АЛЕКСАНДР ЦЫБИН

ЭТЮДЫ О МАТЕМАТИКЕ

hmG press

Денвер 2012

Александр Цыбин. Этюды о математике. Денвер, Колорадо. HMG Press, 2012 – 222 с.

ISBN: 1467944599

Книга доктора технических наук Александра Цыбина - не учебник, а скорее всего литературное произведение по математике. Очень серьёзные разделы прикладной математики изложены в ней в жанре литературных эссе, отличающихся юмором и неожиданным поворотом событий. И тем не менее - это серьёзная книга, которую невозможно читать без ручки в руках. Увлекательно изложенные основы прикладной математики, начинаются от складывания палочек до аналитических и численных решений уравнений математической физики с использованием вычислительных методов. Несмотря на то, что данная книга не является учебником, она даёт возможность всем кто её внимательно прочтёт, самостоятельно разобраться в основных вопросах прикладной математики.

Издательство HMG Press
8547 E. Arapahoe Rd. , Ste J-177
Greenwood Village, CO 80112
Tel. 720-436-7613 Fax 866-559-2923
Printed by On-Demand Publishing, LLC.

ISBN-13: 978-1467944595
ISBN-10: 1467944599

Предисловие

Книга, которую Вы держите в руках, называется: "Этюды о математике" и мне кажется, что такое название отражает её суть. Дело в том, что это не научный трактат, не учебник, а, скорее всего литературное произведение по математике. Автор задался целью изложить довольно серьёзные разделы математики, кстати, здесь идёт речь преимущественно о прикладной математике, в рамках литературного эссе с привлечением элементов детективного жанра и юмора. Здесь много формул и они, как правило, не пронумерованы. Это сделано, трудно сказать насколько удачно, с одной целью – чтобы читатель по мере чтения неоднократно возвращался назад. Точно такую же цель преследуют авторы детективов, когда излагают несколько версий преступления. И тем не менее, это серьёзная книга. Ее нельзя читать без ручки в руках, с тем, чтобы вслед за автором повторять, приведённые на ее страницах аналитические выражения, которые логично вытекают одно из другого. Автору, как мне кажется, удалось увлекательно изложить основы прикладной математики, от момента складывания палочек до аналитических решений уравнений математической физики с использованием вычислительных методов, в частности метода конечных элементов.
Несмотря на то, что приведённая книга, как говорилось выше, не учебник, она, как мне кажется, даёт возможность всем тем, кто её внимательно прочтёт, самостоятельно разбираться во многих вопросах прикладной математики. В этом я вижу основную заслугу автора.

Ярослав Григорьевич Клюшин,
Профессор математики
Университета пилотов
Гражданской авиации.
Санкт-Петербург, Россия.

Этюды о математике

Я ставил перед собой две цели:

1) По-возможности популярное изложение математики и

2) Занимательное описание математики. Как мне это удалось, судить не мне.

Когда ребёнок учится считать, он использует целые положительные числа, такие как 1, 2, 3 и т. д. Для этих целей ребёнок использует палочки: 1-это одна палочка, 2-это две палочки и т. д. Что можно делать с этими числами? Складывать. Действительно, одна палочка плюс одна палочка будет уже две палочки. Их можно реально пощупать и посмотреть. Точно также будет и в том случае, если мы будем умножать эти числа между собой. Мы, очевидно, будем получать целые положительные числа. В этом может каждый желающий убедиться непосредственно. Это значит, что складывая или умножая целые положительные числа мы будем получать целые положительные числа. Если же мы будем вычитать эти числа, то иногда будет всё в порядке: например 3-2=1. Если же из 2 вычесть 3, то такого числа среди целых положительных чисел нет и первоклассник совершенно справедливо скажет, что из двух три не вычитается. Поэтому пришлось ввести так называемые отрицательные числа и ноль. Эти числа уже нельзя ни пощупать, ни изобразить в виде палочек. Напрашивается такая простая аналогия – шкала температур. Действительно, если следовать международной шкале Цельсия и принять за 0 температуру замерзания пресной воды при нормальном атмосферном давлении на Земле, то двигаясь вправо по этой шкале мы будем иметь положительные температуры, а двигаясь влево-отрицательные температуры. Поступим так: возьмём прямую линию. Выберем на ней произвольную точку и назовём её 0 (ноль). Справа от этой точки нанесём через равные промежутки целые положительные числа: +1, +2, +3 и т. д. Слева от этой точки нанесём через точно такие же равные промежутки целые отрицательные числа –1, -2, -3 и т. д. И договоримся, что любое число плюс 0, как и любое число минус 0 будет тем же самым числом. А также любое конечное (мы пока имеем дело только с конечными числами), умноженное на ноль, даёт ноль. Теперь с этими числами: положительными, отрицательными и нулём можно делать следующие действия: складывать, умножать и вычитать и, проделав эти действия, мы будем получать только эти числа.

Это утверждение можно доказать строго, но мы специально не делаем этого, так как это выходит за рамки популярности и занимательности. Мы предоставляем любому желающему провести численный эксперимент и убедиться в справедливости данного утверждения. Таким образом мы нашли совокупность чисел, с которыми можно осуществлять три из четырёх действий арифметики, и никогда не выходить за рамки этой совокупности. Теперь о делении. Вначале договоримся, что делить на ноль нельзя. Это обстоятельство можно проверить на любом калькуляторе. Введём так называемые рациональные числа, представляющие собой дробь, в числителе которой стоит целое число (положительное, отрицательное и ноль), а в знаменателе то же целое число (положительное, отрицательное и не ноль) с соблюдением ещё одного условия : числитель и знаменатель не имеют общих делителей. В этом случае говорят, что числитель и знаменатель взаимно просты. В настоящее время так рациональные числа никто не пишет и, например, вместо $\frac{2}{7}$ найдёт на калькуляторе 0. 2857142 с точностью до 8-ми знаков после запятой и с непременным условием, что используется десятичная система исчисления. Все мы с раннего детства, разглядывая свои руки, учились считать до десяти. И поэтому древние индийцы ввели, от них это переняли арабы, и затем стала известна всему миру десятичная система исчисления. Суть этой системы заключается в следующем: имеются цифры 1, 2, 3, 4, 5, б, 7, 8, 9 и число 0. Тогда последующие числа выглядят так 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 и. т. д. Заметим, что природа не знает такого исчисления и если нечто больше чего-то в 10, 100 или 1000 раз, то этот факт не имеет никакого физического смысла. Для природы значительно более приемлема двоичная система исчисления, где используются только 0 и 1. Эта система используется в компьютерах. В этом случае предполагается, что 1 –это, когда ток проходит через некий элемент, а 0 –значает, что он не проходит. В двоичной системе 2 – это 10, 3 - 11, 4 - 100, 5 - 101, 6 - 110, 7 - 111, 8 - 1000 и. т. д. Вернёмся снова ко всем нам хорошо знакомой десятичной системе исчисления и к рациональным числам, записанным в том виде, в каком они представлены на калькуляторе. С этими числами можно делать все четыре действия арифметики и без всякого ограничения, за исключением, конечно, деления на ноль, и мы всегда в процессе этих вычислений будем получать только рациональные числа и никакие другие. Хорошо известно, что целые числа делятся на чётные и нечётные. Чётные числа делятся нацело на 2, а нечётные не делятся. Формула чётного числа выглядит так 2N, а нечётного 2N+1, где N равно 0, 1, 2, и. т. д. Отметим среди целых чисел ещё числа Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13 каждое последующее из которых, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих и, к которым мы ещё постараемся вернуться. И, наконец, простые числа 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, и здесь слово и т. д. не применимо, так как никакой формулы простых чисел не существует и этот факт пока не подвергается сомнению. Заметим только, что простые числа делятся (здесь имеется в ввиду деление нацело) только на самих себя и на 1. Математики исключают 1 из простых чисел. Используя рациональные числа можно решать алгебраические уравнения. Уравнение - это равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое как правило буквой x. Линейное уравнение или уравнение 1-го порядка имеет вид

$$a \cdot x = b. \qquad (1)$$

где a и b известные рациональные числа и a не равно нулю.

Решение уравнения (1) очевидно

$$x = \frac{b}{a}\ . \qquad (2)$$

И это то же рациональное число.

Мы ещё вернёмся к уравнению (1) и покажем, что оно допускает далеко не простые обобщения.

Квадратной степенью числа x является выражение $x^2 = x \cdot x$.

Кубической степенью числа x является выражение $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

Четвёртой степенью числа x является выражение $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x.$

И так далее.

Двучленом или биномом называется выражение $x + a$.

Тогда квадрат бинома $(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Здесь мы использовали правило, что при перемене порядка сомножителей, представляющие собой рациональные числа, произведение не меняется.

Куб бинома

$$(x+a)^3 = (x^2 + 2ax + a^2)\cdot(x+a) = x^3 + 3x^2 \cdot a + 3x \cdot a^2 + a^3.$$

Четвёртая степень бинома

$$(x+a)^4 = (x^3 + 3x^2 \cdot a + 3x \cdot a^2 + a^3)\cdot(x+a) = x^4 + 4x^3 \cdot a + 6x^2 \cdot a^2 + 4x \cdot a^3 + a^4.$$

Можно показать, что

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{n}{k})\, x^{n-k} a^k\ . \qquad (3)$$

Это так называемый бином Ньютона.

Здесь n любое целое положительное число большее или равное 1.

Греческая буква $\sum_{k=0}^{n}$ с индексами k=0 внизу и n вверху означает, что следует суммировать выражение, стоящее под знаком суммы от k=0 до n.

Введено следующее обозначение $(\frac{n}{k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Выражение $n!$ читается, как эн-факториал и означает произведение всех целых чисел от 1 до n. Например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Рассмотрим выражение (3) для n=4. Имеем

$$(x+a)^4 = \sum_{k=0}^{4} (\frac{4}{k})\, x^{4-k} a^k = (\frac{4}{0}) x^4 a^0 + (\frac{4}{1}) x^3 a^1 + (\frac{4}{2}) x^2 a^2 + (\frac{4}{3}) x^1 a^3 + (\frac{4}{4}) x^0 a^4.$$

Заметим, что 0 !=1 и любое число в нулевой степени также равно 1.

В дальнейшем мы это покажем.

Тогда $(\frac{4}{0}) = \frac{4!}{0!\cdot(4-0)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1$.

$(\frac{4}{1}) = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 4.$ $\quad (\frac{4}{2}) = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$

$(\frac{4}{3}) = \frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4.$ $\quad (\frac{4}{4}) = \frac{4!}{4!\cdot(4-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1} = 1.$

И это показывает, что приведённая здесь формула, даёт правильный результат.

Рассмотрим теперь квадратное уравнение:

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad (4)$$

где a и b - рациональные числа, а x - неизвестное нам пока число.

Перепишем (4) так

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + b - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Очевидно, что мы ничего в исходном равенстве, содержащем неизвестное, не нарушили. Мы прибавили к исходному равенству рациональное число $\frac{a^2}{4}$ и вычли точно такое же число. Но тогда последнее равенство можно записать так

$(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$. И затем $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

Здесь заметим, что действие $\sqrt{\ }$ обратно возведению в квадратную степень.

То есть, если $y = x^2$, то $x = \sqrt{y}$. Последнее равенство справедливо с одной

оговоркой : перед квадратным корнем надо писать знак $\pm$. И тогда последнее равенство будет выглядеть так $x = \pm\sqrt{y}$. Тут дело вот в чём.

Мы пишем $y = x^2$, но то же самое y можно представить и так $y = (-x)\cdot(-x)$.

И тогда окончательным решением уравнения (4) будет выражение

$$x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \qquad (5)$$

где a и b рациональные числа и под знаком квадратного корня или как, часто говорят, корня то же стоит рациональное число. Но отсюда, не следует, что x – рациональное чис - ло. Приведём такой пример. Пусть в выражении (5) $a = 0$ а $b = -2$.

Тогда выражение (5) даёт $x = \pm\sqrt{2}$. Допустим, что полученное нами число рационально и тогда согласно определению рационального числа его можно представить так $\pm\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где m и n взаимно простые целые числа.

Возведём последнее выражение в квадрат и запишем его так $m^2 = 2n^2$, откуда следует, что m^2 обязательно чётное число, но тогда и m – чётное число. Действительно, если бы m было бы нечётным, то его можно было бы представить так $m = 2k + 1$, где k – целое число или 0. Но тогда $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ и мы получили, что m^2 – нечётное число. Итак, m – обязательно чётное число и его по определению чётного числа можно представить так $m = 2k$. Но в этом случае из равенства $m^2 = 2n^2$, следует, что $4k^2 = 2n^2$ и тогда $n^2 = 2k^2$ и поэтому и n – чётное число и m и n не взаимно простые целые числа. И мы пришли к противоречию, из которого однозначно следует, что $\pm\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом. И это значит, что на числовой оси помимо рациональных чисел существуют ещё и иррациональные. Пользуясь калькулятором или компьютером мы найдём, что с точностью до 7 знаков после запятой $\sqrt{2} = 1.4142135$, и мы поступаем с ними точно также как и с рациональными числами, хотя происхождение этих чисел совсем другое. Оказывается, что на числовой оси имеются ещё и другие числа, которые математики называют трансцендентными. Одно из этих чисел всем, даже весьма далёким от математики, прекрасно известно. Это отношение длины окружности к диаметру. Так называемое число пи, обозначаемое греческой буквой π от греческого слова периферия. В дореволюционных гимназиях для запоминания этого числа гиназистам рекомендовали учить следующий стишок: « Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать число ужъ знаетъ». Если мы подсчитаем количество букв в каждом из этих слов, то получим 3,1415926536. Даже на калькуляторе число знаков после запятой будет меньше. Для справки на компьютерах получали более трил- лиона знаков после запятой. При этом самый быстродействующий компьютер в 10-х году 21-го века работал непрерывно целые сутки. Подтвердилось, что цифры после запятой не имеют никакого периода. Приведём в качестве курьёза ещё один исторический факт. В 19 веке один немецкий математик потратил 35 лет жизни, чтобы получить 707 знаков после запятой и эти цифры просил увековечить на памятнике, установленом на его могиле. Как показали расчёты на компьютере, он ошибался уже начиная с 300-го знака после запятой. Доли числа π, его кратные и его степени также являются трансцендентными числами. К трансцендентным числам относится и число $e = 2.718282$, названое так в честь Эйлера (Euler) великого российского математика швейцарского происхождения. Доли этого числа, его кратные и его степени также являются трансцендентными числами. О происхождении этого числа мы поговорим ниже, а пока зададим вопрос, чем же трансцендентные числа отличаются от иррациональных. Оказывается, трансцендентные числа не могут корнями никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, и это факт очень непросто доказать. Вся совокупность чисел: рациональных, иррациональных и трансцендентных образует множество действительных чисел. И эти числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в целую степень и мы будем получать действительные числа и никакие другие. Мы здесь упомянули выражение целая степень. Но существуют и нецелые степени. Одну из них мы уже здесь использовали $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$. Можно продолжить это обозачение $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$; $a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}$ и вообще показателем степени может быть любое действительное число, но с одним непременным условием, что a, то есть основание степени положительное действительное число. Теперь вы можете взять в руки калькулятор и возвести любое действительное, обязательно положительное, число в любую действительную степень. Если же вы проделаете то же самое с отрицательным числом, то обычный (не специальный) калькулятор сообщит вам, что вы допустили ошибку. Мы снова оказываемся в положении первоклассника, который вполне справедливо вам скажет, что из двух три не вычитается.

Мы упомянули слова отрицательные степени. Их вводят следующим образом

$a^{-1}=\frac{1}{a}; a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}; a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}; a^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$.

Отсюда $a^0=a^{1-1}=\frac{a}{a}=1,$ что и следовало доказать.

Возвращаясь к квадратному уравнению (4) заметим, что если x_1 и x_2, его корни, то исходное уравнение можно переписать так

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0.$ Тогда получим $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$

Сравнивая это с (4), найдём $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b.$(6)

То есть сумма двух корней квадратного уравнения равна коэффициенту при x в первой степени со знаком (-), а произведение двух корней –свободному члену или что то же самое коэффициенту при x в нулевой степени. При этом мы использовали следующее правило: два многочлена $\sum_{k=0}^{n}a_k^{(1)}x^{n-k}$ и $\sum_{k=0}^{n}a_k^{(2)}x^{n-k}$ равны между собой тогда и только тогда, когда $a_k^{(1)}=a_k^{(2)}$ при $k=0,1,2,\dots,n$.

Выражение (6) представляет собой так называемую теорему Безу. Рассмотрим теперь кубическое уравнение:

$x^3+ax^2+bx+c=0$, (7)

где a, b и с- действительные числа, а x- неизвестное нам пока число.

Преобразуем это уравнение так чтобы исчез член, содержащий квадрат неизвестного. Покажем, что это всегда можно сделать.

Пусть $x=y+d$, где y -новое неизвестное, а d -действительное число, которое выражается через известные действительные числа в (7). В результате имеем

$(y+d)^3+a(y+d)^2+b(y+d)+c=0$.

Или $y^3+(3d+a)y^2+(3d^2+2ad+b)y+d^3+ad^2+bd+c=0$.

И если $d=-\frac{a}{3}$, то получим $y^3+b_1y+c_1=0,$ где $b_1=b-\frac{a^2}{3}$ и $c_1=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$.

Далее представим y в виде $y=\alpha+\beta$.

Тогда будем иметь $\alpha^3+\beta^3+(\alpha+\beta)(b_1+3\alpha\beta)+c_1=0.$

Теперь заметим, что y представляет собой сумму двух чисел α и β.

В этом случае на эти два числа можно наложить одно, обязательно одно, дополнительное условие. Примем следующее условие α и β такие, что $b_1 + 3\alpha\beta = 0$.

В этом случае имеем

$\alpha^3 + \beta^3 = -c_1$

$3\alpha\beta = -b_1$.

Возведя последнее равенство в куб, запишем его так

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{b_1^3}{27}.$$

Итак, мы получили, что числа α^3 и β^3 таковы, что их сумма равна $-c_1$, а их произведение равно $-\frac{b_1^3}{27}$. То есть согласно теореме Безу, α^3 и β^3 будут корнями квадратного уравнения

$$z^2 + c_1 z - \frac{b_1^3}{27} = 0.$$

А квадратное уравнеие мы решать уже умеем, и отсюда следует, что и кубическое то же. Приведенному здесь решению более 300 лет. Оно получено впервые итальянским математиком Кардано. Правда, его приоритет оспаривал в суде другой математик Тарталья, который помимо того, что был выдающимся для своего времени математиком, промышлял тем, что грабил на дорогах. Утверждают, что именно его изобразил Шиллер в драме Разбойники.

В том же 17-ом веке другой Итальянский математик Феррари доказал, что уравнение 4-го порядка сводится к уравнению 3-го порядка, то есть можно получить решение общего (то есть с любыми действительными коэффициентами) уравнения 4-го порядка, как говорят, в радикалах. Слова радикал и корень - синонимы.

Запишем уравнение 4-го порядка:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Оказывается левую часть этого уравнения можно представить так

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + a_1 x + b_1)(x^2 + a_2 x + b_2).$$

В результате найдём

$$a_1 + a_2 = a;\ b_1 + a_1 a_2 + b_2 = b;\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = c;\ b_1 b_2 = d.$$

Отсюда $a_2 = a - a_1;\ b_2 = \frac{d}{b_1};\ a_1 = \frac{\frac{d}{b_1} - b_1}{c - b_1 a}$.

И тогда получим

$$b_1^3 - b_1^2\left(b + \frac{c}{a} - \frac{1}{a}\right) + b_1\left(d - \frac{bc}{a}\right) - \frac{dc + d}{a} = 0.$$

То есть, решая это кубическое уравнение, мы найдём b_1. Затем, зная b_1, найдём a_1 и b_2. И далее, найдём a_2. И дело свелось к тому, что надо решить два квадратных уравнения.

То есть действительно можно получить решение общего уравнения 4-го порядка в радикалах. Можно ли то же самое сделать для уравнений более высокого порядка 5-го и т. д? Два века выдающиеся математики своего времени обсуждали эту проблему и, наконец, норвежцу Нильсу Абелю и французу Эваристу Галуа удалось доказать, что этого в приципе сделать нельзя. Между прочим Эварист Галуа был яркой личностью. Был знаком с Александром Дюма отцом. К большому сожалению, он погиб в возрасте 21 год на дуэли. Результаты, полученные ими независимо друг от друга в начале 19-го века, до сих пор никто не опроверг. Ну, а что же делать? Ведь в приложениях, в инженерных расчётах бывает необходимо решать алгебраические уравнения значительно более высокого порядка чем 5. Оказывается, получить приближённое решение таких уравнений с любой наперед заданной степенью точности давно перестало быть проблемой и никому не придёт в голову использовать общее решение даже кубического уравнения. Для того чтобы убедить читателя рассмотрим следующий пример. Следует найти корни, например, такого кубического уравнения

$$x^3 - 2.75x^2 + 3.5x - 1.5 = 0. \qquad (+)$$

При $x = 0$ левая часть этого уравнения равна $-1.5 < 0$, т. е. меньше нуля .

При $x = 1$ левая часть этого уравнения равна $0.25 > 0$, т. е. больше нуля.

Значит один из корней этого уравнения лежит между нулём и единицей.

Делим отрезок между этими двумя числам пополам. При $x = 0.5$ левая часть этого уравнения равна $-0.3125 < 0$.

Значит один из корней этого уравнения лежит между 0.5 и единицей и т. д. Читатель легко может продолжить этот алгоритм, то есть способ решения. Такой способ решения можно проиллюстрировать очень старым анекдотом. Математика спрашивают, как поймать льва в пустыне?

Очень просто, отвечает математик. Делим пустыню пополам. Допустим, в первой половине льва нет, значит, он в другой половине. И так далее.

При этом, конечно, игнорируется тот факт, что лев может перебегать из одной части пустыни в другую. Но корень уравнения никуда, в отличие от льва, не бегает и поэтому такой алгоритм, и это на полном серьёзе, весьма эффективен. Этот алгоритм давно запрограмирован на компьютере и включен в список наиболее используемых математических программ.

Есть подобный алгоритм и на некоторых специальных калькуляторах. Так что нахождение вещественных корней алгебраических уравнений любого конечного порядка ныне не вызывает никаких проблем. Здесь нуждается в поянении два выражения: вещественные корни и конечный порядок. Относительно вещественных корней. Это те корни которые можно выразить вещественным или действительным числом. Если есть такие корни, то очевидно есть какие-то другие, о которых мы поговорим.

Теперь о конечном порядке уравнения. Если говорится о конечном порядке, то, вероятно, есть какой–то другой. Да есть. И об этом мы то же поговорим значительно ниже. Итак, о других корнях. Уже при решении квадратного уравнения возникает в формуле (5) такая ситуация, что под знаком корня оказывается отрицательное число. И любой, не специальный калькулятор сообщит, что допущена ошибка или проще таких чисел нет. Да действительно, таких вещественных чисел нет. И поэтому надо ввести новые числа. Ситуация точно такая же, что и у первоклассника: из двух три не вычитается и потребовалось ввести отрицательные числа, которые никакими палочками изобразить нельзя.

Теперь запишем $\sqrt{-1} = i$. (8)

Такое число называют мнимой единицей в отличие от вещественной.

И выражение $c = a + bi$. (9)

называется комплексным числом, где a и b - вещественные числа. a называется вещественной частью комплексного числа c и обозначается $a = \mathrm{Re}\, c$ от французского и английского слова $\mathrm{Re}\, al$, которое можно перевести русским словом действительный или вещественный. b называется мнимой частью комплексного числа c и обозначается $b = \mathrm{Im}\, c$ от французского слова $\mathrm{Im}\, agine$, которое можно перевести русским словом мнимый. Теперь вернёмся к формуле (5), и положим $a = 0$ и $b = 2$. Тогда получим $x = \pm\sqrt{2}\, i$. То есть в этом случае исходное квадратное уравнение имеет два различных мнимых корня. И теорема Безу остаётся справедливой - сумма этих корней равна $-a = 0$, а произведение этих корней $+\sqrt{2}\, i \cdot (-\sqrt{2}\, i) = -2i^2 = 2$. равно b. Теперь мы можем решать любое квадратное уравнение с любыми действительными (вещественными) коэффициентами, но при этом корни этого уравнения будут обязательно комплексно-сопряжённые комплексные числа. Комплексно-сопряжёнными числами c_1 и c_2 называются следующие числа $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_1 - b_1 i$. Сумма и произведение этих чисел обязательно вещественные числа.

Действительно $c_1 + c_2 = 2a_1$ и $c_1 \cdot c_2 = a_1^2 + b_1^2$. Если же коэффициенты квадратного уравнения будут комплексные числа, то корни такого уравнения то же будут комплексными числами, но не комплекно-сопряжёнными. При операции с комплексными числами справедливы следующие правила. Пусть $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$. Они равны между собой тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сумма или разность этих чисел имеет вид $c_1 \pm c_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$. Произведение этих чисел равно $c_1 \cdot c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Деление этих чисел производится так

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)\cdot(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)\cdot(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Мы здесь сделали вот что: умножили числитель и знаменатель на число, комплексно-сопряжённое знаменателю. В результате в знаменателе стоит вещественное число, которое называется квадратом модуля комплексного числа c_2. Оно обозначается так $\left|c_2^2\right|$ и $\left|c_2^2\right| = c_2 \cdot c_2^*$, где число c_2^* комплексно-сопряжено или просто сопряжено числу c_2.

То есть в результате сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел мы получаем только комплексные числа и никакие другие.

Аналогичная ситуация будет и с возведением этих чисел в целые положительные и отрицательные показатели. Забегая далеко вперёд, скажем, что с другими показателями степени, в том числе и с комплексными, будет всё в порядке. То есть никаких других чисел, кроме комплексных, мы в процессе этих операций не получим. Покажем это на примере целых показателей степени, а вначале ответим на вопрос, а зачем вообще нужны комплексные числа? Мы в полной мере сейчас не ответим на этот вопрос, а спросим читателя сколько будет квадратных корней из единицы. Читатель ответит, что корней 2 – это +1 и –1. На аналогичный вопрос о кубических корнях из той же единицы тот же читатель, который не знаком с комплексными числами, ответит что здесь корень всего один и это +1. Не правда ли странно: квадратных корней из единицы два, а кубических всего один, хотя, казалось бы, что должно быть три. Теперь, зная о существовании комплексных чисел, мы отвечаем, да действительно их три.

Это 1; $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Корней 4-ой степени из единицы четыре.

Это $1; -1; +i; -i$. И. т. д. Корней n-ой степени из единицы –n.

Проверим это на примеры корней 4-ой и 3-ей степеней из единицы.

Итак $i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1; (-i)^4=\left((-i)^2\right)^2=(-1)^2=1.$

$$(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3=(-\frac{1}{2})^3+3(-\frac{1}{2})^2\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2}+3(-\frac{1}{2})(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(i\frac{\sqrt{3}}{2})^3=-\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}i\frac{\sqrt{3}}{2}+(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{4})+$$

$$+i^3\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1.$$

В справедливости того, что куб третьего корня равен единице, убедится сам читатель и зоодно еще раз возведёт в целую положительную степень комплексное число. Как были найдены эти корни, мы узнаем ниже, а пока заметим, что комплексные корни из вещественного числа будут обязательно комплексно-сопряжёнными. А теперь вернёмся к нашему примеру (+). Нетрудно проверить, что вещественный корень этого уравнения равен 0.75. А заодно покажем, как можно разделить многочлен (в данном случае 3-ей степени) на многочлен (в данном случае первой степени). Итак

$$\begin{array}{r|l} x^3-2.75x^2+3.5x-1.5 & x-0.75 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-0.75x^2} & x^2-2x+2 \\ -2x^2+3.5x-1.5 & \\ \underline{-2x^2+1.5x} & \\ 2x-1.5 & \\ \underline{2x-1.5} & \\ 0 & \end{array}$$

. Алгоритм заключается в следующем

Слева на самом верху стоит исходный многочлен 3-й степени-делимое справо на этом же уровне исходный многочлен 1-ой степени – делитель. Справо на втором уровне сверху стоит частное, которое мы в процессе вычисления ищем. Первый элемент этого частного будет x^2, так как первый элемент делимого x^3, а первый элемент делителя x. Теперь x^2 умножаем на первую строчку справо и подписываем под первой строчкой слева.

В результате вторая строчка слева имеет вид $x^3 - 0.75x^2$. Вычитаем из первой строчки слева вторую строчку слева. В результате получим третью строчку слева

$-2x^2 + 3.5x - 1.5.$ Разделим первый член этого выражения снова на первый член делителя. Получим $-2x$. И это число умножим на делитель и запишем полученный результат в четвёртой строчке слева $-2x^2 + 1.5x.$

Теперь из третьей строчки слева вычтем четвёртую точку слева. В результате получим пятую строчку слева $2x - 1.5.$ И первый член этого выражения снова делим на первый член делителя. В результате получим $2.$

И это число запишем в качестве третьего члена частного. Затем это же число умножаем на делитель и получаем шестую строчку слева в виде $2x - 1.5.$ И далее эту строчку вычтем из пятой строчки и найдём в седьмой строчке слева 0, откуда следует, что произошло деление на цело точно так же как делятся между собой, например, 4 и 2. И вообще многочлены в своих свойствах очень похожи на знакомые нам с первого класса целые числа. Но эта уже тема значительно более специального разговора. А пока, возвращаясь, как говорят, к нашим баранам, мы получили квадратное уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$, корни которого, как мы уже теперь хорошо знаем, равны $x = 1 \pm i.$

Итак, исходное уравнение 3-ей степени (+) имеет 3 корня $x_1 = 0.75;\ x_2 = 1 + i;\ x_3 = 1 - i.$, из которых один вещественный и два комплексно-сопряжённые. Каждый может проверить, что сумма этих трёх корней равна 2.75. Это число равно коэффициенту при x^2 в уравнении (+), но только с обратным знаком. В данном случае это знак (-). Произведение этих трёх корней равно 1.5 и равно свободному члену в исходном уравнении и то же со знаком минус. Остаётся пояснить чему же равен коэффициент при x в исходном уравнении. Он равен следующему выражению $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ со знаком плюс. Итак, теорема Безу для кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ звучит так $a = -(x_1 + x_2 + x_3);\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и $c = -x_1x_2x_3$. И вообще для любого алгебраического уравнения n–ой степени, имеющего вид

$$x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0. \qquad (10)$$

справедлива теорема Безу, которую можно записать так

$$a_k = (-1)^k \sum_{k=1}^{\binom{n}{k}} \prod_{j=1}^{k} x_j. \qquad (11).$$

Конечно Безу в 17 веке таких формул не писал, но смысл сформулированной им теоремы остался прежним. В формуле (11) все символы мы уже использовали, кроме одного.

Символ $\prod_{j=1}^{k} x_j$ означает $x_1 \times x_2 \times ..... \times x_k$. В частности уже знакомый нам факториал можно записать так $n! = \prod_{j=1}^{n} j$. Покажем, что можно найти все три корня кубического уравнения следующим способом. Ищем неизвестное x в виде $x = y + iz$, где y и z - вещественные чис числа. Тогда уравнение (+) можно записать в виде

$(y+iz)^3 - 2.75(y+iz)^2 + 3.5(y+iz) - 1.5 = 0$, откуда следует, что

$y^3 - 3yz^2 - 2.75y^2 + 2.75z^2 + 3.5y - 1.5 = 0$ и $3y^2z - z^3 - 5.5yz + 3.5z = 0$.

Очевидно, что второе уравнение имеет решение $z = 0$.

В этом случае из первого уравнения следует $y^3 - 2.75y^2 + 3.5y - 1.5 = 0$ и оно, как мы уже знаем имеет решение $y = 0.75$. Итак первый корень найден это $x_1 = 0.75$.

Если же $z \neq 0$, то можно разделить второе уравнение на z.

В результате получим $z^2 = 3y^2 - 5.5y + 3.5$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $-8y^3 + 22y^2 - 22.125y + 8.125 = 0$. Для решения этого уравнения, поскольку корень его должен быть обязательно вещественным, используем уже знакомый нам метод деления отрезка пополам. В результате найдём, что $y = 1$. В этом, между прочим, можно убедиться непосредственно. Если же $y = 1$, то $z^2 = 1$. И тогда получим ещё два комплексно-сопряжённых корня $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$. Итак на данном конкретном примере, мы показали, как можно найти все корни кубического уравнения.

Подведём некоторые итоги. С помощью комплексных чисел мы можем складывать, вычитать, умножать и делить любые числа, конечно кроме деления на ноль. Мы знаем, как возвести любое число в любую рациональную степень. Остаётся вопрос, а как быть, например, если надо вычислить $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$. Для ответа на этот вопрос введём новое для нас понятие логарифмы. Мы уже знаем, что извлечение корня величина обратная возведению в степень, но при этом определяется основание степени, а не показатель этой степени. Будем считать $y = \ln x$, если $x = e^y$ где пока y и x вещественные, а $x-$ пока положительное число. Здесь e -то трансцендентное число, о котором мы говорили выше и, к которому мы ещё много раз будем возвращаться. Такие логарифмы называют натуральными или просто логарифмами. Некоторые математики вместо символа $\ln$ пишут символ $\log.$, молчаливо предполагая, что никаких логарифмов, кроме как натуральных быть и не может.

Следует признать, что так оно и есть и никакие другие логарифмы в математике не прижились. Мне могут возразить некоторые читатели, что в своё время были очень популярны так называемые десятичные логарифмы, которые обозначались так $\lg$. На первый взгляд всё очень удобно: $\lg 1 = 0; \lg 10 = 1; \lg 100 = 2$ и. т. д.

Логарифм в данном случае равен количеству нулей после единицы. Но это только на первый взгляд и только потому, что мы пользуемся десятичной системой исчисления. Я уже упоминал, что если что-то больше чего-то в 10, 100, 1000, то это не имеет никакого физического смысла и значит только то, что люди на Земле используют десятичную систему исчисления. Мы обязательно в дальнейшем ответим на вопрос, почему именно математики и не только они используют именно натуральные логарифмы, а пока покажем, каким правилам они подчиняются. Пусть $\ln x = x_1$ и $\ln y = y_1$. Тогда по определению $x = e^{x_1}$ и $y = e^{y_1}$.Мы хотим узнать, чему в этом случае равно $z = \ln(xy)$. Согласно определению $x \cdot y = e^z$ или $e^{x_1} \cdot e^{y_1} = e^z$ и так как при перемножении степеней их показатели складываются, что легко проверить непосредственно (умножьте, например, 100 на 1000 или 10^2 на 10^3 и Вы получите 100000 или 10^5). И тогда $e^{x_1} \cdot e^{y_1} = e^{x_1 + y_1} = e^z$ откуда следует, что $z = x_1 + y_1$ или $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. То есть логарифм произведения равен сумме логарифмов. Сохраним прежние обозначения и ответим на вопрос чему равно $z = \ln(x/y)$?Согласно определению $x/y = e^z$ или $e^{x_1}/e^{y_1} = e^z$ и так как при делении степеней их показатели вычитаются, что легко проверить непосредственно (разделите, например, 100000 на 1000 или 10^5 на 10^3 и Вы получите 100 или 10^2). И тогда $e^{x_1}/e^{y_1} = e^{x_1 - y_1} = e^z$ откуда следует, что $z = x_1 - y_1$ или $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$. То есть логарифм частного равен разности логарифмов. Сохраним прежние обозначения и ответим на вопрос чему равно $z = \ln(x^y)$?Согласно определению $x^y = e^z$ или $(e^{x_1})^y = e^z$ и так как при возведении в степень их показатели перемножаются, что легко проверить непосредственно (возведите, например, $(10^2)^3$ или $100 \times 100 \times 100$ и Вы получите 1000000 или 10^6. И тогда $(e^{x_1})^y = e^{yx_1} = e^z$ откуда следует, что $z = yx_1$ или $\ln(x^y) = y \ln x$. То есть логарифм степени равен показателю степени умноженному на логарифм основания. Вот и все основные правила логарифмов и теперь мы сможем ответить на вопрос чему равно $z = \sqrt{2}^{\sqrt{3}}$. Согласно основным правилам пишем $\ln z = \sqrt{3}\ln(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$. А дальше по таблице натуральных логарифмов найдём, что $\ln 2 = 0.6931$ с точностью до четвертого знака после запятой и с помощью обычного калькулятора вычислим, что $\ln z = 0.6002$ с той же точностью и тогда $z = e^{0.6002} = 1.8221$. Здесь мы использовали в качестве выражения экспоненциальную функцию $y = e^x$. Вначале поясним что такое функция. Функция – это некое правило, которое каждому числу x ставит в соответствие другое число y. Пока будем считать, что эти числа вещественны. Экспонента – это e^x. Иногда вместо такого выражения пишут $\exp(x)$, что удобно когда показатель экспоненты более сложное выражение. Например, вместо e^{x^2+ax+b} проще писать $\exp(x^2 + ax + b)$. Функцию часто изображают в виде графика. Для этого используют Декартову систему координат. Такое название она получила в честь великого Французского математика и философа Рене Декарта, жившего в 17 веке. Но вначале ещё раз вернёмся к числовой оси. Мы уже говорили, что целые, рациональные, иррациональные и трансцендентные числа или все вещественные числа можно изобразить точками на этой оси. Верно и обратное утверждение: каждой точке на этой оси соответствует вещественное число. Сколько же этих чисел? Дети иногда обсуждают вопрос: какое число больше? Называют при этом 100, 1000 или миллион, что в переводе с итальянского означает тысяча тысяч. Утверждают, что это число впервые использовал ещё в 13 веке великий путешественник Марко Поло, который пешком и на корабле добрался из Италии в Китай и вернулся оттуда. Даже и сейчас это сделать не просто, а тогда без карт и дорог это был настоящий подвиг. Миллион – это очень большое число, в чём нетрудно убедиться на следующем простом примере: миллион суток тому назад на Земле не было ни Иусуса Христа, ни Юлия Цезаря, ни Спартака и примерно тогда был основан Рим. Так наглядно видно, что миллион - это очень много не говоря уже о миллиарде. В качестве курьёза заметим, что одна американка решила выписать все числа от единицы до миллиона. На это у неё ушло несколько лет жизни и несколько десятков толстых тетрадей. Так вот, если бы она вознамерилась проделать то же самое для миллиарда, то это уже в принципе не возможно, так как миллиард секунд – это примерно 31 с половиной лет. При этом надо ни есть, ни спать и, для того чтобы написать число более тысячи уйдёт время больше чем одна секунда. И вообще редко кто на Земле доживает до трёх миллиардов секунд, что соответствует примерно 95 годам. Математики обычно такие большие числа обозначают как степень десяти миллион=10^6, миллиард=10^9, триллион=10^{12}, квадриллион = 10^{15} и т. д. Кто пользуется Интернетом, а это порядка миллиарда человек, знают, что есть такая поисковая система Гугл, что означает число 10^{100}. Физически нельзя представить такое число, потому что нет такого количества атомов в видимой части Вселенной. И, тем не менее, математики используют ещё большие числа, так как к любому наперёд заданному числу, даже к такому как Гугл можно прибавить единицу и оно будет больше, чем Гугл. В математике символом ∞ обозначают так называемую бесконечность, что представляет собой большее чем любое наперед заданное конечное число, например, Гугл. К ∞ можно непрерывно приближаться следующим образом. Рассмотрим предел отношения $\frac{1}{x}$ при x стремящемся к нулю. В математике это явление можно записать так $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$, что означает, что существует некий процесс постепенного, некоторые говорят монотонного, уменьшения числа x от некоего конкретного значения до нуля, имея при этом ввиду, что на ноль делить нельзя. В результате этого процесса мы будем получать всё большие и большие числа и в принципе можем превысить любое конечное число в том числе и Гугл. Заметим, что символ $\lim$ по-русски лимит или предел. В частности, число e это предел следующего выражения $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Если формально положить $n=\infty$, то мы получим, что этот предел равен 1^∞. Казалось бы единица в любой степени – это единица, но здесь дело в том, что здесь рассматривается процесс и это принципиально меняет дело. Заметим, что $(1+\frac{1}{1})^1 = 2$; $(1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$; $(1+\frac{1}{3})^3 = 2.3704$; $(1+\frac{1}{4})^4 = 2.4414$; $(1+\frac{1}{5})^5 = 2.4883$. Это может проверить любой желающий, если возьмёт в руки калькулятор и в вычислениях ограничится четырьмя знаками после запятой. Из этого простого эксперимента следует, что с увеличением n искомое число монотонно возрастает. Оно никогда не будет меньше двух. Можно доказать, что оно никогда не будет больше или даже равно 3. В математике доказана следующая теорема, принадлежащая известному немецкому математику 19 –го века Вейерштрассе, о том, что монотонно убывающая или возрастающая функция, ограниченная снизу или сверху имеет конечный предел. Здесь именно тот случай, если мы будем уменьшать n от некого конкретного значения, ну, например от 5 или от 10, рассматриваемая нами функция будет уменьшаться и никогда не будет меньше 2 или мы будем увеличивать n, то никогда не достигнем 3. В первом случае предел очевиден. Он равен 2. А с возрастанием n он будет равен тому самому числу e, о котором мы уже много говорили, и ещё неоднократно будем к нему возвращаться. Между прочим, из упомянутой выше теоремы Вейерштрассе следует, что мировые рекорды в спорте и не только в спорте имеют предел. Действительно мировой рекорд на 100 метровой дистанции в спринте монотонно убывающая функция времени. В 1936 на Олимпийских играх в Берлине выдающийся американский спортсмен Джесси Оуэнс пробежал 100 метров за 10. 2 секунды. Этот рекорд был побит только в 50-х годах 20 века и далее его многократно улучшали и в настоящее время в 2009 -м году он равен 9. 58 секунды. Мы убедились, что мировой рекорд на 100-метровке монотонно убывающая функция времени, ограниченная снизу, так как за 0 секунд не пробежит указанную дистанцию никто и даже не проедет ни одна машина, не пролетят ни один самолёт и ни одна ракета. Таким образом, согласно теореме Вейерштрассе, этот мировой рекорд имеет предел. Чему он равен для спринтеров сказать в настоящий момент, пожалуй, невозможно. Мы скоро вернёмся к пределам, а пока ответим на детский вопрос, а сколько же чисел всего? Математики отвечают на этот вопрос так. Целых чисел - счётное множество. То есть их в принципе можно просчитать. Конечно, никто и никогда этим заниматься не будет, но что все целые числа можно просчитать, это можно доказать. Оказывается, что можно просчитать все рациональные числа. А вот все действительные числа и, тем более, комплексные числа просчитать невозможно, то есть, и те и другие образуют несчётное множество чисел. Действительные числа образуют несчётное множество чисел на числовой оси, т. е. любая точка на числовой оси- это действительное число и обратно каждому действительному числу соответствует точка на числовой оси. Комплексные числа образуют несчётное множество чисел на плоскости, если по оси x отложить вещественные числа, по оси y – к мнимые. Могут задать, вопрос: есть счётное множество чисел, есть несчётное множество чисел, а есть ли между ними какие-либо ещё числа? Американскому математику Коэну в 70-е годы 20 века удалось доказать теорему, о том что на этот вопрос, как это ни парадоксально звучит, справедливы два совершенно противоположных ответа: можно считать, что таких чисел нет, что и все и делают в настоящий момент, или можно считать, что такие числа есть. Как быть во втором случае пока неизвестно. Мы уже с Вами говорили о степенных функциях о логарифмических функциях, о экспоненциальных функциях. Теперь рассмотрим тригонометрические функции. Предварительно вспомним, что такое угол. Эту фигуру образуют два луча, исходящие из одной точки. Эта точка называется вершиной угла. Угол измеряют в градусах или радианах. Развёрнутый угол, т. е. такой угол, который получится в том случае, когда наклонный луч мы станем вращать вокруг вершины против часовой стрелки до тех пор пока угол не превратится в прямую линию равен в градусах 180, в радианах π. То самое число π, которое представляет отношение длины окружности к диаметру. Напомним, что окружность – это кривая, все расстояния которой от некоторой точки, называемой центром –есть величина постоянная. Эта величина называтся радиусом окружности. Таким образом длина окружности это $L = \pi D$ или $L = 2\pi R$. Здесь L – длина окружности, D - диаметр окружности, R - радиус окружности. Мы ещё вернёмся к этим величинам. А пока заметим, что прямой угол, т. е. половина развёрнутого угла равен $\frac{\pi}{2}$. И всюду ниже мы будем измерять углы только в радианах. Треугольник представляет собой геометрическую фигуру, которую можно изобразить следующим образом. Берём три любые точки на плоскости и соединяем их прямыми линиями. См.Рис.1. А между двумя точками можно провести прямую и притом только одну. Каждый из нас интуитивно знает, что представляет из себя прямая линия-это идеально натянутый шнур или тетива лука. О более точном определении прямой мы поговорим ниже, а пока нам хватит этого определения. Эти три точки называются вершинами треугольника. Одну из сторон АС выберем в качестве основания треугольника. Тогда две другие АВ и ВС будем называть боковыми сторонами. Продолжим основание прямой СЕ и проведём ещё одну прямую СК, параллельную АВ. Параллельными называются такие прямые, которые никогда между собой не пересекаются. Пока нам будет достаточно такого определения, а в качестве наглядного примера приведём пару рельс, которые на перегонах (между разъездами и станциями) никогда не пересекаются. И тогда угол КСЕ будет равен углу ВАС. Вначале договоримся называть углы именно так. Средняя буква – это вершина угла, две другие буквы расположены на двух лучах, образующих угол. Два угла равны между собой, если вершину одного угла мы совместим с вершиной другого и при этом окажется что лучи, исходящие из вершины одного угла сольются с лучами, исходяшими из другого угла. Здесь так и поизойдёт, потому что луч СЕ является продолжением основания АС, а луч СК сольётся со стороной АВ, так как СК параллельно АВ, а согласно постулату сформулированному ещё Эвклидом, жившем в 3-ем веке до нашей эры, через любую точку на плоскости можно провести, прямую параллельную данной и притом только одну. Каждый легко может проверить, что это так. Однако существуют несколько вариантов другой геометрии, для которых этот постулат не соблюдается. К этим геометриям относятся геометрии Лобачевского, Гаусса, Римана, Больяи и др. Мы не будем касаться этих вопросов. Заметим только одно: на плоскости и в пространтве кратчайшее расстояние между двумя точками – это прямая линия, а вот на Земном шаре, на котором мы все живём, это не так. Человек, летящий из Москвы в Нью-Йорк заметит, что самолёт идёт по маршруту Москва - С-Петебург – Хельсинки - Ботнический залив – Швеция - Тронхейм (Норвегия) – Исландия – Гренландия - Лабрадор(Канада) - Нью-Йорк. Дело в том, что кратчайшим расстоянием на шаре будет линия, которую начертит воображаемая плоскость, проходящая через три точки (в данном примере это Москва, Нью –Йорк и центр Земного шара). Так вот такая линия называется геодезической и она является кратчайшей на Земле. Нам пока, вполне будет достаточно Эвклидовой геометрии, из которой следует, что углы KCE и BAC равны между собой. Точно также равны между собой углы ABC и BCK. И тогда очевидно, что сумма всех 3-х углов любого треугольника равна развёрнутому углу и составляет π. На рис.1. представлен прямоугольный треугольник ABC. Он называется так, потому что угол ABC прямой и равен $\frac{\pi}{2}$, а значит и сумма двух оставшихся углов равна $\frac{\pi}{2}$. Стороны AB и BC, пересекающиеся друг с другом под прямым углом называются катетами, а сторона AC-гипотенузой. Рассмотрим прямоуглььник. Прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы прямые. Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Теперь начертим квадрат, сторона которого равна сумме двух катетов рассматриваемоо нами прямоугольного треугольника и далее проведём прямые линии, так как это указано на Рис.1. В результате получим ещё один квадрат, сторона которого равна гипотенузе. Из рисунка видно, что площадь большого квадрата равна площади малого квадрата плюс четыре плошади исследуемого нами прямоугольного треугольника. Конечно каждый, кто читает этот текст знает, что такое площадь, но тем не менее здесь требуются некоторые пояснения. Так вот площадь плоской фигуры это часть плоскости, ограниченная плоской фигурой, измеряемая в квадратных единицах. В быту почти все знают как измерить площадь комнаты или площадь квартиры или площадь футбольного поля. Для этого надо умножить длину на ширину. Так мы получим численное значение этих площадей. Это верно, конечно, но верно потому, что и комната и квартира и футбольное поле – это прямоугольник, у которого более длинная сторона называется длиной, а более короткая шириной, а как быть с другими плоскими фигурами, которые не имеют ни длины ни ширины. Предварительно вспомним, как мы измеряем длину какой-либо палки. Мы делаем это следующим образом. Берём рулетку, на которой имеются единицы длины. В метрической системе это милиметры, сантиметры или метры и прикладываем начало рулетки к одному концу палки и на другом конце палки обнаружим, что данная палка имеет определённую длину, выраженную в линейных единицах, т. е. в метрической системе и милиметры и сантиметры будут в первой степени. Для измерения площадей в качестве единицы площади рассматривается единичный квадрат со стороной равной единице длины. Площадь такого квадрата равна в квадратных милиметрах $1mm^2$, в квадратных сантиметрах $1sm^2$, в квадратных метрах $1m^2$. И таким образом площадь любой плоской фигуры будет равна количеству таких квадратиков, которые можно разместить внутри этой плоской фигуры. В таком определении площади нет ни длины ни ширины и каждый желающий может вычислить площадь любой плоской фигуры, подсчитав, количество квадратиков в ней размещённых. Это можно легко проделать с помощью милиметровки, которую все прекрасно знают. Вначале на этой милиметровке начертите прямогольник и подсчитайте количество милиметровых квадратиков, размещённых внутри этого прямоугольника. И вы обнаружите, что действително площадь прямоугольника равна произведению его длины на его ширину и выражается она в квадратных милиметрах. Итак можно поступать для любой плоской фигуры, ограниченной любой замкнутой кривой или любой также замкнутой ломанной линией. Замкнутая линия- это линия, у которой начало совпадает с её концом. Рассмотрим два прямоугольных треугольника с катетами a и b и гипотенузой c. Очевидно они равны между собой. Сложим эти два прямоугольных треугольника так что гипотенуза одного совпадёт с гипотенузой другого. В результате получим прямоугольник со сторонами a и b. Площадь этого прямогольника нам уже известна – это ab квадратных единиц. Таким образом, площадь одного прямоугольного треугольника $\frac{ab}{2}$ квадратных единиц. И теперь вернёмся к нашему последнему рисунку. Площадь большого квадрата равна $(a+b)^2$, площадь малого квадрата, образованного гипотенузами четырёх прямоугольных треугольников равна c^2 и наконец площадь этих прямоугольных треугольников равна $2ab$. В результате имеем $(a+b)^2 = c^2 + 2ab.$ Или $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ откуда следует, что $a^2 + b^2 = c^2$. То есть для любого прямоугольного треугольника **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов**. Это и есть знаменитая теорема Пифагора, доказанная им в III веке до нашей эры. И тогда это было величайшее достижение. Кроме того, сам Пифагор был чемпионом Олимпийских игр или Олимпиоником, как тогда называли, по кулачному бою и, согласно преданиям, ударом кулака убивал быка. Следует заметить, что частный случай прямоуголного треугольника с малым катетом 3, большим катетом 4 и гипотенузой 5 был известен египтянам за 1000 лет до Пифагора и получил название египетского треугольника. Легко убедиться, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Пифагор же проделал это в общем виде, в его теореме a, b и c - любые действительные числа, хотя их Пифагор и не знал. Вернёмся снова к прямоугольному треугольнику АВС, где угол АВС-прямой, а два оставшихся – острые и сумма этих острых углов равна $\frac{\pi}{2}$. Напомним, что длина катета

