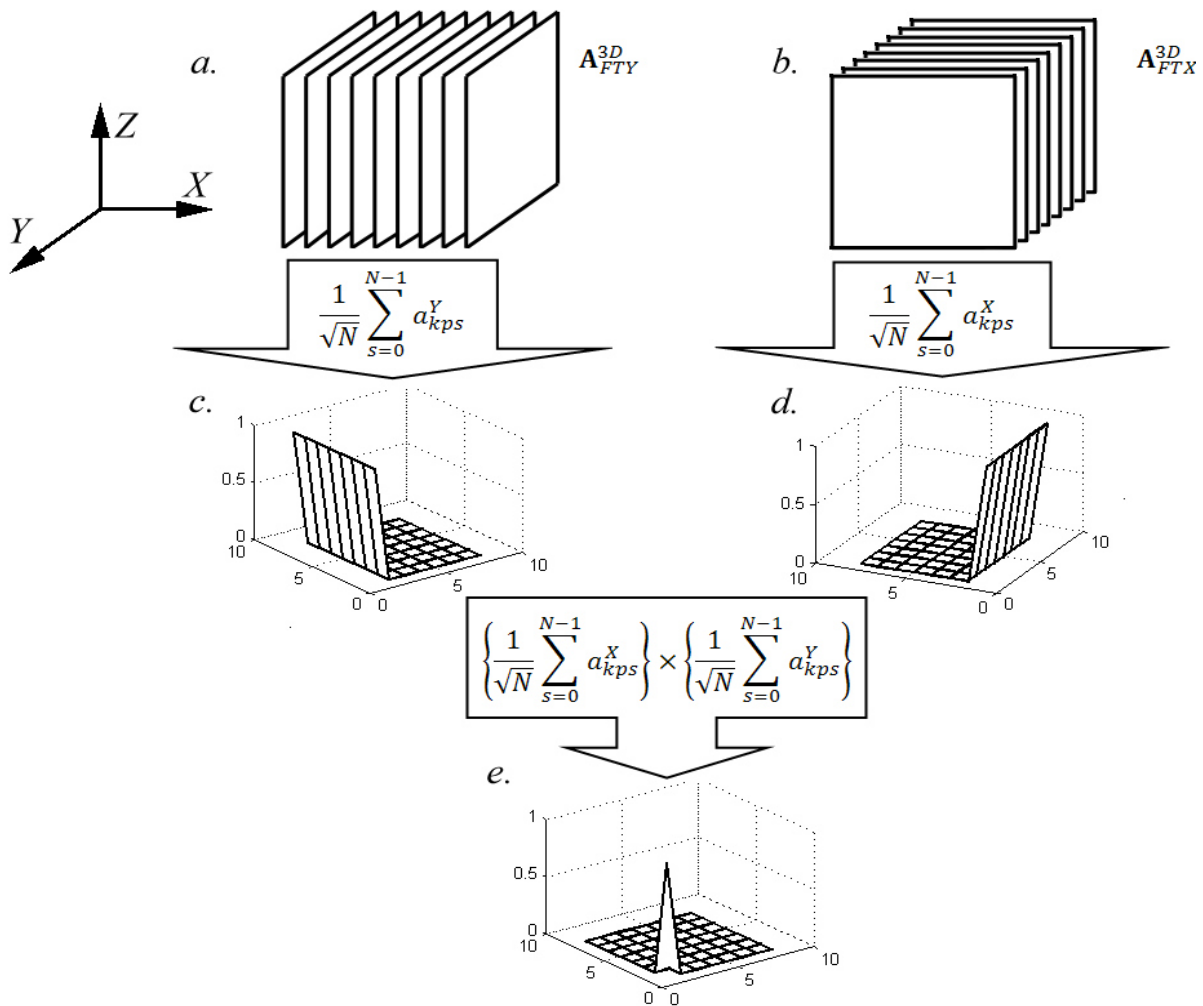


Рисунок 13. Последовательность преобразований трёхмерных массивов, реализующих двумерное преобразование Фурье

Продолжая подобные рассуждения, можно показать, что они будут справедливы для случаев большей мерности, так как в основе преобразований Фурье многомерных массивов лежит одномерное преобразование Фурье, и указанные закономерности сохраняются. Так, для преобразования Фурье трёхмерного массива необходимо три четырёхмерных массива $\mathbf{A}_{FTX}^{4D} = (a_{kpsm}^X)$, $\mathbf{A}_{FTY}^{4D} = (a_{kpsm}^Y)$ и $\mathbf{A}_{FTZ}^{4D} = (a_{kpsm}^Z)$, полученных на базе объединения матриц \mathbf{A}_{FT} .

На рис. 14 показано фрактальное дерево последовательностей преобразований на базе матрицы линейного унитарного преобразования Фурье \mathbf{A}_{FT} . Серой пунктирной линией отображена связь между двумерными единичными импульсами, полученными на базе операции корреляция $\frac{1}{N} (\mathbf{A}_{FT} \bullet \mathbf{A}_{FT})$ матрицы \mathbf{A}_{FT} и на базе эквивалента обратного преобразования Фурье $\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^X \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} a_{kps}^Y \right\}$ для массивов \mathbf{A}_{FTX}^{3D} и \mathbf{A}_{FTY}^{3D} .

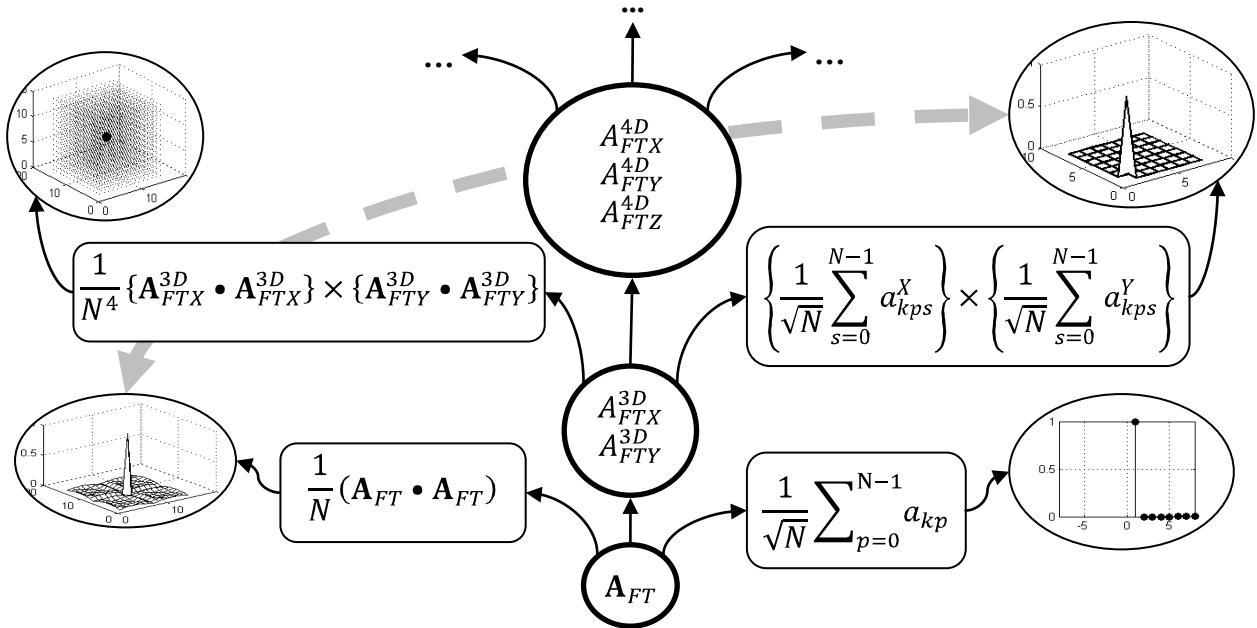


Рисунок 14. Фрактальное дерево единичных функций образованное последовательностью трансформаций на базе матрицы линейного унитарного преобразования Фурье

1.17. Замечания о многомерных сигналах

Современные системы обработки данных часто выполняют преобразования многомерных сигналов. Под многомерными сигналами, по аналогии с функциями многих переменных, понимают сигналы от многих переменных (аргументов, параметров). Например, K -мерный сигнал означает, что сигнал имеет K аргументов: одномерный сигнал, двумерный сигнал, трёхмерный сигнал и т.д., каждый аргумент образует мерность сигнала. Само по себе определение

многомерных сигналов является достаточно обширным, не всегда определённым однозначно. Дело в том, что существует значительное многообразие многомерных сигналов. Например, многомерный сигнал может быть дискретным (цифровым), непрерывным (аналоговым), смешанным.

В качестве примера смешанного сигнала можно привести видеосигнал чересстрочной развертки, используемый для формирования изображений на мониторах с электроннолучевой трубкой. Видеосигнал можно рассматривать как одномерный широкополосный сигнал, при этом видеосигнал достаточно сложно будет анализировать как видеоизображение. Для определения рассматриваемого сигнала как видеоизображения необходимо ввести координаты, определяющие поверхность, на которой формируется изображение, пусть это будут аргументы: x – по горизонтали и y – по вертикали. Тогда для определения хода луча по горизонтали (аргумент x) можно считать, что сигнал имеет непрерывную структуру для монохромного монитора и дискретную для цветного. Для определения хода луча по вертикали (аргумент y) можно считать аргумент дискретным от строки к строке, если не учитывать обратный ход луча чересстрочной развертки; и непрерывным, если обратный ход луча учитывать.

С другой стороны, сигнал может иметь различные системы координат для различных аргументов и/или изменяющуюся (от каких-то условий) систему координат для одного и того же аргумента. Сигнал может иметь вложенную рекуррентную структуру, причём на каждом уровне вложенности может быть своё особенное пространство описания элемента сигнала. Рассмотрим в качестве примера тот же видеосигнал, но для формирования цветного динамического изображения, который можно описать как $V(Y(x, y, t), Cr(x, y, t), Cb(x, y, t))$, где аргументы x, y – определены выше; t – аргумент времени, определяет дискретную последовательность кадров; Y, Cr, Cb – функции от x, y, t и аргументы цветности (цветоразностной схемы YCrCb) функции V . Следует отметить, что в аналоговом телевизионном вещании каждый кадр разбивается на два полукадра, состоящих из чётных и нечётных строк соответственно. При смещении внутри строки и внутри полукадра аргумент времени t можно считать непрерывным или даже постоянным (если считать, что весь полукадр формируется единовременно), при переходе от полукадра к полукадру время можно считать дискретным. При формировании цветного изображения цветовые компоненты можно рассматривать как совместно (при этом каждый элемент сигнала будет тензором первого порядка, т.е. вектором), так и по отдельности, как отдельные сигналы (при этом каждый цветовой элемент сигнала будет тензором нулевого порядка, т.е. скаляром). Цветовые компоненты заданы в цветовом пространстве YCrCb, трансформируемом при визуализации цветного изображения в цветовое пространство RGB. Данное преобразование, с учётом гамма-коррекции изображения, может быть нелинейным. Можно ещё усложнить процедуру формализации видеосигнала [46], если учесть, что современные системы

визуализации могут формировать объёмные изображения, панорамные изображения и проч.

Таким образом, обобщённая универсальная формализация описания многомерных сигналов затруднена [47]. При решении практических задач, связанных с формализацией сигналов, необходимо учитывать особенности аппаратных и программных средств, обрабатывающих сигналы, что является приоритетным фактором. Отдельным вопросом, связанным с формальным описанием многомерных сигналов и практических форматов и протоколов передачи данных, является задача обеспечения технической интероперабельности [48–52].