АВ равна a, катета ВС равна b и гипотенузы АС равна c. Далее, обозначим острый угол АСВ, расположенный напротив катета a греческой буквой α -альфа, угол ВАС, расположенный против катета b греческой буквой β-бета. И по определению $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. И теперь обозначим $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, то есть отношение противолежащего катета к гипотенузе. $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ – отношение прилежащего катета к гипотенузе. $tg\alpha=\frac{a}{b}$ – отношение противолежащего катета к прилежащему катету. $ctg\alpha=\frac{b}{a}$ – отношение прилежащего катета к противолежащему. $\sec\alpha=\frac{c}{b}$ – отношение гипотенузы к прилежащему катету и $\cos ec\alpha=\frac{c}{a}$ – отношение гипотенузы к противолежащему катету. Очевидно, что $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ и $\cos ec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$. С помощью несложных преобразований найдём, $tg\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. И точно также $ctg\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. И по определению $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$. Из теоремы Пифагора мы знаем, что $a^2+b^2=c^2$ и если обе части этого равенства разделим на c^2, то получим $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$ или $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$. То есть $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Если последнее равенство разделить на $\cos^2\alpha$, то получим $tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$. Если это же равенство разделить на $\sin^2\alpha$, то получим $ctg^2\alpha+1=\cos ec^2\alpha$. Приведённые здесь формулы позволяют вычислить любую из приведённых здесь тригонометрических, а все упомянутые здесь функции так и называются, через одну из них. Мы здесь покажем как их выразить через $\sin\alpha$ и через $tg\alpha$ и предоставим читателям возможность выразить их через $\cos\alpha$, через $ctg\alpha$, через $\sec\alpha$ и через $\cos ec\alpha$. Итак $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ и тогда $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ или $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$ или $ctg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ или $\sec\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 a}}$ и, наконец, $\cos ec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$. Тем самым мы все рассматриваемые здесь тригонометрические функции выразили через $\sin\alpha$. Теперь выразим все эти функции через $tg\alpha$

$\sin\alpha=tg\alpha\cos\alpha=\frac{tg\alpha}{\sec\alpha}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$; $\sec\alpha=\pm\sqrt{tg^2\alpha+1}$;

$\cos ec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{tg^2\alpha+1}}{tg\alpha}$. Мы выполнили своё обещание, а теперь слово или точнее действие за читателем. По определению $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, откуда ясно, что если $\alpha = 0$, то и $a = 0$ и прямоугольный треугольник превратится в отрезок горизонтальной прямой и тогда $\sin 0 = 0$. В этом случае $b = c$ и $\cos 0 = 1$. И далее $tg0 = 0$, $ctg0 = \infty$, $\sec 0 = 1, \cos ec0 = \infty$. Если же $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то и $b = 0$ и прямоугольный треугольник превратиться в отрезок вертикальной прямой. В этом случае $a = c$ и $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. И далее $\cos\frac{\pi}{2} = 0, tg\frac{\pi}{2} = \infty$, $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, $\sec\frac{\pi}{2} = \infty$, $\cos ec\frac{\pi}{2} = 0$. Всё это справедливо, если мы ограничиваемся первой четвертью круга. Последняя фраза нуждается в пояснении. Дело в том, что мы до сих пор рассматривали такой прямоугольный треугольник, у которого угол α -острый (в частности это 0 и $\frac{\pi}{2}$). А как быть, если требуется вычислить тригонометрические функции угла α, который больше, чем $\frac{\pi}{2}$. Вначале вернёмся снова к нашему прямоугольному треугольнику и заметим, что по определению $\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$, но $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos\alpha$. Точно также можно показать, что $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$, $tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = ctg\alpha$, $ctg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = tg\alpha$, $\sec(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos ec\alpha$, $\cos ec(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sec\alpha$. И далее, забегая вперёд, выпишем следующую замечательную формулу, связывающую тригонометрическую функцию с показательной $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. и $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.(10) Мы ниже обязательно покажем как она была получена, а пока посмотрим как она работает. Рассмотрим выражение

$$\exp(i(\frac{\pi}{2} - a)) = \exp(i\frac{\pi}{2})\exp(-i\alpha) = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) =$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\alpha) + i(\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\alpha)).$$

Но $\exp(i(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. И $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. В результате имеем $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) + i\cos(\alpha)$. И так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, то $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ и $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos\alpha$., что подтверждает справедливость формулы (10). Согласно этой формуле $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$, но $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$ $= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$. А из равенства двух комплексных чисел между собой следует $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Так выражаются косинусы и синусы суммы двух углов. Косинусы и синусы разности двух углов получаются аналогично.

Согласно формуле (10) $e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$, но $e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{-i\beta} =$
$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$. А из равенства двух комплексных чисел между собой следует
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Теперь найдём тангенсы суммы и разности двух углов
$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ и далее, числитель и знаменатель этого выражения разделим на $\cos\alpha\cos\beta$. В результате получим
$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$. И, действуя по аналогии, получим $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$

Подобным же образом найдём котангенсы суммы и разности двух углов
$ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ и далее, числитель и знаменатель этого выражения разделим на $\sin\alpha\sin\beta$. В результате получим
$ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{ctg\alpha\, ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$. , Далее по аналогии, имеем $ctg(\alpha-\beta) = \dfrac{ctg\alpha\; ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$.

Осталось выписать секансы и косекансы суммы и разности двух углов
$\sec(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ и далее, числитель и знаменатель этого выражения разделим на $\cos\alpha\cos\beta$. В результате получим

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{\sec\alpha\sec\beta}{1 - \sqrt{tg^2\alpha}\sqrt{tg^2\beta}} = \frac{\sec\alpha\ \sec\beta}{1 - \sqrt{\sec^2\alpha - 1}\sqrt{\sec^2\beta - 1}}.$$

И $\sec(\alpha-\beta) = \dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = \dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1 + \sqrt{tg^2\alpha}\sqrt{tg^2\beta}} = \dfrac{\sec\alpha\ \sec\beta}{1 + \sqrt{\sec^2\alpha - 1}\sqrt{\sec^2\beta - 1}}$.

$\cos ec(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ и далее числитель и знаменатель этого выражения разделим на $\sin\alpha\sin\beta$.

$$\cos ec(\alpha+\beta) = \frac{\cos ec\alpha\, co\sec\beta}{ctg\alpha + ctg\beta} = \frac{\cos ec\alpha\cos ec\beta}{\sqrt{ctg^2\alpha} + \sqrt{ctg^2\beta}} = \frac{\cos ec\alpha\, co\sec\beta}{\sqrt{\cos ec^2\alpha - 1} + \sqrt{\cos ec^2\beta - 1}}.$$

$$\cos ec(\alpha-\beta) = \frac{\cos ec\alpha\cos ec\beta}{ctg\beta - ctg\alpha} = \frac{\cos ec\alpha\, co\sec\beta}{\sqrt{ctg^2\beta} - \sqrt{ctg^2\alpha}} = \frac{\cos ec\alpha\ co\sec\beta}{\sqrt{\cos ec^2\beta - 1} - \sqrt{\cos ec^2\alpha - 1}}.$$

Теперь рассмотрим тригонометрические функции кратных углов, из которых наиболее часто встречаются двойные углы. Из полученных нами формул при $\beta = \alpha$ следует

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2 a}$;

$ctg2\alpha = \dfrac{1 - ctg^2\alpha}{2ctg\alpha}$; $\sec 2\alpha = \dfrac{\sec^2\alpha}{2 - \sec^2\alpha}$; $\cos ec2\alpha = \dfrac{\cos ec^2\alpha}{\cos ec^2\alpha - 2}$. В частности, если $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, то $\sin\alpha = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; $\cos\alpha = \cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}$; $tg\alpha = \frac{2\,tg\frac{\gamma}{2}}{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}$;

$ctg\alpha = \frac{1 - ctg^2\frac{\gamma}{2}}{2ctg\frac{\gamma}{2}}$; $\sec\alpha = \frac{\sec^2\frac{\gamma}{2}}{2 - \sec^2\frac{\gamma}{2}}$; $\cos ec\alpha = \frac{\cos ec^2\frac{\gamma}{2}}{\cos ec^2\frac{\gamma}{2} - 2}$. Мы получили выражение тригонометрических функций через так называемые половинные углы. Здесь вот что интересно. Оказывается все тригонометрические функции можно выразить через тангенс и котангенс половинного угла и при этом полученные выражения будут рациональными, то есть не будут содержать никаких корней.

Действительно $\sin\alpha = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}tg\frac{\gamma}{2} = 2\frac{tg\frac{\gamma}{2}}{\sec^2\frac{y}{2}} = \frac{2\,tg\frac{\gamma}{2}}{tg^2\frac{\gamma}{2} + 1}$.

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = \cos^2\frac{\gamma}{2}\,(1 - tg^2\frac{\gamma}{2}) = \frac{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}{\sec^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}{1 + tg^2\frac{\gamma}{2}};$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\gamma}{2}}{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}};\quad ctg\alpha = \frac{1 - ctg^2\frac{\gamma}{2}}{2\,ctg\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{tg^2\frac{\gamma}{2}}}{\frac{2}{tg\frac{\gamma}{2}}} = \frac{tg^2\frac{\gamma}{2} - 1}{2\,tg\frac{\gamma}{2}};\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} =$$

$= \frac{1 + tg^2\frac{\gamma}{2}}{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}$; $\cos ec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{tg^2\frac{\gamma}{2} + 1}{2tg\frac{\gamma}{2}}$. Мы показали, что все тригонометрические функции могут быть рационально (то есть без корней) представлены через тангенс половинного угла. Далее предоставим читателю возможность самостоятельно выразить эти же функции через котангенс половинного угла и убедиться в том, что они тоже могут быть представлены рациональным способом. Эти обстоятельства нам пригодятся при вычислении интегралов от рациональных комбинаций тригонометрических функций.

Теперь у нас есть все возможности для того, чтобы вычислить тригонометрические функции от углов расположенных не только в первой четверти, но вначале заметим, что четверть-это четвёртая часть круга. Возьмите круг и через его центр проведите две взаимоперпендикулярные прямые. В результате круг разделиться на четыре равные четверти. В первой из них углы меняются от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Во второй угол α больше или равно $\frac{\pi}{2}$ и меньше или равно π. В третьей $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$. И наконец в четвёртой $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$. Мы знаем, что $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, а $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Тогда из формулы для синуса двойного угла найдём $\sin\pi =$ $= 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Затем $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$. И $tg\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$. С этой функцией происходит вот что, при $\alpha = \frac{\pi}{2} - 0$ $tg(\frac{\pi}{2} - 0) = +\infty$. Мы знаем, что если к любому числу прибавить или отнять ноль оно не меняется. Здесь выражение $(\frac{\pi}{2} - 0)$ означает чуть меньше или геометрически слева от $\frac{\pi}{2}$, а выражение $(\frac{\pi}{2} + 0)$ означает чуть больше или геометрически справа от $\frac{\pi}{2}$, то есть в самом начале второй четверти. И $tg(\frac{\pi}{2} + 0) = -\infty$. В этом вы можете убедиться непосредственно, если возьмёте таблицы тангенсов. Там найдёте, что $tg1.57 = 1255.8$, а $tg1.58 = -108.65$. А $\frac{\pi}{2}$ с точностью до четырёх знаков после запятой равно 1.5708. Из сказанного следует, что при $\frac{\pi}{2}$ тангенсоида (так называют функцию от тангенса, аналогично синусоида, косинусоида и. т. д) терпит разрыв, при стремлении к $\frac{\pi}{2}$ слева она уходит резко вверх, а при стремлении к $\frac{\pi}{2}$ справа резко вниз. До сих пор мы не встречались с функциями, которые терпят разрывы. В процессе дальнейшего изложения мы увидим, что таких функций множество. А пока найдём, что

$$\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\pi) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\pi) = -1$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\pi) = 0.$$

Здесь мы впервые написали $\sin(x)$ вместо $\sin x$. Можно писать и так и так, ни то ни другое не является ошибкой, но мы в дальнейшем будем писать $\sin(x)$, так как именно так функции записываются на компьютере. Заметим ещё, что в первой четверти все тригонометрические функции – положительны. В этом можно убедиться непосредственно из таблиц этих функций. Конечно, все имеющиеся в таблице функции запоминать не имеет никакого смысла, но некоторые из них желательно запомнить.

$\sin(0)=0;\ \cos(0)=1;\ tg(0)=0;\ ctg(0+0)=+\infty;\ \sec(0)=1;\ \cos ec(0+0)=+\infty;$

$\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2};\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$. Далее найдём, что $tg(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}};\ ctg(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3};\ \sec(\frac{\pi}{6})=\frac{2}{\sqrt{3}};$

$\cos ec(\frac{\pi}{6})=2.\quad tg(\frac{\pi}{4})=1;\ ctg(\frac{\pi}{4})=1;\sec(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2};\cos ec(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}.$

$tg(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3};\ ctg(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \sec(\frac{\pi}{3})=2;\ \cos ec(\frac{\pi}{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}.$

$\sin(\frac{\pi}{2})=1;\cos(\frac{\pi}{2})=0;tg(\frac{\pi}{2}-0)=+\infty;ctg(\frac{\pi}{2})=0;\sec(\frac{\pi}{2}-0)=+\infty;\cos ec(\frac{\pi}{2})=1.$

Откуда следует, что в первой четверти, когда $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ все они действительно положительны. Теперь рассмотрим тригонометрические функции от аналогичных углов во 2-ой 3-ей и 4-ой четвертях. Итак во второй четверти когда $\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$

$tg(\frac{\pi}{2}+0)=-\infty;\ \sec(\frac{\pi}{2}+0)=-\infty;$

$\sin(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \cos(\frac{2\pi}{3})=$

$=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$. Тогда $tg(\frac{2\pi}{3})=-\sqrt{3};$

$ctg(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \sec(\frac{2\pi}{3})=-2;\ \cos ec(\frac{2\pi}{3})=\frac{2}{\sqrt{3}};$

$\sin(\frac{3\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad \cos(\frac{3\pi}{4})=$

$=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{4})-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $tg(\frac{3\pi}{4})=-1;$

$ctg(\frac{3\pi}{4})=-1;\ \sec(\frac{3\pi}{4})=-\sqrt{2};\ \cos ec(\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2};$

$\sin(\frac{5\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}.\quad \cos(\frac{5\pi}{6})=$

$=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3})-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $tg(\frac{5\pi}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}};$

$ctg(\frac{5\pi}{6})=-\sqrt{3};\ \sec(\frac{5\pi}{6})=-\frac{2}{\sqrt{3}};\ \cos ec(\frac{5\pi}{6})=2;$

$\sin(\pi)=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})=0;\ \cos(\pi)=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=$

$=\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})=-1;\ tg(\pi)=0;\ ctg(\pi-0)=-\infty;\ \sec(\pi)=-1;\quad \cos ec(\pi-0)=+\infty.$

В третьей четверти когда $\pi < \alpha \le \frac{3\pi}{2}$

$ctg(\pi + 0) = +\infty; \cos ec(\pi - 0) = -\infty.$

$\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \cos(\pi)\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}.\quad \cos(\frac{7\pi}{6}) =$

$= \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Тогда $tg(\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}};$

$ctg(\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{3}; \sec(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}; \cos ec(\frac{7\pi}{6}) = -2;$

$\sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\pi)\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad \cos(\frac{5\pi}{4}) =$

$= \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$ Тогда $tg(\frac{5\pi}{4}) = 1;$

$ctg(\frac{5\pi}{4}) = 1; \sec(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}; \cos ec(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2};$

$\sin(\frac{4\pi}{3}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(\pi)\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \cos(\frac{4\pi}{3}) =$

$= \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$ Тогда $tg(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{3};$

$ctg(\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \sec(\frac{4\pi}{3}) = -2; \cos ec(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}};$

$\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\pi)\sin(\frac{\pi}{2}) = -1.\quad \cos(\frac{3\pi}{2}) =$

$= \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{2}) = 0.$ Тогда $tg(\frac{3\pi}{2} - 0) = +\infty;$

$ctg(\frac{3\pi}{2}) = 0; \sec(\frac{3\pi}{2} - 0) = -\infty; \cos ec(\frac{3\pi}{2}) = -1;$

В четвёртой четверти когда $\frac{3\pi}{2} < \alpha \le 2\pi$

$tg(\frac{3\pi}{2} + 0) = -\infty; \sec(\frac{3\pi}{2} + 0) = +\infty.$

$\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \cos(\frac{5\pi}{3}) =$

$= \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$ Тогда $tg(\frac{5\pi}{3}) = -\sqrt{3};$

$ctg(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \sec(\frac{5\pi}{3}) = 2; \cos ec(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}};$

$\sin(\frac{7\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad \cos(\frac{7\pi}{4}) =$

$= \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Тогда $tg(\frac{7\pi}{4}) = -1;$

$ctg(\frac{7\pi}{4}) = -1;\ \sec(\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2};\ \cos ec(\frac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2};$

$\sin(\frac{11\pi}{6}) = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$

$\cos(\frac{11\pi}{6}) = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$tg(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}};ctg(\frac{11\pi}{6}) = -\sqrt{3};\ \sec(\frac{11\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}};\ \cos ec(\frac{11\pi}{6}) = -2;$

$\sin(2\pi) = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$\cos(2\pi) = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$

$tg(2\pi) = 0;\ ctg(2\pi - 0) = -\infty;\ \sec(2\pi) = 1;\ \cos ec(2\pi - 0) = -\infty;$ И мы снова вернулись в первую четверть, когда $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Можно непосредственно убедиться в том, что все тригонометрические функции будут точно такими же как и в первой четверти. Действительно:
$\sin(2\pi + 0) = \sin(2\pi)\cos(0) + \cos(2\pi)\sin(0) = \sin(0) = 0;\ \cos(2\pi + 0) = \cos(2\pi)\times$
$\times\cos(0) - \sin(2\pi)\sin(0) = \cos(0) = 1;$
$tg(2\pi + 0) = tg(0) = 0;\ ctg(2\pi + 0) = ctg(0 + 0) = +\infty;\ \sec(2\pi + 0) = \sec(0) = 1;$
$\cos ec(2\pi + 0) = \cos ec(0 + 0) = \infty.$ И так далее для всех углов первой четверти. Функции, которые через некоторый интервал повторяют свои значения называются периодическими функциями а этот интервал периодом этой функции. Этот факт можно записать так. Периодической функцией $f(x)$ называется такая функция, которая обладает следующим свойством $f(x+T) = f(x)$, где T-период этой функции. В нашем случае все тригонометрические функции периодические и их период равен 2π. При этом заметим следующее, что kT, где k любое целое число также будет периодом такой функции. Действительно $f(x + kT) = f(x + (k-1)T + T) = f(x + (k-1)T) = f(x + (k-2)T) = ... = f(x).$ Отсюда следует, что в нашем случае периодом любой тригонометрической функции будет $2\pi k$, где k-любое целое число. В математике вместо выражения любое целое число пишут $k = 1,2,3,...$. Заметим ещё, что $tg(x)$ и $ctg(x)$ имеют период π, а значит и $k\pi$, где $k = 1,2,..$ Действительно $tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x).$ Читатель легко проделает то же самое для $ctg(x)$. Читатель заметит, что мы перешли незаметно от аргумента α к аргументу x. В этом нет никакой опечатки и α и x здесь произвольные вещественные числа. Итак окончательно тригонометрические функции $\sin, \cos, \sec, \cos ec$ имеют период $2\pi k$, а tg, ctg имеют период πk, где $k = 1,2,3...$ Функции $\sin, \cos$ не имеют разрывов и такие функции называются непрерывными. Более точное определение непрерывной функции звучит так: малым изменением аргумента соответствует малое изменение функции. Мы выше приводили численный пример, что для tg это не так. Функции $tg, ctg, \sec, \cos ec$ имеют разрывы и

называются разрывными, некоторые говорят частично разрывные. Мы ещё встретимся с различными видами функций, в частности и такими, которые нельзя представить графически. Между прочим графическим изображением математических объектов занимался великий художник Сальвадор Дали и в этих вопросах его консультировал широко известный в математике геометр и тополог (специальный раздел геометрии) француз А. Тома. Но даже и Сальвадор Дали не смог бы графически представить функцию Дирихле, которая равна единице для рациональных чисел и нулю для иррациональных чисел. Мы не будем рассматривать подобных экзотических функций и нам пока достаточно приведённых выше определений. Вернёмся к формуле (10), которой мы широко пользуемся и доказательство которой мы пока ещё не привели и заметим, что достаточно доказать только первую часть этой зависимости $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$. Вторая часть $e^{-ix}=\cos(x)-i\sin(x)$ следует из первой автоматически. Действительно

$$e^{-ix}=\frac{1}{e^{ix}}=\frac{1}{\cos(x)+i\sin(x)}=\frac{\cos(x)-i\sin(x)}{(\cos(x)+i\sin(x))(\cos(x)-i\sin(x))}=$$

$$=\frac{\cos(x)-i\sin(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=\frac{\cos(x)-i\sin(x)}{1}=\cos(x)-i\sin(x).$$

$$\sin(-x)=\sin(0-x)=\sin(0)\cos(x)-\cos(0)\sin(x)=-\sin(x).$$

$$\cos(-x)=\cos(0-x)=\cos(0)\cos(x)+\sin(0)\sin(x)=\cos(x).$$

$$tg(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-tg(x);\ ctg(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}=-ctg(x).$$

$\sec(-x)=\dfrac{1}{\cos(-x)}=\dfrac{1}{\cos(x)}=\sec(x);\ \cos ec(-x)=\dfrac{1}{\sin(-x)}=\dfrac{1}{-\sin(x)}=-\cos ec(x).$ Мы здесь встретились с функциями, которые обладают чётностью $f(-x)=f(x)$ или как иногда говорят симметрией относительно нуля и с нечётными функциями $f(-x)=-f(x)$ или антисимметричными функциями относительно нуля. Поэтому функции $\cos(x)$ и $\sec(x)$-функции чётные, а $\sin(x);tg(x);ctg(x);\cos ec(x)$- функции нечётные. Помимо тригонометрических функций вводятся так называемые обратные тригонометрические функции. Пусть x и y вещественные числа, тогда с учётом сказанного выше, если $\sin(x)=y$, то $x=\arcsin(y)+2\pi k$, если $\cos(x)=y$, то $x=\arccos(y)+2\pi k$, если $tg(x)=y$, то $x=arctg(y)+\pi k$ если $ctg(x)=y$, то $x=arcctg(y)+\pi k$, если $\sec(x)=y$, то $x=arc\sec(y)+2\pi k$ если $\cos ec(x)=y$, то

$x=\arccos ec(y)+2\pi k$, где $k=1,2,3....$ То есть зная y можно найти x по тем же самым таблицам тригонометрических функций. Только читать их надо справо налево и не забыть добавить $2\pi k$ или πk. По сути дела здесь приведены решения шести различных тригонометрических уравнений, где во всех шести случаях x- неизвестное, а y известное вещественное число, которое в первых двух случаях по абсолютной величине должно быть

меньше или равно единицы, в третьем и четвёртом случае любое вещественное число, а в пятом и шестом случае вещественное число больше и равной по абсолютной величине единицы. По определению $|y|$ называется абсолютной величиной вещественного числа y, если оно равно максимальному значению из двух вещественных чисел $+y$ и $-y$. Заметим, что тригонометрическое уравнение- это первое из встретившихся нам уравнений, имеющее бесчисленное множество решений. До сих пор мы имели дела с уравнениями, которые имели конечное число решений. Напомним, что это алгебраические уравнения 1-ой, 2-ой и т.д. степеней. Покажем, что в целом ряде случаев, именно к этим уравнениям сводятся с помощью формул (10) многие тригонометрические уравнения. Вначале, складывая эти формулы $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ и $e^{-ix}=\cos(x)-i\sin(x)$ и, деля полученную сумму пополам, найдём, что $\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. А, вычитая и первой формулы вторую, получим $\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Далее рассмотрим следующий пример, из которого становится понятным, как можно свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Требуется наити x, удовлетворяюший уравнению $\sin(x)+\cos(x)=1$. Далее пишем $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=1$. Приводим к общему знаменателю $e^{ix}-e^{-ix}+i\,e^{ix}+i\,e^{-ix}=2i$. Учитывая, что $e^{-ix}=\dfrac{1}{e^{ix}}$, будем иметь $e^{2ix}-1+i\,e^{2ix}+i=2i\,e^{ix}$. Обозначая $y=e^{ix}$, получим относительно y квадратное уравнение $y^2-\dfrac{2i}{i+1}y+\dfrac{i-1}{i+1}=0$, решить которое не представляет никаких трудностей. В результате $y_{1,2}=\dfrac{i}{i+1}\pm\sqrt{\left(\dfrac{i}{i+1}\right)^2-\dfrac{i-1}{i+1}}$ Откуда $y_1=1$, а $y_2=\dfrac{i-1}{i+1}$. И далее $e^{ix_1}=1$, то есть $\cos(x_1)+i\sin(x_1)=1$, и в результате $\cos(x_1)=1$ и $\sin(x_1)=0$ и поэтому $x_1=2\pi k, k=0,1,2,...$ Затем из второго корня квадратного уравнения следует $e^{ix_2}=\dfrac{i-1}{i+1}$ или $i(\cos(x_2)+\sin(x_2))+\cos(x_2)-\sin(x_2)=i-1$ и поэтому $\cos(x_2)+\sin(x_2)=1$ и $\cos(x_2)-\sin(x_2)=-1$. Складывая которые, найдём $\cos(x_2)=0,$ а вычитая $\sin(x_2)=1$, откуда $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,...$

Это и будут решения исходного тригонометрического уравнения. Мне могут возразить, что уравнение $\sin(x)+\cos(x)=1$ простое и его решение можно заранее предсказать, а как быть, например, с тем случаем когда в этом уравнении мы поменяем всего одно число и рассмотрим следующий пример $\sin(x)+\cos(x)=2$. Человек незнакомый с комплексными числами сразу скажет, что такое уравнение не имеет решения, потому что одновременно синус и косинус не могут равняться единице и мы снова в положении первокласника, у которого из 2-ух 3 не вычитается. Но теперь, зная комплексные числа мы можем действовать. Используя предыдущие соображения мы вместо квадратного уравнения $y^2-\dfrac{2i}{i+1}y+\dfrac{i-1}{i+1}=0$ будем иметь следующее квадратное уравнение $y^2-\dfrac{4i}{i+1}y+\dfrac{i-1}{i+1}=0$ и его корни будут следующие $y_1 = \dfrac{(2+\sqrt{2})i}{i+1}$; $y_2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})i}{i+1}$ и далее $e^{ix_1} = \dfrac{(2+\sqrt{2})i}{i+1}$ откуда $x_1 = -i\ln(2+\sqrt{2}) - i\ln(i) + i\ln(i+1)$. Если с $\ln(2+\sqrt{2})$ всё ясно то логарифм от отрицательного числа и тем более от комплексного для нас пока вещь непонятная. Обозначим комплексным числом $z = \ln(i)$. Тогда $e^z = i$. Снова введём обозначения $z = u + iv$, где u и v - вещественные числа. В результате имеем $e^u(\cos(v) + i\sin(v)) = i$, откуда следует $e^u\cos(v) = 0$ и $e^u\sin(v) = 1$. Деля первое на второе, найдём $ctg(v) = o$ и $v = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k = 1,2..$ а $e^u = 1$ и $u = 0$.

При k нечётных $e^u(\cos(v) + i\sin(v)) = -i$, поэтому $\ln(i) = i(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi), k = 1,2..$ При вычислении $z = \ln(i+1)$ имеем $e^z = i+1$. Снова введём обозначения $z = u + iv$, где u и v - вещественные числа. В результате имеем $e^u(\cos(v) + i\sin(v)) = i+1$, откуда следует $e^u\cos(v) = 1$ и $e^u\sin(v) = 1$. Деля первое на второе, найдём $ctg(v) = 1$ и $v = \dfrac{\pi}{4} + m\pi, m = 1,2..$ а $e^u = \sqrt{2}$ и $u = \dfrac{1}{2}\ln(2)$. Это v не подходит, так как при m нечётных $e^u(\cos(v) + i\sin(v)) = -i - 1$.

$\ln(i+1) = \dfrac{1}{2}\ln(2) + i(\dfrac{\pi}{4} + 2m\pi), m = 1,2..$ И $x_1 = i\ln(\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}) + \dfrac{\pi}{4} + 2r\pi, r = 0,1,2..$ Аналогично найдём

, что $x_2 = i\ln(\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}) + \dfrac{\pi}{4} + 2r\pi, r = 0,1,2...$ Это и будут решения тригонометрического уравнения $\sin(x) + \cos(x) = 2$. Теперь читатель сможет решать любые тригонометрические уравнения и вычислять логарифмы любых чисел безо всяких ограничений. Вот какие преимущества дают комплексные числа. Напомним, что можно эти числа складывать, вычитать, делить и возводить в степень. Осталось только извлечение корня. Для этого удобно представить комплексное число в тригонометрическом виде. Пусть комплексное число c имеет вид $c = a + b\,i$. Мы уже говорили, что это число представляет собой точку на комплексной плоскости, по оси x-ов (абсцисс) отложены вещественные значения числа, по оси y-ков (ординат) его мнимые значения. Тогда $|c|$ модуль комплексного числа будет расстояние от начала координат до этой точки и оно равно по теореме Пифагора $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Часто это выражение называют радиусом вектором комплексного числа и обозначают его буквой r. Таким образом $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол между этим радиусом вектором и осью абсцисс обозначается буквой φ и называют аргументом комплексного числа. Тогда $a = r\cos(\varphi)$ и $b = r\sin(\varphi)$ и в итоги $c = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ и мы уже знаем, что последнее выражение можно записать так $c = r\,e^{i\varphi}$. Это и есть очень удобная тригонометрическая форма комплексного числа. Отсюда видно, что любая степень комплексного числа $c^n = r^n\,e^{in\varphi}$ и корень n -

ой степени $.c^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$. Здесь правда нужно оговориться. Все тригонометрические функции имеют период, как указывалось выше период $2\pi k,\ k = 1,2,...$ и поэтому аргумент комплексного числа определён точно с такой же точностью. Например,
$1 = \cos(0) + i\sin(0) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = ... = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)$
И тогда $c^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \exp(i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})), k = 0,1,2,.$ Напомним Вам, что мы без доказательства привели Вам значения третьего и четвёртого корней из единицы. Теперь мы это уже можем обосновать. Итак $\sqrt{1} = \cos(\frac{2\pi k}{2}) + i\sin(\frac{2\pi k}{2}), k = 0,1,2,..$ При $k = 0$ мы будем иметь
$\sqrt{1} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$ При $k = 1$ мы будем иметь $\sqrt{1} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$. При $k = 2$ мы будем иметь то же самое значение, что и при $k = 0$ и поэтому число различных корней будет вычисляться по формуле $c^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \exp(i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})), k = 0,1,2,.n-1$. Это и есть окончательное выражение для вычисления корня n-ой степени для комплексного числа. Применим эту формулу для вычисления корней 3-ей степени из единицы. При $k = 0$ мы будем иметь $\sqrt[3]{1} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$ При $k = 1$ мы будем иметь $\sqrt[3]{1} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ При $k = 2$ мы будем иметь $\sqrt[3]{1} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Применим эту же формулу для вычисления корней 4-ой степени из единицы. При $k = 0$ мы будем иметь $\sqrt[4]{1} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$ При $k = 1$ мы будем иметь $\sqrt[4]{1} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$ При $k = 2$ мы будем иметь $\sqrt[4]{1} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$ При $k = 3$ мы будем иметь $\sqrt[4]{1} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$.

Все эти корни мы упоминали выше и сейчас убедились в том, что приведённая формула даёт правильный результат. А теперь в качестве последнего примера рассмотрим корень 6 –ой степени из единицы. Почему шестой, а не пятый? Дело в том, что при шестой степени получаются те значения косинусов и синусов, которые я рекомендовал запомнить. С помощью этих же значений косинусов и синусов можно вычислить корни восьмой и двенадцатой степеней из единицы. Но это я предлагаю читателям сделать самостоятельно. Рассмотрим корень 6 –ой степени из единицы При $k = 0$ мы будем иметь
$\sqrt[6]{1} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$ При $k = 1$ мы будем иметь $\sqrt[6]{1} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.При $k = 2$ мы будем иметь $\sqrt[6]{1} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.При $k = 3$ мы будем иметь
$\sqrt[6]{1} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$. При $k = 4$ мы будем иметь $\sqrt[6]{1} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.При $k = 5$ мы будем иметь $\sqrt[6]{1} = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.А теперь мы снова вернёмся к гео-

метрии, к той её части, которая называется Аналитической геометрией. В этой части геометрии мы не будем рисовать никаких фигур, а будем использовать аналитические (что означает алгебраические, тригонометрические или любые другие зависимости, которые можно выразить в виде формул). Вначале рассмотрим аналитическую геометрию на плоскости. Мы ниже дадим более точное определение плоскости, а пока нам хватит интуитивного представления, что плоскость- это лист картона или фанеры неограниченный в двух направлениях. На этой плоскости выберем любую точку и назовём её началом координат и через эту точку проведём две взаимоперпендикулярные прямые. Одну, идущую слева направо назовём ось Х-ов (или ось абсцисс), а другую, идущую снизу вверх через начало координат осью Y-ков (или осью ординат). В результате мы получим так называемую Декартову систему координат на плоскости. Мы уже упоминали эту систему координат и её автора французского математика и философа Рене Декарта. Любая точка А на плоскости в этой системе координат изображается двумя числами $A(x_1, y_1)$ И это означает, что данная точка имеет координату x_1 по оси абсцисс и координату y_1 по оси ординат. В частности, начало координат обозначается так $(0,0)$. Тогда расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ по теореме Пифагора будет равно $R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Заодно заметим, что отрезок прямой соединяющей эти две точки и имеющий начало в точке А и конец в точке В назвается вектором и этот вектор в декартовой системе координат имеет две проекции. Проекция на ось абсцисс равная $x_2 - x_1$ и на ось ординат равная $y_2 - y_1$. Поясним как получается проекция, на ось абсцисс. Для этого надо опустить два перпендикуляра из точек А и В. В результате расстояние между основаниями этих перпендикуляров и будет проекция данного вектора на ось абсцисс. Точно также осуществляется и проекция на ось ординат. Пусть требуется отрезок соединяюший точки P_1 и P_2 разделить в соотношении $\frac{m}{n} = \lambda$, то есть надо найти координаты точки P, находящейся внутри этого отрезка и делящей этот отрезок в указанном соотношении, то есть $\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{m}{n} = \lambda$. Пусть координаты точки P x и y. Тогда из подобия треугольников следует

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{PP_1}{P_1 P_2} = \frac{PP_1}{PP_1 + PP_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

и тогда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{n x_1 + m x_2}{\mathrm{n} + \mu}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{n y_1 + m y_2}{\mathrm{n} + \mu};$$

Напомним, что подобными треугольниками называются треугольники, у корых соответственные стороны одного треугольника пропорциональны между собой .В данном конкретном случае катет одного прямоугольного так относится к соответствующему катету другого прямоугольного как относятся между собой их гипотенузы. И, наконец, соответствующими катетами называются такие катеты, которые расположены против равных острых углов. В частности, если точка

P середина указанного отрезка, то $\lambda = 1$ и координаты середины отрезка вычисляются по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; Теперь у нас есть все возможности уйти от интуитивного представления о прямой линии, о котором мы писали выше. Тогда в качестве такого представления мы рекомендовали преставить в качестве прямой ровную палку или линейку или натянутую тетиву лука. Итак прямая на плоскости представляет собой совокупность точек с координатами x и y, подчиняющихся уравнению $Ax + By + C = 0$, где A, B, C любые действительные числа. Отличительной чертой этого уравнения является то что координаты точек x и y входят здесь в первой степени и поэтому прямую иногда называют кривой первого порядка. Раньше мы уравнением называли равенство содержащее неизвестное. В данном случае это не совсем так, здесь равенство содержит по сути дела два неизвестных, одно из которых x или y можно задать произвольно, а второе определяется из указанного уравнения. Например, для уравнения $2x + y - 1 = 0$, если $x = 1$, то $y = -1$ и никак иначе. Такие координаты x и y иногда называют текущими координатами. В этом уравнении, если $A = 0$, а B и C не равно нулю, то $y = -\frac{C}{B}$ то есть $y -$ произвольная постоянная величина и это есть уравнение прямой, параллельной оси абсцисс. Если $B = 0$, а A и $C \neq 0$, то $x = -\frac{C}{A}$ то есть x произвольная постоянная величина и это есть уравнение прямой, параллельной оси ординат. Если $C = 0$, а A и $B \neq 0$, то это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат. Если $B \neq 0$, то исходное уравнение можно переписать в виде $y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$ и $b = -\frac{C}{B}$ и это так называемое уравнение прямой с угловым коэффициентом. В данном случае при $x = 0, y = b$, а при $y = 0, x = -\frac{b}{k}$ и нетрудно видеть, что $k = tg(\alpha)$, где $\alpha -$ угол между прямой и осью абсцисс, отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки. И поэтому k и называют угловым коэффициентом прямой. Если прямая проходит через точку с координатами x_1 и y_1, то тогда из уравнения прямой с угловым коэффициентом следует $b = y_1 - kx_1$ и уравнение прямой, проходящей через точку с координатами x_1 и y_1 будет иметь вид $y - y_1 = k(x - x_1)$. Очевидно, что таких прямых будет бесчисленное множество, так как k - произвольное вещественное число. Если же прямая проходит ещё через одну точку с координатами x_2 и y_2, то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и уравнение прямой проходящей через две эти точки будет иметь вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, то есть, как и следовало ожидать, такая прямая будет единственная (через две точки на плоскости можно провести прямую и притом только одну). Забегая вперёд, скажем, что через две точки в трёхмерном пространстве можно провести то же только одну прямую. Интуитивно ясно, что две прямые линии на плоскости или пространстве могут либо не пересекаться, либо пересекаются только в одной точке. В этом можно легко убедиться, если взять в каждую из рук по прямой палке и проделать нехитрый эксперимент. А теперь это же самое проделаем математически. Рассмотрим две различные прямые, заданные общим уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Мы получили систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Это естественное обобщение элементарного уравнения первой степени, о котором мы, в частности говорили, что оно допускает далеко не простые обобщения. Как решать такую систему? Один из самых очевидных методов – это исключение одного из неизвестных. Делается это так. Из первого уравнения найдём $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ и подставим полученное выражение для y во второе уравнение, в результате чего будем иметь $A_2x + B_2(-\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}) + C_2 = 0$.Откуда $(A_2\,B_1 - A_1B_2)x = B_2C_1 - C_2B_1$ и $x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$, $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$.Это и есть координаты точек пересечения двух прямых . При этом заметим следующее : таблица, состоящая из чисел $(\frac{A_1}{A_2}\;\frac{B_1}{B_2})$ называется матрицей исходной линейной системы алгебраических уравнений. Матрица состоит из строчек и столбцов. Первая или верхняя строчка матрицы имеет вид $A_1\;B_1$, а вторая или нижняя строчка матрицы имеет вид $A_2\;B_2$. Аналогично первый столбец имеет вид $\frac{A_1}{A_2}$, а второй $\frac{B_1}{B_2}$. Рассматриваемая здесь матрица – квадратная : число строчек равно числу столбцов и порядок этой матрицы, то есть количество строчек или столбцов равно двум. Определителем данной матрицы или определителем данной системы является число $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$, которое получено следующим образом : надо первый элемент первой строчки A_1 умножить на второй элемент второй строчки - B_2 и вычесть из полученного произведения произведение двух элементов : второй элемент первой строчки B_1 на первый элемент второй строчки A_2. Столбец $\frac{-C_1}{-C_2}$ называется столбцом правых частей исходной системы. Если теперь в матрице исходной системы заменить первый столбец на столбец правых частей, то получим следующую матрицу $(\frac{-C_1}{-C_2}\;\frac{B_1}{B_2})$, определителем которой является число $\Delta_1 = -C_1B_2 + C_2B_1$ Если же в матрице исходной системы заменить второй столбец на столбец правых частей, то получим следующую матрицу $(\frac{A_1}{A_2}\;\frac{-C_1}{-C_2})$, определителем которой является число $\Delta_2 = -A_1C_2 + C_1A_2$. Теперь координаты точки пересечения двух прямых можно записать так $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Именно такое простое решение имеет система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Мы ещё вернёмся к разговору о других более сложных матрицах и о решении линейных алгебраических уравнений значительно более высоких порядков. А пока обратим внимание на следующее обстоятельство. Выражение для координат точек пересечения двух прямых представляет собой отношение двух определителей 2-го порядка. Мы знаем, что на ноль делить нельзя и поэтому возникает законный вопрос: при каких обстоятельствах определитель исходной системы двух линейных алгебраических уравнений обращается в ноль? Рассмотрим на примере этого определителя 2-го порядка основные свойства определителей, которые каждый желающий может непосредственно проверить. Определитель равен нулю, если какая-либо строчка или какой-либо столбец равны нулю. Пусть, например, $A_1 = B_1 = 0$. Тогда, согласно определению, $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$, откуда очевидно, что $\Delta = 0$. Остальные случаи, когда вторая строчка равна нулю или каждый из столбцов порознь или вместе равны нулю пусть проверит самостоятельно каждый желающий. Определитель не изменится, если из какой либо строчки или столбца вычесть другую строчку или столбец, умноженные на какое –либо число. Вначале заметим, что часто используется следующее обозначение: если матрица имеет вид $(\frac{A_1}{A_2}\frac{B_1}{B_2})$, то её определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. При таком обозначении определитель отличается (и это только формальное отличие) от матрицы тем, что вместо круглых скобок используются прямые

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 - kA_1 & B_2 - kB_1 \end{vmatrix} = A_1(B_2 - kB_1) - B_1(A_2 - kA_1) = A_1B_2 - kA_1B_1 - B_1A_2 + kA_1B_1 = A_1B_2 - A_2B_1 =$$

$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \Delta$. Мы в данном случае умножили первую строчку исходного определителя на число k и вычли из второй строчки определителя. Аналогичную комбинацию можно проделать и со столбцом и это желательно читателю проделать самостоятельно. Из этих двух свойств вытекает, что если какая либо строчка или какой либо столбец определителя пропорциональна (то есть в определённое число раз больше или меньше) другой строчки или столбца этого определителя, то такой определитель равен нулю. И тогда точек пересечения двух прямых $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ или не существует при $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ либо их бесчисленное множество когда $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$. Первый случай означает, что эти прямые между собой параллельны, а второй, что они полностью друг с другом сливаются.

Другие два варианта, такие, например, как $\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 \neq 0$ или $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 = 0$ рассмотрим подробнее. Из первого варианта следует, что $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ и

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$, но такое возможно только, если $B_1 = B_2 = 0$. В этом случае мы имеем дело с двумя прямыми, каждая из которых параллельна оси у-ков и, очевидно, параллельны между собой. Из второго варианта следует, что $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, но такое возможно только, если $A_1 = A_2 = 0$. В этом случае мы имеем дело с двумя прямыми, каждая из которых параллельна оси х-ов и, очевидно, параллельны между собой. Теперь можно определить угол между двумя прямыми на плоскости.Рассмотрим уравнения двух различных прямых, заданных следующим образом: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, где, как нам уже известно, k_1 и k_2 - угловые коэффициенты двух этих прямых, а b_1 и b_2, отрезки, отсекаемые на оси ординат. И $k_1 = tg(\alpha_1)$, где α_1 – угол между первой прямой и осью абсцисс, отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки, а $k_2 = tg(\alpha_2)$, где α_2 – угол между второй прямой и осью абсцисс, отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки. Если эти прямые пересекаются под углом φ, то мы получим треугольник с углами α_1, φ и $\pi - \alpha_2$, а так как сумма углов любого треугольника равна π, то $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ и $tg(\varphi) = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$. А мы уже знаем чему равен тангенс разности двух углов. И тогда $tg(\varphi) = \dfrac{tg(\alpha_2) - tg(\alpha_1)}{1 + tg(\alpha_2)tg(\alpha_1)} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$. Так угол между двумя пересекающимися прямыми выражается через угловые коэффициенты этих прямых. Мы знаем, что если прямые параллельны, то угол между ними равен $n\pi$, где $n = 0,1,2,...$Но в этом случае тангенс этого угла равен нулю и отсюда следует, что условие параллельности двух прямых можно записать так $k_2 = k_1$.Когда прямые пересекаются под прямым углом, то угол между ними равен $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, где $n = 0,1,2,...$и тангенс такого угла, как мы знаем, равен $\pm\infty$и поэтому условие перпендикулярности двух прямых можно записать так $k_2 \times k_1 = -1$. Мы уже говорили, что тригонометрические уравнения можно с помощью формулы (10) свести к алгебраическому уравнению. Но есть такие уравнения, для которых это сделать принципиально нельзя. Это так называемые трансцендентные уравнения, которые содержат комбинации тригонометрических и алгебраических функций. Например, такое уравнение $tg(x) = kx + b$. Надо найти такие значения x, при которых тангенсоида $y = tg(x)$ пересекается с прямой $y = kx + b$, где k и b в данном случае известные числа. Пока ограничимся вещественными числами, но ничего страшного не произойдёт, если они комплексные. И в этом случае нам снова поможет формула (10) и условия равенства двух комплексных чисел о том, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда вещественная часть одного комплексного числа совпадает с вещественной частью другого и мнимые части также между собой равны. В результате мы придём к системе из двух трансцендентных уравнений, где мы будем иметь дело только с вещественными числами. Вернёмся к нашему трансцендентному уравнению $tg(x) = kx + b$, где все числа вещественны. Для его решения поступим так: начертив тангенсоиду $y = tg(x)$ и прямую $y = kx + b$, обнаружим, что они пересекаются внутри каждого отрезка длиной π ровно один раз . То есть на интервале $[0,\pi]$ мы будем иметь ровно один корень, а поскольку таких интервалов ∞, то и число корней такого уравнения ∞, но счётно. А далее поступаем методом ловли льва в пустыне или делением отрезка $[0,\pi]$ пополам и в результате за 6-7 таких делений мы получим значение искомого корня с точностью до 3-х знаков после запятой. Этот алгоритм легко программируется на компьютере и тогда за сотые доли секунды можно получить значение одного корня с точностью до 9-ти знаков после запятой. Если же вместо тангенсоиды $y = tg(x)$ в том же трансцендентном уравнении будет синусоида $y = \sin(x)$ или косинусоида $y = \cos(x)$, то вычертив эти кривые и прямую $y = kx + b$ мы получим, что каждая из этих кривых пересечётся с прямой ровно один раз или ни разу, но это не значит, что каждое из этих уравнений имеет только один корень или не одного. Корней по-прежнему бесконечное число, но все другие будут мнимыми. И здесь нам снова поможет формула (10). Кстати, если $x = i\,z$, где z – вещественное число, то имеем $\sin(x) = \sin(i\,z) = \dfrac{\exp(i(iz)) - \exp(-i(iz))}{2i} = \dfrac{\exp(-z) - \exp(z)}{2i}$, а выражение $\dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$ называют гиперболическим синусом и обозначают как $sh(z)$, аналогично гиперболический косинус $ch(z) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$. Аналогично вводятся гиперболический тангенс и котангенс: $thz = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}$; $cthz = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}$; Можно конечно ввести гиперболические секанс и косеканс, как величины обратные соответственно гиперболическим косинусу и синусу, но эти функции не получили распространения в литературе по математике. Вы наверное обратили внимание на следующее обстоятельство, что в уравнение прямой линии координаты x и y входят в первой степени. Поэтому прямую называют кривой первого порядка. Естественно, если есть кривые первого порядка, то есть и кривые второго и других порядков. Рассмотрим простейшие кривые второго порядка. Мы уже знаем, что расстояние между двумя точками на плоскости равно $R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где (x_1, y_1) – координаты первой точки, а (x_2, y_2) – координаты второй точки. Теперь зафиксируем первую точку и пусть она будет иметь координаты (x_0, y_0), и пусть нам неизвестны координаты второй точки (x, y). Известно только одно, что расстояние от начальной точки с координатами (x_0, y_0) до неизвестной точки с координатами (x, y) постоянно и равно R. В результате получим $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Это уравнение описывает бесконечное, а точнее несчётное количество точек с координатами (x, y), которые отстоят от фиксированной точки с координатами (x_0, y_0) на одно и то же равное для всех этих точек расстояние R. Каждый, читающий эти заметки знает как получить эту кривую. Для этого достаточно взять циркуль, раздвинуть его на расстояние R. и воткнуть иголку этого циркуля в любую точку на плоскости. В результате этих простых манипуляций Вы получите хорошо всем вам известную кривую, которую называют окружностью. А расстояние R. называется радиусом этой окружности. Если $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, то мы получим простейшее уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$. Точно такое же уравнение мы получим, если от старых координат (x, y) мы совершим преобразование к новым координатам (X, Y), которые связывают со старыми координами формулы $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. Такое преобразование координат называется параллельным переносом. Из простейшего уравнения окружности наглядно видно, что это действительно кривая второго порядка, так как x и y находятся во второй степени. Как мы ниже увидим для кривой второго порядка достаточно, чтобы один x или один y находились во второй степени или было хотя бы одно произведение x на y. Заметим ещё, что окружность – это кривая все расстояния которой постоянны только от одной точки. А теперь возьмём за основу не одну точку а две. Пусть первая точка имеет координаты $(-x_0, 0)$ а вторая $(x_0, 0)$. Это точки расположены на оси абсцисс на равном расстояния от начала координат и очевидно, что эти точки симметричны относительно оси ординат. И теперь будем искать совокупность точек с координатами (x, y), сумма расстояний которой от первой точки $(-x_0, 0)$ и от второй точки $(x_0, 0)$ постоянна и равна L. то есть $\sqrt{(x + x_0)^2 + y^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} = L$.

И $2\sqrt{x^4 - 2x^2x_0^2 + x_0^4 + y^4 + 2y^2x^2 + 2y^2x_0^2} = L^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2x_0^2$. Возведя последнее ещё раз в квадрат, будем иметь: $x^2(4L^2 - 16x_0^2) + 4L^2\, y^2 = L^4 - 4L^2\, x_0^2$, которое можно переписать так $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 = \frac{L^4 - 4L^2x_0^2}{4L^2 - 16x_0^2}$ и $b^2 = \frac{L^4 - 4L^2x_0^2}{4L^2}$. Кривая, описываемая этим уравнением, называется эллипсом (по-русски иногда говорят овал) с центром в начале координат. Это замкнутая кривая, которая пересекает ось абсцисс в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ и ось ординат в точках $(0, -b)$ и $(0, b)$. Мы говорили, что L равна сумме расстояний от первой точки $(-x_0, 0)$ до любой точки на эллипсе и от этой же точки до второй точки $(x_0, 0)$. Так как это верно для любой точки на эллипсе, то верно и для точки с координатами $(-a, 0)$. Подсчитаем сумму этих расстояний. До первой точки это расстояние равно $a - x_0$ а до второй точки оно составляет $2x_0 + a - x_0$ и таким образом сумма этих расстояний и величина L равна $2a$. Величины a и b называют полуоси эллипса, а x_0 -фокусное расстояние и обозначают буквой c. Если в выражения $a^2 = \frac{L^4 - 4L^2x_0^2}{4L^2 - 16x_0^2}$ и $b^2 = \frac{L^4 - 4L^2x_0^2}{4L^2}$ подставим все эти значения, то первое выражение обратиться в тождество, а из второго следует $b^2 = a^2 - c^2$. Это известное соотношение между полуосями эллипса и его фокусным расстоянием. Если a равно b, то такой эллипс превращается в окружность. Величину $e = \frac{c}{a}$ называют эксцентриситетом эллипса. Очевидно, что для всякого эллипса $e<1$, а для окружности $e=0$. Прямые параллельные оси ординат $x=-\frac{a}{e}$ и $x=\frac{a}{e}$ называются директрисами эллипса. Эти прямые обладают следующим свойством: отношение расстояния от любой точки эллипса до ближайшего фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей директрисы равно отношению расстояния от этой же точки до дальнего фокуса к расстоянию от этой точки до дальней директрисы постоянно и равно эксцентриситету. В тех обозначениях, которые мы ранее использовали это выглядит так $\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}}{\frac{a}{e}-x}=\frac{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}}{x+\frac{a}{e}}=e<1$.

Рассмотрим вначале левую часть этого равенства, которую можно записать так $e\frac{\sqrt{x^2-2xc+a^2-b^2+y^2}}{a-xe}=eb\frac{\sqrt{\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}-2x\frac{c}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{y^2}{b^2}}}{a-xe}$ Так как точка с координатами (x,y) принадлежит эллипсу, то их координаты подчиняются уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$eb\frac{\sqrt{\frac{x^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-2x\frac{c}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}}}{a-xe}=e\frac{\sqrt{x^2-\frac{x^2b^2}{a^2}-2xc+a^2}}{a-xe}=e\frac{\sqrt{a^2-2xc+x^2\frac{c^2}{a^2}}}{a-xe}=e\frac{\sqrt{(a-xe)^2}}{a-xe}=e.$ И точно также можно доказать, что $\frac{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}}{x+\frac{a}{e}}=e.$ Таким образом показано, что эллипс-это

такая кривая, геометрическое место точек которой обладает следующими двумя свойствами : 1. Сумма расстояний каждой из этих точек до двух точек, называемых фокусами есть величина постоянная и равная сумме двух больших полуосей эллипса и 2. Отношение расстояния от каждой точки на эллипсе до ближайшего фокуса к расстоянию до ближайшей директрисы равно отношению расстояния от каждой точки на эллипсе до дальнего фокуса к расстоянию до дальней директрисы есть величина постоянная равная эксцентриситету эллипса и потому всегда меньше единицы. Между прочим именно по эллипсам совершают движение вокруг Солнца все планеты и кометы солнечной системы. В этом суть первого закона Кеплера сформулированного ещё до того как Ньютон нашёл закон всемирного тяготения. Из этого закона тот факт, что все тела солнечной системы вращаются вокруг Солнца по эллипсам следует автоматически. Если есть кривая второго порядка, сумма расстояний от каждой точки которой до каждого из фокусов постоянна, то вероятно есть и такая кривая разность расстояний от каждой точки которой до каждого из фокусов есть величина постоянная. Да такая кривая есть и она называется гиперболой. В наших обозначениях это будет выглядеть так: $\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}-\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}=L$.И, возведя его в квадрат, получим $2\sqrt{x^4-2x^2x_0^2+x_0^4+y^4+2y^2x^2+2y^2x_0^2}=-L^2+2x^2+2y^2+2x_0^2$.

Возведя последнее равенство в квадрат, будем иметь: $x^2(4L^2-16x_0^2)+4L^2y^2=L^4-4L^2x_0^2$, которое можно переписать так $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a^2=\frac{L^4-4L^2x_0^2}{4L^2-16x_0^2}$ и $b^2=\frac{L^4-4L^2x_0^2}{4L^2}$. Пока результат получился точно такой же как и при выводе уравнения эллипса. Мы получили кривую, которая пересекает ось абсцисс в в точках $(-a,0)$ и $(a,0)$, но в отличие от эллипса L равно разности расстояний от первой точки $(-x_0,0)$ до любой точки на гиперболе и от этой же точки до второй точки $(x_0,0)$. Так как это верно для любой точки на гиперболе, то верно и для точки с координатами $(-a,0)$. Подсчитаем разность этих расстояний. До первой точки это расстояние равно x_0-a а до второй точки оно составляет $a+x_0$ и таким образом разность этих расстояний и величина L равна $2a$. Величины a и b называют полуоси гиперболы, а x_0 -фокусное расстояние и обозначают буквой c. И в этом случае $c>L$.Если в выражения $a^2=\frac{L^4-4L^2x_0^2}{4L^2-16x_0^2}$ и $b^2=\frac{L^4-4L^2x_0^2}{4L^2}$ подставим все эти значения, то первое выражение обратиться в тождество, а из второго следует $b^2=a^2-c^2$. И b^2 в этом случае отрицательное число и поэтому вместо b надо писать ib, где $i-$ мнимая единица и новое $b-$ вещественное число. В результате уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a и $b-$ вещественные числа и $b^2=c^2-a^2$. Это известное соотношение между полуосями гиперболы и его фокусным расстоянием. Ось a называется действительной осью а ось $b-$ мнимой осью. Величину $e=\frac{c}{a}$ называют эксцентриситетом гиперболы. Очевидно, что для всякой гиперболы $e>1$. Прямые, параллельные оси ординат $x=-\frac{a}{e}$ и $x=\frac{a}{e}$ называются директрисами гиперболы. Эти прямые обладают теми же свойсвами что и для эллипса. Только они расположены ближе к оси ординат, чем фокусное расстояние. И доказательство свойств этих директрис точно такое же как для эллипса. Таким образом показано, что гипербола-это такая кривая, геометрическое место точек которой обладает следующими двумя свойствами :1.Разность расстояний каждой из этих точек до двух точек, называемых фокусами есть величина постоянная и равная сумме двух действительных полуосей гиперболы и 2. Отношение расстояния от каждой точки на гиперболе до ближайшего фокуса к расстоянию до ближайшей директрисы равно отношению расстояния от каждой точки на гиперболе до дальнего фокуса к расстоянию до дальней директрисы есть величина постоянная равная эксцентриситету гиперболы и потому всегда больше единицы. Как видете между эллипсом и гиперболой много сходств, но есть и существенные различия. Мы уже знаем, что если в уравнении, описывающем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ положим $y=0$, то найдём две точки $(-a,0)$ и $(a,0)$, в которых гипербола пересекает ось абсцисс. Если же мы положим $x=0$, то найдём $y^2=-b^2$. Таких действительных чисел нет и поэтому данная гипербола никогда не пересекает ось ординат. И отсюда следует, что эта кривая не замкнутая, то есть в отличие от окружности и эллипса на этой кривой нет такой точки, в которой начало кривой совпадает с её концом и само понятие начало и конец для этой кривой не существует. Кроме того для этой кривой помимо директрис существует ещё особый вид прямых, называемых асимптотами. Мы с вами уже встречались с этим видом прямых. Вспомните, что тангенсоида при стремлении аргумента слева к $\frac{\pi}{2}$ резко уходила вверх, а при стремлении справа вниз. Так вот прямая $x = \frac{\pi}{2}$ и есть вертикальная асимтота для тангенсоиды. И так как тангенсоида имеет период равный π, то она имеет таких асимптот бесконечное, но счётное число. И в дальнейшем, если Вы встречаетесь с кривой, которую можно представить в виде формулы $y = f(x)$, то вертикальная асимптота, если она существует для этой функции, имеет вид $x = a$, где, a как правило, то значение аргумента, при котором функция $y = f(x)$ не может быть определена. Но помимо вертикальных асимптот существуют и наклонные асимпоты, которые записываются в виде формулы $y = kx + d$. Это, как Вы помните, уравнение прямой с угловым коэффициентом, только там вместо d мы писали b, но это вызвано тем обстоятельством, что сейчас мы будем рассматривать асимптоты гиперболы, для которой b есть мнимая полуось. В формуле $y = kx + d$ k по- прежнему угловой коэффициент прямой, а d -то расстояние, которая эта прямая отсекает по оси ординат от начала координат. Если кривая $y = f(x)$ обладает наклонной асимптотой, то при стремлении x к бесконечности кривая будет стремиться к этой прямой, т.е. мы будем следующее предельное соотношение $\lim_{x\to\infty} kx + d = f(x)$, которое можно переписать так $k = \lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - \frac{d}{x})$. И если этот предел существует, то мы определим угловой коэффициет наклонной асимптоты. Найдя угловой коэффициент, мы сможем найти и так называемый свободный член наклонной асимптоты d из следующего предельного соотношения $d = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Теперь применим все эти выражения к уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, из которого следует, что $k = \lim_{x\to\infty} \pm\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}$. Далее, если формально мы запишем выражение для свободного члена асимптоты, то получим $d = \lim_{x\to\infty}(\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \mp \frac{b}{a}x) =$ $= \infty - \infty$. Это, так называемая неопределённость , которую мы пока ещё не умеем раскрывать, но в дальнейшем мы этому научимся и получим, что $d = 0$. Таким образом гипербола имеет две пересекающиеся между собой и проходящие через начало координат наклонные асимптоты $y = +\frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Мы уже с Вами говорили, что согласно закону всемирного тяготения Ньютона, из которого следуют все три закона Кеплера, которые сформулированы раньше чем закон Ньютона следует, что все планеты и кометы Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце. Точно также все искуственные спутники Земли и естественный Луна вращаются вокруг Земли по эллипсам, в одном из фокусов которого расположена Земля. Траектории всех этих спутников называются эллиптическими траекториями и все имеют скорости вращения вокруг Земли больше чем первая космическая скорость, но меньше чем вторая. Первая космическая скорость для любого космического тела равна $v=\sqrt{g\,R}$, а вторая $v=\sqrt{2\,g\,R}$, где в частности для Земли g - ускорение силы тяжести на Земле, а R – радиус Земли. Первую формулу вывести просто. Надо приравнять центробежную силу вращения силе тяжести. А для получения второй формулы надо научиться решать простейшие дифференциальные уравнения, которые мы пока делать не умеем. Так вот, если искуственный спутник разовьёт скорость большую, чем вторая космическая скорость, он будет двигаться уже не по эллипсу, а по гиперболе в одном из фокусов которой останется Земля. При этом такой спутник навсегда покинет Землю. Если ввести угол φ такой, что $tg(\varphi)=\frac{b}{a}$ и ввести новые оси координат X и Y согласно следующим формулам $x = X\cos(\varphi) - Y\sin(\varphi)$ и $y = X\sin(\varphi) + Y\cos(\varphi)$. Это формулы поворота осей вокруг начала координат . Так как $tg(\varphi)$ нам известен, то мы последние выражения можем переписать так $x = X\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - Y\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $y = X\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + Y\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Подставляя это в уравнение гиперболы, будем иметь $-2XY\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}{a^2+b^2} + Y^2\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}}{a^2+b^2} = 1$. Это то же уравнение гиперболы, которое не содержит X^2, Если же $b=a$, то мы получим ещё более простое уравнение гиперболы $X\,Y = -\frac{a^2}{2}$. Мы раньше говорили, что круг в декартовой системой координат, начало которой расположено в центре круга, можно разделить на четыре квадранта.Так вот последняя гипербола будет состоять из двух ветвей, одна из которых расположена во втором, а другая в четвёртом квадранте. И такая гипербола описывает так называемую обратно-пропорциональную зависимость. Действительно, последнее равенство не изменится, если мы X увеличим во столько то раз и при этом уменьшим Y во столько же раз. Мы рассматривали кривые эксцентриситет которых равен 0 – для окружности, <1 для эллипса и >1 для гиперболы и сейчас рассмотрим кривую, эксцентриситет которой равен 1. Это кривая назывется параболой. Она обладает таким свойством. Расстояние от любой точки параболы до директрисы равно расстоянию от этой же точки до фокуса. Пусть фокус имеет координаты $(c,0)$ и уравнение директрисы $x=-c$. Тогда расстояние от любой точки параболы с координатами (x,y) до директрисы равно $x+c$, а расстояние от этой же точки параболы до фокуса составляет $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и так как эксцентриситет равен 1 то эти расстояния между собой равны. Приравнивая эти два выражения, получим $x = \frac{1}{4c} y^2$.

Это парабола исходит из начала координат. Две ветви такой параболы симметричны относительно оси абсцисс. Мы уже с Вами говорили, что спутники, движушиеся со скоростями большими, чем первая космическая и меньше чем вторая космическая обладают, как говорят эллиптическими скоростями. Если спутник движется со скоростью большей чем вторая космическая, то такие скорости называются гиперболичекими. Если же спутник будет поддерживать точно вторую космичекую скорость, то он будет двигаться по параболе и такая скорость называется параболической. Парабола обладает следующим интересным свойством: свет, источник которого, помещённый в фокус параболы будет распространяться строго параллельно оси параболы. Этот факт мы возможно докажем, а пока заметим, что он широко используется при проектировании прожекторов. А более чем две тысячи лет тому назад этот факт использовал Архимед, собрав параболическое зеркало и поместив зайчик от Солнца в фокус этого зеркала. В результате возник луч, который позволил Архимеду сжечь деревянные римские корабли. Этот факт долго считался как красивая легенда, но в 70 –х годах 20 века он был воспроизведён и деревянные лодки действительно загорелись. С параболой мы с Вами уже встречались. Вспомните квадратное уравнение. Давайте рассмотрим такой график. $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$
$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$. Мы уже делали такие преобразования. В результате мы получили параболу, симметричную относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$ и имеющую вершину на этой оси при $a < 0$ или впадину при $a > 0$, ордината которой равна $c - \frac{b^2}{4a}$. При $a > 0$ ветви параболы идут вверх, а при $a < 0$ - вниз. Так вот в том месте, где эти ветви пересекают ось абсцисс мы получим вещественные корни хорошо нам знакомого квадратного уравнения. На этом мы, пожалуй, и ограничим краткий очерк о Аналитической геометрии на плоскости, несмотря на то что плоских кривых ещё очень много, в том числе и достаточно широко известных. Теперь перейдём к рассмотрению Аналитической геометрии в пространстве. Под словом пространство мы будем понимать пока только трёхмерное пространство. В этом случае помимо двух декартовых координат ось x-ов (абсцисса), ось y-ков (ордината) вводится ещё третья координата ось z (аппликата). Положительное направление этой оси-следующее (если смотреть с конца этой оси то мы увидим, что для совмещения оси ординат с осью абсцисс надо ось ординат повернуть против часовой стрелки). В таком случае координаты любой точки в пространстве записываются тремя цифрами (x, y, z) Для того чтобы получить координату x этой точки надо опустить перпендикуляр из точки на плоскость $x,0,y$ и из полученной точки опустить

ещё один перпендикуляр на ось абсцисс. Для того чтобы получить координату y этой точки надо опустить перпендикуляр из точки на плоскость $x,0,y$ и из полученной точки опустить ещё один перпендикуляр на ось ординат. Для того чтобы получить координату z этой точки надо опустить перпендикуляр из точки на ось аппликат. Расстояние между двумя точками А и В с координатами соответственно (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) будет равно $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.Для получения этой формулы заметим что $x_2 - x_1$- длина, $y_2 - y_1$- ширина и $z_2 - z_1$- высота и искомое расстояние представляет собой диагональ параллелепипеда. Для наглядности представим параллелепипед в виде комнаты и тогда диагональ его – это прямая линия, соединяющая точку на полу, где сходятся две стены с точкой на потолке, где сходятся две противоположные стены. В этом случае $z_2 - z_1$высота комнаты, $x_2 - x_1$-одна сторона пола, называемая длиной, а $y_2 - y_1$ другая сторона пола, называемая шириной. И тогда по теореме Пифагора диагональ пола равна $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Эта диагональ образует с высотой комнаты прямоугольник и его диагональ по той же теореме Пифагора равна $d = \sqrt{l^2 + (z_2 - z_1)^2}$. В результате мы получим искомую формулу. Пусть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ начальная точка начальная точка нашего отрезка, имеющего длину d , а $P_2(x_2, y_2, z_2)$ -конечная точка этого отрезка. Требуется найти точку $P(x,y,z)$, которая делит этот отрезок в отношении $\frac{m}{n} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$. Координаты точки $P(x,y,z)$ вычисляются точно также, как и для точки, лежащей на плоскости $x = \frac{n\,x_1 + m\,x_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda\,x_2}{1+\lambda}$ $y = \frac{n\,y_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda\,y_2}{1+\lambda}$ $z = \frac{n\,z_1 + m\,z_2}{n+m} = \frac{z_1 + \lambda\,z_2}{1+\lambda}$ В частности, если отрезок делится пополам, то $\lambda = 1$ и $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Теперь нам надо вывести уравнение плоскости. И, так как прежнего определения, что плоскость можно представить себе как лист фанеры, нам уже недостаточно, то предварительно рассмотрим основы векторной алгебры. В жизни мы повседневно встречаемся с такими объектами, которые могут быть выражены только действительными числами. Такие объекты называются скалярами. К таким объектам относятся масса, температура, заряд, работа и.т.д. Но есть и другие объекты, которые зависят не только от величины, но и от направления объекта и такие величины называются векторами. К ним относятся сила, скорость, ускорение, расход жидкости, напряжённость электрического и магнитного полей. Есть и более сложные объекты, такие, например, как напряжения и деформации в сплошной среде, теплопроводность неоднородной среды. Для их характеристики вводят более сложное понятие, которое получило название тензор. Но мы пока ограничимся векторами. Итак вектор –это отрезок прямой. Такой отрезок иногда называют направленным отрезком. Пусть P_1 начальная точка этого отрезка, а P_2 конечная точка и тогда такой отрезок называют вектором и обозначают так $\overline{P_1P_2}$. Часто вектор обозначают буквами a,b,c и т.д. Но в отличие от чисел эти буквы пишут жирным шрифтом. То есть a, b, c ... –это числа, а **a, b, c** - это вектора. Длину вектора или как часто говорят модуль вектора обозначают так $|a|$. Может быть Вы помните, что слово модуль мы использовали, когда говорили о модуле комплексного числа $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$, где a и b - вещественная и мнимая часть комплексного числа c. Здесь всё очень похоже и, если начало вектора R поместить в начало координат, то его проекции на оси x, y и z будут (x_R, y_R, z_R) и длина такого вектора согласно теореме Пифагора составит $|R| = \sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}$. Не правда ли очень похоже на знакомый нам модуль комплексного числа? Кстати вектор, берущий свое начало в начале координат иногда называют радиусом-вектором. Если этот же вектор имеет модуль равный единице, то такой вектор назывется ортом, а, если его модуль равен нулю, то нуль-вектором. Вспомните, когда мы с вами говорили о матрицах, то там были термины строчка и столбец. Там мы упоминали только матрицы 2-го порядка и её строчки и столбцы имели размерность второго порядка. Здесь же мы впервые встречаемся со строчкой, (x_R, y_R, z_R), имеющей размерность третьего порядка. Так вот такую строчку и аналогичный столбец иногда называют вектором -строчкой или вектором- столбцом или просто вектором третьего порядка. Два вектора равны между собой тогда и только тогда, когда их модули равны между собой и оба они направлены в одну и ту же сторону. То есть вектор в отличии от числа может меняться не только по величине, но и по направлению. Вектора можно складывать и вычитать. Для того чтобы получить сумму двух векторов надо к концу первого вектора приложить начало второго и затем составить новый вектор, который начинается в начале первого вектора и заканчивается в конце второго. Этот новый вектор и будет суммой двух исходных векторов. Почему именно так определяется сумма двух векторов? Для ответа на этот вопрос запишем координаты двух векторов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), исходящих из начала координат. Имеем тройку единичных векторов или тройку ортов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. И тогда первый вектор представим так $\overline{R_1} = \overline{i}\,x_1 + \overline{j}\,y_1 + \overline{k}\,z_1$, а второй вектор так $\overline{R_2} = \overline{i}\,x_2 + \overline{j}\,y_2 + \overline{k}\,z_2$ и тогда сумма векторов $\overline{R}_3 = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$ имеет вид $\overline{R_3} = \overline{i}\,(x_1 + x_2) + \overline{j}(y_1 + y_2) + \overline{k}(z_1 + z_2)$, а разность векторов $\overline{R}_4 = \overline{R}_1 - \overline{R}_2$ имеет вид $\overline{R_4} = \overline{i}\,(x_1 - x_2) + \overline{j}(y_1 - y_2) + \overline{k}(z_1 - z_2)$. Здесь, как мне кажется, всё ясно : привычные нам сложения и вычитания. Но что же при этом получается для суммы векторов? Мы получили вектор, представляющий собой диагональ параллелограмма, стороны которого – исходные слагаемые. Тем самым, как мне кажется, становится понятным, почему именно так определяется сумма двух векторов. Что же касается произведения двух векторов, то их два – скалярное произведение и векторное произведение. Скалярное произведение – это такое умножение, при котором двум векторам сопоставляется число или скаляр, а векторное произведение, когда двум векторам сопоставляется вектор. Эти два произведения имеют конкретный физический смысл. Скалярное произведение двух векторов : вектора силы и вектора, указывающего направление движения – это работа, выполняемая этой силой в направлении, указывающем движение. Ну, например, известная картина великого русского художника Ильи Репина, изображающего бурлаков, тянущих за собой баржу. Баржа движется по реке, а бурлаки идут по берегу и работа, выполняемая бурлаками и есть скалярное произведение их суммарных сил на направление движения баржи. В таком случае, выполнямая бурлаками работа, это произведение их суммарных сил на длину, пройденного баржой пути и на косинус угла, между двумя векторами: вектором силы и вектором перемещения. Мы, наверное помним, что наибольшее значение косинуса угла равно 1 и достигается тогда, когда значение угла равно нулю (мы здесь имеем в виду только первую четверть). И, действительно, если бы бурлаки могли ходить по реке, то они совершили бы наибольшую работу. А наименьшее значение равное нулю косинус имеет при угле равном $\frac{\pi}{2}$.Возвращаясь к нашему примеру, заметим, что в этом случае, когда бурлаки тянули бы баржу в направлении перпедикулярном реки, баржа бы не сдвинулась по реке ни на метр и работа, произведённая в этом случае бурлаками равнялась бы нулю. Итак скалярное произведение двух векторов – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В математике встречается два обозначения скалярного произведения так: $A = \overline{R}_1 \bullet \overline{R}_2$ или так $A = (\overline{R}_1, \overline{R}_2)$ и оба эти обозначения равноправны и в обоих случаях $A = \left|\overline{R}_1\right|\left|\overline{R}_2\right|\cos(\alpha)$, где $\alpha -$угол между векторами, отсчитываемый против вращения часовой стрелки от направления вектора $\overline{R}_1$ к направлению вектора $\overline{R}_2$. Мы выше говорили, что все орты $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$ между собой перпендикулярны и поэтому $(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1$, а $(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{j}, \bar{i}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{j}) = 0$. И тогда скалярное произведение двух векторов: вектора $\overline{R_1} = \bar{i}\, x_1 + \bar{j}\, y_1 + \bar{k}\, z_1$ и вектора $\overline{R_2} = \bar{i}\, x_2 + \bar{j}\, y_2 + \bar{k}\, z_2$ имеет вид $A = (\overline{R}_1, \overline{R}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Теперь обратимся к векторному произведению когда двум веторам сопоставляется вектор. Всем читателям наверное приходилось открывать с помощью штопора бутылку вина. Прилагая к штопору силу мы создаём вращающий момент, в результате которого штопор начинает двигаться внутрь пробки. Здесь первый вектор- это сила, приложенная к штопору, второй – это плечо рычага, то есть расстояние от точки приложения силы до оси штопора и, наконец, третий вектор - это направление движения штопора, причём его величина численно равна моменту, равному произведению силы на плечо. Последнее верно при одном условии, что угол меду силой и плечом прямой. Мы это все интуитивно знаем и никогда не прилагаем силу под не прямым углом к плечу штопора, так как в противном случае надо прилагать большую силу. В математике векторное произведение двух векторов обозначают так $\overline{M} = \overline{F} \times \overline{R}$, где величина вектора $\overline{M}$ численно равна $\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{R}\right|\sin(\alpha)$, где $\alpha -$угол между векторами, отсчитываемый против вращения часовой стрелки от направления вектора $\overline{F}$ к направлению вектора $\overline{R}$. А вектор $\overline{M}$ направлен так, что, глядя со стороны конца это вектора мы бы видели, что для того чтобы совместить вектор $\overline{F}$ с вектором $\overline{R}$ надо повернуть первый против часовой стрелки. Мы знаем, что синус угла достигает максимального значение равное единице при угле в первой четверти равном $\frac{\pi}{2}$. Именно поэтому надо прилагать силу к штопору под прямым углом. А теперь рассмотрим векторные произведения всех трех ортов $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$ между собой. Итак имеем $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$ а $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}; \bar{i}\times\bar{k}=\bar{j};$ $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$ а $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}; \bar{k}\times\bar{i}=-\bar{j}$; $\bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$. И тогда векторное произведение двух векторов: $\overline{R_1}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{k}z_1$ и $\overline{R_2}=\bar{i}x_2+\bar{j}y_2+\bar{k}z_2$ имеет вид $\overline{M}=\overline{R}_1\times\overline{R}_2=\bar{i}(y_1z_2-y_2z_1)+$ $+\bar{j}(x_1z_2-x_2z_1)+\bar{k}(x_1y_2-x_2y_1)$... Ну вот, пожалуй и всё, что нам пригодится из векторной алгебры и теперь мы снова можем вернуться к аналитической геометрии в пространстве для того чтобы сформулировать, что же такое плоскость. Вернёмся временно к нашему интуитивному объяснению, что плоскость-это кусок фанеры и затем приставим любой прямой стержень, например, ручку, так чтобы она была перпендикулярна фанере. Двигая этот стержень по плоскости, мы заметим, что наш стержень не будет менять ни своей величины ни своего направления. Всё будет по другому, если лист фанеры изогнуть. Пусть x_1, y_1, z_1 -координаты фиксированной точки на плоскости, а x, y, z - координаты любой другой или как часто говорят текущей точки на плоскости. Тогда $\overline{R}=\bar{i}(x-x_1)+\bar{j}(y-y_1)+\bar{k}(z-z_1)$ - произвольный вектор, лежащий на плоскости. Рассмотрим теперь другой вектор $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$. Он представляет собой ту самую ручку, которую мы водим по куску фанеры. Так вот, если наша фанера не изогнута и ручку мы всегда будем держать перпедикулярно к листу фанеры, то скалярное произведение двух векторов всегда будет равно нулю, то есть $(\overline{N},\overline{R})=A(x-x_1)+B(y-y_1)+\ C(z-z_1)=0$. Последнее выражение преобразуем так $Ax+By+Cz+D=0$, где $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$. Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ и есть общее уравнение плоскости в 3-х мерном пространстве. Здесь x, y и z - координаты любой произвольной точки на плоскости, а A, B, C и D - вещественные константы. Обратим внимание на два обстоятельства: общее уравнение плоскости в 3-х мерном пространстве напоминает общее уравнение прямой на плоскости с той только разницей, что в общем уравнении прямой на плоскости, как и следовало ожидать, нет координаты z. И второе обстоятельство: координаты x, y и z представлены здесь в первой степени и поэтому плоскость иногда называют поверхностью первого порядка по аналогии с кривой первого порядка. Так, как Вы возможно помните называют прямую на плоскости. Вектор $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$ называют вектором нормали к плоскости (слова нормаль и перпендикуляр означает одно и то же, то есть эти слова являются синонимами). Длина этой нормали или модуль указанного вектора –это $\left|\overline{N}\right|=\sqrt{(\overline{N},\overline{N})}=$ $=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Всегда можно добиться того, чтобы это величина равнялась единице и тогда такой вектор называют единичным вектором нормали к плоскости. Это можно сделать следующим образом: делением общего уравнения плоскости на нормирующий

Это можно сделать следующим образом: делением общего уравнения плоскости на нормирующий множитель $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ и тогда общее уравнение плоскости можно записать в виде $x\cos(\alpha)+y\cos(\beta)+z\cos(\gamma)-p=0$ так называемое нормальное уравнение плоскости, где $\cos(\alpha)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos(\beta)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и $\cos(\gamma)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - направляющие косинусы нормали, а p длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плос кость. Здесь α,β и γ -углы между осями координат x,y и z соответственно и указанным перпендикуляром, причём углы отсчитываются от осей координат при повороте против часовой стрелки. Рассмотрим некоторые частные случаи общего уравнения плоскости. Если $D=0$, то плоскость проходит через начало координат, так как в этом случае точка $x=0, y=0$ и $z=0$ удовлетворяет уравнению плоскости. При $A=0$ или $B=0$ или $C=0$ плоскость будет соответственно параллельна осям x,y и z. При $A=B=0$ или $A=C=0$ или $B=C=0$ плоскость будет соответственно параллельна плоскостям $x0y, x0z$ или $y0z$. Если $D\neq 0$, то, разделив общее уравнение плоскости на D, и обозначив $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$ и $c=-\frac{D}{C}$ мы получим ещё одно представление общего уравнения плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ так называемое уравнение плоскости в отрезках, так как a,b и c - длины отрезков, которые данная плоскость отсекает соответственно от осей x, y и z. Причём длины отрезков во всех трёх случаях отсчитываются от начала координат. Рассмотрим три произвольные точки P_1 с координатами (x_1,y_1,z_1) P_2 с (x_2,y_2,z_2) и P_3 с (x_3,y_3,z_3) и пусть все эти три точки лежат на плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то есть $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$ $Ax_2+By_2+Cz_2=-D$ и $Ax_3+By_3+Cz_3=-D$ и мы получили линейную (все неизвестные входят в первой степени) систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Неизвестные, правда для нас не совсем обычные. Мы привыкли выше обозначать неизвестные буквами x,y,z. Так и поступим обозначив $x=-\frac{A}{D}, y=-\frac{B}{D}, z=-\frac{C}{D}$ и тогда получим следующую линейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными. $x_1x+\ y_1y+z_1z=1$ $x_2x+\ y_2y+z_2z=1$ $x_3x+\ y_3y+z_3z=1$ И чтобы эта система была совсем похоже на то что мы писали выше, введём следующие обозначения $x_1=a_{11}, y_1=a_{12}, z_1=a_{13}, 1=b_1$ $x_2=a_{21}, y_2=a_{22}, z_2=a_{23}, 1=b_2$ и $x_3=a_{31}, y_3=a_{32}, z_3=a_{33}, 1=b_3$. И теперь исследуемая нами система записана в хорошо нам знакомом виде $a_{11}x+\ a_{12}y+a_{13}z=b_1$ $a_{21}x+\ a_{22}y+a_{23}z=b_2$ $a_{31}x+\ a_{32}y+a_{33}z=b_3$ Решив эту линейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными и, проделав те же самые обозначения в обратном порядке, получим единственные три значения $-\frac{A}{D},-\frac{B}{D},-\frac{C}{D}$, что доказывает, что через три произвольные точки в пространстве можно провести только одну единственную плоскость, общее уравнение которой имеет вид $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$. Здесь слово произвольные точки записано не случайно, так как для специально подобранных точек это утверждение неверно. Например, если все три точки расположены на одной прямой, то через такие три точки можно провести бесконечное множество плоскостей. Это интуитивно понятно из следующего наглядного примера. Пусть прямая-это ровная палка или бильярдный кий, а плоскость-это лист фанеры, тогда этот лист фанеры можно наклонять как угодно и каждый раз этот кий будет лежать на фанере. Указанный пример мы ниже обоснуем математически. А пока, как заметит внимательный читатель, из системы трёх уравнений с тремя неизвестными мы найдём только три постоянных или как математики говорят константы, а в общем уравнении плоскости их четыре A, B, C, D. Здесь никакого противоречия нет, так как общее уравнение плоскости не изменится от того, что мы обе его части разделим на D. То есть мы имеем дело только с тремя константами $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$. Теперь ответим на вопрос как решать полученную линейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Напомню, что раньше мы решали подобную систему двух уравнений с двумя неизвестными $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ и обнаружили, что $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ Здесь $\Delta -$ определитель системы, $\Delta_1 -$ первый дополнительный определитель системы, $\Delta_2 -$ второй дополнительный определитель системы. Как Вы помните $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$-это числа, которые вычисляются следующим образом. $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$, $\Delta_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$. Напомню, как получены эти формулы. Из уравнения $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ найдём y, который равен $y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}}$ и подставим в первое уравнение $a_{11}x + a_{12}\frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} = b_1$ и, приведя к общему знаменателю, найдём $a_{11}a_{22}x + a_{12}b_2 - a_{12}a_{21}x = b_1a_{22}$, затем $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - a_{12}b_2$ и окончательно $x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Подставляя полученное значение для x в выражение $y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}}$ и это проделайте самостоятельно, найдём $y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Аналогично поступим и с линейной системой трёх уравнений с тремя неизвестными и найдём, что $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Здесь $\Delta -$ определитель системы, $\Delta_1 -$ первый дополнительный определитель системы, $\Delta_2 -$ второй дополнительный определитель системы. , $\Delta_3 -$ третий дополнительный определитель системы. Как Вы помните $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$-это числа, которые вычисляются следующим образом $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1 a_{22} - a_{12}b_2$, $\Delta_2 = a_{11}b_2 - b_1 a_{21}$. В случае линейной алгебраической системы трёх уравнений с тремя неизвестными будем иметь

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\Delta_1 = b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\Delta_2 = b_1(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$\Delta_3 = b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - b_2(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Каждый из этих определителей вычисляется следующим образом: берём какой либо столбец каждого из них, например для Δ и Δ_1 – это будет первый столбец, для Δ_2 – это будет второй столбец, а для Δ_3 – третий столбец. И далее, например для Δ, на пересечении первого столбца и первой строчки стоит элемент a_{11}, запишем его и затем вычеркнем из определителя Δ всю первую строчку и весь первый столбец. Нетрудно видеть, что в этом случае у нас останется определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а он, как мы уже знаем, равен $(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$ и вот это число умножим на a_{11}. В результате получим число $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$. Затем на пересечении первого столбца и второй строчки стоит элемент a_{21}, запишем его со знаком -и затем вычеркнем из определителя Δ всю вторую строчку и весь первый столбец. Нетрудно видеть, что в этом случае у нас останется определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а он, как мы уже знаем, равен $(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$ и вот это число умножим на $-a_{21}$. В результате получим число $-a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$. Затем на пересечении первого столбца и третей строчки стоит элемент a_{31}, запишем его со знаком +и затем вычеркнем из определителя Δ всю третью строчку и весь первый столбец. Нетрудно видеть, что в этом случае у нас останется определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, а он, как мы уже знаем, равен $(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$ и вот это число умножим на a_{31}. В результате получим число $+a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{32})$. Таким образом мы получили значение определителя Δ. Аналогично вычисляются и три другие определители. Теперь поясним почему мы первое слагаемое в определители Δ брали со знаком плюс, второе со знаком минус и ,наконец, третье снова со знаком плюс. Оказывается, что этот знак определяется следующим выражением $(-1)^{\alpha+\beta}$. Здесь α – номер строчки, β – номер столбца. Например, в первом слагаемом для определителя Δ $\alpha = 1$ и $\beta = 1$; во втором слагаемом для определителя Δ $\alpha = 2$ и $\beta = 1$; и в третьем слагаемом для определителя Δ $\alpha = 3$ и $\beta = 1$. И ,наконец ,вполне законен следующий вопрос: откуда взялись эти определители и почему они так необычно вычисляются? Для ответа на этот вопрос снова вернёмся к линейной (напомним, что это означает, что все неизвестные входят в первой степени) системе трёх уравнений с тремя неизвестными. Исключим из этой системы вначале z. Из первого уравнения имеем

$z=(b_1-a_{11}x-a_{12}y)/a_{13}$ и вставим эту величину в оба оставшихся уравнения. В результате получим линейную алгебраическую систему двух уравнений уже с двумя неизвестными
$(a_{13}a_{21}-a_{23}a_{11})x+(a_{13}a_{22}-a_{23}a_{12})y=b_2a_{13}-b_1a_{23}$
$(a_{13}a_{31}-a_{33}a_{11})x+(a_{13}a_{32}-a_{33}a_{12})y=b_3a_{13}-b_1a_{33}$. Исключим из этой системы неизвестное y.