В рамках данной работы N -мерные сигналы определим следующим образом, если специально не отмечено иного. Определение зададим рекурсивно и начнём с дискретных сигналов. Одномерный дискретный сигнал $x[n_1]$ – это вектор, также называемый последовательностью или одномерным цифровым сигналом, у такого сигнала есть единственный аргумент n_1 , причём отсчёты аргумента равноудалены. В большинстве случаев отсчёты нумеруются целыми числами ($n_1 \in \mathbb{Z}$), а шаг составляет единицу. Число отсчётов может быть ограничено, в этом случае говорят о сигнале ограниченного размера или с ограниченным числом отсчётов. Учитывая, что отсчёты сигнала следуют друг за другом непрерывно, сигнал, не ограниченный по размеру, будет иметь неограниченное число отсчётов. Каждому отсчёту соответствует значение сигнала, которое, в свою очередь, может принимать значения из дискретного или непрерывного множества, в общем случае комплексных чисел $x[n_1] \in \mathbb{C}$.

Добавление мерности происходит рекурсивно, таким образом, двумерный дискретный сигнал $x[n_1, n_2]$, образован множеством непересекающихся векторов $x[n_1]$, число которых равно размеру добавленной мерности n_2 . При этом ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$) шаг между соседними отсчётами мерности n_2 равен единице, если не сказано иного. Если размеры мерностей сигнала $x[n_1, n_2]$ ограничены, например, значениями N_1 и N_2 , то сигнал $x[n_1, n_2]$ будет соответствовать матрице размером $N_1 \times N_2$.

Выполняя аналогичные рассуждения, можно неограниченно увеличивать мерность сигнала, так, трехмерный сигнал будет иметь вид: $x[n_1, n_2, n_3]$.

Большинство вычислительных машин имеет векторную память, эквивалентную одномерному массиву, в котором в качестве индексов используются адреса памяти. Поэтому с практической точки зрения обработки, передачи и хранения сигналов при помощи вычислительных машин, вектор является наилучшей формой базовой единицы рекуррентного определения K -мерного сигнала.

Для сигнала с произвольной мерностью, например, для K -мерного сигнала $x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_{K-1}, n_K]$, можно по любому измерению выполнить переход от дискретной формы к непрерывной (аналоговой), устремив шаг по выбранной

мерности к бесконечно малой величине. Как уже было сказано, если в сигнале одновременно присутствуют дискретные и непрерывные мерности, то такой сигнал называют смешанным. Если выполнить переход от дискретных форм к непрерывным для всех мерностей сигнала, то получим непрерывный сигнал.

Непрерывный K -мерный сигнал можно рассматривать в K -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^K .

Следует определить пространство, в котором будем рассматривать K -мерный дискретный сигнал $x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_{K-1}, n_K]$. Таким пространством является целочисленная решётка, образованная совокупностью точек K -мерного пространства \mathbb{Z}^K , координаты которых в некоторой (прямолинейной) K -мерной системе координат являются целыми числами [53]. Систематизацию понятия целочисленных решеток начал К. Ф. Гаусс¹⁵, а продолжили Г. Миньковский¹⁶, Г. Ф. Вороной¹⁷, Б. Н. Делоне¹⁸ и др. в приложении к геометрии и теории чисел, кристаллографии, дискретным вычислениям и пр.

Представляя дискретный K -мерный сигнал на K -мерной целочисленной решетке \mathbb{Z}^K с учётом интерпретации, предложенной В. А. Котельниковым и К. Шенноном, когда каждый отсчёт является независимым измерением, получаем вложенные пространства. Так, например, для комплекснозначного K -мерного дискретного сигнала $x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_{K-1}, n_K]$, при размере каждой мерности $N_1, N_2, N_3, \dots, N_{K-1}, N_K$ возможны следующие интерпретации:

по количеству мерностей сигнал представим на целочисленной решетке \mathbb{Z}^k ;
по числу отсчётов $(\prod_{k=1}^K N_k)$ -мерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^{\prod_{k=1}^K N_k}$, причём пространство $\mathbb{C}^{\prod_{k=1}^K N_k}$ содержит в себе \mathbb{Z}^K , т.е. $\mathbb{Z}^K \subset \mathbb{C}^{\prod_{k=1}^K N_k}$.

Возможны и другие интерпретации, например, если число возможных амплитуд сигнала ограничено системой дискретизации.

Преобразование Фурье многомерных сигналов основано на преобразовании Фурье одномерных сигналов. Пусть имеется K -мерный сигнал $x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_{K-1}, n_K]$, для получения его Фурье-образа необходимо выполнить следующую последовательность преобразований. Для всех векторов по мерности i ($i \in 1, 2, \dots, K$) выполняется преобразование Фурье, результат преобразования записывается на место исходных данных. Далее для полученного сигнала выполняется преобразование Фурье для всех векторов по мерности j ($j \in$

¹⁵ Иоганн Карл Фридрих Гаусс (30 апреля 1777 – 23 февраля 1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Лауреат медали Копли (1838), иностранный член Шведской (1821) и Российской (1824) академий наук, английского Королевского общества.

¹⁶ Герман Минковский (22 июня 1864 – 12 января 1909) – немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности.

¹⁷ Георгий Феодосьевич Вороной (16 апреля 1868 – 7 ноября 1908) – известный российский математик. Член-корреспондент Петербургской академии наук с 1 декабря 1907 года.

¹⁸ Борис Николаевич Делоне (3 марта 1890 – 17 июля 1980) – русский и советский математик, профессор МГУ, член-корреспондент АН СССР, альпинист, мастер спорта СССР.

$\{1, 2, \dots, K\} - \{i\}$), результат преобразования также записывается на место исходных данных. Таким образом, последовательно выполняются преобразования Фурье для всех векторов из каждой мерности, а результат преобразования последовательно записывается на место исходных данных. Порядок перебора мерностей не влияет на конечный результат, в этом смысле преобразование инвариантно.

Обратное преобразование Фурье многомерного сигнала производится аналогично, причём последовательность перебора мерностей, позволяющая восстановить исходный сигнал, произвольна. Существенным свойством преобразования Фурье многомерных сигналов является инвариантность преобразования Фурье относительно последовательности перебора мерностей при преобразовании.