$y=(b_2a_{13}-b_1a_{23}-(a_{13}a_{21}-a_{23}a_{11})x)/(a_{13}a_{22}-a_{23}a_{12})$ И затем подставим полученную величину во второе линейное апгебраическое уравнение и тем самым найдём неизвестное x

$x=\dfrac{b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-b_2(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+b_3(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Подставляя найденное значение для x, в выражение для y, найдём что $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ и далее $z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. И это доказывает, что определители могут быть вычислены именно таким способом. Такой способ вычисления называется разложением определителя по элементам столбца. В частности для Δ и Δ_1 – это будет первый столбец, для Δ_2 – это будет второй столбец, а для Δ_3 – третий столбец. Очевидно, что точно также можно вычислить определитель путём его разложения по элементам строки. Действительно, рассмотрим определитель Δ и разложим его по элементам первой строки. В результате получим $\Delta=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$, что полностью совпадает с записанным выше значением Δ.Отсюда вытекает следующее свойство определителя: если какая либо строка или какой либо столбец определителя равны нулю, то такой определитель равен нулю. Подставьте в первую формулу для Δ $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$, то Вы получите, что $\Delta=0$. Точно такой же результат Вы получите, если подставите $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$ во вторую формулу для Δ. Если в определителе поменять местами строку или столбец, то знак определителя изменится на обратный. Действительно, поменяем в определителе Δ местами первый и второй столбец. В результате получим определитель $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, разложив который по элементам второго столбца, получим

$-a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})=-\Delta$. Определитель не изменится, если какой либо столбец (строку) умножить на любое число и полученный столбец (строку) сложить или вычесть с другим столбцом (строкой). Рассмотрим тот же определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и далее умножим его первый столбец, например, на 2 и сложим со вторым столбцом. В результате получим следующий определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ и этот определитель разложим по элементам первого столбца. В результате имеем $a_{11}((a_{22}+2a_{21})a_{33}-a_{23}(a_{32}+2a_{31}))-a_{21}((a_{12}+2a_{11})a_{33}-a_{13}(a_{32}+2a_{31}))+$ $+a_{31}((a_{12}+2a_{11})a_{23}-a_{13}(a_{22}+2a_{21}))=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{11}2a_{21}a_{33}-$ $-a_{11}a_{23}2a_{31}-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-a_{21}2a_{11}a_{33}+a_{21}a_{13}2a_{31}+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})+$ $+a_{31}2a_{11}a_{23}-a_{31}a_{13}2a_{21}=\Delta.$ И это свойство даёт нам возможность существенно упростить процесс вычисления определителей, так как позволяет добиться того, чтобы в каком либо столбце (строки) было бы как можно меньше ненулевых элементов. Например, рассмотрим следующий определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$, который вычислим, разложив его по элементам первого столбца. Тогда получим, что его представить так $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=$ $=1(45-48)-2(36-42)+3(32-35)=-3+12-9=0.$ А теперь умножим первый столбец исходного определителя на 4 и вычтем из второго столбца и полученный результат запишем на место второго столбца. Затем умножим первый столбец на 7 и вычтем из третьего столбца и полученный результат запишем на место третьего столбца. В результате вместо исходного определителя будем иметь следующий определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}$ и его разложим по элементам первой строки, которая содержит только один ненулевой элемент, и поэтому значение этого определителя равно $1\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}=36-36=0.$ Из этого примера видно, что второй способ вычисления занимает значительно меньше времени. Но несмотря на все ухищрения, как неоднократно подсчитывали вычислители, число операций при таком способе вычисления определителя $n-$го порядка сравнима с числом $n!$ то есть $n-$факториал. Для определителя третьего порядка $n!=6$ и это очевидно небольшое число. Для определителя же десятого порядка $n!=3628800$ а это очень большое число. Вы наверное ещё помните из написанного выше, что миллион дней тому назад был основан Рим, а это число в три с половиной раза больше. Мне конечно могут возразить, что есть компьютеры с огромной скоростью быстродействия. Да это так, но даже для них вычисление определителя сотого порядка путём его разложения по элементам столбца или строки представляет почти неразрешимую задачу. А в приложениях, о которых мы ниже возможно будем говорить приходится решать линейные системы миллиона уравнений с миллионом неизвестных. Этот вопрос поднимался ещё в 19 веке, когда и в помине не было компьютеров и тогда математики пришли к выводу, что решение линейной системы уравнений с помощью определителей целесообразно только для определителей второго и третьего порядка, а дальше надо искать другие методы решения этих систем. Для описания этих методов вернёмся к исходной системе трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$, которую можно записать так АХ =В, где $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица исходной системы. Это не определитель, хотя внешне похоже, но с той только разницей, что вместо прямых скобок стоят круглые скобки. Но эта разница принципиальна: определитель-это число, а матрица- это таблица чисел. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$-вектор неизвестных, а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$-вектор правых частей. Законный вопрос, а причём тут вектор? Напомню, что выше мы вектор в проекциях на оси координат записали следующим образом $\overline{R_1} = \bar{i}\,x_1 + \bar{j}\,y_1 + \bar{k}\,z_1$, но можно также представить его в виде столбца $\bar{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$или строчки $\overline{R_1} = (x_1; y_1; z_1)$. Такое представление вектора давно закрепилось в математике и называется соответственно вектор-столбец и вектор-строка. Выражение АХ – означает умножение матрицы А на столбец Х и это умножение происходит по следующему правилу : первый элемент первой строки матрицы А умножается на первый элемент столбца Х плюс второй элемент первой строки матрицы А умножается на второй элемент столбца Х плюс третий элемент первой строки матрицы А умножается на третий элемент столбца Х . В результате получим число $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$, которое будет первым элементом нового столбца АХ. Второй элемент этого столбца вычисляется аналогично. Для этого первый элемент второй строки матрицы А умножается на первый элемент столбца Х плюс второй элемент второй строки матрицы А умножается на второй элемент столбца Х плюс третий элемент второй строки матрицы А умножается на третий элемент столбца Х . В результате получим число $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$, которое будет вторым элементом нового столбца АХ. И наконец для вычисления третьего элемента столбца АХ надо первый элемент третьей строки матрицы А умножить на первый элемент столбца Х плюс второй элемент третьей строки матрицы А умножить на второй элемент столбца Х плюс третий элемент третьей строки матрицы А умножить на третий элемент столбца Х . В результате получим число $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$, которое будет третьим элементом нового столбца АХ. И в результате мы получим уравнение первого порядка, представляющее собой равенство двух столбцов АХ и В. Это и есть, как мы выше говорили, далеко не простое обобщение элементарного уравнения первой степени $ax = b$, решение которого очевидно $x = b/a$. По аналогии с этим элементарным решением можно записать, что $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица обратная исходной. Ниже мы поясним, как такую матрицу можно вычислить, а пока ответим почему такое странное умножение матрицы на столбец, напоминающее выполнение одновременно двух действий, например таких : одной рукой почёсывание волос а другой рукой поглаживание живота. Пусть некое выражение Т следующим образом зависит от переменных P_1, P_2, P_3. $T = xP_1 + yP_2 + zP_3$ и каждое из этих переменных в свою очередь зависит от других переменных u, v, w следующим образом $P_1 = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w$. $P_2 = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w$ $P_3 = a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w$. То есть выражаясь житейским языком : я завишу от прихоти своего начальника, который в свою очередь зависит от прихоти более вышестоящего начальника. В итоге Т будет равно $T = x(a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w) + y(a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w) + z(a_{13}u + a_{23}v + a_{31}w)$,

а затем перегруппируем это выражение следующим образом $T = u(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + v(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + w(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$. Здесь коэффициент при u-это первый элемент столбца AX, коэффициент при v-это второй элемент столбца AX, коэффициент при w-это третий элемент столбца AX. Вот откуда взялось такое странное умножение матрицы A на столбец X, в результате которого получился новый столбец AX. Заметим при этом следующие обстоятельства : 1.Матрица A имеет следующие размерности 3×3 то есть три строчки и три столбца, столбец X имеет следующие размерности 3×1 то есть три строчки и один столбец, а результат умножения -новый столбец AX имеет следующую размерность 3×1 то есть три строчки и один столбец, то есть число строчек такое же как у матрицы A, а число столбцов такое же как и у столбца X; 2. Число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строчек второго, откуда следует, что сомножители в случае умножения матриц нельзя переставлять местами. Здесь известное всем из арифметики правило, что от перемены порядка сомножителей произведение не меняется, не работает, так как столбец X нельзя перемножить на матрицу A; 3.Под словом умножение здесь и далее понимается, что выполняются одновременно две зависимости, Т зависит от переменных P_1, P_2, P_3 и каждое из этих переменных в свою очередь зависит от других переменных u, v, w. Это значит, что одновременно выполняется **и** то **и** другое. Здесь очень важно обратить внимание на союз **и** . То есть если между двумя объектами можно поставить союз **и,** то на языке математики это означает, что один объект надо умножить на второй объект, если между двумя объектами можно поставить союз **или,** то на языке математики это означает, что один объект надо сложить со вторым объектом. Это верно и для арифметики, где операция умножение означает повторение операции сложения один и более число раз. А теперь рассмотрим умножение одной квадратной матрицы на другую квадратную матрицы. И вообще в математике и особенно в прикладной математике используются только квадратные матрицы, хотя могут использоваться и прямоугольные матрицы у которых число строк не совпадает с числом столбцов. Мы уже использовали такие матрицы- это столбец или строка, но на этом у нас знакомство с прямоугольными матрицами и закончилось. Желающие могут самостоятельно продолжить это знакомство и встретиться с ещё более экзотическими объектами, такими, например, как пространственные матрицы, а мы с Вами вернёмся к квадратным матрицам. Пусть надо умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ \hline a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ \hline a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{pmatrix}$ на матрицу $C = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12}\, c_{13} \\ \hline c_{21}\, c_{22}\, c_{23} \\ \hline c_{31}\, c_{32}\, c_{33} \end{pmatrix}$. Результат умножения – это приведенная ниже матрица AC.

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + a_{13}c_{31} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{32} & a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} \\ \hline a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + a_{23}c_{31} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{32} & a_{21}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}c_{33} \\ \hline a_{31}c_{11} + a_{32}c_{21} + a_{33}c_{31} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{32} & a_{31}c_{13} + a_{32}c_{23} + a_{33}c_{33} \end{pmatrix}$$

Полученная матрица имеет то же три строчки и три столбца. Элемент, расположенный на пересечении первой строчки и первого столбца равен элементу, расположенному на пересечении первой строчки и первого столбца матрицы А, умноженному на элемент, расположенный на пересечении первой строчки и первого столбца матрицы С плюс элемент, расположенный на пересечении первой строчки и второго столбца матрицы А, умноженный на элемент, расположенный на пересечении второй строчки и первого столбца матрицы С плюс элемент, расположенный на пересечении первой строчки и третьего столбца матрицы А, умноженный на элемент, расположенный на пересечении третьей строчки и первого столбца матрицы С. И это только для одного элемента матрицы АС, расположенного на пересечении первой строчки и первого столбца. Мне кажется, что записать как получены остальные восемь элементов читатель может самостоятельно. Мы же попытаемся упростить полученную запись, но предварительно заметим, что матрицу А можно записать так $A = a_{ij}, i = 1,2,3; j = 1,2,3.$ Аналогично может быть представлена и матрица С и тогда матрицу АС можно записать так

$$AC=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}c_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{1j}c_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{1j}c_{j3}\\ \sum_{j=1}^{3}a_{2j}c_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{2j}c_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{2j}c_{j3}\\ \sum_{j=1}^{3}a_{3j}c_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{3j}c_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{3j}c_{j3}\end{pmatrix}$$ напомню, что знак $\sum_{j=1}^{3}$. означает суммирование по всем $j=1,2,3.$ В частности $\sum_{j=1}^{3}a_{1j}c_{j1}=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31}$. Заметим, что под знаком суммы символ j. повторяется дважды и это дало основание формально полагать, что если индекс повторяется дважды, то по этому индексу предполагается суммирование по всем значениям, который этот индекс пробегает. И тогда матрицу АС можно переписать так.

$$AC=\begin{pmatrix}a_{1j}c_{j1} & a_{1j}c_{j2} & a_{1j}c_{j3}\\ a_{2j}c_{j1} & a_{2j}c_{j2} & a_{2j}c_{j3}\\ a_{3j}c_{j1} & a_{3j}c_{j2} & a_{3j}c_{j3}\end{pmatrix}$$ и эта самая компактная запись матрицы, представляющей собой произведение двух матриц третьего порядка. И в таком же виде можно записать матрицу, представляющую собой произведение двух матриц n-го порядка

$$AC=\begin{pmatrix}a_{1j}c_{j1} & a_{1j}c_{j2}\dots & a_{1j}c_{jn}\\ a_{2j}c_{j1} & a_{2j}c_{j2}\dots & a_{2j}c_{jn}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{nj}c_{j1} & a_{n}c_{j2}\dots & a_{nj}c_{jn}\end{pmatrix}$$. Единичной матрицей n-го порядка называется матрица, имеющая вид $E=a_{ij}=1,$ если $i=j$ и $a_{ij}=0,$ если $i\neq j, i=1,2,..n; j=1,2,..n.$ То есть в этой матрице её главная диагональ, идущая из левого верхнего элемента матрицы к правому нижнему вся состоит из единиц, а все другие элементы матрицы равны нулю. И тогда матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Покажем, как вычислить эту матрицу на следующем примере. Пусть мы имеем матрицу $T=\begin{pmatrix}101\\110\\111\end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что определитель этой матрицы равен 1. А теперь для каждого элемента этой матрицы составим алгебраическое дополнение, делённое на определитель всей матрицы. Например, для элемента, стоящего на пересечении первой строчки и первого столбца этой матрицы алгебраическим дополнением будет определитель второго порядка $\begin{vmatrix}10\\11\end{vmatrix}$ со знаком + . Для элемента, стоящего на пересечении первой строчки и второго столбца этой матрицы алгебраическим дополнением будет определитель второго

порядка $\begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix}$ со знаком -. Для элемента, стоящего на пересечении первой строчки и третьего столбца этой матрицы алгебраическим дополнением будет определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 11 \\ 11 \end{vmatrix}$ со знаком + . И результат этих вычислений поместим в первую строчку новой матрицы. И аналогичные вычисления мы проделаем для вычисления второй и третьей строчек новой матрицы. В результате мы получим следующую матрицу $\begin{pmatrix} 1-1\ 0 \\ 1\ 0-1 \\ -1\ 1\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь эту матрицу транспонируем, то есть поменяем строчки на столбцы и наоборот.

В результате получим матрицу $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1\ 1-1 \\ -1\ 0\ 1 \\ 0-1\ 1 \end{pmatrix}$.

Эта матрица и будет обратной исходной матрице T. Проверьте это сами, то есть умножьте матрицу T на матрицу T^{-1} и в результате вы должны получить единичную матрицу. Такой способ вычисления обратной матрицы прост, но как говорится многоделен.

Вы наверное ещё не забыли, что для вычисления определителя n-го порядка путём его разложения по элементам строки или столбца требуется n-факториал операций.

И поэтому ещё в 19 веке великий немецкий математик Гаусс предложил метод решения линейных систем уравнения который, как оказалось, для произвольной матрицы обладает наименьшим из возможных числом операций.

Покажем действие метода Гаусса на примере решения пяти уравнений с пятью неизвестными

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &= 4 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5 \end{aligned}$$

На главной диагонали матрицы этой системы стоят пятёрки и далее эта матрица содержит единицы и нули. О других особенностях этой матрицы поговорим ниже, а пока нам этого достаточно. Затем умножим первую строчку матрицы, включая и правые части на 0.2 и вычтем из второй и и третьей строчки. В результате получим.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 1 \\ 4.8x_2 + 0.8x_3 + 0.8x_4 + x_5 &= 1.8 \\ 0.8x_2 + 4.8x_3 + 0.8x_4 + x_5 &= 2.8 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_3 + \ x_4 + 5x_5 = 5$$

Теперь разделим 0.8 на 4.8 и полученное число 0.1666 с точностью до четвёртого знака после запятой умножим на вторую строчку и её правую часть и затем полученную новую вторую строку вычтем из третьей строки. Затем разделим 1.0 на 4.8 и полученное число 0.2083 с точностью до четвёртого знака после запятой умножим на третью строчку и её правую часть и затем полученную новую третью строку вычтем из четвёртой строки. В результате получим.

$$\begin{aligned}
&5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\\
&4.8x_2 + 0.8x_3 + 0.8x_4 + x_5 = 1.8\\
&4.6672x_3 + 0.6672x_4 + 0.8334x_5 = 2.5012\\
&0.8333x_3 + 4.8333x_4 + 0.7917x_5 = 3.6250\\
&x_3 + x_4 + 5x_5 = 5
\end{aligned}$$

Теперь разделим 0.8333 на 4.6672 и полученное число 0.1785 с точностью до четвёртого знака после запятой умножим на третью строчку и её правую часть и затем полученную новую третью строку вычтем из четвёртой строки. Затем разделим 1.0 на 4.6672 и полученное число 0.2143 с точностью до четвёртого знака после запятой умножим на четвёртую строчку и её правую часть и затем полученную новую четвёртую строку вычтем из пятой строки.

В результате получим

$$\begin{aligned}
&5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\\
&4.8x_2 + 0.8x_3 + 0.8x_4 + x_5 = 1.8\\
&4.6672x_3 + 0.6672x_4 + 0.8334x_5 = 2.5012\\
&4.7142x_4 + 0.6429x_5 = 3.1784\\
&0.8570x_4 + 4.8214x_5 = 4.4641
\end{aligned}$$

Теперь разделим 0.8570 на 4.7142 и полученное число 0.1818 с точностью до четвёртого знака после запятой умножим на четвёртую строчку и её правую часть и затем полученную новую четвёртую строку вычтем из пятой строки.

В результате получим. $5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$$\begin{aligned}
&4.8x_2 + 0.8x_3 + 0.8x_4 + x_5 = 1.8\\
&4.6672x_3 + 0.6672x_4 + 0.8334x_5 = 2.5012\\
&4.7142x_4 + 0.6429x_5 = 3.1784\\
&4.7045x_5 = 3.8863
\end{aligned}$$

Остальные вычисления очевидны и в результате мы получим

$x_5 = 0.8261; x_4 = 0.5616; x_3 = 0.3080; x_2 = 0.0580; x_1 = 0.0145$. Так реализуется простейший метод Гаусса. Казалось бы всё хорошо. Доказано, что для линейной системы с произвольной матрицей этот метод позволяет найти решение линейной системы уравнений с наименьшим числом операций, но погрешности округления при делении приводят к накоплению ошибок и поэтому при решении больших линейных систем уравнений порядка 1000 и значительно более до сих пор разрабатываются другие методы решения этих систем. Я не случайно выбрал для примера такую матрицу, которая слева и справа от главной диагонали не полностью заполнена: полоса ниже главной диагонали имеет размерность 2, а выше главной диагонали размерность 3. Именно такая полосовая структура матрицы, чаще всего симметричная относительно главной диагонали, встречается в приложениях, где приходится решать линейные системы алгебраических уравнений порядка сотни тысяч с шириной полосы порядка тысячи. И для решения таких систем, используются другие методы, использующие преимущество полосовой структуры матрицы. К одному из таких методов имеет непосредственное отношение и автор этих строк. Но эта тема пока выходит за рамки этюдов по математике. А теперь вернёмся к аналитической геометрии в пространстве : а именно к плоскости, которую мы провели через три произвольные точки в трёхмерном пространстве, и эта операция завела нас очень далеко в сторону. Напомню, что общее уравнение плоскости имеет вид $A x + B y + C z + D = 0$, где $x, y, z -$ координаты любой, или как говорят текущей точки на плоскости, а $\vec{N} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ - вектор нормали к плоскости или образно говоря, если плоскость- это кусок фанеры, то нормаль к ней- это карандаш, расположенный перпендикулярно к этому куску фанеры, а A, B, C - проекции этого карандаша на три оси координат и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} -$ единичные векторы, расположенные соответственно вдоль каждой из координат. И наконец $D -$ это произвольное действительное число. Если теперь мы имеем две плоскости, у каждой из которых своя нормаль $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Кстати вектора можно обозначать и так $\vec{N}$ и так $\bar{N}$ и так **N** и в этом не будет никакой ошибки. Напомню Вам, что скалярное произведение двух векторов $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ имеет вид $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = \left|\vec{N}_1\right| \times \left|\vec{N}_2\right| \times \cos\varphi$, где $\left|\vec{N}_1\right|, \left|\vec{N}_2\right| -$ модули этих векторов, то есть по сути дела их длина, а φ угол между первым и вторым вектором при вращении первого вектора отнотельно второго против часовой стрелки.

Так как $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ -нормали к каждой из плоскостей то косинус угла, а вслед за ним и угол между этими двумя плоскостями можно вычислить так

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{\left|\vec{N}_1\right| \times \left|\vec{N}_2\right|} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Если две плоскости параллельны, то угол между ними равен нулю, а косинус этого угла равен единице, то есть $\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 1$, но это возможно только при условии когда $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$, где $\lambda -$ произвольное действительное число не равное нулю. И тогда действительно $\cos\varphi = \dfrac{\lambda A_1^2 + \lambda B_1^2 + \lambda C_1^2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{\lambda^2 A_1^2 + \lambda^2 B_1^2 + \lambda^2 C_1^2}} = 1$. Таким образом выражение $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ - есть условие параллельности двух плоскостей. Если же две плоскости перпендикулярны, то угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$, а косинус этого угла равен нулю, то есть $\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0$, но это возможно только при условии когда $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$- это и есть условие перпендикулярности двух плоскостей. Если же плоскости не параллельны между собой, то они обязательно пересекаются и геометрическое место точек их пересечения будет прямая линия. Опять же для наглядности возьмите два куска фанеры и в этом убедитесь непосредственно. Итак если $x, y, z -$ координаты произвольной точки на прямой, то уравнение этой прямой можно определить из решения линейной системы двух уравнений с тремя неизвестными $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ Пусть $x_1, y_1, z_1 -$ координаты фиксированной точки на этой прямой, то эти координаты удовлетворяют двум указанным уравнениям и тогда $D_1 = -A_1 x_1 - B_1 y_1 - C_1 z_1$. $D_2 = -A_2 x_1 - B_2 y_1 - C_2 z_1$. И тогда исходную систему уравнений можно переписать так $A_1 (x - x_1) + B_1 (y - y_1) = -C_1 (z - z_1)$ $A_2 (x - x_1) + B_2 (y - y_1) = -C_2 (z - z_1)$ И это очень похоже на знакомую нам линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Определитель такой системы – это $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Первый дополнительный определитель – это $\begin{vmatrix} -C_1(z - z_1) & B_1 \\ -C_2(z - z_1) & B_2 \end{vmatrix}$ или, используя следующие два правила для определителей: 1. Если строчка или столбец определителя умножены на одно и тоже число, то это число можно вынести за пределы определителя, в данном случае таким числом будет $(z - z_1)$. 2. Если строчки или столбцы поменять между собой местами, то знак определителя изменится на противоположный. И поэтому первый дополнительный определитель можно переписать так $(z - z_1)\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$. Второй дополнительный определитель имеет вид $\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_1) \\ A_2 & -C_2(z - z_1) \end{vmatrix}$ и его можно записать в следующем виде $(z - z_1)\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$. И тогда

$(x-x_1)=(z-z_1)\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и $(y-y_1)=(z-z_1)\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ или $\dfrac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ и $\dfrac{y-y_1}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ и тогда уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку с координатами x_1, y_1, z_1 имеет вид $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$, где $l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $m=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. И эти числа можно трактовать как проекции вектора $\vec{R}$ на три оси координат, то есть $\vec{R}=l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$ и этот вектор параллельный данной прямой называется направляющим вектором данной прямой. Если же прямая проходит ещё через одну точку с координатами x_2, y_2, z_2, то из уравнения прямой следует, что $l=\lambda(x_2-x_1), m=\lambda(y_2-y_1), n=\lambda(z_2-z_1)$, где λ любое не равное нулю вещественное число. Тогда уравнение прямой, проходящей через две точки будет иметь вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, то есть, как и следовало ожидать, через две произвольные точки в пространстве можно провести прямую и притом только одну. Так как $\vec{N}=A\,\vec{i}+B\,\vec{j}+C\,\vec{k}$ - вектор нормали к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, а $\vec{R}=l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$ - вектор параллельный прямой $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$, то эти два вектора взаимно перпендикулярны и поэтому их скалярное произведение равно нулю, то есть $\left(\vec{N},\vec{R}\right)=Al+Bm+Cn=0$ и это будет условие параллельности прямой и плоскости. Если же прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{R}$ параллельны и поэтому существует не равное нулю вещественное число λ такое, что $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}=\lambda$ и это равенство будет условием перпендикулярности прямой и плоскости. Если две прямые пересекаются под углом φ, то точно под таким же углом пересекаются их направляющие векторы $\vec{R}_1, \vec{R}_2$. И косинус угла, а вслед за ним и угол между этими двумя прямыми можно вычислить так $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{R}_1,\vec{R}_2)}{\left|\vec{R}_1\right|\times\left|\vec{R}_2\right|}$ или $\cos\varphi=\dfrac{l_1 l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\times\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$. Если две прямые параллельны, то угол между ними равен нулю, а косинус этого угла равен единице, то есть $\cos\varphi=\dfrac{l_1 l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\times\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}=1$, но это возможно только при условии когда $l_2=\lambda l_1, m_2=\lambda m_1, n_2=\lambda n_1$, где $\lambda-$произвольное не равное нулю вещественное. И тогда действительно $\cos\varphi = \dfrac{\lambda l_1^2 + \lambda m_1^2 + \lambda n_1^2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \times \sqrt{\lambda^2 l_1^2 + \lambda^2 m_1^2 + \lambda^2 n_1^2}} = 1$. Таким образом выражение $l_2 = \lambda l_1, m_2 = \lambda m_1, n_2 = \lambda n_1$ - есть условие параллельности двух прямых. Если же две прямые перпендикулярны, то угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$, а косинус этого угла равен нулю, то есть $\cos\varphi = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \times \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = 0$, но это возможно только при условии когда $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ - это и есть условие перпендикулярности двух прямых. В уравнение для плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ текущие координаты входят в первой степени и поэтому плоскость называют поверхностью первого порядка, но очевидно, что если есть поверхность первого порядка, то есть и поверхности второго, третьего и более высоких порядков. Мы же с Вами рассмотрим только простейшие поверхности второго порядка. Напомню, что расстояние между двумя точками с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 имеет вид $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ и пусть одна из точек, например, первая совпадает с началом координат, то есть $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$ а вторая – это любая произвольная точка с текущими координатами x, y, z и последнее обозначим расстояние d другой буквой R и тогда текущие координаты x, y, z будут геометрическим местом точек, равноотстоящих от начала координат и подчиняющихся уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, которое описывает поверхность шара с центром в начале координат и радиусом R. Поверхность шара часто называют сферой и поэтому полученное уравнение это уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат . Отметим на этой сфере две точки с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 и проведём через эти две точки и начало координат плоскость $Ax + By + Cz = 0$ и эта плоскость, как мы указывали выше, будет единственно возможная. Составляющие вектора нормали к этой плоскости будут определяться из решения двух уравнений с двумя неизвестными $\dfrac{A}{C}$ и $\dfrac{B}{C}$ $\dfrac{A}{C}x_1 + \dfrac{B}{C}y_1 = -z_1$ $\dfrac{A}{C}x_2 + \dfrac{B}{C}y_2 = -z_2$. Определитель такой системы, а также первый и второй дополнительные определители этой системы, как мы знаем равны $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$. Тогда $\dfrac{A}{C} = \dfrac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$ и $\dfrac{B}{C} = \dfrac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$. В результате уравнение искомой плоскости имеет вид $(y_1 z_2 - z_1 y_2)x + (z_1 x_2 - x_1 z_2)y + (x_1 y_2 - y_1 x_2)z = 0$ и теперь, чтобы определить линию пересечения этой плоскости со сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, надо решить совместно эти оба уравнения. Находя из уравнения плоскости z , получим $z = -\dfrac{A}{C}x - \dfrac{B}{C}y$ и затем возведём это выражение в квадрат и вставим в уравнение для сферы, и тогда получим $(1 + \dfrac{A^2}{C^2})x^2 + (1 + \dfrac{B^2}{C^2})y^2 + 2\dfrac{AB}{C^2}xy = R^2$. Так как из вида уравнения пока неясно какую кривую это уравнение описывает, введём новую систему координат, которая по отношению к рассматриваемой повёрнута на угол φ, а начало координат в обоих системах совпадает. В этом случае, как указывалось ранее $x = X\cos(\varphi) - Y\sin(\varphi)$, $y = X\sin(\varphi) + Y\cos(\varphi)$. И тогда получим $X^2[(1+\frac{A^2}{C^2})\cos^2(\varphi) + (1+\frac{B^2}{C^2})\sin^2(\varphi) + 2\frac{AB}{C^2}\cos(\varphi)\times$

$\times\sin(\varphi)] + Y^2[(1+\frac{A^2}{C^2})\sin^2(\varphi) + (1+\frac{B^2}{C^2})\cos^2(\varphi) - 2\frac{AB}{C^2}\cos(\varphi)\sin(\varphi)] +$

$+2XY[-(1+\frac{A^2}{C^2})\cos(\varphi)\sin(\varphi) + (1+\frac{B^2}{C^2})\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{AB}{C^2}\cos^2(\varphi) - \frac{AB}{C^2}\sin^2(\varphi)] = R^2.$ Выберем φ таким, чтобы последнее выражение обращалось в ноль, то есть $-(1+\frac{A^2}{C^2})\cos(\varphi)\sin(\varphi)+$

$+(1+\frac{B^2}{C^2})\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{AB}{C^2}\cos^2(\varphi) - \frac{AB}{C^2}\sin^2(\varphi) = 0.$

Или так $-(1+\frac{A^2}{C^2})\sin(2\varphi) + (1+\frac{B^2}{C^2})\sin(2\varphi) + \frac{AB}{C^2}(1+\cos(2\varphi)) - \frac{AB}{C^2}(1-\cos(2\varphi)) = 0.$ В результате получим $ctg(2\varphi) = \frac{A^2 - B^2}{2AB}$. И так как $1 + ctg^2(2\varphi) = 1 + \frac{\cos^2(2\varphi)}{\sin^2(2\varphi)} = \frac{1}{\sin^2(2\varphi)}$, то $\sin(2\varphi) = \frac{\pm 2AB}{A^2 + B^2}$. и $\cos(2\varphi) = \pm\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}$. И тогда найдём, что коэффициенты при X^2 и при Y^2 равны единице и исходное уравнение приобретёт знакомый нам вид $X^2 + Y^2 = R^2$, то есть, как и следовало ожидать, это будет уравнение окружности с центром, совпадающим с центром шара. Именно такой будет след плоскости, проходящей через центр шара и через любые две точки на его поверхности. Эту линию иногда называют большой окружностью. На поверхности Земли такими линиями будет любой из мериадианов, а также Экватор. Другие широты, кроме Экватора называются малыми окружностями. Путешествие по дуге большой окружности- это кратчайшее расстояние между двумя точками на Земле. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, которое описывает поверхность шара с центром в начале координат и радиусом R можно ещё больше упростить, если записать его в так называемых сферических координатах. Последние вводятся по формуле $x = r\cos(\theta)\cos(\varphi); y = r\cos(\theta)\sin(\varphi); z = r\sin(\theta).$ Здесь $r-$радиус вектор, $\theta-$широтный угол и $\varphi-$меридиональный угол. Подставим эти значения в уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В результате получим самое простое уравнение поверхности шара в сферических координатах $r = R.$ Границы изменения этих углов следующие $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}; -\pi \le \varphi \le \pi.$ Если R - радиус Земли (6378.17км.), то углы $\theta, \varphi -$ будут соответственно широтами и долготами на Земле. Математики, как правило, измеряют углы в радианах, а географы в градусах. В частности, угол π в градусах равен 180 градусов. Знак + означает северная широта для широт и восточная долгота для долгот. Знак - означает южная широта для широт и западная долгота для долгот. Например, Санкт-Петербург расположен на 60-ом градусе северной широты и на 30-ом градусе восточной долготы. Нулевой градус широты означает Экватор, а нулевой градус долготы- Гринвический меридиан, проходящий через город Гринвич, расположенный недалеко от Лондона (Англия). Напомню, что уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ описывает на плоскости эллипс. Естественным обобщением этого уравнения в пространстве является поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Эта поверхность имеет три полуоси длиной a, b и c, отсекаемых этим эллипсоидом по осям каждой из трёх координат соответственно. Если длины всех трёх полуосей между собой равны, то мы естественно получим уравнение сферы. Если же какие либо две полуоси равны между собой, то мы получим эллипсоид вращения вокруг третьей оси. Сечением эллипсоида любой плоскостью будет эллипс. В этом можно самим убедится непосредственно, проделав точно такие же операции, которые мы проделали выше со сферой. Можно ввести сферические координаты и для эллипсоида и они будут выглядеть так $x = a\cos(\varphi)\cos(\varphi)$; $y = b\cos(\theta)\sin(\varphi); z = c\sin(\theta)$. И здесь тоже можно ввести свои широты и долготы. Между прочим, мы об этом уже говорили, Земля имеет форму геоида- (эллипсоид вращения слегка сжатый от одного полюса к другому), каждая из полуосей которого равна $a = 6378.17km; b = 6378.17km; c = 6360\,km.$ В быту мы также встречаем эллипсоид вращения- это всем известная дыня или мяч для игры в регби и американский футбол. Если в формуле, описывающей поверхность эллипсоида мы изменим всего лишь один знак, то получим уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, которое описывает совсем другую поверхность однополостного гиперболоида. Здесь a и b -вещественные полуоси, потому что указанная поверхность пересекает оси x и y, а также c -мнимая полуось поверхность этого однополостного гиперболоида не пересекает ось z. Сечения, перпендикулярные оси z будут эллипсы, в частности при $z = 0$ мы получим хорошо знакомый нам эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а при $z = const$ мы тоже получим эллипс, но с большими по величине полуосями. Сечения, параллельные оси z будут гиперболы, в частности при $y = 0$ мы получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, а при $x = 0$ получим другую гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. При $y = d \neq b$ мы тоже получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2(1-\frac{d^2}{b^2})}-\frac{z^2}{c^2(1-\frac{d^2}{b^2})}=1$, а при $x = d \neq a$ получим гиперболу $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{d^2}{a^2})}-$ $-\frac{z^2}{c^2(1-\frac{d^2}{a^2})}=1$. В случае же $y = b$ будем иметь две прямые, проходящие через начало координат $x = \pm\frac{a}{c}z$, а при $x = a$ получим другие две прямые, то же проходящие через начало координат $y = \pm\frac{b}{c}z.$ Если $a = b$, то мы получим уравнение описывающее поверхность однополостного гиперболоида вращения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ с осью вращения, совпадающей с осью z. Между прочим, сетка под баскетбольным кольцом имеет точно такую форму, но при условии $z \geq 0$. Точно так выглядела железная корзина для мусора по английски basket, в которую учитель физкультуры в конце 19 века просил учеников бросать мяч. Отсюда берёт своё начало баскетбол. Если мы две эти металлические корзины поставим один на один, то снова вернёмся к однополостному гиперболоиду вращения, но теперь уже сделанному из металла. Оказалось, что такая конструкция выдерживает большие нагрузки при наименьшем собственном весе. Поэтому именно такую конструкцию выбрал известный инженер В.Г. Шухов для своей башни, построенной в 20-х годах двадцатого века в Москве. Башня так и называется Шуховской и она стоит благополучно до сих пор. Башня собрана из металлических балок. Они представляют собой отрезки прямой линии. Возникает вопрос, как же можно совместить однополостный гиперболоид и прямые линии? Оказалось, что связь между ними существует. Снова рассмотрим уравнение, описывающего поверхность однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ и далее перепишем его так $(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}) = (1-\frac{y}{b})(1+\frac{y}{b}).$ И затем обозначим $u = \frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}};\ v = \frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}.$ В результате мы получим два семейства прямых в трёхмерном пространстве: 1. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u(1+\frac{y}{b})$ и $u(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=1-\frac{y}{b}.$ 2. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v(1-\frac{y}{b})$ и $v(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=1+\frac{y}{b}.$ Здесь u и v - произвольные действительные числа. Эти прямые называются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида. То что эти прямые будут образовывать однополостный гиперболоид можно убедиться непосредственно, если взять несколько десятков спиц и расположить их указанным способом. Для простоты можно положить в эти два семейства прямых $b = a$, то есть рассматривать однополостный гиперболоид вращения. Именно так поступал В.Г.Шухов, демонстрируя модель своей башни. Благодаря В.Г.Шухову слово гиперболоид стало очень популярным в СССР в двадцатых годах двадцатого века и поэтому в названии своего романа «Гиперболоид инженера Гарина» А.Н. Толстой вставил это слово, при этом не уточнив, что у Шухова речь шла только об однополостном гиперболоиде. Но помимо этого гиперболоида есть ещё и двуполостный гиперболоид. Для этого в уравнение, описывающее поверхность однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ поменяем знак у единицы с плюса на минус. В результате получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$ И это уравнение описывает совсем другую поверхность. Здесь в отличие от предыдущего случая уже c – действительная полуось, а a и b - мнимые полуоси. Это видно из следующих соображений. Положим в этом уравнении $x = y = 0$, то тогда $z = \pm c$, то есть на оси z эта поверхность отсекает равные отрезки длиной c от начала координат. Если же положить $z = 0$, то не существует никаких действительных x и y, удовлетворяющих такому уравнению. При $|z| > c$, что напомню означает, что либо $z > c$ либо $z < -c$ мы получим уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2(\frac{z_0^2}{c^2}-1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{z_0^2}{c^2}-1)} = 1$ с полуосями $a\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$ и $b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$, где z_0 означает любое фиксированное значение z .Отсюда следует, что сечение этой поверхности плоскостями параллельными плоскости $x0y$ и отстоящими от этой плоскости на расстояниях большими чем c мы получим эллипсы, полуоси которых будут тем большими, чем больше это расстояние. При $|z| < c$ никакой поверхности не существует и мы рассекаем пустоту, а при $|z| = c$ получим только две точки. Если же мы будем рассекать поверхность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ плоскостями $x = x_0$ или $y = y_0$, которые параллельны оси z, то мы получим гиперболы $\frac{y^2}{b^2(\frac{x_0^2}{a^2}+1)} - \frac{z^2}{c^2(\frac{x_0^2}{a^2}+1)} = -1$ с полуосями $b\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+1}$ и $c\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+1}$ или гиперболы $\frac{x^2}{a^2(\frac{y_0^2}{b^2}+1)} - \frac{z^2}{c^2(\frac{y_0^2}{b^2}+1)} = -1$ с полуосями $a\sqrt{\frac{y_0^2}{b^2}+1}$ и $c\sqrt{\frac{y_0^2}{b^2}+1}$. То есть указанная поверхность представляет собой как бы две поверхности, расположенные одна над другой. Каждая из этих поверхностей ограничивает собой объём чаши или точнее среднеазиатской пиалы (сосуда, который не имеет ручки). Один сосуд расположен выпуклостью вниз -обычное состояние чашки, в которую можно налить жидкость и второй сосуд расположен выпуклостью вверх и представляет собой перевернутую чашку, в которую естественно жидкость налить нельзя. Мы уже говорили, что сечение каждой из этих двух поверхностей представляет собой либо эллипс ,либо гиперболу и именно поэтому, поверхность, описываемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, называется двуполостным гиперболоидом. Если же в этом уравнении положить $b = a$, то мы получим двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения совпадающей с осью z. Проделаем ещё одно изменение в этом уравнении. В правой части его вместо –1 поставим 0. Получим следующее уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Это уравнение описывает коническую поверхность или просто конус. Правда этот конус несколько отличается от того конуса, который у нас с детства ассоциируется с шутовским колпаком клоуна. По сути дела- это два колпака клоуна, один из которых повёрнут вершиной вверх, а другой вершиной вверх. Эти две вершины сходятся в одной и той же точке- начале координат. И ещё клоунский колпак-это круговой конус, у которого $b = a$. То что поверхность, описываемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, проходит через начало координат видно из самого уравнения. Подставьте $x = 0, y = 0, z = 0$ и вы убедитесь, что оно превратилось в тождество $0 = 0$. Сечение конической поверхностью любой плоскостью $z = d = const$ параллельной плоскости x, y представляет собой эллипс $\frac{x^2}{(a\frac{d}{c})^2} + \frac{y^2}{(b\frac{d}{c})^2} = 1$ с полуосями $a\frac{d}{c}, b\frac{d}{c}$. Сечение конической поверхностью любой плоскостью $y = d = const \neq 0$ параллельной плоскости x, z представляет собой гиперболу $\frac{z^2}{(c\frac{d}{b})^2} - \frac{x^2}{(a\frac{d}{b})^2} = 1$ с полуосями $c\frac{d}{b}, a\frac{d}{b}$. Сечение конической поверхностью любой плоскостью $x = d = const \neq 0$, параллельной плоскости y, z представляет собой гиперболу $\frac{z^2}{(c\frac{d}{a})^2} - \frac{y^2}{(b\frac{d}{a})^2} = 1$ с полуосями $c\frac{d}{a}, b\frac{d}{a}$. Если $y = 0,$ то есть рассматривается плоскость x, z. В этом случае прямая $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ находится в этой плоскости и лежит на поверхности конуса. В этом легко убедится : подставьте $y = 0$ и $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ в уравнение конуса и Вы получите тождество. Эта прямая является образующей конуса на плоскости x, z. А теперь проведём плоскость, параллельную этой прямой. В этом случае составляющие вектора нормали к этой плоскости и направляющие вектора прямой образуют между собой, как Вы наверное помните, прямой угол, и поэтому скалярное произведение этих двух векторов равно нулю, то есть $Aa + Cc = 0,$ где $A, B = 0, C$ направляющие вектора нормали искомой плоскости и тогда $A = c, C = -a.$ В результате уравнение этой плоскости имеет вид $cx - az = d$, где $d = const \neq 0$. Найденная плоскость параллельна прямой $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ и она не проходит через начало координат. Теперь рассмотрим какую кривую мы получим, если будем рассекать этой плоскостью конус. Этот процесс аналогичен тому, что мы делаем каждый день, когда режем плоским ножом булку. Из уравнения плоскости найдём $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{zd}{ac^2} + \frac{d^2}{a^2c^2}$ и затем подставим это выражение в уравнение конуса. В итоге пишем $z = -\frac{d}{2a} - \frac{ac^2}{2b^2d}y^2$ и это уравнение представляет собой параболу симметричную относительно оси y с вершиной в точке $y = 0, z = -\frac{d}{a}.$ Таким образом, мы получили, что в зависимости от того какой плоскостью мы будем рассекать конус, будем иметь в сечении либо эллипс (в частности окружность), либо гиперболу, либо параболу и поэтому все эти плоские кривые называются коническими сечениями. Видоизменим уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, описывающее конус следующим образом положим $c=1$ и вместо z^2 запишем z. Тогда мы получим следующее уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, описывающее поверхность эллиптического параболоида. Эта поверхность проходит через начало координат, так как точка $x=y=z=0$ превращает это уравнение в тождество. Помимо этой точки все точки этой поверхности расположены при $z>0$, так как $x,y,a,b-$вещественные числа и их квадраты положительные числа. В любом сечении $z=d=const>o$ мы получим эллипс с полуосями $a\sqrt{d}$ и $b\sqrt{d}$. Сечения, параллельные оси z представляют собой параболы с осью симметрии, совпадающей с осью z.Действительно пусть $x=d=const$. Тогда мы будем иметь параболу $z=\frac{d^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ с осью симметрии, совпадающей с осью z и с вершиной в точке $y=0, z=\frac{d}{a}$. А теперь посмотрим какую кривую мы получим, если пересечём поверхность эллиптического параболоида произвольной плоскостью, уравнение которой как мы помним имеет вид $Ax+By+Cz+D=0.$ Тогда, исключая z, найдём $\frac{x^2}{a^2}-\frac{A}{C}x+\frac{y^2}{b^2}-\frac{B}{C}y=-\frac{D}{C}$. При этом подразумеваем, что $C\neq 0$. Далее, дополняя левую часть до полного квадрата и, соответственно дополняя правую часть, получим $(\frac{x}{a}-\frac{Aa}{2C})^2+(\frac{y}{b}-\frac{Bb}{2C})^2=-\frac{D}{C}+\frac{A^2a^2}{4C^2}+\frac{B^2b^2}{4C^2}$, при этом очевидно, что правая часть, которую обозначим через F, должна быть положительна, что выполняется при условии $A^2a^2+B^2b^2>4DC$. И тогда, введя новые оси координат по формулам $X=x-\frac{Aa^2}{2C}; Y=y-\frac{Bb^2}{2C}$, получим в этих новых координатах уравнение эллипса с полуосями $a\sqrt{F}; b\sqrt{F}$. Если мы изменим в уравнение, описывающее поверхность эллиптического параболоида всего один знак, то уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, будет описывать совсем другую поверхность. Это уже не среднеазиатская пиала, то есть чашка без ручки, а поверхность похожая на кавалерийское седло специально сделанное для удобства всадника сидящего на лошади. Такая поверхность называется гиперболический параболоид, потому что для любого сечения $z=const\neq o$ мы получим гиперболу, а для сечения $x=const$ и $y=const$ будем иметь параболы с осью симметрии, совпадающей с осью z. В случае же $z=o$ получаются две пересекающиеся прямые, проходящие через начало координат $y=\pm\frac{b}{a}x$. Перепишем уравнение, описывающее поверхность гиперболического параболоида

лоида следующим образом $z=(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})$ и далее обозначим так $1. u=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})u$ или так 2. $v=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, $z=(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})v$, где u и v - произвольные действительные числа. В результате мы получили два семейства прямых, которые представляют собой образующие гиперболического параболоида. Если таким образом натянуть прочные нитки, то мы получим кавалерийское седло. Конечно вручную так седло никто не делал. Шили, как правило, на глазок, но если бы механизировать этот процесс и использовать станки с программным управлением, то без этих уравнений не обойтись. Мы помним, что на плоскости кривые $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2=2px$ представляют собой соответственно эллипс, гиперболу и параболу. А что они будут представлять в пространстве, где третья координата $z-$ любое действительное число . В этом случае мы будем иметь дело с поверхностями, образующие которых представляют собой прямые линии параллельные оси z, и такие поверхности называются соответственно эллиптическими, гиперболическими и параболическими цилиндрами. Правда на цилиндр, который носили мужчины во времена А.С. Пушкина, напоминает только первая поверхность и то при условии $b=a$. Остальные же поверхности напоминают скорее фрагменты китайской стены. На этом мы закончим экскурс в аналитическую геометрию, хотя безусловно представляют интерес поверхности третьего и более высоких порядков, но это уже тема специальных исследований. Пусть $x-$ вещественное число и $f(x)$ - функция от этого числа, которая представляет собой правило: каждому значению x на оси абсцисс оно сопоставляет одно значение $f(x)$ на оси ординат. Иногда такую функцию называют однозначной функцией в отличие от многозначной. Мы, если специально не оговаривать, будет использовать только однозначными функциями и будем их просто называть функциями. Напомню, что непрерывными функциями называются функции, которые проще говоря не терпят разрыв, то есть малому значению аргумента x-соответствует малое значение функции $f(x)$. К непрерывным функциям не относится, например, тангенсоида при стремлении и $x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где $n=0,\pm1,\pm2,...$. Правда такую функцию следует считать скорее частично непрерывной, так как во всех остальных случаях она непрерывна. Более точное определение непрерывной функции звучит так: функция называется непрерывной на интервале $[a,b]$, если малым изменениям аргумента на этом интервале соответствует малое изменение функции. Последнее утверждение можно формализовать, что означает для математиков записать его в виде формулы. И тогда оно будет звучать так. Пусть некая точка x_0 находится внутри интервала $[a,b]$, и пусть существуют **любые** действительные числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$. Тогда функция $f(x)$ будет непрерывна в точке x_0, если при $|x-x_0|<\varepsilon$ $|f(x)-f(x_0)|<\delta$. Здесь ключевое слово **любые**, то есть в том числе и очень маленькие. Такое определение может быть и несколько громоздкое с точки зрения обычной житейской логики, но зато оно не допускает никаких других толкований. Поясним ещё одно определение, которое нам впервые встретилось и, которое ещё не раз будет встречаться : интервал $[a,b]$ называется закрытым, если любая точка внутри его может принимать граничные значения, то есть, если x-любая точка на этом интервале, то x может принять значения и a и b. Интервал (a,b) называется открытым, если любая точка внутри его не может принимать граничные значения. И ,наконец, интервал $(a,b]$ или интервал $[a,b)$ называются полу-открытыми слева или справа. Пусть $x \in (a,b)$. Знак $\in$ – означает слово принадлежит и поскольку интервал (a,b) открытый, то существует такое число Δx такое, что $x+\Delta x \in (a,b)$. Тогда можно составить такое выражение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, которое с учётом того, что функция $f(x)$ на указанном интервале будет непрерывна, может иметь предел $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Этот предел называется первой производной или просто производной функции $f(x)$ по x на интервале (a,b). Теперь рассмотрим производные некоторых функций. Пусть функция $f(x)=c(const)$. Тогда, очевидно что и $f(x+\Delta x)=c(const)$ и тогда числитель выражения $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ равен нулю и поэтому любой предел этого выражения равен нулю. Итак мы получили, что $c'=0$. Пусть функция $f(x)=x^n$. Тогда имеем $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$ и затем согласно выражению $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ пишем $\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$. Для того чтобы найти предел этого выражения заметим, что выражение в скобках, стоящее в числителе представляет собой бином Ньютона. Помните $(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}(\frac{n}{k})x^{n-k}a^k$. В нашем случае это выражение будет выглядеть так $(x+\Delta x)^n=\sum_{k=0}^{n}(\frac{n}{k})x^{n-k}\Delta x^k$. $(x^n)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(\frac{n}{k})x^{n-k}\Delta x^k-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\frac{n}{k})x^{n-k}\Delta x^{k-1}=nx^{n-1}$.