Для K -мерного дискретного сигнала с комплексными значениями $x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, ($i=1, \dots, K$)), пару прямого и обратного преобразования Фурье запишем так:

$$\begin{cases} X[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] = \mathcal{F}_K\{x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]\} \\ x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] = \mathcal{F}_K^{-1}\{X[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]\} \end{cases} \quad (157)$$

Пусть в K -мерном пространстве \mathbb{Z}^K заданы два дискретных сигнала с комплексными значениями $x_1[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$ и $x_2[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, ($i=1, \dots, K$), тогда операцию свёртки будем обозначать $y[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] = x_1[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] * x_2[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$ или компактно $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K]$, и выражение для вычисления K -мерной свёртки будет иметь вид [12]:

$$\begin{cases} y[n_1, n_2, \dots, n_K] = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{v_K=-\infty}^{\infty} \varphi \omega \\ \varphi = x_1[v_1, v_2, \dots, v_K] \\ \omega = x_2[n_1 - v_1, n_2 - v_2, \dots, n_K - v_K] \end{cases} \quad (158)$$

Выражение для вычисления K -мерной корреляции тех же сигналов, $y[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] = x_1[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K] \bullet x_2[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$, или компактно $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 \bullet x_2)[\mathbb{Z}^K]$, будет иметь вид:

$$\begin{cases} y[n_1, n_2, \dots, n_K] = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{v_K=-\infty}^{\infty} \varphi \omega^* \\ \varphi = x_1[n_1 + v_1, n_2 + v_2, \dots, n_K + v_K] \\ \omega = x_2[v_1, v_2, \dots, v_K] \end{cases} \quad (159)$$

1.18. Теоремы о понижении размерности пространства

Определим операцию, называемую понижением размерности пространства [43] на измерение n_i , или суммирование сигнала $x[\mathbb{Z}^K]$ по n_i для $n_i \in \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$, как

$$x[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} x[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]. \quad (160)$$

Теорема. *О понижении размерности пространства при свёртке.* Пусть в K -мерном пространстве \mathbb{Z}^K заданы два дискретных сигнала $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, в ограниченном по каждому измерению n_i из \mathbb{Z}^K интервале, тогда результат операции свёртки $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K]$ с последующим суммированием по n_i есть $y[\mathbb{Z}^K -$

$n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} y[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и эквивалентен предварительному суммированию $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_1[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_2[n_1, n_2, \dots, n_K]$ с последующей свёрткой $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K - n_i]$.

Доказательство [43]. Для дискретных сигналов $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, определённых в K -мерном пространстве \mathbb{Z}^K , выберем и зафиксируем значения отсчётов по всем, кроме одного, измерениям n_i ($i=1, \dots, K$), и произведем вычисление свёртки $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K]$ для зафиксированных $(\mathbb{Z}^K - n_i)$ и всех возможных n_i значений отсчётов, в соответствии с выражением для вычисления свёртки многомерных сигналов. Учитывая, что по определению теоремы о понижении размерности пространства при свёртке сигналы $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$ имеют конечное число ненулевых значений по каждому измерению в ограниченном по каждому измерению интервале, в результате вычислений получим конечное множество ненулевых элементов сигнала $y[\mathbb{Z}^K]$ с зафиксированными значениями отсчётов, по всем измерениям, кроме одного n_i . Полученное множество позволяет вычислить сумму $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} y[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$ понижения размерности для одного элемента сигнала $y[\mathbb{Z}^K - n_i]$, которая будет суммой по n_i комбинаторных сочетаний без повторений произведений $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, для зафиксированных значений отсчётов по прочим измерениям $(\mathbb{Z}^K - n_i)$.

В соответствии с теоремой выполним действия иначе. Сначала произведём понижение размерности сигналов $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$ для выбранного ранее измерения n_i , вычислив $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} x_1[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} x_2[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$. Затем произведём свёртку сигналов $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i]$ для зафиксированных ранее значений отсчётов по всем измерениям из $(\mathbb{Z}^K - n_i)$. В результате выполнения перечисленных операций получим сумму по n_i комбинаторных сочетаний без повторений произведений $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, для зафиксированных значений отсчётов по прочим измерениям $(\mathbb{Z}^K - n_i)$, причём аналогичную сумму, полученной ранее.

Применение приведённой последовательности действий к всевозможным значениям отсчётов для $(\mathbb{Z}^K - n_i)$ показывает, что результат операции свёртки $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K]$ с последующим суммированием по n_i есть $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} y[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и эквивалентен предварительному суммированию $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} x_1[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} x_2[n_1, n_2, n_3, \dots, n_K]$, с последующей свёрткой $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = (x_1 * x_2)[\mathbb{Z}^K - n_i]$, ч. т. д.

Другим доказательством теоремы может быть доказательство, основанное на свойствах линейных систем – аддитивности и однородности [29]. Сложение K -мерного сигнала по одному из измерений n_i из \mathbb{Z}^K является линейной операцией, и операция свёртки также линейна, следовательно, независимо от порядка

выполнения преобразований (сложение и свёртка или свёртка и сложение) результат будет одинаков.

Теорема. *О понижении размерности пространства при корреляции.* Пусть в K -мерном пространстве \mathbb{Z}^K заданы два дискретных сигнала $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, в ограниченном по каждому измерению n_i из \mathbb{Z}^K интервале, тогда результат операции корреляции $y[\mathbb{Z}^K] = (x_1 \bullet x_2)[\mathbb{Z}^K]$ с последующим суммированием по n_i есть $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} y[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и эквивалентен предварительному суммированию $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_1[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_2[n_1, n_2, \dots, n_K]$ с последующей корреляцией $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = (x_1 \bullet x_2)[\mathbb{Z}^K - n_i]$.

Доказательство [43] теоремы о понижении размерности пространства при корреляции аналогично предыдущему доказательству теоремы о понижении размерности пространства при свёртке, с той лишь разницей, что вместо операции свёртки необходимо вычислять операцию корреляции.

Теорема. *О понижении размерности пространства при быстрой свёртке.* Пусть в K -мерном пространстве \mathbb{Z}^K заданы два дискретных сигнала $x_1[\mathbb{Z}^K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K]$, с конечным, по каждому измерению n_i из \mathbb{Z}^K , числом ненулевых значений. Выберем одно произвольное измерение n_i из \mathbb{Z}^K , тогда результат операции быстрой свёртки $y[\mathbb{Z}^K] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{x_2[\mathbb{Z}^K]\}\}$ с последующим суммированием по n_i есть $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} y[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и эквивалентен предварительному суммированию $x_1[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_1[n_1, n_2, \dots, n_K]$ и $x_2[\mathbb{Z}^K - n_i] = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} x_2[n_1, n_2, \dots, n_K]$ с последующей быстрой свёрткой $y[\mathbb{Z}^K - n_i] = (x_1 \bullet x_2)[\mathbb{Z}^K - n_i]$, или кратко:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\sum_{n_i} x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{\sum_{n_i} x_2[\mathbb{Z}^K]\}\} = \sum_{n_i} [\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{x_2[\mathbb{Z}^K]\}\}].$$

Доказательство теоремы о понижении размерности пространства при быстрой свёртке [43] следует из доказательства теоремы о понижении размерности пространства при свёртке, приведённой ранее, и определения операции быстрой свёртки. Теорему об уменьшении размерности пространства при свёртке можно записать в виде выражения $\sum_{n_i} x_1[\mathbb{Z}^K] * \sum_{n_i} x_2[\mathbb{Z}^K] = \sum_{n_i} (x_1[\mathbb{Z}^K] * x_2[\mathbb{Z}^K])$, заменяя операцию свёртки операцией быстрой свёртки $y[\mathbb{Z}^K] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{x_2[\mathbb{Z}^K]\}\}$. Получим выражение $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\sum_{n_i} x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{\sum_{n_i} x_2[\mathbb{Z}^K]\}\} = \sum_{n_i} (\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x_1[\mathbb{Z}^K]\} \cdot \mathcal{F}\{x_2[\mathbb{Z}^K]\}\})$, ч. т. д.

В программе MatLab (листинг 1.8) реализованы вычислительные процедуры свёртки, корреляции и быстрой свёртки для матриц с комплексными коэффициентами с понижением размерности в соответствии с теоремами. Сразу после листинга приведены результаты расчетов (листинг 1.9), выводимые программой. Отметим, что матрицы исходных данных сформированы с учётом особенностей наложения результатов при быстрой свёртке, т.е. дополнены нулями. Понижение размерности пространства сигнала производится при помощи

функции `sum()`, если параметром функции MatLab `sum()` является двумерный массив, то происходит суммирование по столбцам; функция `conv()` предназначена для свёртки одномерных последовательностей, `fft()` и `ifft()` – прямое и обратное БПФ одномерных последовательностей соответственно, `conv2()`, `fft2()` и `ifft2()` – двумерные аналоги рассмотренных функций.

Листинг 1.8. Расчёт корреляции и свёртки с понижением размерности

```
%% расчёт корреляции и свёртки с понижением размерности
clear all;          % очистка переменных
close all;          % закрыть все окна
clc;                % очистка командного окна
%% =====
% исходные матрицы
mx1 = [1+3i 2+i 0 0;
       7+2i 3+4i 0 0;
       0 0 0 0;
       0 0 0 0];
mx2 = [5+i 9+7i 0 0;
       2+2i 4-3i 0 0;
       0 0 0 0;
       0 0 0 0];
%% =====
%% теорема "о понижении размерности при свёртке"
% 1-ый способ:
conv(sum(mx1), sum(mx2))
% 2-ой способ:
sum(conv2(mx1,mx2))
%% =====
%% теорема "о понижении размерности при корреляции"
% 1-ый способ:
xcorr(sum(mx1), sum(mx2))
% 2-ой способ:
sum(xcorr2(mx1,mx2))
%% =====
%% теорема "о понижении размерности при быстрой свёртке"
% 1-ый способ:
ifft(fft(sum(mx1)).*fft(sum(mx2)))
% 2-ой способ:
sum(ifft2(fft2(mx1).*fft2(mx2)))
%% =====
```

Листинг 1.9. Результаты расчётов (вывод программы листинг 8)

```
41,0+59,0i 104,0+147,0i 45,0+85,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i
41,0+59,0i 104,0+147,0i 45,0+85,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i

0,0+0,0i 0,0+0,0i 124,0+33,0i 156,0+56,0i 50,0+20,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i
0,0+0,0i 0,0+0,0i 124,0+33,0i 156,0+56,0i 50,0+20,0i 0,0+0,0i 0,0+0,0i
```

41,0+59,0i 104,0+147,0i 45,0+85,0i 0,0+0,0i
41,0+59,0i 104,0+147,0i 45,0+85,0i 0,0+0,0i

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В данном разделе представлены некоторые функции, разработанные в среде САПР MatLab для анализа и синтеза широкополосных сигналов. Каждая функция содержит комментарии, а благодаря ясному и лаконичному языку MatLab код функций достаточно легко воспринимается.

Листинг 2.1. Функция расчёта производной через сдвиг и вычитание

```
function diff_sx = mi_diff( sx )
%% =====
%% mi_diff - функция расчёта производной через сдвиг и
% вычитание, сигнал sx считается циклическим
% входные параметры:
%   sx - сигнал
%   возвращает:
%   diff_sx - производная от sx
%% =====
% расчёт разности с циклически сдвинутым сигналом влево
diff_sx = (circshift(sx, [0 -1]) - sx);
%% =====
end
```

Функция `mi_diff()`, расчёта производной для циклического сигнала сходна с библиотечной функций MatLab `diff()`, но отличается тем, что функция `mi_diff()` считает сигнал циклическим и возвращает производную, равную по длине входному сигналу, при этом приращением (от отсчёта к отсчёту) считается единица.