И $x'=1$. Далее $(e^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\Delta x}{n})^n-1]=$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\lim_{n\to\infty}(1+\sum_{k=1}^{n}(\frac{n}{k})(\frac{\Delta x}{n})^k)-1]=e^x\lim_{n\to\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\sum_{k=2}^{n}(\frac{n}{k})(\frac{\Delta x}{n})^k}{\Delta x}=$$

$=e^x\lim_{n\to\infty}\lim_{\Delta x\to 0}(1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{n}{k})(\frac{\Delta x}{n})^{k-1})=e^x\lim_{n\to\infty}(1+0)=e^x$. Таким образом мы получили очень важное соотношение, что $(e^x)'=e^x$. При его выводе мы использовали следующие правила вычисления пределов, о которых мы упоминали выше: 1. Предел постоянной величины

- это постоянная. 2. Постоянную можно выносить за знак предела. 3.Предел суммы есть сумма пределов. 4. Предел произведения- это произведение пределов. Пусть теперь функция $f(x)$ будет иметь следующий вид $f(\varphi(x))$, то есть функция f зависит от функции φ, которая в свою очередь зависит от x. Найдём $[f(\varphi(x))]' = \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\varphi+\Delta\varphi)-f(\varphi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{f(\varphi+\Delta\varphi)-f(\varphi)}{\Delta x}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi} =$

$= f'(\varphi)\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = f'(\varphi)\varphi'(x)$. Эта формула нам поможет в вычислении производной от $\ln x$. Напомню, что это натуральный логарифм, основанием которого служит замечательное число e. Итак пусть $y = \ln x$. Тогда $x = e^y$. Теперь возьмём производные от обоих частей этого равенства. С учётом сказанного выше получим, $1 = e^y y'$. И тогда $y' = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$. То есть производная от натурального логарифма выражается так просто. Именно поэтому, начиная примерно с середины 20 века никакие другие логарифмы, в том числе казалось бы такие удобные как десятичные, в математике не рассматриваются. Они просто, как говорят, морально устарели. Некоторые математики идут ещё дальше и вместо $\ln x$ пишут $\log x$, подразумевая под этим одно и то же. Точно также никакая другая показательная функция, кроме $e^x = \exp(x)$ не рассматривается, так как она тоже морально устарела. Мы рассматривали выше производную от степенной функции x^n, где показатель степени –натуральное число. А теперь рассмотрим производную от функции x^α, где показатель степени любое действительное число. Итак пусть $y = x^\alpha$. Возьмём от обеих частей этого равенства логарифм $\ln y = \alpha \ln x$ и далее возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате получим $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\alpha}{x}$; $y' = \dfrac{\alpha}{x} y = \dfrac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Таким образом мы получили, что каким бы ни был действительным числом показатель степени, формула для производной остаётся прежней. Как Вы помните, из теоремы Пифагора следует, что $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. А теперь возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате имеем $\sin(x)\sin'(x) + \cos(x)\cos'(x) = 0$. Заметим, что если функ-ция $y(x)$ возрастает на каком интервале, то на этом же интервале производная от этой функции $y'(x) > 0$, а если убывает, то $y'(x) < 0$. Это следует из определения производной $y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. И поэтому на интервале $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \sin'(x) \ge 0, \cos'(x) \le 0.$ На интервале $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi; \sin'(x) \le 0, \cos'(x) \le 0.$ на интервале $\pi \le x \le 3\dfrac{\pi}{2}; \sin'(x) \le 0, \cos'(x) \le 0.$ На интервале $3\dfrac{\pi}{2} \le x \le 2\pi; \sin'(x) \ge 0, \cos'(x) \ge 0.$ Сопоставляя эти соотношения с выражением $\sin(x)\sin'(x) + \cos(x)\cos'(x) = 0$, получим $\sin'(x) = \cos(x)$, а $\cos'(x) = -\sin(x)$. Затем запишем следующую зависимость $y = \cos(x) + i\sin(x)$, где $i = \sqrt{-1}$ и далее возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате получим $y' = -\sin(x) + i\cos(x)$, откуда следует, что $i\,y' = -y$ или $\dfrac{y'}{y} = i.$ Выражение слева нам уже встречалось- это производная от $\ln(y)$. Здесь заметим, что точно также будет выглядеть производная и от функции $\ln(\dfrac{y}{c})$, где c – любая постоянная. И поэтому имеем $\ln(\dfrac{y}{c}) = ix; y = ce^{ix}$. Так как $y(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1,$ то $c = 1.$ И окончательно $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$. Вот мы и получили эту замечательную формулу, о которой много раз говорили выше. Именно так эту формулу впервые вывел Леонард Эйлер. Но такой вывод, как говорят современные математики, в целом правилен, но недостаточно строг. Дело в том, что при выводе производных мы всё время упоминали только действительные числа, а здесь появляются комплексные и надо ввести соответствующие оговорки, по поводу которых мы отсылаем любознательного читателя к специальной литературе. Пусть мы имеем две непрерывные функции $U(x)$ и $V(x)$. Рассмотрим производную от произведения этих двух функций.

$$(UV)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x)V(x+\Delta x) - U(x)V(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x)V(x+\Delta x) - U(x)V(x+\Delta x) + U(x)V(x+\Delta x) - U(x)V(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} V(x+\Delta x)\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} U(x)\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} V(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} + U(x)\lim_{\Delta x\to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} =$$

$$= V(x)U'(x) + U(x)V'(x).$$

Используя эту формулу, найдём производную от функции $tg(x)$

$$tg'(x) = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = (\sin(x)\cos^{-1}(x))' = \cos(x)\cos^{-1}(x) + \sin(x)(-1\cos^{-2}(x)(-\sin(x))) =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

А затем производную от функции $ctg(x)$

$$ctg'(x) = (tg^{-1}(x))' = -tg^{-2}(x)\cos^{-2}(x) = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)} = -\sin^{-2}(x).$$

И далее

$$\sec'(x) = (\cos^{-1}(x))' = -\cos^{-2}(x)(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = tg(x)\sec(x).$$

$$\cos ec'(x) = (\sin^{-1}(x))' = -\sin^{-2}(x)\cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -ctg(x)\cos ec(x).$$

Если $y = \arcsin(x),$ то $x = \sin(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства. Тогда получим $1 = \cos(y)\,y'$ и $y' = \dfrac{1}{\cos(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Если $y = \arccos(x)$, то $x = \cos(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства. Тогда получим $1 = -\sin(y)\,y'$ и $y' = \frac{-1}{\sin(y)} = = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Если $y = arctg(x)$, то $x = tg(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства. Тогда получим $1 = \cos^{-2}(y)\,y'$ и $y' = \cos^2(y) = \frac{1}{\sec^2(y)} = = \frac{1}{1+tg^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$.

Если $y = arcctg(x)$, то $x = ctg(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства. Тогда получим $1 = -\sin^{-2}(y)\,y'$ и $y' = -\sin^{-2}(y) = \frac{-1}{\cos ec^2(y)} = \frac{-1}{1+ctg^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2}$. Если $y = arc\sec(x)$, то $x = \sec(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства.

Тогда получим $1 = \frac{\sin(y)}{\cos^2(y)}y'$ и $y' = \frac{1}{\sec^2(y)\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{\sec(y)}{\sec^2(y)\sqrt{\sec^2(y)-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. Если $y = \arccos ec(x)$, то $x = \cos ec(y)$ и после возьмём производную от обеих частей этого равенства.

Тогда получим $1 = \frac{-\cos(y)}{\sin^2(y)}y'$ и $y' = \frac{-1}{\cos ec^2(y)\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{-\cos ec(y)}{\cos ec^2(y)\sqrt{\cos ec^2(y)-1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Заменяя в выражении $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$ x на $-x$, получим $\cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}$. Возможно Вы помните, что $\cos(x)$ – чётная функция, а $\sin(x)$ – нечётная функция, что означает, что $\cos(-x) = \cos(x), \sin(-x) = -\sin(x)$. Поэтому получим $\cos(x) - i\sin(x) = e^{-ix}$.

Складывая полученное выражение с исходным, найдём $\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$. А вычитая, будем иметь $\sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$. Напомню, что $\exp(ix) = e^{ix}, \exp(-ix) = e^{-ix}$. По аналогии с этими двумя выражения, так называемые гиперболические косинусы и синусы выглядят так. $ch(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}; sh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$. И тогда

$ch'(x) = \frac{\exp'(x)+\exp'(-x)}{2} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = sh(x)$.

$sh'(x) = \frac{\exp'(x)-\exp'(-x)}{2} = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = ch(x)$. Мы уже знаем как найти производную от частого двух функции.

Действительно $(\frac{U(x)}{V(x)})' = (U(x)V^{-1}(x))' = U'(x)V^{-1}(x) - U(x)V^{-2}(x)V'(x) = \frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V^2(x)}$.

И тогда

$$th'(x) = (\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)})' =$$

$$= \frac{(\exp(x)-\exp(-x))'(\exp(x)+\exp(-x)) - (\exp(x)-\exp(-x))(\exp(x)+\exp(-x))'}{(\exp(x)+\exp(-x))^2} =$$

$$= \frac{(\exp(x)+\exp(-x))^2 - (\exp(x)-\exp(-x))^2}{(\exp(x)+\exp(-x))^2} = \frac{\exp(2x)+2+\exp(-2x)-\exp(-2x)+2-\exp(-2x)}{(\exp(x)+\exp(-x))^2} =$$

$$= \frac{4}{(\exp(x)+\exp(-x))^2} = \frac{1}{ch^2(x)}.$$

$$cth'(x) = (\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{\exp(x)-\exp(-x)})' =$$

$$= \frac{(\exp(x)+\exp(-x))'(\exp(x)-\exp(-x)) - (\exp(x)+\exp(-x))(\exp(x)-\exp(-x))'}{(\exp(x)-\exp(-x))^2} =$$

$$= \frac{(\exp(x)-\exp(-x))^2 - (\exp(x)+\exp(-x))^2}{(\exp(x)-\exp(-x))^2} = \frac{\exp(2x)-2+\exp(-2x)-\exp(-2x)-2-\exp(-2x)}{(\exp(x)-\exp(-x))^2} =$$

$$= \frac{-4}{(\exp(x)-\exp(-x))^2} = \frac{-1}{sh^2(x)}.$$

При этом попутно мы получили ещё одну полезную для нас формулу $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$. Пусть $y = Arsh(x)$. Тогда $sh(y) = x$ и затем возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате имеем $ch(y)y' = 1, y' = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Пусть $y = Arch(x)$. Тогда $ch(y) = x$ и затем возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате имеем $sh(y)y' = 1, y' = \frac{1}{\sqrt{ch^2(y)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Найдём ещё одну полезную для нас формулу. $th^2(x) = (\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)})^2 = \frac{\exp(2x)-2+\exp(-2x)+4-4}{\exp(2x)+2+\exp(-2x)} =$

$$= 1 - \frac{4}{\exp(2x)+2+\exp(-2x)} = 1 - \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - \frac{1}{1+sh^2(x)} = \frac{1}{cth^2(x)}.$$

Пусть $y = Arth(x)$. Тогда $th(y) = x$ и затем возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате имеем $\frac{1}{ch^2(y)} y' = 1, y' = \frac{1}{1-th^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$. Пусть $y = Arcth(x)$. Тогда $cth(y) = x$ и затем возьмём производную от обеих частей этого равенства. В результате имеем $\frac{-1}{sh^2(y)} y' = 1, y' = \frac{-1}{1-cth^2(y)} = \frac{-1}{1-x^2}$. На этом, пожалуй, и можно закончить список производных от основных элементарных функций. Мы поясним ниже какие функции традиционно называются неэлементарными. А пока ответим на вопрос: что же делать с полученной таблицей производных. Некоторые рекомендуют её просто запомнить, как таблицу умножения, а некоторые, в том числе и автор этих строк, советуют научиться её выводить. Пусть читатель сам решает этот вопрос. Если можно взять первую производную от функции, то может существовать и $n-$ая производная. Если первую производную обозначают так y', то $n-$ую производную обозначают следующим образом $y^{(n)}$, для того чтобы не путать её с $n-$ой степенью. Тогда $(x^{\alpha})^{(n)} = x^{\alpha-n}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$. $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

Точно такой же результат будет и при вычислении $\ln^{(n)}(kx), k > 0$.
$\exp^{(n)}(kx) = k^n \exp(kx)$. $\sin^{(n)}(kx) = k^n \sin(kx + \frac{n\pi}{2})$. $\cos^{(n)}(kx) = k^n \cos(kx + \frac{n\pi}{2})$.

И $(U(x)V(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (\frac{n}{k}) U^{(n-k)}(x) V^{(k)}(x)$. Здесь нулевая производная от функции означает саму функцию. Как видите, производная от произведения двух функций напоминает формулу бинома Ньютона с той лишь разницей, что степени заменены на производные. Я советую читателям не запоминать эти формулы, а вывести их самостоятельно. Уверяю Вас, что знаний для этого вполне достаточно. А теперь вернёмся ещё раз к тому, что собой представляет производная и для чего она нужна. Мы уже говорили, что по знаку первой производной можно определить возрастает или убывает сама функция. Это следует из самого определения производной $y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Действительно, если $y'(x) > 0$, то при движении по числовой оси слева направо $f(x + \Delta x) > f(x)$, что означает, что функция возрастает. Образно говоря мы, следуя за нашей функцией, поднимаемся в гору. И наоборот, если $y'(x) < 0$, то при движении по числовой оси слева направо $f(x + \Delta x) < f(x)$, что означает, что функция убывает. Образно говоря мы, следуя за нашей функцией, спускаемся с горы. Если же при $x < x_0$, $y'(x) > 0$, а при $x > x_0$, $y'(x) < 0$, то точка x_0 характерна тем, что мы переходим от возрастания функции к её убыванию. Образно говоря мы, следуя за нашей функцией, поднимаемся до вершины горы и затем начинаем опускаться. И обратно .Если же при $x < x_1$, $y'(x) < 0$, а при $x > x_1$, $y'(x) > 0$, то точка x_1 характерна тем, что мы переходим от убывания функции к её возрастанию. Образно говоря мы, следуя за нашей функцией, опускаемся до глубины впадины и затем начинаем подниматься. Тогда точка x_0 называется точкой максимума, а точка x_1 называется точкой минимума нашей функции. В этих двух точках $f'(x)$ обращается в ноль. Эти точки называются подозрительными на экстремум, что означает либо максимум либо минимум. После того как найдена точка, подозрительная на экстремум, можно определить к какому типу относится эта точка. Если слева от этой точки производная больше нуля, а справа меньше, то это точка максимума, и наоборот, если справа от этой точки производная меньше нуля, а справа больше, то это точка минимума. Пусть $y = f(x)$ некоторая непрерывная кривая заданная на интервале $x \in (a,b)$. Разобьём этот интервал на отрезки длиной Δx, которые будем считать бесконечно малыми. Нам надо далее чётко определить, какую величину мы будем считать бесконечно малой. Математики говорят, что бесконечно малой называется такая величина, которая меньше любого наперёд заданного числа. С точки зрения физики- это не так. Не может быть количество вещества, я подчёркиваю вещества, меньше чем атом, не может быть количество энергии меньше чем квант. В математике такой формализм на данном этапе её развития оправдан. Конечно, с этим можно спорить, но пока давайте вынесем эти споры, как говорят, за скобки и продолжим. Тогда

Δx - бесконечно малая величина первого порядка малости, Δx^2-бесконечно малая величина второго порядка малости, которая существенно меньше, чем бесконечно малая величина первого порядка малости. Бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy. И так как эти величины бесконечно малы, то с точностью до бесконечно малой второго порядка малости можно принять, что между этими двумя приращениями существует линейная связь, то есть также как в уравнении для прямой линии будем иметь $\Delta y = k\Delta x.$ И этот коэффициент равен $k = y'(x).$ В дальнейшем и всюду ниже бесконечно малое приращение аргумента будем обозначать так dx и называть дифференциалом аргумента, а линейную часть приращения функции обозначать так dy и называть дифференциалом функции. Таким образом между дифференциалом функции и дифференциалом аргумента существует следующая линейная связь $dy = y'dx.$ Отсюда следует, что для того чтобы дифференцировать какую либо функцию, надо взять от неё производную и умножить эту производную на dx. Например, $d(\sin(x))$ будет равно $d(\sin(x)) = \cos(x)dx.$ В этом и заключается операция дифференцирования. На первый взгляд кажется, что ничего нового операция дифференцирования по сравнению с операцией взятия производной не даёт, так как свойства и той и другой операции одни и те же, а вся разница только в том, что полученную производную надо всего лишь умножить на некую постоянную dx. Но это не так, и для подтверждения этого попробуем вычислить длину кривой $y(x)$ от некоей точки $x = a$ до другой точки $x = b$. Для этого заметим, что бесконечно малая дуга этой кривой dl по теореме Пифагора имеет вид $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$ И теперь надо просуммировать все эти маленькие кусочки дуги от точки от точки $x = a$ до точки $x = b.$ Тогда длина дуги кривой будет равна $l = \sum\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$ Но в 16-ом и 17-ом веках знак суммы изображался не греческой буквой а латинской и выглядел так $l = \mathop{S}\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$ Затем тогда же заметили, что это необычная сумма, а сумма бесконечно малых, а их должно быть бесконечно много и поэтому латинскую букву S вытянули и вверх и вниз и получился совсем новый символ, который назвали интегралом и теперь окончательно запишем длину дуги кривой с использованием нового для нас символа $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$ Мы с вами получили новое математическое действие обратное нет **не взятию производной,** а именно **дифференцированию.** Таким образом операцию дифференцирования следует выделять, как **принципиально** специальную операцию наряду с процессом взятия производной. Кстати такой интеграл называется определённым, потому что он имеет верхний и нижний предел, но есть и неопределённый интеграл, который обозначается так $\int$. и действие которого в точности обратно действию дифференцирования. Таким образом мы получили, что $\int dx = x + c.$ Действительно продифференцируем обе части этого выражения $d(\int dx) = d(x + c).$ Слева будем иметь

dx, так как дифференцирование – это действие обратное интегрированию, а справа имеем $d(x+c)=(x+c)'dx=dx.$ То есть как и следовало ожидать мы в итоге получили тождество. А теперь вернёмся к определённому интегралу и вычислим длину отрезка прямой, проходящего через две точки $(a,y(a))$ и $(b,y(b)).$ Уравнение такой прямой имеет, как Вы помните, вид $\frac{y-y(a)}{y(b)-y(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$ Никаких проблем не будет для того чтобы вычислить длину отрезка такой прямой, но результат будет, нет не сложным, но громоздким и поэтому поступим проще и положим $y(a)=a$ и $y(b)=b.$ В этом случае имеем $y=x$ и $y'=1$. Тогда $l=\int_a^b\sqrt{1+1}dx=\sqrt{2}(x+c)I_a^b=\sqrt{2}(b-a).$ Здесь символ $(x+c)I_a^b$ означает, что неизвестное x принимает значение верхнего предела со знаком $+$, минус значение нижнего предела. При этом постоянная c сокращается и мы в дальнейшем при вычислении определённых интегралов её писать не будем. В результате мы получили длину гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого одинаковы, а длина каждого из них равна $b-a.$ Это один из примеров применения дифференциалов и интегралов, относящихся к области элементарной геометрии. Приведём ещё пример, относящийся к физике, а точнее к механике. Общеизвестно, что скорость любого объекта вычисляется так: надо путь, пройденный этим объектом, называемым часто материальной точкой, разделить на время: $V=\frac{S}{t}$, где $S-$это пройденный путь, а $t-$это время, за которое указанный путь пройден. Но так мы вычислим только среднюю скорость этой материальной точки. Для того чтобы вычислить скорость в данный момент времени надо вычислить предел $V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t).$ Заметим, что производная по времени в механике обозначается не штрихом, а точкой, то есть $V=\dot{S}(t).$ Тогда, чтобы вычислить весь пусть пройденный материальной точкой надо сложить бесконечное число малых путей $dS=V(t)dt,$ то есть, как мы уже знаем, вычислить интеграл $S=\int V(t)dt$ Так как скорость меняется, то можно вычислить ускорение по формуле $a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=\dot{V}(t)=\ddot{S}(t).$ Здесь две точки над S означают вторую производную по времени. А теперь рассмотрим движение материальной точки с постоянным ускорением, $a=const.$ Тогда $V(t)=\int adt=at+c.$ Пусть в начальный момент скорость материальной точки равна $V(o)=V_0=const.$ Тогда постоянная $c=V_0$. И скорость материальной точки при равноускоренном движении составит $V(t)=at+V_0$. Путь, пройденный этой точкой, за время t будет равен $S=\int V(t)dt=\int(at+V_0)dt=a\frac{t^2}{2}+V_0t+c.$ В начальный момент указанная точка прошла путь, равный нулю и поэтому постоянная $c=0.$ И тогда окончательно : путь, пройденный материальной точкой, двигающейся с постоянным ускорением за время t равен

$S(t) = a\frac{t^2}{2} + V_0 t.$ Вам безусловно знакома эта формула из начального учебника по физике, и некоторым из Вас, как ,впрочем и мне, долгое время было непонятно откуда взялся множитель $\frac{1}{2}.$ А теперь, освоив самые азы интегрального исчисления, это, как мне кажется, стало очевидным. То ,что мы взяли этот интеграл правильно ,легко проверить, продифференцировав полученное выражение: $dS = (a\frac{2t}{2} + V_0)dt = (at + V_0)dt = dV(t).$ Попутно, прочитав таблицу производных справа налево и, не забыв при этом, что такое дифференциал в математике, а не в автомобиле, мы получим $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$ где $\alpha -$ произвольное действительное число.

Действительно $d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^\alpha dx = x^\alpha dx.$ То есть под интегралом вместо выражение $x^\alpha dx$, можно писать $d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}).$ И тогда вместо такого интеграла $\int x^\alpha dx$, будем иметь такой $\int d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}).$ Но мы уже знаем, что от дифференциала какой либо функции –есть сама эта функция плюс постоянная и поэтому пишем $\int d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$ Может быть некоторым из Вас показалось, что мы в данном случае занимаемся переливанием из пустого в порожнее, но это не так и мы покажем, что весь процесс взятия интеграла заключается в том, чтобы создать с помощью тождественных преобразований под интегралом дифференциал какой либо функции. Между прочим мы, как говорится, по ходу дела получили ещё одно полезное свойство: из под интеграла можно выносить постоянную, которая является сомножителем подынтегрального выражения. В данном случае таким постоянным было $\frac{1}{\alpha+1}$. Итак пусть нам нужно взять ,например, следующий интеграл $\int \cos(x)\,dx$. Из таблицы производных и с учётом того, что мы знаем о дифференцировании, подынтегральное выражение можно преобразовать так $\cos(x)dx = d(\sin(x))$ и тогда $\int d(\sin(x)) = \sin(x) + c$, так как повторюсь интегрирование-это действие обратное дифференцированию. Мне могут возразить, что ничего нового я не сделал, а просто переписал таблицу производных справа налево. Для того чтобы опровергнуть это утверждение, рассмотрим другой интеграл $\int \sin^2(x)\,dx.$ В правой части таблицы производных такой функции, которая стоит здесь под интегралом, нет. Действительно $d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha}dx = x^{\alpha}dx.$ То есть под интегралом вместо выражение $x^{\alpha}dx$, можно писать $d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}).$ И тогда вместо такого интеграла $\int x^{\alpha}dx$, будем иметь такой $\int d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}).$ Но мы уже знаем, что от дифференциала какой либо функции –есть сама эта функция плюс постоянная и поэтому пишем $\int d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$ Может быть некоторым из Вас показалось, что мы в данном случае занимаемся переливанием из пустого в порожнее, но это не так и мы покажем, что весь процесс взятия интеграла заключается в том, чтобы создать с помощью тождественных преобразований под интегралом дифференциал какой либо функции. Между прочим мы, как говорится, по ходу дела получили ещё одно полезное свойство: из под интеграла можно выносить постоянную, которая является

сомножителем подынтегрального выражения. В данном случае таким постоянным было $\frac{1}{\alpha+1}$. Итак пусть нам нужно взять ,например, следующий интеграл $\int \cos(x)\,dx$. Из таблицы производных и с учётом того, что мы знаем о дифференцировании, подынтегральное выражение можно преобразовать так $\cos(x)dx = d(\sin(x))$ и тогда $\int d(\sin(x)) = \sin(x) + c$, так как повторюсь интегрирование-это действие обратное дифференцированию. Мне могут возразить, что ничего нового я не сделал, а просто переписал таблицу производных справа налево. Для того чтобы опровергнуть это утверждение, рассмотрим другой интеграл $\int \sin^2(x)\,dx.$ В правой части таблицы производных такой функции, которая стоит здесь под интегралом, нет. Итак начнём производить тождественные преобразования с подынтегральной функцией. Имеем $\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx =$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\,d(2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int d(\sin(2x)) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + c.$ В начале проверим :верный ли получился ответ. Для этого продифференцируем полученное выражение $d(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+c)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos(2x)\times 2)dx=\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\sin^2(x)\,dx.$ И мы получили исходное подынтегральное выражение. Это значит, что наш результат верен. При вычислении последнего интеграла мы использовали следующие правила интегрирования: 1. Интеграл от суммы равен сумме интегралов. 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и вносить под знак дифференциала. Последним правилом мы воспользовались, когда заменили интеграл $\frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx$ на интеграл $\frac{1}{4}\int\cos(2x)\,d(2x)$. Я рекомендую читателям рассмотреть ещё раз таблицу производных и выписать её справа налево, не забыв при этом про dx и про произвольную постоянную c. Я же хотел обратить внимание на самый простой интеграл $\int e^x dx = e^x + c.$ И мы ещё раз убедились в том каким замечательным числом является число $e.$ А теперь рассмотрим следующее обобщение упомянутого выше интеграла $\int\sin^{2n}(x)\,dx=\int(\frac{1-\cos(2x)}{2})^n dx=\frac{1}{2^n}\int\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\frac{n}{k})\cos^k(2x)dx=$

$$=\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\frac{n}{k})\int\cos^k(2x)d(2x).$$

И дело свелось к вычислению интеграла $\int\cos^k(y)\,dy,$ где нами произведена подстановка $y=2x$, а $k\le n.$. Если $k-$чётное число, то есть $k=2m,$ то

$$\int\cos^{2m}(y)\,dy=\int(\frac{1+\cos(2y)}{2})^m dy=\frac{1}{2^m}\int\sum_{k=0}^{m}(\frac{m}{k})\cos^k(2y)dy=\frac{y}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(\frac{m}{k})\int\cos^k(2y)d(2y).$$

И дело свелось к вычислению предыдущего интеграла с той лишь разницей, что m в два раза меньше чем n и эту процедуру будем повторять до тех пор, пока не придём к нечётному числу или к нулю. Если мы придём к нулю, то такой интеграл мы только что вычислили и он равен $\frac{x}{2^l}+c,$ где $l-$некое целое число, которое зависит от того сколько раз мы будем выполнять описанную выше процедуру. Если же мы придём к нечётному числу, то тогда тогда надо рассмотреть интеграл $\int\cos^{2l+1}(x)\,dx=\int\cos^{2l}(x)\,d(\sin(x))=$

$$=\int(1-\sin^2(x))^l\,d(\sin(x))=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k(\frac{l}{k})\int\sin^{2k}(x)\,d(\sin(x))=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k(\frac{l}{k})\frac{1}{(2k+1)}\int d(\sin^{2k+1}(x))=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k(\frac{l}{k})\frac{1}{(2k+1)}\sin^{2k+1}(x)+c.$$

Отсюда следует, что интеграл от целых положительных степеней $\sin(x)$ или $\cos(x)$.берётся, то есть, как говорят математики, выражается через комбинацию элементарных функций. Теперь рассмотрим интеграл от $tg(x)$ и от $ctg(x)$.

$$\int tg(x)dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\int\frac{d(\cos(x))}{\cos(x)}=-\int d(\ln(\cos(x))=-\ln(\cos(x))+c.$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл

$$\int ctg(x)dx=\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx=\int\frac{d(\sin(x))}{\sin(x)}=\int d(\ln(\sin(x))=\ln(\sin(x))+c.$$

В некоторых справочниках рекомендуется вместо $\ln(\cos(x))$ писать $\ln|\cos(x)|$, а вместо

$\ln(\sin(x))$ писать $\ln|\sin(x)|$ имея в ввиду, что под знаком логарифма должно быть обязательно положительное число. Строго говоря это так, но при условии, что мы имеем дело только с действительными числами. Теперь рассмотрим интеграл от $\cos ec(x)$ и от $\sec(x)$.

$$\int \cos ec(x)dx = \int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{2tg(\frac{x}{2})} = \int \frac{d(tg(\frac{x}{2}))}{tg(\frac{x}{2})} = \int d(\ln(tg(\frac{x}{2})) = \ln(tg(\frac{x}{2})) + c.$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1 - tg^2(\frac{x}{2})} = 2\int \frac{d(tg(\frac{x}{2}))}{1 - tg^2(\frac{x}{2})}.$$

И вот здесь напрашивается само собой заменить $tg(\frac{x}{2})$ каким-то другим символом и мы пришли к одному из самых действенных методов вычисления интегралов- методу замены переменных. Итак пусть $tg(\frac{x}{2}) = t$. И дело свелось к вычислению следующего интеграла $2\int \frac{dt}{1-t^2}$. Заметим, что под интегралом стоит так называемая рациональная дробь (рациональной дробью называется частное от деления многочлена $n-$ой степени на многочлен $m-$ой степени, причём эти степени не обязательно равны). В нашем случае в числителе стоит многочлен или полином, что одно и то же, нулевой степени, а в знаменателе стоит полином второй степени. Возможно вы помните и, мы об этом говорили, что полином любой степени можно разложить на множители, если знать все его корни. Вот здесь нам и пригодились знания о решении уравнений второй, третьей и последующих степеней. В нашем случае в знаменателе рациональной дроби стоит полином второй степени, и дело свелось к решению простейшего квадратного уравнения $t^2 - 1 = 0,$ корни которого равны $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. В результате вместо $\frac{1}{1-t^2}$ пишем $\frac{1}{(1-t)(1+t)}$ и тогда в случае вещественных корней можно найти такие два вещественных числа A_1 и A_2, что $\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A_1}{1-t} + \frac{A_2}{1+t} = \frac{A_1(1+t) + A_2(1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{t(A_1 - A_2) + A_1 + A_2}{1-t^2}$. Теперь обратите внимание на то, что в что в знаменателе и слева и справа стоит один и тот же полином второй степени, а в числителе слева стоит полином нулевой степени и справа также должен стоять полином нулевой степени, так как два полинома равны между собой тогда и только тогда, когда степени их равны и коэффициенты при степенях то же равны. Отсюда следует, что $A_1 = A_2$ и $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$. С учётом сказанного интеграл

$$2\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1-t}+\int\frac{dt}{1+t}=-\int\frac{d(1-t)}{1-t}+\int\frac{d(1+t)}{1+t}=-\int d\ln(1-t)+\int d\ln(1+t)=$$
$$=-\ln(1-t)+\ln(1+t)+c=\ln(\frac{1+t}{1-t})+c.$$

А теперь давайте проверим верен ли наш результат

$d(\ln(\frac{1+t}{1-t})+c)=\frac{1-t}{1+t}\frac{1(1-t)+1(1+t)}{(1-t)^2}dt=2\frac{dt}{1-t^2}$, то есть на данном этапе всё правильно.

И чтобы получить окончательный результат вернёмся к старым обозначениям $t=tg(\frac{x}{2})$.

В итоге он выглядит так $\int\sec(x)dx=\ln(\frac{1+tg(\frac{x}{2})}{1-tg(\frac{x}{2})})+c$. И его то же желательно проверить

$$d(\ln(\frac{1+tg(\frac{x}{2})}{1-tg(\frac{x}{2})})+c)=\frac{1-tg(\frac{x}{2})}{1+tg(\frac{x}{2})}\frac{\dfrac{1-tg(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}+\dfrac{1+tg(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}}{(1-tg(\frac{x}{2}))^2}dx=\frac{dx}{(1-tg^2(\frac{x}{2}))\cos^2(\frac{x}{2})}=$$
$$=\frac{dx}{(1-\dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})})\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}=\frac{dx}{\cos(x)}=\sec(x)\,dx.$$

Теперь мы окончательно убедились в том, что получили правильный результат. Заодно мы удостоверились в том как эффективен и удобен метод замены переменной при взятии интегралов и ещё, что интеграл от рациональной дроби всегда можно взять и об этих двух моментах расскажем поподробнее. Оказывается замена $tg(\frac{x}{2})=t$ позволяет вычислить интеграл от любой рациональной комбинации любых прямых тригонометрических функций. Это означает, что теоретически возможно взять вот такой интеграл

$\int R(\sin(x),\cos(x),tg(x),ctg(x),\sec(x),\operatorname{cosec}(x))dx$. Здесь под рациональной комбинацией понимается рациональная дробь от входящих в нее составляющих, например в числителе сумма целых (обязательно целых) положительных степеней прямых тригонометрических функций, а в знаменателе аналогичный полином, составленный из таких же функций. Если Вы помните, я обращал Ваше внимание на то, что любую прямую тригонометрическую функцию можно выразить через $tg(\frac{x}{2})$. Там же говорилось, что это нам в дальнейшем пригодится и вот теперь это время настало. Тогда рассматриваемый интеграл можно записать так. $\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2},\frac{1-t^2}{2t},\frac{1+t^2}{1-t^2},\frac{1+t^2}{2t})\frac{2dt}{1+t^2}$. Здесь, каждая из тригонометрических функций, расположенная под знаком R выражена через $tg(\frac{x}{2})$, а затем производится замена $tg(\frac{x}{2})=t$. Так что всё, что стоит под знаком R, как мне кажется понятно. Далее продифференцируем обе части выражения $tg(\frac{x}{2})=t$. В результате получим

$\frac{dx}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{dx}{2}(1+tg^2(\frac{x}{2}))=\frac{dx}{2}(1+t^2)=dt.$ И дело свелось к интегралу от рациональной дроби, где в числителе стоит один полином конечной степени от t, а в знаменателе другой полином также конечной степени. Если степень у полинома, представляющего собой числитель, больше степени полинома, представляющего собой знаменатель, то можно разделить числитель на знаменатель и выделить целую часть. Мы это уже выше проделывали, но для закрепления материала проделаем ещё раз. Итак пусть дело, к примеру свелось к интегралу $\int\frac{t^5+2t^4+3t^3+4t^2+5t+6}{t^3+3t^2+4t+5}dt.$ Разделим полином в числителе на полином в знаменателе

$$
\begin{array}{l|l}
t^5+2t^4+3t^3+4t^2+5t+6 & \underline{t^3+3t^2+4t+5} \\
-t^5-3t^4-4t^3-5t^2 & t^2-t+2 \\
\quad -t^4-t^3-t^2+5t & \\
\quad\ t^4+3t^3+4t^2-5t & \\
\qquad 2t^3+3t^2+0t+6 & \\
\qquad -2t^3-6t^2-8t-10 & \\
\qquad\quad -3t^2-8t-4 &
\end{array}
$$

В результате исходный преобразуется следующим образом

$$\int\frac{t^5+2t^4+3t^3+4t^2+5t+6}{t^3+3t^2+4t+5}dt=\int(t^2-t+2)dt-\int\frac{3t^2+8t+4}{t^3+3t^2+4t+5}dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-$$

$-\int\frac{3t^2+8t+4}{t^3+3t^2+4t+5}dt.$ И дело свелось к вычислению интеграла от рациональной дроби, у которой степень полинома в числителе меньше, чем степень полинома в знаменателе. Далее надо разложить знаменатель этой дроби на множители, для чего надо найти корни уравнения $t^3+3t^2+4t+5=0$. Мы уже, как говорится, проходили решение такого уравнения и, если помните такое решение получили ещё в 17 веке независимо друг от друга итальянцы Кардано и Тарталья. Теоретическое значение этого решения огромно, но ,как мы уже напоминали, на практике оно фактически не используется. Вначале заметим, что один действительный корень этого уравнения лежит в интервале $(-3,-2)$. Действительно, подставляя $t=-3$ в уравнение получим $-27+27-12+5<0$, а ,если подставить $t=-2$ в это же уравнение, то будем иметь $-8+12-8+5>0.$ И далее методом деления указанного интервала пополам, найдём, что с точностью до четырёх знаков после запятой один из корней этого уравнения равен $t_1 = -2.2135$. И тогда полином $t^3 + 3t^2 + 4t + 5$ делится без остатка на двучлен $t + 2.2135$. Действительно

$$
\begin{array}{l|l}
t^3 + 3t^2 + 4t + 5 & \underline{t + 2.2135} \\
-t^3 - 2.2135t^2 & t^2 + 0.7865t + 2.2591 \\
\quad 0.7865t^2 + 4t & \\
\quad -0.7865t^2 - 1.7409t & \\
\qquad\qquad 2.2591t + 5 & \\
\qquad\qquad -2.2591t - 5 & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

То есть $t^3 + 3t^2 + 4t + 5 = (t + 2.2135)(t^2 + 0.7865t + 2.2591)$.