Листинг 2.2. Функция расчёта производной через преобразование Фурье

```
function deriv_sx = mi_diff_fft( sx )
%% =====
%% mi_diff_fft -- функция расчёта производной через БПФ
% входные параметры:
%   sx -- сигнал
%   возвращает:
%   deriv_sx - производная от sx
%% =====
Nc = length(sx);
FSX = fft(sx);

roNcDiv2 = round(Nc/2+0.6);
deriv_sx = zeros(1, Nc);
% положительная часть спектра
deriv_sx(1:1:roNcDiv2) = ...
    (0:1:roNcDiv2-1).*FSX(1:1:roNcDiv2);
```



```

% отрицательная часть спектра
deriv_sx(Nc:-1:roNcDiv2+1) = ...
    (-1:-1:(2-roNcDiv2-mod(Nc,2))).*FSX(Nc:-1:roNcDiv2+1);
% общая часть множителя для всего спектра
deriv_sx = ((2i*pi)/Nc).*deriv_sx;
deriv_sx = ifft(deriv_sx);
%% =====
end

```

Листинг 2.3. Функция расчёта энергии сигнала

```

function energy = mi_energy( sx )
%% =====
%% mi_energy -- функция расчёта энергии сигнала
% входные параметры:
%   sx - сигнал
% возвращает:
%   energy - энергию сигнала sx
%% =====
energy = sum(sx.*conj(sx));
%% =====
end

```

Листинг 2.4. Функция расчёта длины вектора

```

function veclen = mi_veclen( sx )
%% =====
%% mi_veclen - функция расчёта длины вектора
% входные параметры:
%   inp_sig - вектор, для которого определяется длина
% возвращает:
%   veclen - длины вектора-сигнала sx
%% =====
veclen = sqrt(mi_energy(sx));
%% =====
end

```

Листинг 2.5. Функция расчёта евклидовой метрики

```

function dist = mi_dist( sx1, sx2 )
%% =====
% mi_dist - функция расчёта Евклидовой метрики
% входные параметры:
%   sx1 - первый вектор
%   sx2 - второй вектор
% возвращает:
%   dist - Евклидову метрику (дистанцию)
%% =====
dist = sqrt(mi_energy(sx1-sx2));
%% =====
end

```

Листинг 2.6. Функция нормировки сигнала по энергии

```
function nsx = mi_engynorm( sx )
%% =====
%% mi_engynorm -- функция нормировки сигнала по энергии
% входные параметры:
%   sx -- сигнал для нормировки
% возвращает:
%   nsx -- нормированный по энергии сигнал sx
%% =====
% нормируем по энергии
en_sx = mi_energy(sx);
if ~isnumeric(en_sx) || (en_sx == 0)
    % исключение деления на ноль или NaN
    en_sx = 1;
end
nsx = (1/sqrt(en_sx)).*sx;
%% =====
end
```

Листинг 2.7. Альтернативная функция нормировки сигнала по энергии

```
function nsx = mi_engynormcmplx( sx )
%% =====
%% mi_engynormcmplx -- альтернативная функция
% нормировки комплексного сигнала по энергии
% входные параметры:
%   sx -- сигнал для нормировки
% возвращает:
%   nsx -- альтернативно нормированный по энергии сигнал sx
%% =====
% нормируем по энергии отдельно вещественную и
% отдельно мнимую части
nsx = (1/sqrt(2)).*mi_engynorm( real(sx) ) + ...
      (1i/sqrt(2)).*mi_engynorm( imag(sx) );
%% =====
end
```

Листинг 2.8. Функция синтеза унитарной матрицы преобразования Фурье

```
function CN_MFT = mi_matrixFT( NN )
%% =====
%% mi_matrixFT -- функция синтеза унитарной матрицы
% преобразования Фурье
% входные параметры:
%   NN -- размер матрицы Фурье NN x NN
% возвращает:
%   CN_MFT -- унитарную матрицу ПФ размера NN x NN
%% =====
dw = 2*pi/NN;          % приращение частоты
norm = 1/sqrt(NN);     % нормирующий множитель
```

```

% формируем матрицу преобразования Фурье
for nl = 1:NN
    for ns = 1:NN
        phi = (nl-1)*(ns-1)*dw;
        CN_MFT(nl,ns) = (norm)*(exp(-1i*phi));
    end
end
end
%% =====
end

```

Листинг 2.9. Функция синтеза ортонормированных векторов в N-мерном вещественном пространстве

```

function matrix_basis = mi_orthoreal( NN )
%% =====
%% mi_orthoreal -- функция синтеза ортонормированных векторов
%                  в NN-мерном вещественном пространстве
%   NN -- мерность пр-ва и число векторов
% возвращает:
%   matrix_basis -- матрицу ортонормированных векторов (базис)
%% =====
% проверка
if NN <= 1
    matrix_basis = 1; return;
end
% набор начальных векторов
matrix_basis = 1 - (2.*rand(NN,NN));
% начальный базисный ортонормированный вектор
matrix_basis(1,:) = mi_engynorm(matrix_basis(1,:));
% последующие вектора
for nv = 2:1:NN
    prjvect = zeros(1,NN);
    for nb = 1:1:nv-1
        prjvect = prjvect + ...
            sum(matrix_basis(nv,:).*matrix_basis(nb,:)).*...
            matrix_basis(nb,:);
    end
    matrix_basis(nv,:) = matrix_basis(nv,:) - prjvect;
    matrix_basis(nv,:) = mi_engynorm(matrix_basis(nv,:));
end
%% =====
end

```

Листинг 2.10. Функция синтеза ортонормированных векторов в N-мерном комплексном пространстве

```

function matrix_basis = mi_orthocomplex( NN )
%% =====
%% mi_orthocomplex -- функция синтеза ортонормированных

```

```

%           векторов в NN-мерном комплексном пространстве
%   NN -- мерность пр-ва и число векторов
%   возвращает:
%   matrix_basis -- матрицу ортонормированных векторов (базис)
%% =====
% проверка
if NN <= 1
    matrix_basis = 1; return;
end
% набор начальных векторов
matrix_basis = (1 - (2.*rand(NN,NN))) + 1i.*(1 - (2.*rand(NN,NN)));
% начальный базисный ортонормированный вектор
matrix_basis(1,:) = mi_engynorm(matrix_basis(1,:));
% последующие вектора
for nv = 2:1:NN
    prjvect = zeros(1,NN);
    for nb = 1:1:nv-1
        prjvect = prjvect + ...
            sum(matrix_basis(nv,:).*conj(matrix_basis(nb,:)).*...
                matrix_basis(nb,:));
    end
    matrix_basis(nv,:) = matrix_basis(nv,:) - prjvect;
    matrix_basis(nv,:) = mi_engynorm(matrix_basis(nv,:));
end
%% =====
end

```

Листинг 2.11. Функция трансформации сигнала в матрицу гармонических векторов

```

function mat = mi_sig2matg( sx )
%% =====
%% mi_dist -- функция преобразования
%           сигнала-вектора в сигнал-матрицу
% входные параметры:
%   sx1 -- вектор сигнала, длиной Nn
%   возвращает:
%   mat -- квадратную матрицу размера Nn x Nn
%% =====
Nn = length(sx); % число отсчётов сигнала
FSX = (1/Nn).*fft(sx); % преобразование Фурье исходного сигнала
mat = zeros(Nn,Nn); % заготовка под сигнал-матрицу
xt = (0:1:Nn-1).*(2*1i*pi/Nn); % вектор времени
% формируем матрицу
for k = 1:Nn
    mat(k,:) = FSX(k).*exp(xt.*(k-1));
end
%% =====
end