И поэтому рациональную дробь можно представить так

$\frac{3t^2 + 8t + 4}{t^3 + 3t^2 + 4t + 5} = \frac{3t^2 + 8t + 4}{(t + 2.2135)(t^2 + 0.7865t + 2.2591)} = \frac{A}{t + 2.2135} + \frac{Bt + C}{t^2 + 0.7865t + 2.2591}$. Последнее требует пояснений: в знаменателе первой дроби стоит полином первой степени и из алгебры полиномов следует, что в числителе должен стоять степенью на единицу меньшей, то есть нулевой степени или константа; в знаменателе второй дроби стоит полином второй степени и значит в числителе должен стоять полином первой степени, который можно записать так $Bt + C$, где B и C пока неизвестные нам константы. А теперь начало и

конец предыдущего выражения можно записать так

$\frac{3t^2 + 8t + 4}{t^3 + 3t^2 + 4t + 5} = \frac{t^2(A + B) + t(0.7865A + 2.2135B + C) + A\,2.2591 + C\,2{,}2135}{(t + 2.2135)(t^2 + 0.7865t + 2.2591)}$. А теперь ещё раз

вспомним, что два полинома равны между собой тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что $A + B = 3$,

$0.7865A + 2.2135B + C = 8$ и $2.2591A + 2.2135C = 4$. Методом исключения найдём,

что $A = 0.1829, B = 2.8171, C = 1.6204$. Это проверяется непосредственно. Итак

$$\int \frac{3t^2 + 8t + 4}{t^3 + 3t^2 + 4t + 5} dt = 0.1829 \int \frac{dt}{t + 2.2135} + \int \frac{2.8171t + 1.6204}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt = 0.1829 \ln(t + 2.2135) +$$

$+ \int \frac{2.8171t + 1.6204}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt$. И дело свелось к вычислению последнего интеграла.

$$\int \frac{2.8171t + 1.6204}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt = 2.8171 \int \frac{t + 0.5752}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt = 1.4086 \int \frac{2t + 1.1504}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt =$$

$$= 1.4086 \int \frac{2t + 0.7865}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} dt + 0.5126 \int \frac{dt}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} = 1.4086 \int \frac{d(t^2 + 0.7865t + 2.2591)}{t^2 + 0.7865t + 2.2591} +$$

$$+0.5126\int\frac{dt}{t^2+0.7865t+0.1546+2.1045}=1.4086\ln(t^2+0.7865t+2.2591)+$$

$+0.5126\int\frac{d(t+0.3932)}{(t+0.3932)^2+2.1045}$. И очередной раз дело свелось к вычислению последнего интеграла , в котором мы сделаем замену $z=t+0.3932.$ Итак имеем интеграл

$0.5126\int\frac{dz}{z^2+2.1045}=0.5126\int\frac{dz}{z^2+1.4507^2}=0.3533\int\frac{d(\frac{z}{1.4507})}{(\frac{z}{1.4507})^2+1}$. И ещё одна замена $y=\frac{z}{1.4507}$ приводит этот интеграл к табличному виду

$$0.3533\int\frac{dy}{y^2+1}=0.3533\,arctg(y)=0.3533\,arctg(\frac{z}{1.4507})=0.3533\,arctg(\frac{t+0.3932}{1.4507}).$$

В результате исходный интеграл равен

$$\int\frac{t^5+2t^4+3t^3+4t^2+5t+6}{t^3+3t^2+4t+5}dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-0.1829\ln(t+2.2135)-1.4086\ln(t^2+0.7865t+2.2591)-$$

$-0.3533\,arctg(\frac{t+0.3932}{1.4507})+c.$ Пусть это выглядит несколько громоздко, но приведённый пример всё таки прост в том смысле, что все корни знаменателя различны, а как быть, если корни кратные, то есть одни и те же корни повторяются несколько раз. Например, рассмотрим такой интеграл $\int\frac{dx}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1}$, знаменатель подынтегрального выражения которого раскладывается на следующие множители

$x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1)^2$. То есть в данном случае указанный знаменатель имеет вещественный корень $x=1$ кратностью 2 , мнимый корень $x=i$ кратностью 2 и ещё один мнимый корень $x=-i$ то же кратностью 2. В этом случае рациональную дробь можно следующим образом разложить на множители

$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$. И действительно все эти коэффициенты можно найти. Приведём правую часть этого выражения к общему знаменателю. В результате имеем $\frac{A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)^2+(B_1x+C_1)(x-1)^2(x^2+1)+(B_2x+C_2)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{B_1x^5+(A_2-2B_1+C_1)x^4+(A_1+2B_1-2C_1+B_2)x^3+(2A_2-A_1-2B_1+2C_1+C_2-2B_2)x^2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}+$$

$$+\frac{(A_1+B_1-2C_1+B_2-2C_2)x+A_2-A_1+C_1+C_2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

И опять же ,два полинома равны между собой тогда и только тогда, когда коэффициенты при степенях обеих полиномов будут равны. В результате

$B_1=0$

$A_2-2B_1+C_1=0$

$A_1+2B_1-C_1+B_2=0$

$2A_2 - A_1 - 2B_1 + 2C_1 + C_2 - 2B_2 = 0$

$A_1 + B_1 - 2C_1 + B_2 - 2C_2 = 0$

$A_2 - A_1 + C_1 + C_2 = 1.$

Так как $B_1 = 0$, то имеем

$A_2 + C_1 = 0$

$A_1 - C_1 + B_2 = 0$

$2A_2 - A_1 + 2C_1 + C_2 - 2B_2 = 0$

$A_1 - 2C_1 + B_2 - 2C_2 = 0$

$A_2 - A_1 + C_1 + C_2 = 1.$

Отсюда $C_1 = -A_2$ и тогда получим

$A_1 + A_2 + B_2 = 0$

$-A_1 + C_2 - 2B_2 = 0$

$A_1 + 2A_2 + B_2 - 2C_2 = 0$

$-A_1 + C_2 = 1.$

Отсюда $C_2 = 1 + A_1$ и тогда будем иметь

$A_1 + A_2 + B_2 = 0$

$1 - 2B_2 = 0$

$2A_2 + B_2 - 2 - A_1 = 0.$

Отсюда $B_2 = \dfrac{1}{2}$ и тогда пишем

$A_1 + A_2 = -\dfrac{1}{2}$

$2A_2 - A_1 = \dfrac{3}{2}.$

Отсюда $A_2 = -\dfrac{1}{2} - A_1$. И окончательно $A_1 = -\dfrac{5}{6}, A_2 = \dfrac{1}{3}, B_1 = 0, B_2 = \dfrac{1}{2}, C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{6}.$

В результате рациональную дробь можно следующим образом разложить на множители

$\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \dfrac{-5}{6(x-1)} + \dfrac{1}{3(x-1)^2} - \dfrac{1}{3(x^2+1)} + \dfrac{3x+1}{6(x^2+1)^2}$. А значит

$$\int \frac{dx}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = -\frac{5}{6}\ln(x-1) - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} arctg(x) + \frac{1}{6}\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

И здесь нам придётся остановиться, потому что как вычислить последний интеграл ,мы пока ещё не знаем. Для этого вспомним чему равно дифференцирование произведения двух функций. Напомним, что $d(UV) = VdU + UdV$, а теперь проинтегрируем обе части этого выражения $\int d(UV) = \int VdU + \int UdV$. Перепишем это равенство следующим образом $\int VdU = UV - \int UdV$. Это выражение называется формулой интегрирования по частям. На первый взгляд кажется, что ничего существенного мы не получили, а просто перешли от одного интеграла к другому, но дело в том, что этот другой интеграл может быть проще или возможна ещё комбинация двух интегралов, которая приведёт к решению. Чтобы не быть голословным рассмотрим два примера. Пусть нам надо взять следующий интеграл $\int \ln(x)dx.$ Обозначим $V = \ln(x),$ а $dU = dx.$ Тогда $dV = \frac{dx}{x}$, а $U = x.$ Подставляя эти значения в формулу для интегрирования по частям, получим $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} =$ $= x\ln(x) - x + c.$ Второй интеграл оказался значительно проще и был взят. Теперь рассмотрим следующий интеграл $\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx.$ Обозначим $V = \exp(\alpha x),$ а $dU = \cos(\beta x)dx.$ Тогда $dV = \alpha\exp(\alpha x)dx$, а $U = \frac{\sin(\beta x)}{\beta}.$ Подставляя эти значения в формулу для интегрирования по частям, получим $\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \exp(\alpha x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)dx.$ Теперь ещё раз интегрируем по частям. Обозначим $V = \exp(\alpha x),$ а $dU = \sin(\beta x)dx.$ Тогда $dV = \alpha\exp(\alpha x)dx$, а $U = -\frac{\cos(\beta x)}{\beta}.$ Подставляя эти значения в формулу для интегрирования по частям, получим $\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \exp(\alpha x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\exp(\alpha x)\cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx.$ В правой части стоит тот же самый интеграл, но с другим знаком и с другим коэффициентом перед интегралом. Поэтому $(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \exp(\alpha x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\exp(\alpha x)\cos(\beta x).$ И окончательно $\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}(\exp(\alpha x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\exp(\alpha x)\cos(\beta x)) + c.$ А теперь вернёмся к интегралу $\frac{1}{6}\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}dx$,ради вычисления которого мы попутно познакомились с формулой интегрирования по частям. Во-первых этот интеграл можно преобразовать так $\frac{1}{6}\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Первый из двух интегралов, стоящих в правой части ,легко берётся $\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x^2+1)}.$ А для вычисления второго интеграла введём обозначения

$U = \frac{1}{x^2+1}$; $dV = dx.$ Тогда $dU = \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^2}$; $V = x.$ Затем, применяя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{(-2x)\,x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$ Получим

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}.$ Обратим внимание на это соотношение. В левой его части стоит интеграл, в знаменателе подынтегрального выражения которого находится некое выражение (в данном конкретном случае это x^2+1) в квадрате, а в правой части стоит интеграл, в знаменателе подынтегрального выражения которого находится то же самое выражение, но уже без квадрата. Такое соотношение называется рекуррентным соотношением. Оно сводит более сложные выражения к более простым. Действительно, интеграл в правой части последнего выражения значительно проще. Это же табличный интеграл. И тогда окончательно $\int \frac{dx}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1} = -\frac{5}{6}\ln(x-1) - \frac{1}{3(x-1)} -$

$-\frac{1}{3}arctg(x) - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{x}{12(x^2+1)} + \frac{1}{12}arctg(x) + c.$ С помощью интегрирования по частям можно получить и более сложное рекуррентное соотношение. Приведём его без вывода. Желающие могут проделать этот вывод самостоятельно и убедится в его справедливости. Пусть $I_\nu = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}.$ Тогда имеем.

$$I_\nu = \frac{1}{(\nu-1)(4q-p^2)}\frac{2x}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \frac{2(2\nu-3)}{(\nu-1)(4q-p^2)}I_{\nu-1}.$$

А теперь покажем, как можно обойтись без рекуррентных соотношений, если воспользоваться комплексными числами. Ещё раз рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$ Знаменатель подынтегрального выражения имеет два мнимых корня $i;-i$ кратностью каждый два. И тогда подынтегральное выражение можно представить так

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x+i} + \frac{A_2}{(x+i)^2} + \frac{A_3}{x-i} + \frac{A_4}{(x-i)^2} =$$

$$= \frac{x^3(A_1+A_3) + x^2(-A_1i+A_2+A_3i+A_4) + x(A_1-2A_2i+A_3+2A_4i) - A_1i - A_2 + A_3i - A_4}{(x^2+1)^2},$$

откуда следует, что

$A_1 + A_3 = 0$

$-A_1i + A_2 + A_3i + A_4 = 0$

$A_1 - 2A_2i + A_3 + 2A_4i = 0$

$-A_1i - A_2 + A_3i - A_4 = 1.$

Из первого уравнения ясно, что $A_3 = -A_1$ и тогда

$-2A_1i + A_2 + A_4 = 0$

$A_4 = A_2$

$2A_1 i + A_2 + A_4 = -1.$

И тогда

$-A_1 i + A_2 = 0$

$A_1 i + A_2 = -1.$

И окончательно найдём $A_1 = \frac{i}{4}; A_2 = -\frac{1}{4}; A_3 = -\frac{i}{4}; A_4 = -\frac{1}{4}.$

В результате имеем $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{i}{4}\int \frac{dx}{x+i} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+i)^2} - \frac{i}{4}\int \frac{dx}{x-i} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-i)^2} =$

$$= \frac{i}{4}\ln(x+i) + \frac{1}{4(x+i)} - \frac{i}{4}\ln(x-i) + \frac{1}{4(x-i)} + c = \frac{i}{4}\ln(\frac{x+i}{x-i}) + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.$$

Такое решение мне кажется проще предыдущего: не нужно никаких рекуррентных соотношений, но есть по крайней мере два возражения :1. Мы везде выше говорили о функциях только от действительных переменных, а здесь получаются комплексные значения. 2. Что с таким результатом делать? Ответ на первый вопрос мы уже давали, когда приводили вывод Леонарда Эйлера его знаменитой формулы $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$. Ответ заключается в следующем, что здесь рассматриваются не функции от комплексной переменной, а комплексные функции от действительной переменной. И это можно сделать достаточно строго. Ответ на второй вопрос заключается в том, что полученный результат можно довести до числа с помощью калькулятора, оперирующего с комплексными числами или использовать соответствующий транслятор на компьютере. Но можно и преобразовать полученный результат так, чтобы остались привычные многим действительные числа. Итак пусть $\frac{i}{4}\ln(\frac{x+i}{x-i}) = u + iv$, где u и v пока неизвестные нам действительные числа. Тогда $\ln(\frac{x+i}{x-i}) = -4iu + 4v$ откуда $\frac{x+i}{x-i} = \exp(4v)(\cos(4u) - i\sin(4u))$. Далее ,умножая числитель и знаменатель выражения, стоящего в левой части на $x-i$, получим

$\frac{x^2+2xi-1}{x^2+1} = \exp(4v)(\cos(4u) - i\sin(4u))$, откуда следует, что

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \exp(4v)\cos(4u); \frac{-2x}{x^2+1} = \exp(4v)\sin(4u); \frac{-2x}{x^2-1} = tg(4u); \frac{4x^2}{(x^2-1)^2} + 1 = \sec^2(4u);$$

И

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \cos(4u); \exp(4v) = 1; v = 0; \cos^2(2u) - \sin^2(2u) = \frac{x^2-1}{x^2+1}; \cos^2(2u) = \frac{x^2}{x^2+1}; tg^2(2u) = \frac{1}{x^2}.$$

$tg(2u) = \frac{-1`}{x}; ctg(2u) = -x; 2u = -arcctg(x); du = \frac{dx}{2(1+x^2)}; u = \frac{1}{2}arctg(x) + c.$ При выводе этой формулы у читателя, вероятно, возник вопрос: почему при извлечении корня из обеих частей $tg^2(2u) = \frac{1}{x^2}$ мы писали $tg(2u) = \frac{-1}{x}$, а не $tg(2u) = \frac{1}{x}$. Из основ тригонометрии нам известно, что $tg(4u)=\frac{2tg(2u)}{1-tg^2(2u)}$. И, если мы принимаем, что $tg(2u)=\frac{-1}{x}$, то тогда

$tg(4u)=\frac{2(-\frac{1}{x})}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-2x}{x^2-1}$, что и написано выше, и именно поэтому выбран знак

минус в выражении $tg(2u)=\frac{-1}{x}$. Мы далеко не исчерпали всех возможных неопределённых интегралов, которые можно взять. Напомним, что под словом взять здесь и ниже понимается, что данный интеграл может быть выражен через совокупность элементарных функций таких как многочлены, рациональные дроби, экспоненты, логарифмы, тригонометрические и гиперболические функции. Существуют множество довольно хитрых подстановок, которые позволяют взять ряд сложных неопределённых интегралов. И тем не менее, если мы под знаком неопределённого интеграла напишем произвольную функцию, то взять такой интеграл, как правило, не представляется возможным. После такого утверждения возникают по крайней мере два вопроса: 1. Мы пока только знаем то, что для того чтобы взять определённый интеграл, надо взять соответствующий неопределённый интеграл и затем подставить верхний предел со знаком плюс и нижний предел со знаком минус. Так что же позволяет определённому интегралу обойти это препятствие? На этот вопрос мы ответим ниже. 2. На первый взгляд кажется, что продифференцировать можно любую функцию, а вот проинтегрировать нет. Так вот такое утверждение оказалось неверным. Попробуйте, например, продифференцировать функцию Дирихле, а определённый интеграл от неё взять можно. Но это довольно сложная функция, но есть функция значительно более простая $f(x)=|x|$, производная от которой в точке $x=0$ не существует, а взять определённый интеграл от неё не вызывает никаких осложнений. Действительно $\int_{-1}^{1}|x|dx=-\frac{x^2}{2}I_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}I_{0}^{1}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$. И поэтому, когда говорят, что данная функция интегрируема, то это значительно более слабое ограничение, которое можно наложить на функцию по сравнению с тем, что некая функция дифференцируема. И тем не менее никакими способами нельзя выразить через элементарные функции вот такие, к примеру, неопределённые интегралы $\int\exp(-x^2)dx$-интеграл Гаусса, названный в честь великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777-1855);

$\int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx$ – интегралы Френеля, названные в честь французского физика и математика Огюста Френеля (1788-1827); $\int \exp(-x)x^{s-1}dx$ -некоторые называют этот интеграл-интегралом Пирсона, но это название широко не привелось. Заметим, что при $s = 1,2,3,...,n$ он легко берётся, а при других действительных s – нет. Значительно более известны определённые аналоги этого интеграла $\Gamma(s) = \int_o^\infty \exp(-x)\, x^{s-1}dx$ так называемая гамма-функция или иногда говорят полная гамма-функция в отличие от неполной гамма- функции $\gamma(a,s) = \int_o^a \exp(-x)\, x^{s-1}dx.$ Но об этих функциях мы ещё поговорим, а пока ответим на такой вопрос, а зачем вообще нужны интегралы и для чего их нужно брать, тем более, что неопределённые интегралы вычисляются с точностью до любой произвольной постоянной? На этот вопрос математики 19-го века предпочитали не отвечать, обращая внимание главным образом на то какие красивые подстановки можно придумать и какие нестандартные выражения получаются при взятии всё новых и новых неопределённых интегралов. Мы с Вами вспомним, чему равна площадь плоской фигуры ограниченной двумя осями координат некоей функцией $y = f(x)$ и прямой $x = a$, параллельной оси ординат.

Элементом такой площади будет прямоугольник, одна сторона которого равна $f(x)$, а другая dx. Величина такой элементарной площади равна $ds = f(x)dx.$ А отсюда вся площадь такой фигуры равна $S = \int_0^a f(x)dx.$ А теперь, чтобы не быть голословным, вычислим площадь такой хорошо известной фигуры как круг. Мы, конечно, знаем, что эта площадь равна πR^2, где R – радиус круга ,и вот это давайте проверим с помощью определённого интеграла. Вы ещё ,надеюсь, не забыли, что уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$ или $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Здесь мы будем рассматривать только четверть круга и поэтому $y \geq 0; x \geq 0$. И тогда площадь круга равна $S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Так как $0 \leq x \leq R$, то делаем замену $x = R\sin(t)$ и тогда $S = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt =$

$= 2R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt = 2R^2(t+\frac{1}{2}\sin(2t))I_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2(\frac{\pi}{2}+0) = \pi R^2$. Здесь требует пояснение то как мы поменяли пределы интегрирования. Действительно, когда $x = 0$, то $\sin(t) = 0$ и ,так как рассматривается только первая четверть круга, то и $t = 0$. По этой же причине при $x = R, \sin(t) = 1$ и $t = \frac{\pi}{2}$. И результат получился такой, какой и следовало ожидать, и это ещё одно свидетельство в оправдание того для чего нужны интегралы. Конечно, чему равна площадь круга, знают практически все ,но площадь фигуры, ограниченная эллипсом значительно менее известна. Уравнение эллипса с центром в начале координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b полуоси эллипса. Тогда $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Здесь мы будем рассматривать только четверть плоскости, ограниченной эллипсом и поэтому $y \ge 0; x \ge 0$. Отсюда площадь этой фигуры равна $S = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx.$ Так как $0 \le x \le a$, то делаем замену

$x = a\sin(t)$ и тогда $S = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt = \pi ab.$ И это для многих совершенно новый результат, и, кроме того, как и следовало ожидать, если две полуоси равны между собой, то мы получим площадь круга. Всем известно, даже по-моему и тем кто не учился в школе, что длина окружности равна $2\pi R$, где $R-$ радиус этой окружности. А теперь давайте это проверим с помощью определённого интеграла. Выше мы говорили, что длина дуги кривой $y = f(x)$ при $0 \le x \le a$ может быть вычислена следующим образом $l = \int\limits_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx$, а так как уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $y = \sqrt{R^2-x^2}$, то длина дуги окружности равна $l = 4\int\limits_0^R\sqrt{1+(y')^2}dx$. Под знаком интеграла стоит только четверть длины окружности и поэтому при вычислении всей её длины перед знаком интеграла стоит четвёрка. Если $y = \sqrt{R^2-x^2}$, то $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и $\left(y'\right)^2 = \frac{x^2}{R^2-x^2}$. И тогда

$l = 4\int\limits_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 4R\int\limits_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$. И далее делаем уже привычную нам замену $x = R\sin(t)$.

В результате $l = 4R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\cos(t)}{R\cos(t)}dt = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R.$ Что и следовало ожидать. А теперь то же самое проделаем для вычисления длины эллипса. Воспользуемся той же формулой

$l = \int\limits_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx$, где $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и a -большая и b -меньшая полуоси эллипса. Тогда

$y' = \dfrac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$; $\left(y'\right)^2 = \dfrac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$. Здесь мы будем рассматривать только четверть всей дуги эллипса и поэтому $y \ge 0; x \ge 0$. Длина этой дуги равна

$l = 4\int\limits_0^a \sqrt{1+\dfrac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx = 4\int\limits_0^a \dfrac{\sqrt{a^2-x^2+\dfrac{b^2}{a^2}x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$ И далее делаем уже привычную нам замену $x = a\sin(t)$. В результате имеем $l = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)+\dfrac{b^2}{a^2}\sin^2(t)}dt = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(t)}dt,$ где

$0 < k^2 = 1-\dfrac{b^2}{a^2} < 1.$Таким образом дело свелось к вычислению следующего интеграла

$E(k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2(t)}dt,$ который не может быть выражен через элементарные функции. Этот интеграл представляет собой эллиптический интеграл второго рода, записанный в лежандровой форме. Этот интеграл получил своё имя в честь великого французского математика Адриена Мари Лежандра 1752-1833. Существует ещё эллиптический интеграл первого рода $F(k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}$ и третьего рода $\Pi(h,k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{dt}{(1+h\sin^2(t))\sqrt{1-k^2\sin(2t)}}$. Все эти функции кроме переменного φ содержат ещё параметр k или h и k и все они в нашем понимании не берутся. Здесь мы встречаемся с новым для нас явлением: интегральное представление функций. Практически любую функцию можно записать в виде интеграла. Например, хорошо известную нам функцию $\sin(\varphi)$ можно представить так $\int\limits_0^{\varphi}\cos(t)dt.$ Таким представлением, конечно, никто не пользуется, а просто используют

таблицы для функции $\sin(\varphi)$. Ну, а если интеграл нельзя выразить через элементарные функции, то такое представление следует считать совершенно новой функцией, для вычисления которой можно составить таблицы и считать эту функцию такой же как и известные нам элементарные функции. Такой номер не проходит с неопределённым интегралом, а с определённым, зависящим от предела интегрирования- пожалуйста. Таблицы

функций, имеющие интегральное представление давно и хорошо известны, и в частнос-

ти только что представленные эллиптические функции. Не представляет никакой проблемы найти их в интернете. Исходя из этого ряд математиков ,особенно те, кто работают в прикладной математике, считают что вообще не надо разделять функции на элементарные и неэлементарные. Возможно это и так, особенно в наше время, когда все известные функции давно затабулированы, то есть представлены в виде таблиц ,и эти таблицы уже реализованы на компьютере. Но тем не менее неэлементарные функции часто называют по традиции специальными функциями и этот термин сохраняется до сих пор. К таким функциям относятся ,например, эллиптические функции всех трёх родов а также следующие функции $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt$, $F_s(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$, $F_c(x)=\int_0^x \cos(t^2)dt$,

$\Gamma(s)=\int_0^\infty \exp(-t)t^{s-1}dt,\ J_n(x)=\dfrac{2(\frac{x}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{(2n-1)/2}\cos(xt)dt$ и много ещё других , не получивших пока широкого распространения. Первая из указанных выше : функция

Гаусса (о множителе ,стоящим перед этим интегралом мы ещё поговорим). Заметим, что $erf(x)=2\Phi_0(\sqrt{2}x)$, где $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt$ – функция нормированного и центрированного нормального распределения (нам пока ещё ничего не говорят эти слова, но мы к ним ещё вернёмся). Вторая и третья функции- это первый и второй интегралы Френеля. Четвёртая- это гамма-функция или, как мы уже упоминали полная гамма-функция. Пятая-

эта функция Бесселя 1-го рода n – го порядка ,а ,используемые здесь обозначения ,уже известны. Начнём с гамма –функции, которая выражается через интеграл, имеющий в качестве одного из пределов знак ∞. Такой интеграл называется несобственным и он существует, если существует вот такой предел $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx.$ Покажем на частных примерах, что

в нашем случае такой предел существует. Рассмотрим $\Gamma(1)=\int_0^\infty \exp(-t)t^{1-1}dt=$

$=\int_0^\infty \exp(-t)\,dt=-\exp(-t)I_0^\infty=0-(-1)=1.$ $\Gamma(2)=\int_0^\infty \exp(-t)t^{2-1}dt=\int_0^\infty t\exp(-t)dt.$ И далее интегрируем

по частям $\Gamma(2)=-t\exp(-t)I_o^\infty+\int_0^\infty \exp(-t)dt=1+\lim_{t\to\infty} t\exp(-t).$ Рассмотрим этот предел

$\lim_{t\to\infty} t\exp(-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\exp(t)}=\frac{\infty}{\infty}$, то есть неопределённость, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталя, который теперь уже ,зная ,что такое производные, мы можем на законных основаниях применять. Оно гласит, что, если мы имеем неопределённости вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$,что в общем то одно и то же, если поменять числители и знаменатели местами, то $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{/}(x)}{\varphi^{/}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{//}(x)}{\varphi^{//}(x)}=.....$, где многоточия означают и так далее и так далее. И поэтому $\lim_{t\to\infty} t^n \exp(-t) = 0$, где $n-$любая целая степень. В результате $\Gamma(2)=1$. $\Gamma(3)=\int\limits_0^\infty \exp(-t)\,t^{3-1}dt = \int\limits_0^\infty t^2\exp(-t)dt.$ И далее интегрируем по частям

$\Gamma(3) = -t^2\exp(-t)I_o^\infty + 2\int\limits_0^\infty t\exp(-t)dt = 2.$ $\Gamma(4)=\int\limits_0^\infty \exp(-t)\,t^{4-1}dt = \int\limits_0^\infty t^3\exp(-t)dt.$ И снова интегрируем по частям $\Gamma(4) = -t^3\exp(-t)I_o^\infty + 3\int\limits_0^\infty t^2\exp(-t)dt = 6.$ В итоге

$\Gamma(n+1) = -t^n\exp(-t)I_o^\infty + n\int\limits_0^\infty t^{n-1}\exp(-t)dt = n!$.Помните мы почти в самом начале нашего повествования писали, что следует принять $0!=1,$ но было непонятно почему? Так вот после введения гамма -функции это стало ясно. Таким образом гамма-функция –это обобщение такого понятия, как факториал, на действительные и даже на комплексные числа. Помимо гамма -функции или полной гамма – функции мы ещё упоминали неполную гамма - функцию $\gamma(s,a)=\int\limits_0^a \exp(-t)\,t^{s-1}dt$ и далее составим вот такое выражение

$T_{\max}\dfrac{\gamma(s,\alpha t)}{\Gamma(s)} = \dfrac{T_{\max}}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\alpha t}\exp(-z)\,z^{s-1}dz.$ Рассмотрим вначале частный случай этого соотношения когда $s=1$. В этом случае получим следующую зависимость $T(t)=T_{\max}(1-\exp(-\alpha t)).$ Такая формула часто встречается в приложениях, когда надо математически описать процесс,

развивающийся во времени таким образом, когда некая величина растёт со временем t от $t=0$.Причём этот процесс продолжается неограниченно долго и исследуемая величина растёт во времени от $T(0)=0$ до $T(\infty)=T_{\max}$, то есть достигает насыщения и при этом никогда не превзойдёт $T_{\max}$. Здесь $\alpha>0$ параметр, имеющий размерность обратную времени $1/t$ и поэтому под знаком экспоненты стоит безразмерная величина. Скорость данного

процесса можно определить ,взяв производную по времени от него (напомню, что производную по времени обозначают точкой). Тогда $\dot{T}(t)=\alpha T_{\max}\exp(-\alpha t)$ монотонно уменьшается от $\alpha T_{\max}$ до нуля. Однако скорость процесса, достигающего насыщения, как показывают эксперименты, может идти и по -другому : может монотонно уменьшаться от

бесконечно большой величины до нуля или может быть вначале равна нулю, затем возрастать и достигать максимума и далее монотонно убывать до нуля. То есть возможны три сценария развития скорости этого процесса. И все эти варианты могут быть описаны одной формулой, которую мы уже приводили $T(t) = T_{\max}\dfrac{\gamma(s,\alpha t)}{\Gamma(s)} = \dfrac{T_{\max}}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\alpha t}\exp(-z)\,z^{s-1}dz.$ Действительно, скорость процесса в этом случае имеет вид $\dot{T}(t) = \alpha\, T_{\max}\exp(-\alpha\, t)(\alpha\, t)^{s-1}$. И все возможные три варианта отличаются только значениями параметра s. При $s=1$ мы имеем первый вариант, при $0<s<1$-второй, а при $s>1$-третий. Автор берёт на себя смелость утверждать, что с помощью этой формулы можно описать все процессы, монотонно возрастающие от нуля до насыщения и причём с наименьшим числом параметров, которых в

данном случае всего два α и s. Для того чтобы определить при каком значении t скорость процесса достигает экстремума ,возьмём ещё одну производную от скорости по времени и приравняем её нулю. В результате имеем

$-\alpha\exp(-\alpha\, t)(\alpha\, t)^{s-1} + \exp(-\alpha\, t)(s-1)(\alpha\, t)^{s-2}\alpha = 0,$ откуда $t = \dfrac{s-1}{\alpha}.$ При $t < \dfrac{s-1}{\alpha}$ первая производная от скорости положительна (напомню, что рассматривается третий вариант, когда $s>1$) ,а при $t > \dfrac{s-1}{\alpha}$ она отрицательна и поэтому при $t = \dfrac{s-1}{\alpha}$ скорость процесса достигает максимума и равна $\alpha\, T_{\max}\exp(-(s-1))(s-1)^{s-1}$. Кстати, значение $t = \dfrac{s-1}{\alpha}$ представляет для

исходного процесса абсциссу точки перегиба , где зависимость $T(t)$ переходит от вогнутости к выпуклости. А теперь поговорим о ,на первый взгляд странном множителе, стоящим перед интегралом в выражении $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2)dt$. Для этого надо проделать

длинное и довольно неожиданное отступление, которое ,как станет ясно ниже, нам впоследствии пригодится. Итак, Вы ,возможно, не забыли, что выражение $y = f(x)$, представляет собой правило, которое каждому значению x сопоставляет одно и только одно значение y и такое выражение мы называли функцией одной переменной. Пока будем считать, что мы имеем дело с действительными числами. Но возможно и такое правило, которое сопоставляет двум независимым значениям x и y, одно значение z, вычисляемое по формуле $z = f(x,y)$. Такое выражение называется функцией двух переменных. Графи-

чески значение такой функции можно себе представить, как аппликату, проекции которой на оси абсцисс и ординат будут величины x и y .Аналогично можно ввести функцию трёх и более переменных и даже счётное число переменных, но представить их графически не представляется возможным. Исходя, в том числе и из этого, ограничимся функцией двух переменных. Понятие непрерывности для функции двух переменных вводится точно также как и для одной переменной. Разница заключается только в том, что эта функция может быть непрерывной по одной переменной и не обладать этим свойством по другой переменной. Точно также эта функция может обладать производной по одной переменной и не обладать по другой. Такие производные, если они, конечно, существуют называются частными производными в отличие от прямых производных для функции от одной переменной. Эти производные обозначаются следующим образом, например, частная производная от z по x обозначается так $\frac{\partial z}{\partial x}$, а от z по y так $\frac{\partial z}{\partial y}$, в то время как прямая производная обозначается так / или так $\frac{dy}{dx}$. И дифференциал по x имеет вид $\partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$,а дифференциал по y соответственно $\partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Частные производные и их дифференциалы вычисляются точно по таким же правилам, как прямые производные и дифференциалы только при дифференцировании по x, y принимается постоянным и наоборот при дифференцировании по y, x принимается постоянным.

Например, пусть $z = 2xy + \sqrt{x^2 + 5y} + \sin(xy^2)$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y}} + \cos(xy^2)y^2$, а $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 5y}} + 2\cos(xy^2)xy$.

Зная первую производную от z по x можно вычислить вторую производную от z по x, которая в нашем конкретном примере будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 5y} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5y}}}{x^2 + 5y} - \sin(xy^2)y^4 = \frac{5y}{(x^2 + 5y)^{1.5}} - y^4 \sin(xy^2),\text{ а}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\frac{25}{(x^2 + 5y)^{1.5}} + 2(-2x^2y^2\sin(xy^2) + x\cos(xy^2)).$$

Но в этом случае можно взять ещё одну, так называемую смешанную производную. Это можно сделать в двух случаях : взять производную по y от $\frac{\partial z}{\partial x}$ или взять производную по x от $\frac{\partial z}{\partial y}$. Рассмотрим вначале первый случай $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2 - \frac{5x}{2(x^2 + 5y)^{1,5}} + 2y(-xy^2\sin(xy^2) + \cos(xy^2))$.

И второй случай

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 - \frac{5x}{2(x^2 + 5y)^{1,5}} + 2y(-xy^2\sin(xy^2) + \cos(xy^2)).$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то есть от перемены порядка взятия частной производной, если они существуют результат не меняется. Пусть теперь S – некая ограниченная область на плоскости x, y и пусть граница этой области –кусочно-гладкая кривая (этим термином в математике обозначают кривую, состоящую из конечного числа непрерывных кривых). Зададим на этой области уже знакомую нам функцию двух переменных $z = f(x, y)$. И далее разобьём эту область на ряд подобластей, которые покроют всю область. Если разбивать область на прямоугольники, то всегда останется часть области, непокрытая этими прямоугольниками. Мне могут возразить, что можно уменьшать эти

прямоугольники и по мере возможности всё ближе и ближе стремится к тому, чтобы заполнить всю область. Да, это так, но при этом число прямоугольников будет возрастать. Тогда возникает такой вопрос, а существует ли такая плоская фигура, которая позволяет покрыть всю заданную область с использованием наименьшего числа этих плоских

фигур? Да, отвечает топология (специальный раздел геометрии), такая плоская фигура существует и все Вы её хорошо знаете- это треугольник. Этот факт нам пригодится в дальнейшем, а пока ещё один факт. В трёхмерном объёме такой фигурой является тетраэдр –пирамида, все четыре грани которой представляет собой равносторонний треу-

гольник. Таким образом, если Вы захотите бутылку из под какого-либо напитка наполнить твёрдыми частицами ,так чтобы осталось как можно меньше пустого пространства, то такие частицы должны иметь форму тетраэдра. Но мы опять забежали вперёд, а пока нам достаточно того, что некая плоская область S разбита на n подобластей, каждая из которых имеет площадь ΔS_i и тогда площадь всей нашей области можно записать

так $L = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$, то есть сумма $n-$го числа ячеек, площадь каждой из которых равна ΔS_i. В каждой из этих ячеек выберем точку $M_i(x_i, y_i)$. И далее составим сумму $I = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, и если эта сумма при уменьшении размера ячеек, а значит увеличении их числа будет стремится к конечному пределу, то такой предел называется двойным интегралом по области S и обозначается так $I = \iint\limits_{(s)} f(x, y)\,dS$ или так $I = \iint\limits_{(s)} f(x, y)\,dxdy$, так как площадь элементарного прямоугольника в декартовой системе координат равна $dS = dxdy.$ Мы покажем на простых примерах для чего нужны двойные интегралы и заодно коснёмся некоторых его свойств. Итак пусть нам нужно вычислить объём эллиптического цилиндра, высота которого равна H и ,в основании которого расположен эллипс с полуосями a и b. Пусть центр эллипса совпадает с началом координат и тогда удобно рассмотреть четверть этого эллипса $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le b$. В таком случае объём рассматриваемой фигуры можно записать так $V = 4\int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,y)dy \right) dx.$ Поясним эту зависимость: число 4 стоит потому ,что мы вычисляем весь объём фигуры, а рассматриваем только её четверть. В данном случае основание исследуемой фигуры таково, что двойной интеграл представляет собой последовательность проведённых один за другим одинарных интегралов. Заметим, что это практически всегда так, за исключением ряда экзотических фигур, лежащих в основании. В нашем конкретном случае внутреннее интегрирование производится по y ,а внешнее по x. Начнём с внешнего интегрирования. Здесь x меняется от нуля до a. Как же меняется при этом y? Он меняется от нуля до $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Это выражение получается

из уравнения эллипса с центром в начале координат, которое напомню имеет вид

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. То есть, если x меняется от нуля до a, то y будет меняться от b до нуля. Для цилиндра, высота которого равна H, $f(x,y) = H = const$ и тогда объём эллиптического цилиндра равен $V = 4H\int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right) dx.$ При этом мы использовали следующее свойство интегралов: постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Это свойство мы использовали для вычисления одинарных интегралов и оно остаётся верным для двойных,

тройных и прочих кратных интегралов, так как любой интеграл по определению является суммой, а из под знака суммы можно выносить любой постоянный множитель. И далее $V = 4H\int_0^a \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - 0\right)dx.$ Здесь мы взяли внутренний интеграл, который, очевидно, равен y и подставили верхнее его значение со знаком плюс и нижнее его значение со знаком

минус. И тогда объём нашего цилиндра равен $V = 4H\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$ Такой интеграл мы уже вычисляли, но, как говорят для закрепления материала, повторим ещё раз. Делаем

замену $x = a\sin(t)$ и тогда $V = 4Hab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = 4Hab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 2Hab\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$=\pi abH$. Это и есть объём нашего цилиндра в кубических единицах (кубических сантиметрах, кубических дециметрах или кубических метрах и.т.д.). Например, когда говорят, что объём бака двигателя мотоцикла равен 250 кубических сантиметра, то это значит, что 250 кубиков со стороной в один сантиметр можно теоретически разместить внутри этого бака. Такого же объёма будет цилиндрический бак высотой 6.6 см, имеющий основание в виде эллипса с полуосями 4см и 3см. Если же в основании цилиндра находится круг то есть $a=b=R$, то мы получим ещё более простую и широко известную формулу $V=\pi R^2 H$. Эти результаты, как я сказал хорошо известны, а вот более сложный случай. Пусть нам надо вычислить объём эллиптического параболоида, поверхность которого может быть описана следующим уравнением $z=H(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})$. Это тот же самый эллиптический параболоид, но повёрнутый дном вверх. Его объём вычисляем точно также как эллиптического цилиндра $V=4H\int_0^a(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dy)\,dx=4H\int_0^a(y-\frac{x^2}{a^2}y-\frac{y^3}{3b^2})_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx$. Напомню, когда мы интегрируем по y, x принимается постоянным. В результате $V=4H\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx-4H\frac{b}{a^3}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx-4H\frac{b}{3a^3}\int_0^a(a^2-x^2)^{1.5}dx$. Первый из этих трёх интегралов нам хорошо известен и он равен πabH. Рассмотрим второй и третий интегралы. Второй, с помощью хорошо известной нам замены $x=a\sin(t)$ превращается в интеграл

$$4Hab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^2(t)dt=abH\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2t)dt=H\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(4t))dt=H\frac{ab}{2}(t-\frac{\sin(4t)}{4})_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi abH}{4}.$$

И ,наконец, третий интеграл с помощью той же замены можно записать так

$$4H\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(t)\,dt=4H\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos(2t)}{2})^2dt=Hab\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos(2t)+\cos^2(2t))dt=$$

$$=H\frac{ab}{3}(tI_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin(2t)I_o^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(4t)}{2}dt)=H\frac{ab}{3}(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}I_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\sin(4t)I_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi abH}{4}.$$

Откуда следует, что исходный объём равен $\frac{\pi abH}{2}$. В частности, если $a=b=\frac{D}{2}$, то объём такой фигуры, которая очень напоминает среднеазиатскую пиалу, равен $\frac{\pi D^2}{8}H$, где $D-$диаметр этой пиалы, а $H-$её высота. А теперь рассмотрим вот такой двойной интеграл $W=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(x^2+y^2))dx\,dy$. Этот интеграл помимо того что он двойной он ещё и дважды несобственный. Заметим, что этот интеграл можно записать так $W=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2)\,dy=4(\int_0^{\infty}\exp(-x^2)\,dx)^2$. Отсюда спедует, что, если мы вычислим этот двойной интеграл, то мы вычислим и интеграл Гаусса. Мы уже говорили, что элемент площади в декартовых координатах – это $dx\,dy$ (прямоугольник со сторонами dx и dy), а в полярных координатах, которые как я Вам напомню ,вводятся по формулам $x = r\cos(\varphi)$ и $y = r\sin(\varphi)$. Здесь $r-$ полярный радиус или расстояние отсчитываемое от начало координат и $\varphi-$ полярный угол, отсчитываемый при вращение луча, исходящего из начала координат от положительного направления оси x против часовой стрелки. В полярных

координатах элемент площади имеет вид $r\,dr\,d\varphi$. Это площадь фигуры, имеющей в качестве одной стороны длину дуги $r\,d\varphi$, а в качестве другой стороны приращение радиуса dr. Мне могут возразить, что мы имеем дело не с прямоугольником, а скорее с фрагментом кольца, толщина которого равна dr. Это верно, но дело в том, что мы оперируем с бесконечно малыми элементами и в этом случае этот фрагмент с точностью до бесконечно малых второго порядка малости не отличается от прямоугольника. И этот факт можно строго обосновать. Теперь перейдём в нашем двойном интеграле от декартовых координат к полярным. В результате имеем $W = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr.$ В этом случае мы, как и следовало ожидать, производим интегрирование по всей плоскости, когда радиус вектор меняется от нуля до бесконечности, а полярный угол делает полный оборот вокруг своей оси. Тем самым мы совершили замену переменных в двойном интеграле. К этому же результату можно придти с другой стороны. Итак пусть помимо декартовых координат x и y мы используем другие координаты u и v, которые связаны между собой зависимостями

$x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$. Пусть Вас не смущает то, что функции от двух переменных обозначаются теми же буквами, что и координаты. Их можно обозначать любыми буквами в том числе и так ,и это общепринятая практика. Тогда $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ и $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$. И такое преобразование можно записать следующим образом $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$. Вспомните умножение матрицы на столбец и Вы получите два предыдущих выражения. При этом преобразуется и сама область интегрирования и подынтегральное выражение. В результате имеем $\iint\limits_{\Omega} f(x,y) dxdy = \iint\limits_{\Gamma} f(x(u,v), y(u,v)) |J| dudv.$ Здесь $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ - модуль определителя этой матрицы, $\Omega-$исходная область интегрирования. $\Gamma-$ преобразованная область интегрирования. А теперь давайте проверим эту формулу. В нашем случае $x = r\cos(\varphi)$ и $y = r\sin(\varphi)$. И тогда

$$|J|drd\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} drd\varphi = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} drd\varphi = (r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi))drd\varphi = rdrd\varphi.$$

Что и следовало ожидать. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ называется Якобианом преобразования в двойном интеграле при переходе от одних координат к другим. В данном случае, так как $r > 0$, то модуль определителя совпадает с самим определителем. Но это не всегда так, и мы это покажем на примере замены переменных в тройном интеграле. Приведённая формула замены переменных справедлива не только для полярных координат, но для эллиптических, гиперболических, параболических, биполярных и прочих других криволинейных координат. И это можно строго доказать. А теперь вернёмся к нашему интегралу $W = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \exp(-r^2)rdr = 2\pi \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \exp(-r^2)d(r^2) = \pi \exp(-r^2)I_0^{\infty} = \pi.$ И так как

$W = 4(\int_0^{\infty} \exp(-x^2)dx)^2$, то интеграл Гаусса равен $\int_0^{\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Теперь понятно почему в выражении $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-z^2)\,dz$ стоит множитель $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Он нормирует эту функцию, то есть помещает её в определённые рамки. Действительно

$0 \le erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-z^2)\,dz \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \exp(-z^2)dz = 1.$ Так мы с помощью довольно длинного отступления ответили на вопрос о множителе при интеграле Гаусса. Заодно, правда, как мне кажется, Вы узнали много для Вас нового, и, возможно, интересного. Теперь покажем почему надо брать модуль детерминанта, а не сам детерминант. Введём сферические координаты по формулам $x = r\cos(\varphi)\cos(\theta)$; $y = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$; $z = r\sin(\varphi).$ Здесь за начало

координат принят центр шара, а углы φ и θ, выраженные в градусах долгота и широта местности соответственно. Тогда $dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta,$

$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta,\ dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta.$ И преобразование от одних координат к другим можно записать так $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dy} \\ \frac{}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \theta}}{\frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \theta}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dr}{d\varphi} \\ \frac{}{d\theta} \end{pmatrix}$.

И тогда элемент объёма при переходе от декартовых координат к сферическим

преобразуется так $dxdydz \to \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \times drd\varphi d\theta$. Рассмотрим этот определитель

$$\left| \frac{\cos(\varphi)\cos(\theta) - r\sin(\varphi)\cos(\theta) - r\cos(\varphi)\sin(\theta)}{\frac{\cos(\varphi)\sin(\theta) - r\sin(\varphi)\sin(\theta) \;\; r\cos(\varphi)\cos(\theta)}{\sin(\varphi) \qquad r\cos(\varphi) \qquad 0}} \right| =$$

$$= r^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) \left| \frac{\cos(\theta) \; -\cos(\theta) \; -\sin(\theta)}{\frac{\sin(\theta) \; -\sin(\theta) \;\; \cos(\theta)}{tg(\varphi) \quad ctg(\varphi) \quad 0}} \right| = \; r^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)(0 - \cos^2(\theta)\, tg(\varphi) -$$

$$-\sin^2(\theta)\, ctg(\varphi) - \sin^2(\theta)\, tg(\varphi) - \cos^2(\theta)\, ctg(\varphi) - 0) = r^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)(-tg(\varphi) - ctg(\varphi)) =$$

$= -r^2\cos(\varphi).$ Но элемент объёма ,как и сам объём ,не может быть отрицательным числом и поэтому элемент объёма в сферических координатах имеет вид $r^2\cos(\varphi)\, dr\, d\varphi\, d\theta.$

А теперь нам предстоит ответить ещё на два вопроса, которые упоминались выше. 1.Что означает такое выражение: функция нормированного и центрированного нормального распределения . 2. Я уже упоминал, что некоторые математики, особенно те ,которые работают в прикладной математике считают, что не надо разделять функции на элементарные и неэлементарные, так как есть таблицы так называемых специальных функций и прикладнику, то есть тому человеку, который занимается приложением математики к физике, химии, инженерной деятельности, медицине, биологии и. т. д. и и.т. д., то есть для всех тех, для кого я и пишу эти этюды все равно, что определять по таблице: например ,функцию Бесселя или синус от кого-либо числа. Но остался при этом по крайней мере ещё один вопрос, а как были получены эти таблицы? Вот на эти два вопроса мы и ответим с помощью довольно длинных ,но , как мне кажется поучительных, отступлений.

В мире мы часто сталкиваемся с событиями, результат которых предсказать практически не возможно, например, исход, а тем более результат в данном случае счёт предстоящего футбольного матча. Поэтому принято считать события, исход которых заранее неизвестен- случайными событиями. Так как исход заранее неизвестен, то желательно знать полный набор возможных исходов (событий). Такой набор событий называется сигма-алгеброй событий. Например, когда мы бросаем одну монету, то сигма-алгебра состоит всего из двух возможных событий: монета упадёт орлом вверх или решкой вверх и никаких других событий не возможно, так как в обычных условиях монета никогда не приземлится на ребро. Поэтому вероятность того, что монета упала орлом вверх равна $p = \frac{1}{2}$. Под словом вероятность понимается отношение двух чисел: в числителе стоит число, характеризующее число, благоприятное к данному событию, а в знаменателе полный набор этих событий, то есть сигма-алгебра событий. Точно такой же будет и вероятность того, что монета упадёт решкой вверх . Мы уже говорили, что никогда монета не приземлится на ребро-это невозможное событие. Очевидно, что вероятность такого события равна нулю. И, наконец, если мы находимся на Земле, то монета обязательно приземлится- это достоверное событие и вероятность такого события равна единице. Таким образом вероятность любого в том числе и невозможного и достоверного будет меняться в пределах $0 \le p \le 1$. Теперь рассмотрим более сложный пример: пусть мы бросаем две монеты, тогда сигма-алгебра будет состоять из четырёх элементов : oo, ro, or, rr. Это означает, что в первом событии одна монета, которую мы для удобства окрасим в красный цвет выпадет орлом, а вторая монета, которую окрасим в фиолетовый цвет выпадет также орлом. Во втором событии красная монета приземлится на решку, а фиолетовая на орла. В третьем событии красная монета приземлится на орла, а фиолетовая –на решку . И, наконец, в четвёртом событии обе монеты приземлятся на решку. Теперь проделаем этот же эксперимент для трёх монет: красной, оранжевой и фиолетовой. В результате сигма-алгебра будет состоять из восьми элементов: $ooo, roo, oro, oor, rro, ror, orr, rrr$. Вы уже, наверное, догадались, что в первом случае сигма-алгебра состоит из 2^1 – элементов, во втором случае из 2^2 – элементов, в третьем из 2^3 – элементов. Здесь в основании степени –стороны монеты –их всего два орёл и решка, в показателе степени- число монет разного цвета. Я не случайно окрасил монеты такие цвета- это три цвета радуги из семи возможных (вспомните такое монемоническое правило: каждый охотник желает знать, где сидят фазаны) отсюда цвета радуги: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый. И поэтому, если мы будем бросать сразу семь монет, то сигма-алгебра будет состоять из $2^7 = 128 -$ элементов. Я не буду их всех выписывать –это даже для подготовленного человека – довольно громоздкая задача. А пока ответим на следующие вопросы: какова вероятность того, что при бросание трёх монет ,монета орлом вверх выпадет ровно один раз. Посмотрите на сигма –алгебру, подобный факт реализуется только в трёх событиях rro, orr, ror. А полный набор событий или сигма –алгебра состоит из восьми событий. И поэтому вероятность того, что при бросании трёх монет, монета орлом вверх выпадет ровно один раз, составляет $p = \frac{3}{8}$. Точно такому же значению будет равна вероятность того, что при бросании трёх монет монета решкой вверх выпадет ровно один раз. А благоприятные этому факту события будут следующие roo, oro, oor. Найдём теперь чему равна вероятность того,

что при бросании трёх монет, монета орлом вверх выпадет не менее одного и не более двух раз. Посмотрите ещё раз на сигма –алгебру и убедитесь в том, что благоприятные этому факту события будут следующие $rro, orr, ror, roo, oro, oor$. А так как полный набор событий остался прежним, то вероятность того что указанные события осуществляться будет составлять $p = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Заметим, что последнее событие – это объединение двух событий: либо событие rro, orr, ror либо событие roo, oro, oor. Каждое из этих событий состоит из трёх событий, но сейчас не об этом идёт речь, а мы обратим Ваше внимание на то, что мы не требуем, чтобы одновременно осуществлялись два этих события и то и другое, а требуем лишь того чтобы осуществлялось либо одно событие либо другое. Такая комбинация событий называется суммой двух событий. А так как $p = \frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$, то вероятность

суммы двух событий равна сумме вероятностей каждого из этих событий. Это, конечно

при условии, что каждое из этих событий не зависит друг от друга. Действительно ни в первом событии rro, orr, ror ни во втором событии roo, oro, oor нет общих между собой событий. То есть вероятность одновременного осуществления и того и другого события равна $p=0.$ Такая комбинация событий называется произведением двух событий. В нашем случае произведением двух указанных событий будет пустое множество. И такие события называются независимыми событиями. А теперь посмотрим на знакомую нам сигма –алгебру $ooo, roo, oro, oor, rro, ror, orr, rrr.$ с несколько иной стороны. Здесь мы будем использовать некую аналогию. С точки зрения математики- это не выдерживает никакой критики, но тем не менее окончательный результат получится верным. Пусть o это x, а r-это a, $oo-$это x^2, $rr-$это a^2 и. т. д. И тогда сумму всех элементов, входящих в сигма- алгебру можно представить так $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$. Не правда ли знакомая формула, которая представляет собой куб бинома $(x+a)^3$. Пользуясь этой весьма нестрогой аналогией, можно записать сумму всех элементов, входящих в сигма- алгебру, состоящую из $n-$членов ,можно записать так $\sum_{k=0}^{n}(\frac{n}{k})x^{n-k}a^k$, где $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$. В нашем примере с монетой $x=p=\frac{1}{2}$ и $a=1-p=\frac{1}{2}$. И вероятность того, что при бросании трёх монет, монеты орлом вверх выпадут ровно два раза составит $3(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$. И это же значение мы получили выше. Отсюда следует, что вероятность того, что при бросании n монет, монеты орлом вверх выпадут ровно k раз , составит $\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^{n-k}(\frac{1}{2})^k$. А теперь обобщим этот эксперимент с монетами на следующую процедуру. Пусть проводим серию опытов, состоящую из n опытов и отдельные опыты этой серии не зависят друг от друга. Точно также как мы раз за разом бросаем монеты и каждое из последующих бросаний не зависит предыдущих. Пусть далее в каждом опыте некое событие A может произойти, а может и не произойти. В нашем конкретном случае- это выпадание монеты орлом вверх. Пусть вероятность наступления

события A равна p, а вероятность его не наступления равна q и $q=1-p$. И ещё пусть $X^{(n)}$-число наступлений события A в нашей серии, состоящей напомню из n опытов. Величина $X^{(n)}$ называется случайной величиной, потому что в данном случае она может принять любые целые значения $0,1,2,....,n.$ Тогда можно ставить вопрос, а какова вероятность что эта случайная величина равна k. Приведённый нами опыт с монетами говорит о том, что в этом случае $P(n,k)=P(X^{(n)}=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, где $k=0,1,2,...,n.$ Здесь выражение $P(n,k)-$означает, что в серии из n испытаний интересующее нас событие происходит ровно k раз. $P(X^{(n)}=k)$ означает вероятность того, что случайная величина $X^{(n)}$ равна ровно $k.$ В этом случае говорят, что случайная величина $X^{(n)}$ распределена по биномиаль ному закону, так как $n-$ая степень бинома или двучлена ,как Вы помните равна $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, где a и $b-$произвольные действительные числа. Здесь может возникнуть вопрос, что случайная величина потому и случайна, что её значение совершенно произвольно или как говорят по-русски такова, как бог на душу положит, то зачем нужны

какие-то распределения. Такое рассуждение неверно и вот почему. Всем Вам известна игигра в лото, когда бочонки с нарисованными на них цифрами складывают в мешок и затем после тщательного перемешивания и ,не глядя в мешок, вытаскивают. Если эти правила соблюдены, то вероятность вытащить каждый из бочонков будет одинакова. В этом случае говорят, что указанные бочонки или точнее числа, написанные на них, распределены по равномерному закону. А теперь представим себе громадную ёмкость, в которую помещены все мужчины кого-либо населённого пункта в возрасте от 18 до 60 лет и будем их вслепую вытаскивать и записывать их рост. И далее вычертим следующую кривую: по оси абсцисс рост человека (лучше всего это делать в безразмерных величинах, например, в отношениях роста конкретного человека к росту самого маленького мужчины из этой совокупности) ,а по оси ординат отношение количества мужчин определённого роста с точностью до половины сантиметра к общему количеству мужчин в данном населённом пункте. В результате мы получим не прямую параллельную оси абсцисс, как в примере с бочонками из лото, а следующую уже знакомую нам кривую $y(x) = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \exp(-x)\, x^{s-1}$, где

$\Gamma(s)-$гамма- функция от s и $s>1.$ В этом случае говорят, что случайная величина x - рост мужчин возраста от 18 до 60 лет в данном населённом пункте, подчинена гамма- распределению или, как иногда говорят, распределению Пирсона. Плотность распределения этой случайной величины или вероятность того, что указанная случайная величина X находится в пределах $x < X < x+\Delta x$, составляет $f(x) = P(x < X < x+\Delta x) = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \exp(-x)\, x^{s-1}.$

В данном случае, в отличие от описанного выше биномиального распределения, случайная величина X может принимать не только целые ,но и любые действительные значения. Такая случайная величина называется непрерывно- распределённой, плотность распределения которой равна $f(x) = P(x < X < x+\Delta x).$ Здесь Δx бесконечно-малая величина. В нашем конкретном примере Δx принято равным половину сантиметра. С такой точностью, как правило, измеряют рост человека. Плотность распределения этой случайной величины имеет следующие особенности : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, что физически означает, что вероятность встретить человека очень маленького и очень большого роста стремится к нулю. А ,если это так, то есть такое значение x, где плотность распределения достигает максимума. Для того чтобы найти это значение $x,$ возьмём производную от $f(x)$ по x и приравняем её нулю. В результате получим

$\frac{1}{\Gamma(s)}(-\exp(-x)x^{s-1}+(s-1)\exp(-x)x^{s-2})=0$ и в итоге $x=s-1,$ то есть при этом значении x плотность распределения случайной величины X достигает максимума. Напомню, что мы имеем дело с относительным ростом человека ,а в сантиметрах эта величина будет соответствовать среднему росту мужчин в данной местности. В нашем конкретном примере случайная величина X -рост взрослых мужчин в данном конкретном регионе- величина очевидно положительная и поэтому $0 < X < \infty.$ И поэтому вероятность того, что эта случайная величина меняется в указанных пределах представляет собой достоверное событие, вероятность наступления которого равна единице, то есть интеграл от плотности распределения этой случайной величины должен быть равен единице. Так оно и есть $\int\limits_0^\infty f(x)dx=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty \exp(-x)x^{s-1}dx=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)}=1.$ Вы наверное помните, что $\int\limits_0^\infty \exp(-x)x^{s-1}dx=\Gamma(s).$

Теперь введём такое понятие, как функция распределения случайной величины X. Это будет определённый интеграл от плотности распределения случайной величины X. То есть в нашем случае он будет выглядеть так:

$F(x)=\int\limits_0^x f(z)dz=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^x \exp(-z)z^{s-1}dz=\frac{\gamma(x,s)}{\Gamma(s)},$ где $\gamma(x,s)-$знакомая нам неполная гамма-функция. Напомню, что в нашем случае случайная величина X будет положительна и поэтому функция распределения этой случайной величины, которая вводится по формуле $F(x)=P(X<x)$ обращается в ноль при $x=0$, то есть $F(0)=0.$ и равна единице при $x\to\infty$, то есть $\lim_{x\to\infty}F(x)=1.$ В нашем конкретном примере это наглядно видно, так как $\gamma(\infty,s)=\Gamma(s).$ Это всё справедливо тогда, когда случайная величина X будет положительна. Если же случайная величина X может принимать и отрицательные значения, то функция распределения этой случайной величины вводится по той же формуле, то есть $F(x)=P(X<x)$, но она будет обращаться в ноль при $x\to-\infty$, то есть $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ и также как и положительная случайная величина будет стремиться к единице при $x\to+\infty.$ Введённая таким образом функция распределения будет монотонно неубывающая функция от x и непрерывная только слева. Это значит, что справа она может допускать горизонтальные ступеньки и конечные разрывы. А теперь вернёмся к биномиальному распределению $P(n,k)=P(X^{(n)}=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, где $k=0,1,2,...,n.$ и посмотрим к чему будет стремиться эта зависимость в случае, когда n - большое число. Математики говорят в этом случае об асимптотическом стремлении этой зависимости к другому выражению при n в данном случае, стремящемся к большим величинам. Напомню Вам, что мы уже встречались с асимптотами гиперболы, когда гипербола при больших аргументах стремилась к прямой линии. Здесь мы имеем дело с аналогичным случаем. Асимптотическое выражение или проще говоря асимптотика- это не предел. Если мы n устремляем к бесконечности, то полученное выражение не должно зависеть от n, а асимптотика зависит от $n.$ Итак

двум французским математикам Муавру и Лапласу удалось доказать так называемую локальную предельную теорему о том, что асимптотика выражения $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ при больших n равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{k-np}{npq})^2)$. Доказательство справедливости этой асимптотики получено на основании другой асиптотики для факториала или ,что же самое для Гамма-функции. Эта асимптотика называется формулой Стирлинга и гласит следующее: при больших n, $n! = (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. Более подробное доказательство, как мы считаем, выходит за рамки наших этюдов. Говорят, что случайная величина распределена нормально, если плотность её распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})$. Посмотрите выше: мы уже получили эту формулу, где обозначено $\sigma = \sqrt{npq}, k = x, a = np.$ Полученная функция представляет собой колокообразную кривую. Параметр a - представляет собой точку на

на оси абсцисс, где данная кривая имеет максимум и прямая $x = a$ представляет собой ось симметрии данной кривой. Величина этого максимума равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Параметр σ представляет собой расстояние от оси симметрии данной кривой до двух её точек перегиба, расположенных слева и справа от оси симметрии. Параметр σ называют ещё дисперсией или мерой распластанности этой кривой. Если σ мало, то кривая получится узкая и заострённая и пик такой кривой будет тем больше, чем меньше σ. С другой стороны чем больше σ, тем более распластанной будет эта кривая, а при больших σ пик кривой совсем сходит на нет. Если плотность распределения случайной величины X подчиняется этому закону, то говорят, что $X \in N(x; a, \sigma)$ и этого уже достаточно, чтобы все знали, что данная

случайная величина подчиняется нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Это, пожалуй, самая известная кривая в математике, а нормальному закону распределения подчиняется столько явлений в природе, что их простое перечисление заняло бы

бы ни одну страницу. И поэтому не случайно многие, и надо сказать вполне обосновано, считают закон нормального распределения одним из основных законов природы. Мы же пока проверим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$ что означает, что случайная величина X может принять любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Итак $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})dx.$ В этом интеграле делаем замену $z = \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$. Тогда $dx = \sqrt{2}\sigma\, dz$ и новая переменная z будет меняться в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. И тогда получим $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})dx =$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-z^2)dz.$ А последний интеграл мы с Вами, как говорится ,проходили. Он равен $\sqrt{\pi}$. И поэтому, как и следовало ожидать $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1.$ Если теперь положить $a=0,\sigma=1,$ то $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2}).$ Такая плотность распределения случайной величины X называется плотностью нормированного и центрированного нормального распределения. Выражение центрированного здесь потому, что ось симметрии данной кривой совпадает с осью абсцисс и проходит через центр, то есть через начало координат. Слово нормированного означает в данном случае то, дисперсия равна единице (нормированная дисперсия). Вспомните, что единичный вектор называется ортнормированным или просто ортом. Вот мы и ответили на первый из поставленных выше вопросов, а заодно появилось много и много вопросов, потому что теория вероятностей –это огромная специальная дисциплина, которую не исчерпать и в сотне печатных страниц и ,которая влечёт за собой и теорию случайных процессов и теорию исследования операций и теорию игр и. т. д., и т. д. Как говорится лиха беда начало. Мы же коснёмся (повторяю только коснёмся) трёх приложений этой теории. Представьте себе, что Вы стреляете в мишень, которая расположена на торцовой стене в длинном тире и Вы при всём своём желании не можете попасть ни в пол, ни в потолок, ни в боковые стены этого тира, а только в торцевую стену. На этой стене Вы нарисуете замкнутую кривую. Очевидно, что вероятность попадания в плоскую фигуру, ограниченную этой замкнутой кривой будет равна отношению площади этой фигуры к площади всей торцовой стены. А теперь поместим в тир очень плохого стрелка и ещё, как говорится для чистоты эксперимента, завяжем ему глаза, дадим в руки винтовку и прикажем ему стрелять в сторону торцевой стенки тира. Мы уже говорили, что этот тир устроен так, что наш горе-стрелок никуда, кроме торцевой стенки стрелять не сможет . Пусть стрелок израсходует N патронов и следы от этих патронов будут хорошо видны на торцевой стенке тира. И далее подсчитаем количество отметок от этих выстрелов, которые разместились внутри указанной фигуры. И пусть это число равно m. И тогда $\frac{m}{N}=\frac{S_f}{S_t},$ где S_f - площадь фигуры, а S_t – площадь торцевой стенки, которая очевидно равна произведению высоты стенки на её ширину. Таким образом мы нашли площадь фигуры, которая нарисована на этой стенке. Эта площадь равна $S_f=\frac{m}{N}S_t.$ Исходя из этой формулы следует, что мы получили ещё один метод вычисления площадей, который не предполагает использования никаких интегралов и никаких точных вычислений. Этот метод называется методом Монте-Карло по имени города и государства, где расположены всем в мире известные игорные дома. Причём этот метод, несмотря на свою нарочитую неточность: из рук вон плохой стрелок плюс завязанные ему газа , оказался на удивление весьма точным и продуктивным. Да, метод этот, конечно, приближённый, но его точность прямо пропорционально числу выстрелов, а их можно увеличивать неограниченное число раз. Мне совершенно справедливо могут возразить, что такой метод неудобен и дорог: нужен специальный тир, винтовка, патроны. Но дело в том, что ничего этого не надо и тир, и винтовка, и патроны здесь приведены для того чтобы как можно более наглядно проиллюстрировать этот метод вычисления площадей. В действительности всё можно значительно упростить: возьмём миллиметровку и пронумеруем все квадратики на ней. И далее начертим на этой же миллиметровке любую замкнутую кривую и задача осталась прежней- определить площадь, ограниченную этой замкнутой кривой. И роль случайных выстрелов нам будет заменять таблица так называемых случайных чисел. То есть вероятность вытащить любое число из этой таблицы будет одинакова или почти одинакова. Как ни странно ,построить такую таблицу оказалось делом весьма сложным. Чего только ни делали математики для того, чтобы построить эту таблицу, в частности, например, выпи-

сывали месяца и дни рождения с памятников на кладбищах, но ни в коем случае ни года смерти, так как под кладбище, умерших в каком-то году отводится определённый участок и поэтому годы смерти, похороненных на кладбище подчиняются определённой закономерности. Такие способы построения таблицы случайных чисел уже давно не используются. Применяются специальные генераторы псевдослучайных чисел, которые входят в математическое обеспечения стандартных программ, реализованных на компьютерах. Мы не будем уточнять, чем псевдослучайные числа отличаются от случайных ,так как это специальный вопрос. Для нас будет вполне достаточно того, что этими числами можно

вполне заменить стрельбу в тире из винтовки. Меня могут, естественно спросить, а зачем городить такой огород, не проще ли будет элементарно подсчитать на миллиметровке число квадратиков внутри плоской области. Да, для данного конкретного примера это так, а что будет, если мы будем иметь дело с миллионами или даже миллиардами таких

квадратиков и не с плоской областью, а с пространственной фигурой, объём которой требуется вычислить, вот тут метод Монте-Карло окажется существенно предпочтительнее по сравнению с другими численными методами. Теперь снова вернёмся к сигма –алгебре и рассмотрим некоторые её необычные приложения. Ко мне как-то обратилась одна сотрудница биологического факультета Пенсильванского университета, расположенного в городе Филадельфия (США), где я в настоящее время живу, начиная с 2000 года и по настоящее время. Вопрос был следующий: всем хорошо известна двойная спираль ДНК, так вот каждая из этих спиралей представляет собой длинную цепочку аминокислот и выглядит, например, так TTCCCAAAAGGGGTTTT и. т. д. всего порядка 500 или более символов, каждый из которых представляет собой определённую аминокислоту. Шеф этой сотрудницы считал ,что представленные им цепочки биологически похожи. Так вот можно ли под этим фактом подвести какое-то математическое обоснование? Поскольку эта сотрудница имела представление о математике на уровне школы, оконченной ей 25 лет тому назад, она обратилась за помощью ко мне. Мы вдвоём, поскольку я до сих пор плохо, если не сказать больше, владею английским языком, беседовали с её шефом ,профессором биологии Пенсильванского университета. Я его спросил, на каком основании он считает, что эти две последовательности похожи? Он мне сказал, для того чтобы ответить на этот

вопрос надо быть биологом. Это конечно не конкретный ответ, но ничего другого я не получил. Я эти цепочки видел впервые, но мне они напоминали опыты бросания с монетами. Действительно, если мы бросаем, сразу, например, десять монет, то мы можем получить, например, такую последовательность ooopppoppo. Напомню, что o- это орёл, а p- это решка. Монета, как известно, имеет всего две стороны, а аминокислот четыре: A, C, G, T. Поэтому надо рассматривать не монету, а правильный (все грани которого равны) че-

тырёхгранник. Таким четырёхгранником является тетраэдр или правильная четырёхугольная пирамида, все четыре грани которой представляют равносторонний треугольник. Теперь нарисуем на одной грани букву A, на другой букву C, на третьей букву G, на

четвёртой букву T. И далее будем бросать, например, два тетраэдра,

один из которых украшен в красный цвет, а другой в оранжевый (два первых цвета радуги). В результате будем иметь полный набор событий или сигма- алгебру

$AA, AC, AG, AT, CA, CC, CG, CT, GA, GC, GG, GT, TA, TC, TG, TT$. То есть полное количество событий или число элементов сигма- алгебры будет в этом случае равно $16 = 4^2$. Если же мы будем бросать семь тетраэдров, окрашенных во все цвета радуги ,то число элементов сигма- алгебры составит $4^7 = 16384$. Если же теперь число символов в цепочке будет 500 (надо признать, что это средняя по длине цепочка), то число возможных элементов в такой сигма-алгебре будет равно 4^{500}. Попробуем оценить это число $4^{500} = 2^{1000} = (2^{10})^{100}$. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. И поэтому предыдущее число больше, чем такое число $(10^3)^{100} = 10^{300}$, которое невообразимо громадно и другого выражения просто невозможно подобрать. Вспомните, что мы уже упоминали число Гугл, которое равно 10^{100} и говорили о нём, что такого количества нет атомов во всей видимой вселенной, тем более нельзя представить такое количество биологических объектов. Отсюда следует, что число тетраэдров должно быть ограниченным и скорее всего их не больше двадцати. В этом случае число элементов в сигма –алгебре составит $4^{20} = 2^{40} = (2^{10})^4 \approx 10^{12}$, что вполне приемлемо. А цепочка длиной в 500 символов получится, если мы 25 раз подряд бросим 20 тетраэдров. А теперь, что с точки зрения математика означает, что какие-либо две последовательности похожи. Вероятнее всего в этом случае число тетраэдров, образующих эти последовательности будет существенно меньше 20. Эти свои соображения я изложил профессору биологии. Он мне ответил, что ему непонятно, что с точки зрения биолога представляет собой тетраэдр, но обещал подумать. Затем, как это обычно бывает, заела текучка, но это уже совсем другая тема далекая и от биологии и от математики. А теперь рассмотрим ещё один пример применения сигма- алгебры, где мы уже не будем связаны ни с биологией, ни с физикой.

Возможно, Вам часто приходилось слышать, что в музыке всего семь нот, но сколько разных мелодий. Так вот с точки зрения математики это утверждение принципиально неверно. И это я Вам постараюсь доказать. Во-первых число нот не семь, а двенадцать. К семи всем известным нотам надо добавить додиез, редиез, фадиез, сольдиез и лядиез. А теперь возьмём додекаэдр- правильный двенадцатигранник. И нарисуем на каждой из его граней по одной ноте. Если теперь музыкальная тема состоит всего из двух нот, то число таких тем или, как говорят математики, элементов сигма –алгебры будет $12^2 = 144$. Если же музыкальная тема состоит из трёх нот, то число возможных тем возрастёт до $12^3 = 1728$. Всем хорошо известна музыкальная тема, состоящая из 12 нот. Эта песня Булата Окуджавы: «Виноградную косточку в тёплую землю зарою». Вот эти ноты: Ля, Си, До, До, До, До, До, До, До, До, До, До. А теперь подсчитаем сколько таких тем может быть. Полученное число будет $12^{12} = (2^2 3)^{12} = 2^{24} 3^{12} = 2^{20} 2^4 3^{10} 3^2 \approx (10^3)^2 \times 16 \times 59 \times 9 \times 10^3 \approx 8.5 \times 10^{12}$. Это число читается так: восемь с половиной триллионов. Представим себе, что сидя за фортепьяно композитор затратит на одну тему всего одну секунду, то для пересмотра миллиарда тем ему потребуется 31 год, а для просмотра всех указанных выше тем потребуется 263500 лет. Очевидно, что такое количество музыкальных тем не пересмотрели все композиторы всех времён и народов, живших когда-либо на Земле. Мне могут возразить, что из этих тем далеко не все будут мелодиями, многие будут просто диссонансами, режущими слух. Да, это конечно верно, но для того чтобы это определить надо всё это пересмотреть. И ещё одно возражение: с появлением компьютеров можно в принципе создать такую программу, которая сможет не реально, а виртуально, так же как компьютерная игра, раскидывать виртуальные додекаэдры, записывать музыкальную тему и затем выбирать ту из них, которая больше всего будет удовлетворять вкусу данного компьютера. Тут всё понятно и на современном уровне вполне реализуемо, кроме одного, что будет представлять собой музыкальный вкус компьютера.

Теперь настала пора вернуться к следующему вопросу, о том как были получены таблицы специальных функций. Этот вопрос, как мне кажется, забыт за большим количеством отступлений ,в том числе, и тех, которые на первый взгляд не относятся к математике. Пусть $f(x)-$ функция, которая дифференцируема неограниченное число раз и пусть её можно представить в виде: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k$. Здесь $a_k, x, b-$вещественные числа, тогда $a_0=f(b)$. Затем берём производную от предыдущего выражения. В результате получим

$f^{/}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k(x-b)^{k-1}$ и далее , подставив в это выражение $x=b$, найдём $a_1=\frac{f^{/}(b)}{1}$. Проделав такую же процедуру ещё раз, получим $f^{//}(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k(x-b)^{k-2}$ и $a_2=\frac{f^{//}(b)}{2\times 1}$. И для наглядности ещё один раз

$f^{///}(x)=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\, a_k(x-b)^{k-3}$ и $a_3=\frac{f^{///}(b)}{3\times 2\times 1}$. Теперь, я думаю, Вы догадались, что

$a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}=\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+1)}, k=0,1,2,\ldots.$ Здесь все обозначения нам уже известны. Таким образом мы получили бесконечное, но счётное количество одночленов вида $\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k, k=0,1,2,.$

Такая совокупность называется степенным рядом Тейлора для функции $f(x)$. В таких случаях говорят, что функция $f(x)$ разложена в степенной ряд в окрестностях точки $x=b$. А выражение $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-b)^k$ - сумма членов этого степенного ряда. Если эта сумма имеет конечное значение при некоторых $|x-b|\le x_0$, то говорят, что данный ряд сходится и величина x_0 называется радиусом сходимости этого ряда. Частным случаем ряда Тейлора является ряд Маклорена –это тот же самый ряд Тейлора, но при условии $b = 0.$ Именно этот ряд чаще всего встречается в прикладной математике. Разложим для примера функцию $\sin(x)$ в этот ряд. Как Вы помните, $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$ и поэтому $\sin^{(k)}(0) = 0,$ если $k = 2n,$ то есть, если k – чётное число. Если же k – нечётное число, то есть $k = 2n + 1,$ то $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. В итоге $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Напомним, что $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$ и поэтому $\cos^{(k)}(0) = 0,$ если $k = 2n + 1,$ то есть, если k – нечётное число. Если же k – чётное число, то есть $k = 2n,$ то $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$. В итоге $\cos(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Разложим теперь в степенной ряд функцию $\exp(x).$ С этой функцией проще всего, так как $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$ и поэтому $\exp^{(k)}(0) = 1$ и тогда $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. И последнее, что нам пока нужно- это разложить в степенной ряд функцию $\exp(-x).$ В этом случае $\exp^{(k)}(-x) = (-1)^k \exp(-x)$ и поэтому $\exp^{(k)}(-0) = (-1)^k$ и тогда $\exp(-x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!}$. И этих результатов нам пока достаточно, чтобы записать алгоритм вычисления следующих специальных функций: неполная гамма-функция $\gamma(s,a) = \int_0^a \exp(-t)t^{s-1}dt$, функция эрф, $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt,$ интегралы Френеля $F_s(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt,$ $F_c(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt,$ функция Бесселя $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(xt)dt.$ Сейчас мы покажем, как с помощью степенного ряда можно вычислить все эти функции.

$$\gamma(s,x) = \int_0^x \exp(-t)t^{s-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^x t^{k+s-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+s}}{k!(k+s)}, s > 0.$$

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt.$ Делаем замену $t^2 = y, t = \sqrt{y}, dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Если $0 \le t \le x,$ то $0 \le y \le x^2.$

В результате получим $erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\exp(-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{x^2} y^{k-\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$

Точно такую же замену сделаем для двух интегралов Френеля. И тогда

$$F_s(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin(y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^{x^2} y^{2n+\frac{1}{2}}dy = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

$F_c(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\cos(y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}(\int_0^{x^2}\frac{dy}{\sqrt{y}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{x^2} y^{2n-\frac{1}{2}}dy) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}.$ Теперь обратимся к функции Бесселя $J_0(x).$ Вначале заметим, что $\cos(xt) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}$

и тогда $J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!})=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

Далее делаем замену $t=\sin(y)$. В результате получим

$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(y)dy=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(y)dy.$ Дело свелось к рассмотрению следующего интеграла $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(y)dy.$ Этот интеграл, конечно, берётся, как интеграл от любой рациональной комбинации тригонометрических функций, в данном случае- это степень синусов. Методом индукции можно показать, полагая последовательно $n=1, n=2, n=3,...,$ что он равен $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$. Для этого нужно проделать громоздкие, но не сложные вычисления. И тогда окончательно имеем $J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$ Таким образом мы показали, что приведённые выше так называемые специальные функции могут быть представлены в виде степенных рядов точно также как и элементарные функции: синусы, косинусы и экспоненты. И точно также как и эти функции их можно затабулировать, то есть представить в виде таблиц и записать в математическое обеспечение компьютерных программ, что уже давно и сделано. Здесь правда возникает, как минимум два вопроса: 1. Сходятся ли все эти ряды в том числе и для элементарных функций. 2. Мы производили интегрирование этих рядов, а законно ли это? Французским математиком Даламбером доказан следующий признак сходимости степенных рядов. Напомним, что ,если радиус сходимости степенного ряда больше нуля, то ряд сходится. Пусть $r-$ радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$,. то тогда согласно признаку Даламбера , его радиус сходимости равен $r=\frac{1}{q}$, где $q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. А теперь проверим радиус сходимости всех используемых нами функций, начиная с элементарных. Для синуса имеем $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+3)!}, a_n=\frac{1}{(2n+1)!}.$

И тогда $q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\right|=0, r=\infty.$ То есть этот ряд сходится при всех $x.$ Для косинуса имеем $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+2)!}, a_n=\frac{1}{(2n)!}.$ И тогда $q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right|=0, r=\infty.$ То есть этот ряд сходится при всех $x.$ Для экспоненты имеем $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}, a_n=\frac{1}{n!}.$ И тогда

$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0,\ r=\infty.$ И этот ряд сходится при всех x. Для неполной гамма- функции имеем $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!(n+1+s)}, a_n=\frac{1}{n!(n+s)}$. И тогда $q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+s)}{(n+1)(n+1+s)}\right|=0,\ r=\infty.$

Напомню, что здесь $s>0$. То есть и этот ряд сходится при всех x. Для эрффункции имеем $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}, a_n=\frac{1}{n!(2n+1)}$. И тогда $q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}\right|=0,\ r=\infty.$ И этот ряд сходится при всех x. По-моему этого достаточно. И ясно, что все остальные ряды для рассмотренных здесь специальных функций сходятся при всех x. Возможно Вы обратили внимание на то, что при почленном интегрировании сходимость рядов, которые получаются при производстве этой операции оказывается не хуже, а в целом ряде и лучше, чем сходимость исходных рядов. Таким образом мы обнаружили одно из свойств степенных рядов: степенные ряды всегда можно почленно интегрировать в пределах их радиуса сходимости. Этим почленное интегрирование степенных рядов существенно отличается от почленного дифференцирования. В этом случае полученный новый степенной ряд может и расходиться. И поэтому после операции почленного дифференцирования надо обязательно проверить, сходится ли полученный ряд и как изменился его радиус сходимости. Вы помните , что мы говорили о том, что интегрирование улучшает качество исходной функции: например, исходная функция имеет разрыв, а проинтегрированная становится непрерывной. И здесь это свойство функций ещё раз подтвердилось. Вероятно возник ещё и такой вопрос: я показал, как можно вычислить все так называемые специальные функции, в том числе и неполную гамма- функцию, но ничего не сказал о том как вычислять гамма- функцию. По определению $\Gamma(s)=\lim_{x\to\infty}\gamma(s,x)$. Но прямо подставить $x=\infty$ в степенной ряд, описывающий неполную гамма функцию, мы не можем и поэтому можно поступить следующим образом: подставлять в этот ряд конечные числа: $x=5$,10, 15, 20 и.т. д. И в итоге результат ,полученный при каком -то конкретном значении x будет с какой- то заданной точностью существенно не отличаться от результата, полученного при предыдущем значении x. Таким образом сформирована числовая последовательность, которая ,как говорят математики, сходится в себе. В теории числовых последовательностей доказана теорема, что, если числовая последовательность сходится в себе, то она и сходится к кому-то конкретному значению. Этот результат и следует считать значением $\Gamma(s)$. Кстати, вычислению может помочь следующее функциональное соотношение $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\ \ s>0,$ которое легко доказать. Действительно $\Gamma(s+1)=\int_0^\infty x^s\exp(-x)dx.$

Затем интегрируем это выражение по частям, полагая $\exp(-x)=dv, x^s=u.$ Тогда

$v = -\exp(-x), du = s\,x^{s-1}$. И $\Gamma(s+1) = -x^s \exp(-x) I_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} x^{s-1}\exp(-x)dx$, а так как $s > 0,$ то получим требуемое функциональное соотношение. Из этого функционального соотношения следует, что нам достаточно вычислить $\Gamma(s)$ в следующих пределах изменения аргумента этой функции $0 < s < 1$. Если кому-то вычисление $\Gamma(s)$ с помощью числовых последовательностей покажется неубедительным или недостаточно эффективным, рассмотрим следующую формулу Гаусса, а заодно и некоторые сопутствующие ей, как мне кажется, интересные факты. Итак, согласно формуле Гаусса имеем $\frac{\Gamma^{/}(z)}{\Gamma(z)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt,$ где С – постоянная Эйлера, $C = \lim_{n\to\infty}(\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{v} - \ln(n)), C = 0.577215664901532...$ То есть С- это одно из трансцендентных чисел такое же, как π или e, правда значительно менее используемое в математике, чем эти два числа. А теперь рассмотрим следующий числовой ряд (то есть состоящий, в отличие от степенного ряда из чисел). Об этом ряде Вы наверняка слышали- это, так называемая, геометрическая прогрессия. Её можно записать так :

$a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, aq^n$. Как видите мы записали только n членов этого ряда, где $a-$первый член этого ряда, а $q-$ так называемый знаменатель геометрической прогрессии. Так вот оказалось, что сумму первых n членов этого ряда можно очень легко вычислить. Действительно умножим первые n членов этого ряда на q. В результате получим

$aq, aq^2, ..., aq^n, aq^{n+1}$ а теперь вычтем из первой последовательности вторую. В результате этого действия мы получим только два члена a и $-aq^{n+1}$. Все остальные члены этих двух последовательностей уничтожатся. А теперь обозначим сумму первых членов последовательности через S_n, то тогда сумма членов второй последовательности будет qS_n и поэтому $S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$. Если $q < 1,$ то будет существовать предел $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ $-$это и есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Итак мы доказали, что такой ряд $a\sum_{k=0}^{\infty} q^n$, где $0 < q < 1$сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. Знаменатель в геометрической прогрессии меняется ровно в тех же пределах , что и переменная интегрирования t в приведённой здесь же формуле Гаусса и поэтому эту формулу можно переписать так

$\frac{\Gamma^{/}(z)}{\Gamma(z)} + C = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 t^k(1-t^{z-1})dt = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+z}}{k+z})_0^1 = (z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+z)}$. Числовой ряд, стоящий в в правой части этого выражения сходится. Это следует из так называемого признака Маклорена - Коши, который гласит, что, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n),$` причём $f(n)$ -значение некоторой функции $f(x)$, которая определена при $x>1$ и совпадает $x=n$ с функцией $f(n)$. Так вот, если функция $f(x)$ монотонно убывает с ростом x, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(x)dx$. В нашем случае

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+z)}, z=const>0.$ Такие интегралы мы с Вами уже брали и я призывая Вас проделать это упражнение самостоятельно и в итоге получить $\frac{1}{z-1}\ln(\frac{x+1}{x+z})_0^{\infty}$. Можете ещё для контроля продифференцировать полученный результат и найти исходное подынтегральное выражение. При подстановке пределов мы получим конечное выражение равное $\frac{\ln(z)}{(z-1)} \neq \infty$. Значит интересующий нас ряд действительно сходится. Может возникнуть вопрос, а почему нам, казалось бы на первый взгляд, не поступить бы проще и подставить пределы интегрирования в выражение $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{t^{k+1}}{k+1}-\frac{t^{k+z}}{k+z})_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+z}$. Но так действовать нельзя. Дело в том, что каждый из этих двух, так называемых гармонических рядов ,расходится. Действительно, согласно правилу Маклорена- Коши, требуется рассмотреть такой несобственный интеграл $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)_0^{\infty}=\infty$. Аналогично расходится ,очевидно, и второй ряд. В итоге мы получим неопределённость вида $\infty-\infty$, с которой в данном слу- сделать чего-нибудь невозможно. Поэтому нам остаётся численно просуммировать выражение и найти $\varphi(z)=(z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+z)}, z>0.$ И далее окончательно

$\Gamma(z)=\exp(-Cz+\int_0^z \varphi(y)dy).$ Таким образом, Вы, как мне кажется, получили некоторое представление о числовых и степенных рядах, но эта тема содержит ещё и знакопеременные числовые ряды и тригонометрические ряды и функциональные ряды и. т. д. И, если Вас заинтересовал этот раздел математики, то Вы можете самостоятельно в дальнейшем изучать этот по своему увлекательный фрагмент.

А мы с Вами в рамках наших этюдов рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения. Вы наверное помните, что алгебраические уравнения представляли собой равенства, которые содержат неизвестное число, часто обозначаемое буквой x. Сейчас мы рассмотрим равенства, содержащие неизвестную функцию $y(x)$ и помимо неё конечное число производных от этой функции. В общем виде такое равенство можно записать так $F(x,y,y^{/},y^{//},...,y^{(n)})=0,$ где $F-$ означает некую зависимость, включающую в себя постоянные, переменные значения или ,как говорят, текущие значения x, функции $y(x)$ и производные этой функции по x от первого до $n-$го порядка. Если в алгебраических уравнениях мы находили число, которое обращает данное уравнение в тождество, то здесь надо найти уже не число, а функцию, которое обращает данное уравнение в тождество. В алгебраических уравнениях наивысшая степень неизвестного x называлось порядком этого алгебраического уравнения. Порядком в дифференциальном уравнении называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Приведённая выше зависимость $F(x, y, y^{/}, y^{//},..., y^{(n)}) = 0,$ называется обыкновенное дифференциальное уравнение $n-$го порядка, заданное в неявном виде. Поясним это определение. Насчёт $n-$го порядка понятно, так как наивысший порядок производной, входящей в это соотношение равен $n.$ Обыкновенным дифференциальное уравнение называется потому, что в него входят только обыкновенные или как иначе говорят прямые производные в отличие от так называемых частных или круглых производных, о которых мы уже упоминали. Теперь запишем обыкновенное дифференциальное уравнение $n-$го порядка заданное в явном виде. Оно выглядит так $y^{(n)} = f(x, y, y^{/}, y^{//},..., y^{(n-1)}),$ то есть из неявной зависимости удаётся выделить наивысшую производную, что в общем случае далеко не всегда получается. И также как при решении алгебраического уравнения мы начинали с уравнения первого порядка так и здесь начнём с обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, заданного в явном виде. Оно выглядит так $y^{/} = f(x, y)$ и его решение зависит от вида функции, стоящей в правой части этого уравнения. В общем виде даже такое простое дифференциальное уравнение не допускает аналитического решения или, как говорят, не выражается в квадратурах. Ниже рассмотрим некоторые частные случаи решения этого уравнения. Пусть правая часть этого уравнения может быть представлена следующим образом $f(x, y) = \varphi(x)\, g(y).$ В таком случае говорят, что переменные в правой части уравнения делятся и подобное уравнение $y^{/} = \varphi(x)\, g(y)$ называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Вспомнив, что $y^{/} = \dfrac{dy}{dx},$ преобразуем это уравнение так $\dfrac{dy}{g(y)} = \varphi(x)dx.$ А теперь, если мы возьмём от обеих частей этого равенства интеграл, то получим $\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$

Это и есть общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Под термином общее решение здесь понимается решение с точностью до произвольной постоянной С. Далее это решение представлено в виде неопределённых интегралов и пока ещё неизвестно берутся они или нет. И такое решение называется , повторю ещё раз, решением в квадратурах. То есть мы поднялись с Вами на более высокий уровень. Раньше с помощью интегрирования по частям или различных подстановок мы вычисляли неопределённые интегралы, а сейчас мы сводим решение дифференциального уравнения к этим интегралам и это уже считается решением.

То, что полученный результат является решением исходного дифференциального уравнения, легко проверить в данном случае. Для этого продифференцируем обе части полученного равенства $d(\int \frac{dy}{g(y)}) = d(\int \varphi(x)dx + C)$ и в результате получим изначальное уравнение. Итак мы рассмотрели один частный случай, когда можно получить решение в квадратурах но, к счастью, далеко не единственный. Рассмотрим ещё несколько подобных частных случаев. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно записать так

$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где функции от двух переменных $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ обладают следующими свойствами: $P(sx,sy) = s^k P(x,y)$ и $Q(sx,sy) = s^k Q(x,y)$, где $s-$действительное число, а $k-$натуральное число. Тогда подстановка $z = \frac{y}{x}$ приводит указанное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Покажем это на примере. Пусть $y' = \frac{x^2 - y^2}{2x^2 - 3y^2}$. В этом случае $P(sx,sy) = s^2(x^2 - y^2)$ и $Q(sx,sy) = s^2(2x^2 - 3y^2)$. Далее делаем замену $z = \frac{y}{x}$ и в результате вместо исходного уравнения имеем $z'x + z = \frac{1-z^2}{2-3z^2}$ или $\frac{(-3z^2+2)dz}{3z^3 - z^2 - 2z + 1} = dx$ и $\int \frac{(-3z^2+2)dz}{3z^3 - z^2 - 2z + 1} = x + C$. В итоге получено решение исходного дифференциального уравнения в квадратурах и, кстати, записанный здесь неопределённый интеграл берётся и это мы , как говорится, проходили. Вспомните интегралы от рациональной дроби. Теперь Вам предстоит вспомнить полный дифференциал функции двух переменных. Напомню, что он выглядит так $dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$. Обозначим теперь $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$. И далее рассмотрим такое дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ относительно неизвестной функции $y(x)$. Такое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. И в нашем случае это как раз так, потому что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. И мы уже об этом говорили, что если функции дифференцируемы по обеим переменным, то можно менять порядок дифференцирования и результат при этом не изменится. Итак, если равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется, то вместо дифференциального уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ будем иметь $dF = 0$. И отсюда следует, что общее решение или, как говорят, общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид. $F(x,y) = C$. Таким образом мы нашли неизвестную функцию $y(x)$, которая в данном случае задана неявно, то есть выделить её в явном виде затруднительно, а иногда и не возможно. Может кому-то показалось, что опять мы переливали из пустого в порожнее: шли вперёд потом назад и пришли к тому с чего начали, но это не так. И чтобы убедиться в этом рассмотрим следующее дифференциальное уравнение $y' = \frac{y^2 - x^2}{y^3 - 2xy}$. Под класс однородных это уравнение не подходит, в чём Вы можете убедиться непосредственно, так как выражение в знаменателе нельзя записать так $Q(sx, sy) = s^k Q(x, y)$. Поэтому перепишем наше уравнение следующим образом:

$(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0.$ Здесь $P(x, y) = x^2 - y^2$ и $Q(x, y) = y^3 - 2xy$. А теперь найдём

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$. Значит наше уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в полных дифференциалах, откуда следует, что решение та-

кого уравнения имеет вид $F(x, y) = C$, где $\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 - y^2$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = y^3 - 2xy$. И поэтому имеем: $\frac{x^3}{3} - 2y^2 x + \frac{y^4}{4} = C$. И в данном случае выделить явно $y(x)$ можно, решив квадратное уравнение относительно $z = y^2$.Желающие могут это проделать. Получится не сложно, но громоздко и поэтому решение удобно оставить в неявном виде. Рассмотрим ещё один класс уравнений: обыкновенное дифференциальное линейное неоднородное уравнение первого порядка. Такое уравнение можно записать в виде: $y' + P(x)y = Q(x)$, где на функции $P(x)$ и $Q(x)$ можно наложить только одно ограничение: они должны быть интегриру-

емы. Приведённое уравнение называется линейным, потому что неизвестная функция

$y(x)$ входит в первой степени и это же уравнение называется неоднородным, потому что оно содержит правую часть в виде функции $Q(x)$.Для того чтобы решить это уравнение, рассмотрим вначале однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$. Помимо того, что это линейное однородное уравнение- это будет уравнение с разделяющимися переменными, которое

мы уже решали. И поэтому имеем $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$. В результате решение можно записать так $y = C\exp(-\int P(x)dx)$.Может возникнуть вопрос, а почему решение записано именно так. Дело в том, что $\frac{dy}{y} = d(\ln(y) + C)$, но можно записать и так $\frac{dy}{y} = d(\ln(\frac{y}{C})) = d(\ln(y) - \ln(C))$, так как C – произвольная постоянная. А тогда имеем $d(\ln(\frac{y}{C})) = -P(x)dx$ и дальше от обеих частей берём неопределённый интеграл. Заметим, что приведённая выше запись более удобна и её используют во всех учебниках математики. В том, что это решение удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка можно убедиться непосредственно. Действительно $y' = -C\exp(-\int P(x)dx)P(x)$ и, подставляя это выражение для производной и выражение $y = C\exp(-\int P(x)dx)$ для функции в уравнение $y' + P(x)y = 0$, мы получим тождество. Таким образом однородное уравнение мы решили, а как же быть с неоднородным? Будем искать решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)\exp(-\int P(x)dx)$. Обратите внимание, мы взяли решение однородного уравнения, а вместо постоянной С записали некую неизвестную нам пока функцию от x, которую обозначили $C(x)$,так как мы вправе обозначать функцию любой буквой. Тогда имеем $y' = C'(x)\exp(-\int P(x)dx) - C(x)P(x)\exp(-\int P(x)dx)$. И наше исходное неоднородное уравнение будет выглядеть так $C'(x) = Q(x)\exp(\int P(x)dx)$. И отсюда найдём

$C(x) = \int Q(x)\exp(\int P(x)dx)dx + C_1$. И окончательно решение обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка можно записать так

$y = \exp(-\int P(x)dx)(\int Q(x)\exp(\int P(x)dx)dx + C_1)$, где $C_1 = const$. Для примера возьмём следующее уравнение $y' + xy = x$, то есть $P(x) = x$ и $Q(x) = x$. Тогда, согласно приведённой выше формуле, $y = \exp(-\int xdx)(\int x\exp(\int xdx)dx + C_1)$. Все неопределённые интегралы, которые включает эта формула ,берутся и поэтому окончательно

и поэтому окончательно $y = 1 + C_1\exp(-\frac{x^2}{2})$ и, как легко проверить, эта функция обращает уравнение $y' + xy = x$ в тождество. Кстати заметим, что общее решения уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ состоит из суммы двух решений: общего решения однородного уравнения: $C_1\exp(-\int P(x)dx)$ и, так называемого ,частного решения неоднородного уравнения

$y = \exp(-\int P(x)dx)\int Q(x)\exp(\int P(x)dx)dx$. Первое слагаемое называется общим решением, потому что оно зависит от произвольной постоянной, а второе слагаемое называется частным решением, потому что в его состав ни входит никакое произвольное постоянное. Иногда частное решение можно, если хотите ,угадать, как в нашем конкретном примере,

когда частное решение очевидно равно единице. Рассмотрим ещё одно уравнение, когда можно, применив подстановку, свести дальнейшее решение к предыдущему уравнению. Уравнение Бернулли (один из основоположников гидродинамики, живший в 18 веке в Швейцарии) имеет вид: $y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 1$. Это уже нелинейное уравнение, так как здесь используется неизвестная функция в степени $n \neq 1$. Разделим обе части этого уравнения на y^n. В результате получим $y^{-n}y^{/} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$. Теперь обозначим $z = y^{1-n}$ и тогда имеем $z^{/} = y^{-n}y^{/}$ и тогда мы получим снова линейное неоднородное дифференциаль-

ное уравнение первого порядка, но уже относительно z $z^{/} + P(x)z = Q(x)$. И как ,часто говорят в математике, задача свелась к предыдущей. Теперь я Вам напомню, что для Земли, так же как и для любого другого космического тела существуют , так называемые первая и

вторая космические скорости. Мы уже об этом с Вами говорили. Первая космическая скорость-эта такая скорость, при которой объект (будь- то ракета, лава, вытекающая из вулкана, или просто камень) , выпущенный с Земли превратится в искусственный спутник

Земли. Первую космическую скорость определить просто: сила тяжести должна быть равна центробежной силе и, как мы это уже проделывали, первая космическая скорость будет равна $V_1 = \sqrt{gR}$, где $g-$ ускорение силы тяжести, а $R-$радиус Земли. Вторая космическая скорость для Земли- это такая скорость, с которой тело, покинув Землю, никогда на неё больше не вернётся. Вот теперь у нас есть все возможности, чтобы вычислить эту скорость. Направим ось OY от Земли вертикально вверх. Согласно второму закону механики Ньютона (масса, умноженная на ускорение, равна силе) имеем: $m\ddot{y} = -G$. Здесь $m-$масса

тела, $\ddot{y}-$ вторая производная координаты $y-$к по времени (мы уже писали, что производная по времени обозначается в механике обычно точкой) и $G-$сила, с которой наше тело притягивается к Земле. Знак минус потому, что пока мы рассматриваем движение нашего тела вниз, то есть обратно направлению оси OY. Мы, казалось бы, рассматриваем

дифференциальное уравнение второго порядка. Ниже мы покажем, что оно сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Согласно закону всемирного тяготения то же, кстати Ньютона, сила с которой тело массой m притягивается к Земле равна $G = \gamma_c \frac{mM}{r^2}$. Здесь γ_c-гравитационная постоянная, $M-$масса Земли, $r-$расстояние от центра Земли до центра тела с массой m. И тогда наше дифференциальное уравнение

второго порядка преобразуется к виду $\ddot{y} = -\gamma_c \frac{M}{r^2}$. Если теперь мы начало координат поместим в центр Земли, то можно заменить координату y на r. По сути дела мы перешли к