```

Листинг 2.12. Функция синтеза шумоподобного сигнала в заданной полосе частот

```
function signal = mi_signoise( Fl, Fu, Nc, NormType, SType )
%% =====
%% mi_signoise -- функция синтеза
%      шумоподобного сигнала в заданной полосе частот
%   Fl (frequency low)      - нижняя частота  $1 \leq Fl \leq Fu < (Nc/2)$ 
%   Fu (frequency up)       - верхняя частота  $1 \leq Fl \leq Fu < (Nc/2)$ 
%   Nc (Number of counts) - число отсчётов
%   signal - возвращает синтезированный сигнал
%   NormType - тип нормирования:
%               1 - по энергии;
%               2 - числу отсчётов
%               3 - до средних значений  $|signal| = 1$ 
%               4 - без нормирования
%   SType - тип спектра сигнала:
%               1 - только положительный (fft - левый) (real + image)
%               2 - пол.. и отр. (лев. и прав.) (real + image)
%               3 - только отрицательный (fft - правый) (real + image)
% возвращает:
%   signal - шумоподобный сигнал
%% =====
% синтез нулевого сигнала
signal = zeros(1, Nc);
%% предварительные вычисления и проверки
NcDiv2 = floor((Nc+0.2)/2);
% преобразуем в ближайшее целое
Fl = round(Fl);
Fu = round(Fu);
Nc = round(Nc);
if Fu >= NcDiv2 % если верхняя частота б. или р. половины вектора сигнала
    Fu = NcDiv2-1; % устанавливаем новую верхнюю частоту
end;
if Fl < 1 % если нижняя частота менее 1
    Fl = 1; % устанавливаем единичную нижнюю частоту
end;
if Fl > Fu % если нижняя частота больше верхней частоты
    return; % возвращаем нулевой сигнал
end;
%% синтез
FSN_r = rand(1,Nc)-0.5; % спектр сигнала (вещ. часть)
FSN_i = 1i.*(rand(1,Nc)-0.5); % спектр сигнала (мним. часть)
FSN = FSN_r + FSN_i; % спектр сигнала комплексный

% обнуляем части спектра вне заданной полосы
FSN(1:Fl) = 0;
FSN(Fu+2:Nc-Fu) = 0;
FSN(Nc-Fl+2:Nc) = 0;
```

```

% обнуление частей спектра по условию параметра SType
if SType == 1 % только положительный (real + image)
    FSN(NcDiv2+2:end) = 0;
elseif SType == 3 % только отрицательный (real + image)
    FSN(2:NcDiv2+mod(Nc,2)) = 0;
elseif (SType < 1) || (3 < SType)
    error('mi_swaveletmorli:FunctionInput: SType = {1,2 or 3}');
end

% собственно синтезируем сигнал
signal = ifft(FSN);

% нормируем выходной сигнал
switch NormType
    case 1 % по энергии
        signal = mi_engynorm(signal);
    case 2 % по числу отсчётов
        signal = signal./Nc;
    case 3 % до средних значений |signal| = 1
        nnorm = sum(abs(signal))/Nc;
        signal = signal./nnorm;
    otherwise
        if NormType ~= 4
            error(...
                'mi_swaveletmorli:FunctionInput: NormType = {1,2,3,4}');
        end
end
end
%% =====
end

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюев Н. И.* Информационные основы передачи сообщений // М. Из-во: «Советское радио», 1966. – 360 с.: ил.
2. *Котельников В. А.* О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // УФН, 2006, том 176, №7. – С.: 762–770. DOI: 10.3367/UFNr.0176.200607h.0762
3. *Герасимов И.В., Кузьмин С.А., Лозовой Л.Н., Никитин А.В.* Основания технологии комплементарного проектирования наукоемких изделий // Из-во: С-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина), 2010. – 196 с.
4. *Гатчин Ю.А., Жаринов И.О.* Основы проектирования вычислительных систем интегрированной модульной авионики // М.: Машиностроение, 2010. – 223 с.
5. *Парамонов П.П., Гатчин Ю.А., Жаринов И.О., Жаринов О.О., Дейко М.С.* Принципы построения отраслевой системы автоматизированного проектирования в авиационном приборостроении // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 6 (82). С. 111-117.
6. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Современные геометрические структуры и поля // М.: МЦНМО, 2005. – 584 с.: ил.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Издание шестое, исправленное и дополненное // М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 336 с.: ил.
8. *Тайманов И.А.* Лекции по дифференциальной геометрии // Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. – 176 с.: ил.
9. *Арнольд В.А.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спиноров // М.: МЦМНО – 40 с.: ил.
10. *Голдсмит А.* Беспроводные коммуникации // Москва: Техносфера, 2011. – 904 с.: ил.
11. *Johnson H., Graham M.*, High-speed signal propagation // New York: Prentice Hall PTR, 2003. – 792 p.
12. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов, изд-е 2 испр. // Москва: Техносфера, 2009. – 856 с.
13. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов: Второе издание // Пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс», 2009. – 656 с.: ил.
14. *Кестер У.* Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов // Москва: Техносфера, 2010. – 328 с.
15. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. 6-е изд., стер. // М.: Физматлит, 2005. – 280 с.

16. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра // М.: Наука, 1980. – 400 с.
17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ // М.: Наука, 1980. – 501 с.
18. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров // М.: Наука, 1967. – 780 с.: ил.
19. *Скляренок Е. Г.* Курс лекций по классической дифференциальной геометрии // М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. – 48 с.:ил.
20. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. 6-е изд., стер. // М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
21. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров, 2-е издание // М.: Наука, 1967. – 780 с.: ил.
22. *Выгодский М. Я.* Справочник по математике // М.: АСТ: Астрель, 2011. – 1055 с.:ил.
23. *Герасимов И.В.* Физика и информационные процессы // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2004. № 14. – С.: 3-14.
24. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Методы и модели цифровой обработки изображений // Монография. Изд-во: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2014. – 189 с.
25. *Гришенцев А.Ю.* Эффективное сжатие изображений на базе дифференциального анализа // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 11. С. 10.
26. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Основы математического анализа. В 2 ч. Часть II, 3-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1998. 448 с. ил.
27. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. Изд. 4-е, испр. и доп. // М.: ЛЕНАРД, 2016. – 528 с.: ил.
28. *Яне Б.* Цифровая обработка изображений. Москва: Техносфера, 2007. – 584 с.
29. *Смит С.* Цифровая обработка сигналов // М.: Додека-XXI, 2011. 720 с.
30. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Постановка задачи оптимизации распределённых вычислительных систем // Программные системы и вычислительные методы . – 2013. – № 4. – С. 370 - 375. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.10548
31. *Копорский Н.С., Видин Б.В., Жаринов И.О.* Организация вычислительного процесса в много машинном бортовом вычислительном комплексе // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2006. Т. 49. № 6. С. 41-50.
32. *Демирчан К.С., Нейман Л.Р, Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.* Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Учебник для вузов. Т. 2.– 4-е изд.– СПб.: Питер, 2006. – 576 с.:ил.
33. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, изд. 3-е, переработанное и дополненное // М.: «Наука и техника», 1979. – 744 с.

34. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьёва Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов. СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.
35. Бахурин С. Преобразование Гильберта. Аналитический сигнал // Электронное издание – авторский сайт: URL:<http://www.dsplib.ru/content/hilbert/hilbert.html>
36. Коробейников А.Г., Копытенко Ю.А., Исмаилов В.С. Интеллектуальные информационные системы магнитных измерений // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 1 (71). С.: 39-45.
37. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения // М.: Техносфера, 2007. – 488 с.
38. Яне Б. Цифровая обработка изображений // М.: Техносфера, 2007. – 584 с.
39. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г., Величко Е.Н., Непомнящая Э.К., Розов С.В. Синтез бинарных матриц для формирования сигналов широкополосной связи // Радиотехника. 2015. № 9. С. 51-58.
40. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Алгоритм поиска, некоторые свойства и применение матриц с комплексными значениями элементов для стеганографии и синтеза широкополосных сигналов // Журнал радиоэлектроники. 2016. № 5. С. 9.
41. Гришенцев А.Ю. Способ синтеза и применение шумоподобных широкополосных сигналов в задачах организации защищенных каналов связи // Радиотехника. 2017. № 9. С. 101-107.
42. Гришенцев А.Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 6. С. 1074-1083. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
43. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Понижение размерности пространства при корреляции и свертке цифровых сигналов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 3. С.: 211-218.
44. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. Под ред. О. И. Шелухина // М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.: ил.
45. Гришенцев А.Ю. Автокорреляционные и фрактальные свойства матриц линейного унитарного преобразования Фурье // Радиотехника. 2019. № 1. С. 5-14. doi: 10.18127/j00338486-201901-01
46. Чобану М. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. М.: Техносфера, 2009. – 480 с.:ил.
47. Давыдов А. В. Сигналы и линейные системы: Тематические лекции // Екатеринбург: УГГУ, 2005. – 262 с. URL: <http://geoin.org/signals/index.html>
48. Батоврин В.К., Гуляев Ю.В., Олейников А.Я. Обеспечение интероперабельности–основная тенденция в развитии открытых систем //

Информационные технологии и вычислительные системы №5, 2009, С.: 7-15. – Режим доступа: http://www.jitcs.ru/images/stories/2009/05/7_15.pdf

49. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Средства интероперабельности в распределенных геоинформационных системах // Журнал радиоэлектроники. 2015. № 3. С. 19.
50. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г.* Средства интероперабельности в распределенных геоинформационных системах // Журнал радиоэлектроники, 2015, № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/7/text.html>
51. *Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г., Дукельский К.В.* Метод численной оценки технической интероперабельности // Кибернетика и программирование, 2017, № 3. С.: 23-38. doi: 10.25136/2306-4196.2017.3.23540
52. *Гришенцев А.Ю., Гурьянов А.В., Кузнецова О.В., Шукалов А.В., Коробейников А.Г.* Математическое обеспечение в системах автоматизированного проектирования // СПб: Университет ИТМО, 2017. – 88 с.
53. *Olds C.D.* The Geometry of Numbersn // Mathematical Association of America, 2000. – 175 p.

Гришенцев Алексей Юрьевич

**Цифровые системы широкополосной связи. Часть 1.
Введение в пространства и методы преобразования сигналов**

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н. Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ № 4284
Отпечатано на ризографе