уже Вам знакомым полярным координатам, а поскольку задача осесимметричная, то никакой другой координаты, имеется в виду полярный угол, здесь нет. Тогда наше уравнение можно представить так $\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma_c \frac{M}{r^2}$. Левую часть этого уравнения запишем так

$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt})=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=V\frac{dV}{dr}$, где $V-$скорость тела. В результате исходное уравнение можно записать так $V\frac{dV}{dr}=-\gamma_c\frac{M}{r^2}$. И мы, как и обещали, получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка да ещё с разделяющимися переменными, которое, как говорится, мы уже проходили и поэтому имеем $VdV=-\gamma_c\frac{M}{r^2}dr$. Общий интеграл этого уравнения имеет вид $\frac{V^2}{2}=\gamma_c\frac{M}{r}+C$, где С- произвольная постоянная. Теперь заметим, что с увеличением расстояния скорость исследуемого тела будет монотонно уменьшаться и на бесконечности будет равна нулю, то есть $V(\infty)=0$ и отсюда следует, что произвольная постоянная $C=0$. В результате полученная нами формула преобразуется к виду $\frac{V^2}{2}=\gamma_c\frac{M}{r}$. А теперь зададимся вопросом: а чему равна эта скорость на поверхности Земли, когда $r=R$, где $R-$радиус Земли. Она равна $V(R)=\sqrt{2\gamma_c\frac{M}{R}}$, и осталось вспомнить, что ускорение силы тяжести $g=\gamma_c\frac{M}{R^2}$. И тогда искомая скорость тела на поверхности Земли, к которой тело прилетает на Землю из космоса (вспомните метеорит или комету) или наоборот улетает от Земли в космос равна $V(R)=\sqrt{2gR}$ $-$это и есть вторая космическая скорость. Таким образом мы можем вычислить вторую космическую скорость для любого тела во Вселенной, для чего достаточно будет знать его массу и радиус. Вычислим для примера эту скорость для Земли. Для Земли $R=6378169m$ и $g=9.81\frac{m}{\sec^2}$ и тогда

$V(R)\approx 11.2\frac{km}{\sec}$. До последнего примера мы находили общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Мы отмечали, что общее решение для данного уравнения характерно тем, что оно зависит от одной произвольной постоянной. В последнем же примере мы использовали так называемое начальное условие и решали дифференциальное уравнение с этим условием. Такая задача с начальным условием получила название задачи Коши, названная так в честь великого французского математика, жившего в первой половине 19 века. То есть в данном случае повторяется примерно такая же ситуация, когда мы переходили от неопределённых интегралов к определённым. И при этом возникли новые, можно даже сказать, неожиданные решения. И теперь, переходя от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения ,к задаче Коши для этого уравнения мы также получим новые и удивительные результаты. Итак рассмотрим следующий пример. Рассматривается задача Коши (или, если хотите задача с начальным условием) для уравнения $\dot{y}+ay=\tau$, где $\dot{y}=\frac{dy}{d\tau}$ - производная функции $y(\tau)$ по времени τ и $a=const$. Начальное условие для этого уравнения $y(0)=0$. Заметим, что такое условие называется однородным. Таким образом мы должны решить неоднородное дифференциальное уравнение с однородным начальным условием. И теперь введём интегральное преобразование Лапласа, названное так в честь великого французского математика, жившего также как и Коши, в первой половине 19 века. Это преобразование можно записать так: $\bar{y}(p)=\int_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau$, где $p-$комплексное число, вещественная часть которого больше нуля и этот факт, напомню Вам ,обозначается так $\operatorname{Re} p>0.$ А теперь применим это преобразование к нашему уравнению. В результате пишем

$\int_0^\infty \dot{y}(\tau)\exp(-p\tau)d\tau + a\int_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \int_0^\infty \tau\exp(-p\tau)d\tau.$ Рассмотрим по порядку все эти интегралы. При взятие первого интеграла используем правило интегрирования по частям, обозначив при этом $\dot{y}\,d\tau = dv; \exp(-p\tau)=u.$ Тогда $v=y; du=-p\exp(-p\tau)\,d\tau.$ И поэтому

$\int_0^\infty \dot{y}\exp(-p\tau)d\tau = y\exp(-p\tau)I_0^\infty + p\int_0^\infty y\exp(-p\tau)\,d\tau = y(\infty)\exp(-p\infty)-y(0)\exp(0)+p\,\bar{y}.$ Заметим, что

$\exp(-p\infty)=0,$ так как $\operatorname{Re} p>0.$ И отсюда $y(\infty)\exp(-p\infty)=0,$ так как мы предполагаем ,и так будем делать практически всегда, что неизвестная функция $y(\tau)$ растёт со временем не быстрее, чем $\exp(\alpha\tau),$ где $\alpha=const>0.$ Напомню, что мы имеем дело с задачей Коши, то есть начальное условие нам заранее известно и в данном случае $y(0)=0.$ Итак имеем

$\int_0^\infty \dot{y}\exp(-p\tau)d\tau = p\,\bar{y}.$ Напомню ещё, что $y(\tau)$- неизвестная функция времени, а $\bar{y}(p)-$ изображение этой функции по Лапласу или интегральное преобразование этой функции по Лапласу. И то и другое определение означают одно и то же. И чаше всего это изображение обозначают так $\bar{y}.$ Забегая вперёд, скажу, что преобразование Лапласа-это одно из многочисленных интегральных преобразований, и, возможно, мы некоторые из них в дальнейшем рассмотрим. Второй интеграл в нашем равенстве имеет вид

$a\int_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau$ и, согласно определению интегрального преобразования Лапласа, он равен $a\,\bar{y}$. Остался последний интеграл $\int_0^\infty \tau\exp(-p\tau)d\tau.$ Воспользуемся снова правилом интегрирования по частям. Обозначим $u=\tau; dv=\exp(-p\tau)d\tau.$ Тогда $du=d\tau; v=\frac{-1}{p}\exp(-p\tau).$ В результате $\int_0^\infty \tau\exp(-p\tau)d\tau = -\tau\frac{\exp(-p\tau)}{p}I_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty \exp(-p\tau)d\tau = 0-0-\frac{1}{p^2}\exp(-p\tau)I_0^\infty = \frac{1}{p^2}.$ Итак

наше дифференциальное уравнение в результате применения интегрального преобразования трансформировалась к виду : $p\bar{y}+a\bar{y}=\frac{1}{p^2}$ и $\bar{y}=\frac{1}{p^2(p+a)}$. Вот таким стало изображение по Лапласу для неизвестной функции $y(\tau)$. Теперь надо вернуться от изображений к самой функции. И вот здесь сделаем небольшое отступление. Мне могут поставить в упрёк, что мы много времени тратим на решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, в то время как более сложное уравнение с переменными коэффициентами решается значительно проще. Да это так, но дело в том, что операционный метод, а именно так ещё называется этот метод с использованием преобразования Лапласа, может быть использован не только для уравнений первого порядка, но и для уравнений второго, третьего и вообще любого конечного порядка, но с постоянными коэффициентами. Именно для этих уравнений его впервые применил американский инженер Хевисайд, которому, как говорится по долгу службы, приходилось неоднократно решать такого рода уравнения, работая в электротехнической компании. Более того этот метод успешно применялся для решения нестационарных уравнений в частных производных в трудах академика А.В. Лыкова и его учеников, изучавших и изучающих до сих пор процессы тепло –и массопереноса в твердых телах, в жидкости и в газовых средах, в том числе и в атмосфере. Так что этот метод имеет далеко идущие обобщения. Но мы ещё не закончили дела с нашим уравнением. Напомню, что мы остановились на том, что надо обратить решение полученное пока в виде изображений. В общем случае эта задача пока нам не по зубам поскольку для этого необходимо представлять, что такое функция от комплексного переменного. Это специальный раздел математики и я пока не уверен затронем ли мы его в нашем повествовании. А пока поступим точно также, как и поступал Хевисайд. В частности, мы уже знаем, что
$\bar{1}=\int_0^\infty 1\times\exp(-p\tau)d\tau=\frac{1}{p}$. То есть отображение по Лапласу единицы – это $\frac{1}{p}$. А теперь прочитаем это утверждения справа налево и получим, что оригинал изображения $\frac{1}{p}$ представляет собой единицу. Точно также получим, что оригинал изображения $\frac{1}{p^2}$ представляет собой τ. И последнее, что нам в данном конкретном примере нужно- это оригинал изображения $\frac{1}{p+a}$, который, в чём Вы сами можете убедиться, равен $\exp(-a\tau)$, где $a-$любое, в общем случае даже комплексное число, удовлетворяющее условию, что
$\mathrm{Re}(a+p)>0.$ И уже давно существуют таблицы функций и их изображений по Лапласу и их нетрудно найти через Интернет. А теперь вернёмся к изображению решения нашего уравнения и разложим его на множители, точно также как мы и делали, когда вычисляли неопределённый интеграл от рациональной дроби. В результате имеем

$\dfrac{1}{p^2(p+a)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p+a}$, где $A,B,C-$ неизвестные пока числа. Приведя правую часть этого выражения к общему знаменателю, получим $\dfrac{1}{p^2(p+a)}=\dfrac{p^2(A+C)+p(Aa+B)+Ba}{p^2(p+a)}$.

И далее из равенства полиномов, как я надеюсь Вы помните, однозначно следует, что $A+C=0, Aa+B=0, Ba=1$. И тогда $B=\dfrac{1}{a}; A=-\dfrac{1}{a^2}; C=\dfrac{1}{a^2}$. Затем пишем

$\bar{y}(p)=\dfrac{1}{p^2(p+a)}=\dfrac{-1}{a^2p}+\dfrac{1}{ap^2}+\dfrac{1}{a^2(p+a)}$, а оригиналы этих выражений нам уже известны и поэтому $y(\tau)=\dfrac{-1}{a^2}+\dfrac{\tau}{a}+\dfrac{\exp(-a\tau)}{a^2}$. Это и есть решение задачи Коши для нашего уравнения.

Действительно $y(0)=\dfrac{-1}{a^2}+0+\dfrac{1}{a^2}=0$. И $y'(\tau)=0+\dfrac{1}{a}-\dfrac{\exp(-a\tau)}{a}$; $a\,y(\tau)=\dfrac{-1}{a}+\tau+\dfrac{\exp(-a\tau)}{a}$ и $y'(\tau)+ay(\tau)=\tau$, что и доказывает, что найденная нами функция удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и начальному условию. А теперь вернёмся к следующему уравнению $y'+xy=x$. Мы его уже решали. Его общее решение имеет вид $y(x)=1+C_1\exp(-\dfrac{x^2}{2})$. При наличии начального условия $y(0)=0$ постоянная C_1 равна -1 и его решение будет иметь вид $y(x)=1-\exp(-\dfrac{x^2}{2})$. Несмотря на то что решение нами уже получено, мы найдём решение этого же уравнения, но другим способом и это делается по той причине, что данный метод решения имеет ,как и операционный метод, далеко идущие обобщения. Но преобразование Лапласа здесь уже не применимо. Ищем решение данного уравнения в виде степенного ряда с неизвестными пока нам коэффициентами $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. Так как $y(0)=0$, то $a_0=0$ и неизвестную нам пока функцию можно записать так $y(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$. Тогда $y'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,a_kx^{k-1}$ и $x\,y(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^{k+1}$. И это всё подставим в наше уравнение. В результате получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,a_kx^{k-1}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^{k+1}=x$. Затем приравняем коэффициен фициенты при одинаковых степенях x. При x^0 слева имеем a_1, а справа ноль и поэтому $a_1=0$. При x^1 слева имеем $2a_2$, а справа единицу и тогда $a_2=\dfrac{1}{2}$. При x^2 слева имеем $3a_3+a_1$, а справа ноль и поэтому, так как a_1 равно нулю, то и $a_3=0$. При x^3 слева имеем $4a_4+a_2$, а справа ноль и поэтому $a_4=\dfrac{-1}{8}$. Дальше по-моему всё ясно и желающие могут сами убедиться в том, что $a_1=a_3=a_5=.....=a_{2n+1}=0$, где $n=0,1,2,....$ И далее $a_2=\dfrac{1}{2}; a_4=\dfrac{-1}{2\times4}$; $a_6=\dfrac{1}{2\times4\times6}$. Или $a_{2n}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n)!!}, n=1,2,...$ Выражение $(2n)!!$ нам пока не встречалось. Оно обозначает перемноженные подряд только чётные числа. Точно также и обозначение

$(2n+1)!!$ означает перемноженные подряд нечётные числа. Итак решение однородной (начальное условие равно нулю) задачи Коши для нашего уравнения имеет вид

$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$.Оно не похоже на полученное ранее решение $y(x)=1-\exp(-\frac{x^2}{2})$. Но это именно то самое решение и в справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственно, разложив последнее решение в ряд Маклорена $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}y^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$. Здесь под нулевой производной понимается сама функция. Итак $y(0)=0$; $y^{/}(x)=x\exp(-\frac{x^2}{2})$,

$$y^{/}(0)=0;\ y^{//}(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})-x^2\exp(-\frac{x^2}{2}),\ y^{//}(0)=1;\ y^{(3)}(x)=-3x\exp(-\frac{x^2}{2})+x^3\exp(-\frac{x^2}{2}),\ \ y^{(3)}(0)=0;$$

$y^{(4)}(x)=-3\exp(-\frac{x^2}{2})+6x^2\exp(-\frac{x^2}{2})-x^4\exp(-\frac{x^2}{2}),\ y^{(4)}(0)=-3;$ Дальше по-моему можно не

продолжать, потому что становится очевидным правильность записанных решений. Полученное решение можно обобщить и на тот случай, когда в правой части уравнения стоит не одночлен x, а любой полином от x и даже степенной ряд. Можно даже с помощью этого метода найти решение и такого уравнения $y^{/}+y\sum_{k=1}^{n}c_kx^k=\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^k$, где c_k и b_k – заданные числа. Логичен вопрос: почему мы в качестве коэффициента при y взяли полином n – ой степени, а не ряд? Дело в том, что мы в качестве решения этого уравнения используем степенной ряд с неизвестными пока коэффициентами и поэтому заранее неизвестно будет ли сходится ряд представляющий собой произведение этих двух рядов. Мы привели обобщение полученных решений пока только для дифференциального

уравнения первого порядка, но этот метод может быть обобщён и на дифференциальные уравнения более высокого порядка. До сих пор все приведённые здесь решения дифференциальных уравнений первого порядка называют аналитическими решениями, то есть решениями, представленными в виде формул. При этом неважно какая эта формула: она может представлять собой элементарную или специальную функцию, степенной ряд или

сходящийся ряд по этим функциям. Здесь важно одно, что найденная аналитическая зависимость даёт возможность вычислить результат с любой наперёд заданной точностью. Этот факт является несомненной ценностью аналитических решений и поэтому там, где это возможно, их желательно получить, но, к сожалению, это возможно далеко не всегда.

Рассмотрим теперь самый общий случай дифференциального уравнения первого порядка. Мы уже упоминали, что в этом случае уравнение можно представить так $F(x, y, y^{/}) = 0.$ Будем решать однородную задачу Коши $y(0) = 0$ для этого уравнения, то есть искать неизвестную функцию $y(x)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению на интервале (для примера $0 < x < 1$) и однородному начальному условию. Разделим этот интервал для примера на 10 равных частей: $0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1;$ Длина каждой

из частей $\Delta x = 0.1$. Подставляя начальное условие в уравнение, будем иметь

$F(0,0, y^{/}(0)) = 0,$ откуда можно найти неизвестное нам пока $y^{/}(0).$ Зная $y^{/}(0),$ можно вычислить $y(0.1),$ используя приближённую зависимость $y(0.1) = y(0) + y^{/}(0)\,\Delta x = 0.1\times y^{/}(0).$

Вычислив $y(0.1),$ можно найти из исходного уравнения $y^{/}(0.1).$ Действительно $F(0.1, y(0.1), y^{/}(0.1)) = 0$ и здесь нам уже известно всё, кроме $y^{/}(0.1),$ которую мы и найдём. И далее, используя приближённую зависимость

$y(0.2) = y(0.1) + y^{/}(0.1)\Delta x = y(0.1) + 0.1\times y^{/}(0.1),$ вычислим $y(0.2).$ Мне кажется, что алгоритм, и это слово по-русски можно перевести, как процесс вычислений, уже понятен и продолжать его в общем виде, как мне кажется излишне, и поэтому для наглядности ограничимся конкретным примером, рассматривая однородную задачу Коши для уже хорошо нам знакомого уравнения $y^{/} + xy = x.$ Для этого уравнения $y^{/}(0) = 0.$ Далее используя зависимость $y(0.1) = 0.1\times y^{/}(0),$ найдём, что $y(0.1) = 0.$ И тогда из нашего уравнения следует, что $y^{/}(0.1) + 0.1\times y(0.1) = 0.1$ и $y^{/}(0.1) = 0.1.$ Затем $y(0.2) = y(0.1) + 0.1\times y^{/}(0.1) = 0.01.$ Продолжая вычисления согласно этому алгоритму, мы получим $y(0.3) = 0.0298;$ $y(0.4) = 0.0589;$

$y(0.5) = 0.0966;$ $y(0.6) = 0.1418;$ $y(0.7) = 0.1933;$ $y(0.8) = 0.2498;$ $y(0.9) = 0.3098;$ $y(1.0) = 0.3719.$

Все приведённые вычисления проделаны с точностью до четвёртого знака в России говорят после запятой, а в Америке после точки. Так мы получили численное решение задачи Коши для исходного уравнения $y^{/} + xy = x.$ Таким образом наряду с аналитическим решением этой задачи, которое можно получить далеко не для всякого уравнения, мы получили численное решение этой задачи, которое в принципе можно обобщить на любое

дифференциальное уравнения любого порядка. При этом возникает следующий вопрос, а какова точность полученного решения и как оценить эту точность? В данном конкретном случае ответить на этот вопрос просто, так как известно аналитическое решение уравнения $y^{/} + xy = x.$ Решение однородной задачи Коши для такого уравнения имеет вид: $y = 1 - \exp(-\dfrac{x^2}{2}).$ Используя таблицы для экспоненты ,получим, что $y(0) = 0;$ $y(0.1) =$

$= 0.0051;$ $y(0.2) = 0.0196;$ $y(0.3) = 0.0431;$ $y(0.4) = 0.0769;$ $y(0.5) = 0.1175;$ $y(0.6) = 0.1647;$
$y(0.7) = 0.2173;$ $y(0.8) = 0.2739;$ $y(0.9) = 0.3332;$ $y(1.0) = 0.3935.$ Как Вы видите, значение функ-

ции, удовлетворяющей уравнению $y^{/}+xy=x$ и однородному краевому условию $y(0)=0$ и вычисленное двумя различными способами: при помощи аналитического решения и численным методом отличаются друг от друга и даже более того ни в одной из точек интервала не совпадают друг с другом, кроме начального условия. Так можно ли считать полученное численное решение- решением, которое в какой-то степени нас устраивает?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо понять, что значит близость двух разных по сути дела функций. Рассмотрим два различных численных решений нашей задачи, отличающиеся только тем, что выбираются различные шаги по координате Δx. И будем считать, что одно из этих двух численных решений ближе к аналитическому решению, если среднеквадратичное отклонение этого решения меньше, чем среднеквадратичное отклонение другого решения. Поясним вначале, что означает слово среднеквадратичное отклонение. Для этого переобозначим следующим образом решение нашего уравнения, полученные численным методом. $y_1(0)=0; y_1(0.1)=0; y_1(0.2)=0.01; y_1(0.3)=0.0298; y_1(0.4)=0.0589;$

$y_1(0.5)=0.0966; y_1(0.6)=0.1418; y_1(0.7)=0.1933; y_1(0.8)=0.2498; y_1(0.9)=0.3098;\ \ y_1(1.0)=0.3719.$

То есть мы поставили индекс 1 у функции, полученной численным путём, что в данном случае означает- первое численное решение. А теперь составим вот такую сумму

$$\delta_1^2=(y(0)-y_1(0))^2+(y(0.1)-y_1(0.1))^2+(y(0.2)-y_1(0.2))^2+(y(0.3)-y_1(0.3))^2+$$

$$+(y(0.4)-y_1(0.4))^2+(y(0.5)-y_1(0.5))^2+(y(0.6)-y_1(0.6))^2+(y(0.7)-y_1(0.7))^2+$$

$+(y(0.8)-y_1(0.8))^2+(y(0.9)-y_1(0.9))^2+(y(1.0)-y_1(1.0))^2$. Это выражение можно переписать

проще, но менее наглядно $\delta_1^2=\sum_{k=0}^{10}(y(0.1k)-y_1(0.1k))^2$. Так вот δ_1, то есть квадратный корень из последнего выражение назовём среднеквадратичным отклонением первого численного решения от аналитического или точного решения исходного уравнения. Заметим, что эта одна из возможных, правда наиболее употребительных характеристик ,с помощью которых можно судить о том насколько одна функция отличается от другой. Теперь уменьшим интервал Δx, к примеру, в 10 раз и получим новые численные значения $y_2(0.1k), k=0,1,2,\ldots,10.$ И составим следующее выражение $\delta_2^2=\sum_{k=0}^{10}(y(0.1k)-y_2(0.1k))^2$. Результаты расчёта покажут, что $\delta_2<\delta_1$. Это будет означать, что второе численное решение с большей степенью точности чем первое аппроксимирует аналитическое решение. В математике говорят, что одна кривая аппроксимирует другую, если эта кривая в некотором

смысле близка к другой и, в частности, в смысле метода наименьших квадратов. При этом эти две кривые могут не совпадать друг с другом ни в одной точке на заданном интервале $[0,1]$. Кстати, мы здесь коснулись ещё одного вопроса, а можно ли построить такую функцию, которая совпадает с данной кривой в конечном числе точек. В отличие от аппроксимирующей кривой такая зависимость называется интерполяционной. Для этой цели служат специальные интерполяционные многочлены: Ньютона, Лагранжа, Чебышева и других. Покажем, для примера, как через три точки нашей кривой провести интерполяционный многочлен Ньютона. Этот многочлен будет выглядеть так:
$P_2(x) = A_0 + A_1x + A_2x(x-0.1)$. Так как $P_2(0) = y(0) = 0$, то $A_0 = 0$. Если $P_2(0.1) = y(0.1) = 0.0051$, то $A_1 = 0.051$. И ,наконец, $y(0,2) = 0.0196 = P_2(0.2) = 0.051\times 0.2 + A_2\times 0.2\times(0.2-0.1)$. И $A_2 = 0.47$. В результате $P_2(x) = 0.051x + 0.47x(x-1) = 0.47x^2 + 0.004x$. Этот многочлен проходит через три точки $y(0) = 0; y(0.1) = 0.0051; y(0.2) = 0.0196$. Конечно, можно построить интерполяционный многочлен Ньютона, который будет проходить через все заданные 10 точек, но такое решение, как правило, будет хуже решения, полученного путём аппроксимации, так как значения интерполяционного многочлена между заданными точками, которые называют узлами интерполяции, будет существенно отличаться от аналитического решения. Таким образом, уменьшая шаги по координате или, как говорят специалисты по вычислительной математике, подцифровывая, можно довольно точно (в смысле, например, метода наименьших квадратов) приблизится к точному решению. Полученная таким численным образом кривая будет отражать характер теоретической кривой, несмотря на то что она не будет совпадать с ней в подавляющем большинстве точек. Здесь, возможно впервые, Вы встретились с ещё одним термином: вычислительная математика. Скорее всего Вам до сих пор казалось, что математика сама по своей природе должна быть вычислительной и никакой другой. Но это уже давно не так и доведением алгоритмов до числа занимается специальная группа математиков. Их в обиходе называют вычислителями, они имеют дело с компьютерными программами и с помощью их реализуют математические формулы и алгоритмы. И это, повторюсь, специальный и далеко не простой раздел математики.

Итак мы до сих пор оценивали точность численного решения с помощью аналитического решения, но ,а как быть в том случае, если аналитическое решение получить невозможно. Остаётся только одно: проделывать численное решение одной и той же задачи, последовательно уменьшая шаг по координате. В результате мы получим последовательность чисел, которая сходится в себе. Но мы уже знаем, что если последовательность сходится в себе, то она и сходится и вот тут возникает ещё один вопрос: а куда она сходится? И это, пожалуй, наиболее сложный вопрос, который возникает при реализации численных методов. Ответ на этот вопрос решается, как говорится, в индивидуальном порядке для каждого конкретного уравнения, для каждой конкретной задачи и для каждого конкретного алгоритма решения. Так что проблем у вычислительной математики ещё хватает. А мы пойдём дальше и рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В общем виде такое дифференциальное уравнение можно записать так: $F(x,y,y^{/},y^{//})=0.$ Как мы, вероятно, помним наивысший порядок производной и есть порядок уравнения. Конечно, в таком общем виде получить аналитическое решение такого уравнения нельзя, и поэтому, как и выше, перейдём к рассмотрению частных случаев. Во-первых хотелось бы понизить порядок уравнения и это можно сделать для следующего частного случая. Пусть функция F не зависит явно от x и мы имеем дело вот с таким уравнением $F(y,y^{/},y^{//})=0.$ Делаем замену $y^{/}=z$ и $y^{//}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z.$ И наше уравнение преобразуется к виду $F(y,z,z\frac{dz}{dy})=0.$ Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, где y уже не функция, а независимая координата и решение уже этого уравнения сводится к отысканию z, как функции от y и затем из ,используемой замены $y^{/}=z$, найдём y как функцию от x. Для примера рассмотрим следующее уравнение $y^{//}-y(y^{/})^2=0.$ Указанная выше замена приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными $z\frac{dz}{dy}=z^2y$ или $\frac{dz}{z}=ydy.$ И тогда $\ln(\frac{z}{C_1})=\frac{y^2}{2}$ и $z=C_1\exp(\frac{y^2}{2})$, а затем, так как $z=\frac{dy}{dx}$, то получим, что $\int\exp(-\frac{y^2}{2})dy=C_1x+C_2.$ Мы видим, что получено решение в виде квадратуры и плюс ещё знакомый нам интеграл. Обратим внимание на то, что общее решение исходного уравнения зависит от двух постоянных, что естественно, так мы изначально решали дифференциальное уравнение второго порядка. Теперь рассмотрим линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Остановимся на уравнении, которое часто встречается в приложениях: а именно в теории колебаний. $\ddot{y}+2\alpha\dot{y}+(\omega^2+\alpha^2)y=A\sin(\gamma\tau).$ Здесь $y(\tau)-$отклонение колеблющейся материальной точки во времени τ относительно положения равновесия. $\dot{y}=\frac{dy}{d\tau}-$первая производная от y по времени, $\ddot{y}=\frac{d^2y}{d\tau^2}-$вторая производная от y по времени. $\alpha,A,\omega-$вещественные постоянные, причем $A>0;\alpha>0.$ Физический смысл этих констант будет ясен ниже, а пока рассмотрим соответствующее однородное уравнение, которое имеет вид

$\ddot{y}+2\alpha\dot{y}+(\omega^2+\alpha^2)y=0.$ Будем искать решение этого уравнения в виде $y=\exp(k\tau)$, где $k-$комплексное число. Тогда $\ddot{y}=k^2\exp(k\tau);\dot{y}=k\exp(k\tau).$ Подставляя эти зависимости в уравнение и затем, сокращая обе части уравнения на $\exp(k\tau)$, получим квадратное уравнение относительно k, $k^2+2\alpha k+\omega^2+\alpha^2=0,$ решение которого нам хорошо известно

$k_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega^2-\alpha^2}=-\alpha\pm\omega i,$ где $i=\sqrt{-1}-$ мнимая единица. В результате

$y = \exp(-\alpha\tau \pm \omega i) = \exp(-\alpha\tau)(\cos(\omega\tau) \pm i\sin(\omega\tau))$. И общее решение однородного уравнения можно записать так $y(\tau) = C_1 \exp(-\alpha\tau)\cos(\omega\tau) + C_2 \exp(-\alpha\tau)\sin(\omega\tau)$. И так же как и в уравнении первого порядка общее решение неоднородного уравнения будет складываться из общего решения однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения. Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $\bar{y} = B\sin(\gamma\tau) + D\cos(\gamma\tau)$. Очевидный вопрос: а почему именно в таком виде? Дело в том, что в правой части нашего уравнения стоит $A\sin(\gamma\tau)$, но искать частное решение только в виде $B\sin(\gamma\tau)$ нельзя, так как в исходном уравнении есть первая производная по времени, а первая производная от синуса по времени это косинус. Если бы в нашем уравнении не было бы первой производной по времени, то мы искали бы частное решение именно так

$\bar{y} = B\sin(\gamma\tau)$. Первые и вторые производные мы вычислять умеем и поэтому, вычислив их и, подставив в уравнение, получим $-B\gamma\sin(\gamma\tau) - D\gamma^2\cos(\gamma\tau) + 2\alpha\gamma B\cos(\gamma\tau) -$
$-2\alpha\gamma D\sin(\gamma\tau) + (\omega^2+\alpha^2)B\sin(\gamma\tau) + (\omega^2+\alpha^2)D\cos(\gamma\tau) = A\sin(\gamma\tau)$. Приравнивая выражения при синусе и при косинусе, будем иметь линейную алгебраическую систему для двух уравнений с двумя неизвестными относительно B и D $:(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)B - 2\alpha\gamma D = A$ и $2\alpha\gamma B + (\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)C = 0$. Вы, наверное, помните, что определитель такой системы равен: $(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2$. Первый дополнительный определитель равен: $A(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)$, а второй дополнительный определитель имеет вид: $-2\alpha\gamma A$. И поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения будет выглядеть так: $y = C_1\exp(-\alpha\tau)\cos(\omega\tau) +$

$$+C_2\exp(-\alpha\tau)\sin(\omega\tau) + \frac{A(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)^2+4\alpha^2\gamma^2}\sin(\gamma\tau) - \frac{2\alpha\gamma A}{(\omega^2+\alpha^2-\gamma^2)^2+4\alpha^2\gamma^2}\cos(\gamma\tau).$$

Желающие могут самостоятельно проверить справедливость полученного решения, если подставят его в уравнение и убедятся в том, что уравнение превратится в тождество. Общее решение, как и должно быть для дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Остальные постоянные, входящие в это уравнение имеют вполне ясный физический смысл: $\omega -$ частота собственных колебаний в данном случае некоего физического маятника; $\gamma -$ частота вынужденных колебаний этого маятника и $A -$ амплитуда или наибольшее отклонение от положения равновесия этих вынужденных колебаний. Любой физический маятник имеет собственную частоту или набор собственных частот и при идеальных условиях, которые существуют только на бумаге, амплитуда собственных колебаний не будет меняться. В реальной же среде собственные колебания будут затухать и $\alpha -$ так называемый декремент этого затухания. Чтобы не усложнять дальнейшие не сложные, но громоздкие выражения, потому что мы занимаемся математикой, а не физикой будем рассматривать идеальный случай таких колебаний, когда декремент затухания равен нулю. В этом случае общее решение исходного уравнения становится существенно менее громоздким: $y(\tau) = C_1\cos(\omega\tau) + C_2\sin(\omega\tau) +$

$+\frac{A}{\omega^2-\gamma^2}\sin(\gamma\tau).$ Если в начальный момент $y(0)=0,$ то $C_1=0$ и мы имеем $y(\tau)=C_2\sin(\omega\tau)+$

$+\frac{A}{\omega^2-\gamma^2}\sin(\gamma\tau).$ Теперь примем $C_2=0$ и тогда одно из решений нашего уравнения будет иметь вид $y(\tau)=\frac{A}{\omega^2-\gamma^2}\sin(\gamma\tau).$ Полученная формула представляет собой синусоиду, у которой амплитуда (наибольшее отклонение от положения равновесия) будет меняться от $\frac{-A}{\omega^2-\gamma^2}$ до $\frac{+A}{\omega^2-\gamma^2}$. Заметим важное обстоятельство, что наибольшее значение амплитуда колебаний достигает в том случае, когда $\omega=\gamma,$ то есть частота собственных колебаний совпадает с частотой вынужденных колебаний. Мы рассмотрели здесь простейший идеальный случай, когда амплитуда колебаний достигает бесконечности. Такое явление называется резонансом. Конечно, в реальности никогда амплитуда никогда не достигает бесконечности, но то что она может возрастать в десятки и даже сотни раз- это факт. Совсем недавний пример: мост через Волгу у Волгорада, когда амплитуда колебаний проезжей части в мае 2010 года под влиянием сильных ветровых нагрузок (вынужденных колений) возросла от нормативных нескольких миллиметров до одного метра. Власти распорядились закрыть мост, а строители были вынуждены увеличить декремент затухания с помощью специальных демпферов (гасителей колебаний) с тем, чтобы, как говорят специалисты в области колебания строительных конструкций, отстроиться от резонанса.

Вот видите к каким интересным приложениям привела нас сугубо теоретическая формула. Рассмотрим теперь задачу Коши для нашего уравнения с однородными начальными условиями $y(0)=0$ и $\dot{y}(0)=0.$ В этом случае, как мы уже знаем $C_1=0$, а для определения C_2 пишем $\dot{y}(0)=C_2\omega+\frac{A\gamma}{\omega^2-\gamma^2}=0$ и $C_2=\frac{-A\gamma}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}$. Итак окончательно решение задачи Коши для уравнения $\ddot{y}+\omega^2 y=A\sin(\gamma\tau)$ с однородными начальными условиями будет иметь вид $y(\tau)=\frac{A}{\omega^2-\gamma^2}(\sin(\gamma\tau)-\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega\tau)).$ Теперь ту же самую задачу Коши будем решать операционным методом с помощью уже знакомого нам преобразования Лапласа. Итак умножим обе части уравнения на $\exp(-p\tau),$ где $p-$ комплексное число, вещественная часть которого или $\mathrm{Re}(p)>0$ и затем проинтегрируем обе части полученного выражения в пределах от нуля до бесконечности. Имеем $\int\limits_0^\infty \ddot{y}(\tau)\exp(-p\tau)d\tau+\ \omega^2\int\limits_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau=$

$= A\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau.$ Рассмотрим последовательно все эти три интеграла: Обозначим в первом интеграле $\ddot{y}\,d\tau = dv; \exp(-p\tau) = u,$ откуда $v = \dot{y}; du = -p\exp(-p\tau).$ Тогда, согласно правилам интегрирования по частям, получим $\int\limits_0^\infty \ddot{y}\exp(-p\tau)d\tau = \dot{y}\exp(-p\tau)I_0^\infty + p\int\limits_0^\infty \dot{y}\exp(-p\tau)d\tau,$ что с условием на бесконечности и начальным условием $\dot{y}(0) = 0$, даёт $\int\limits_0^\infty \ddot{y}\exp(-p\tau)d\tau =$ $= p\int\limits_0^\infty \dot{y}\exp(-p\tau)d\tau.$ Ещё раз применим правила интегрирования по частям, полагая на сей раз $\dot{y}d\tau = dv, \exp(-p\tau) = u$, и $v = y; du = -p\exp(-p\tau).$ Поэтому $\int\limits_0^\infty \ddot{y}\exp(-p\tau)d\tau = p(y\exp(-p\tau)I_0^\infty +$ $+ p\int\limits_0^\infty y\exp(-p\tau)d\tau),$ что с учётом условия на бесконечности и начального условия $y(0) = 0,$ даёт $\int\limits_0^\infty \ddot{y}\exp(-p\tau)d\tau = p^2\int\limits_0^\infty y\exp(-p\tau)d\tau = p^2\,\bar{y}.$ Вы ,наверное, ещё не забыли, что изображение функции $y(\tau)$ по Лапласу обозначается так $\int\limits_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \bar{y}$ и поэтому второй интеграл очевидно равен $\omega^2\int\limits_0^\infty y(\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \omega^2\,\bar{y}.$ И , наконец, последний, третий интеграл $\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau,$ для вычисления которого тоже применим правило интегрирования по частям. Заметим, что похожий интеграл мы уже вычисляли, но тогда это был неопределённый интеграл и поэтому проделаем эту процедуру ещё раз. Обозначим $u = \sin(\gamma\tau);\ dv = \exp(-p\tau)d\tau,$ тогда $du = \gamma\cos(\gamma\tau); v = -\dfrac{\exp(-p\tau)}{p}$ и $\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau =$

$= -\dfrac{\sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)}{p}I_0^\infty + \dfrac{\gamma}{p}\int\limits_0^\infty \cos(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \dfrac{\gamma}{p}\int\limits_0^\infty \cos(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau.$ Далее обозначим $u = \cos(\gamma\tau); dv = \exp(-p\tau)d\tau$ и $du = -\gamma\sin(\gamma\tau); v = -\dfrac{\exp(-p\tau)}{p}.$ Тогда

$$\frac{\gamma}{p}\int\limits_0^\infty \cos(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \frac{\gamma}{p}(-\frac{\exp(-p\tau)}{p}\cos(\gamma\tau)I_0^\infty - \frac{\gamma}{p}\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau) =$$

$= \dfrac{\gamma}{p}(\dfrac{1}{p} - \dfrac{\gamma}{p}\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau).$ В результате имеем $\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \dfrac{\gamma}{p^2} -$ $-\dfrac{\gamma^2}{p^2}\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau$ и $\int\limits_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau = \dfrac{\gamma}{\gamma^2 + p^2}.$ Таким образом исходное дифференциальное уравнение в результате применения преобразования Лапласа превратится в линейное уравнение относительно $\bar{y}$. $p^2\bar{y}+\omega^2\bar{y}=\frac{A\gamma}{\gamma^2+p^2}$, из решения которого следует $\bar{y}=\frac{A\gamma}{(\omega^2+p^2)(\gamma^2+p^2)}$. Для получения оригинала разложим рациональную дробь

$$\frac{1}{(\omega^2+p^2)(\gamma^2+p^2)}=\frac{A_1+pB_1}{\omega^2+p^2}+\frac{A_2+pB_2}{\gamma^2+p^2}=$$

$=\frac{p^3(B_1+B_2)+p^2(A_1+A_2)+p(B_1\gamma^2+B_2\omega^2)+A_1\gamma^2+A_2\omega^2}{(\omega^2+p^2)(\gamma^2+p^2)}$. Мы уже такие вещи, как Вы помните, проделывали и поэтому $B_2=-B_1; A_2=-A_1; B_1(\gamma^2-\omega^2)=0;$ $A_1(\gamma^2-\omega^2)=1.$ И с учётом того, что $\gamma\neq\omega$ имеем $B_2=B_1=0; A_1=\frac{1}{\gamma^2-\omega^2};$ $A_2=\frac{-1}{\gamma^2-\omega^2}$ и

$\bar{y}=\frac{A\gamma}{(\gamma^2-\omega^2)(\omega^2+p^2)}-\frac{A\gamma}{(\gamma^2-\omega^2)(\gamma^2+p^2)}$; Мы только что вычислили, что

$\int_0^\infty \sin(\gamma\tau)\exp(-p\tau)d\tau=\frac{\gamma}{\gamma^2+p^2}$. Прочтём это выражение справа налево, откуда следует, что оригинал выражения $\frac{\gamma}{\gamma^2+p^2}$ равен $\sin(\gamma\tau)$ и поэтому оригинал выражения

$\frac{-A\gamma}{(\gamma^2-\omega^2)(\gamma^2+p^2)}$ равен $\frac{-A}{\gamma^2-\omega^2}\sin(\gamma\tau)$. Нетрудно видеть, что оригинал выражения $\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$ равен $\sin(\omega\tau)$ и поэтому оригинал выражения

$\frac{A\gamma}{(\gamma^2-\omega^2)(\omega^2+p^2)}$ равен $\frac{A\gamma}{\omega(\gamma^2-\omega^2)}\sin(\omega\tau)$. В результате $y(\tau)=\frac{A}{\omega^2-\gamma^2}(\sin(\gamma\tau)-\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega\tau))$, что полностью совпадает с решением полученным выше. Таким образом мы показали ,то о чём говорили и ранее, что с помощью преобразования Лапласа можно находить решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами не только первого, но и второго порядка, причём правая часть такого уравнения может быть любая интегрируемая функция и не надо специально догадываться о том какое будет частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение $y^{//}+\omega^2 y=f(x)$,где на функцию $f(x)$ можно наложить весьма слабые ограничения, но об этом ниже, а пока заметим, что достаточно, чтобы эта функция была непрерывна на рассматриваемом интервале изменения x. Общее решение соответствующего однородного уравнения нам уже хорошо известно

$y=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде $y(x)=C_1(x)\cos(\omega x)+C_2(x)\sin(\omega x)$, то есть $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные нам пока функции от x. Подставим это выражение в неоднородное уравнение. В результате получим

$C_1^{//}(x)\cos(\omega x)+C_2^{//}(x)\sin(\omega x)+$

$-2C_1^{/}(x)\omega\sin(\omega x)+2C_2^{/}(x)\omega\cos(\omega x)-C_1(x)\omega^2\cos(\omega x)-C_2(x)\omega^2\sin(\omega x)+C_1(x)\omega^2\cos(\omega x)+$

$+C_2(x)\omega^2\sin(\omega x)=f(x)$ или $C_1^{//}(x)\cos(\omega x)+C_2^{//}(x)\sin(\omega x)-2C_1^{/}(x)\omega\sin(\omega x)+$

$+2C_2^{/}(x)\omega\sin(\omega x)=f(x).$ Можно это выражение переписать так:

$(C_1^{/}(x)\cos(\omega x)+C_2^{/}(x)\sin(\omega x))^{/}-C_1^{/}(x)\omega\sin(\omega x)+C_2^{/}(x)\omega\cos(\omega x)=f(x).$ Это выражения связывает в одном уравнении два неизвестных $C_1^{/}(x)$ и $C_2^{/}(x)$ и поэтому можно к этому уравнению добавить ещё одно уравнение, которое также бы связывало эти же два неизвестных. Простейший вариант такого дополнительного уравнения будет следующим

$C_1^{/}(x)\cos(\omega x)+C_2^{/}(x)\sin(\omega x)=0.$ И тогда остаётся ещё одно уравнение

$-C_1^{/}(x)\omega\sin(\omega x)+C_2^{/}(x)\omega\cos(\omega x)=f(x).$ Таким образом мы получили систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными $C_1^{/}(x)$ и $C_2^{/}(x)$. При выводе всех этих соотношений мы предполагали, что неизвестные нам пока функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ дифференцируемы вплоть до второго порядка. А ,что касается системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, то она, как нам хорошо известно, легко решается с помощью определителей второго порядка. Вы легко сами найдёте, что основной определитель этой системы равен ω, а первый и второй дополнительные определители этой соответственно равны $-f(x)\sin(\omega x)$ и $f(x)\cos(\omega x)$. И тогда получим, что

$C_1^{/}(x)=\dfrac{-f(x)}{\omega}\sin(\omega x)$ и $C_2^{/}(x)=\dfrac{f(x)}{\omega}\cos(\omega x).$ Откуда следует, что $C_1(x)=\dfrac{-1}{\omega}\int f(x)\sin(\omega x)dx+$

$+D_1$ и $C_2(x)=\dfrac{1}{\omega}\int f(x)\cos(\omega x)dx+D_2$, где D_1 и D_2 – произвольные постоянные, так как мы здесь имеем дело с неопределёнными интегралами. В результате общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$y^{//}+\omega^2y=f(x)$ имеет следующий вид.

$$y(x)=D_1\cos(\omega x)+D_2\sin(\omega x)-\frac{\cos(\omega x)}{\omega}\int f(x)\sin(\omega x)dx+\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\int f(x)\cos(\omega x)dx.$$

И это решение годится для любой даже не непрерывной функции $f(x)$. Достаточно лишь того, чтобы приведённые здесь интегралы существовали. Вы можете сами проверить, что полученное решение удовлетворяет нашему уравнению, если продифференцируете его дважды. А мы пока убедимся в том, что, если $f(x)=A\sin(\gamma x)$,то мы получим уже известное нам решение. Действительно

$$\int\sin(\gamma x)\sin(\omega x)dx=\frac{1}{2}\int(\cos((\gamma-\omega)x)-\cos((\gamma+\omega)x)dx=\frac{\sin((\gamma-\omega)x)}{2(\gamma-\omega)}-\frac{\sin((\gamma+\omega)x)}{2(\gamma+\omega)}.$$

$$\int\sin(\gamma x)\cos(\omega x)dx=\frac{1}{2}\int(\sin((\gamma+\omega)x)+\sin((\gamma-\omega)x)dx=-\frac{\cos((\gamma+\omega)x)}{2(\gamma+\omega)}-\frac{\cos((\gamma-\omega)x)}{2(\gamma-\omega)}.$$ Произвольные постоянные, которых в данном случае будет четыре, мы полагаем равными нулю, так как в общем решении уравнения второго порядка должно быть два произвольных постоянных и мы уже их использовали. Тогда $-\dfrac{\cos(\omega x)}{\omega}\times$

$\times\int f(x)\sin(\omega x)dx+\dfrac{\sin(\omega x)}{\omega}\int f(x)\cos(\omega x)dx=\dfrac{A}{2\omega}(\dfrac{-\cos(\omega x)\sin((\gamma-\omega)x)-\sin(\omega x)\cos((\gamma-\omega)x)}{\gamma-\omega}+$

$+\dfrac{\cos(\omega x)\sin((\gamma+\omega)x)-\sin(\omega x)\cos((\gamma+\omega)x)}{\gamma+\omega})=\dfrac{A}{2\omega}(\dfrac{-\sin(\gamma x)}{\gamma-\omega}+\dfrac{\sin(\gamma x)}{\gamma+\omega})=\dfrac{A}{\omega^2-\gamma^2}\sin(\gamma x).$ Итак общее решение уравнения $y^{//}+\omega^2 y=A\sin(\gamma x)$ имеет вид $y(x)=D_1\cos(\omega x)+D_2\sin(\omega x)+$ $+\dfrac{A}{\omega^2-\gamma^2}\sin(\gamma x),$ что полностью совпадает с решением полученным нами ранее с той лишь разницей, что вместо x мы раньше использовали τ и по другому обозначали произвольные постоянные, но эти различия, как Вы понимаете, не существенны. Такой алгоритм нахождения общего решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка может быть распространён на вычисление общего решения неоднородного дифференциального уравнения $n-$го порядка, при условии, что решения соответствующего однородного уравнения нам уже известны. Пусть, например, общее решение такого уравнения имеет было $n=2; y_1=\cos(\omega x);\ y_2=\sin(\omega x).$ Используя эти обозначения, найдём, что общее решение неоднородного уравнения $n-$го порядка будет иметь вид $\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k,$ где первые производные от неизвестных функций $C_k^{/}(x)$ определяются из решения линейной алгебраической системы n уравнений с n неизвестными, вида

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^{/}(x)y_k=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^{/}(x)y_k^{(j)}=0, j=1,2,...,n-2.$$

$\sum_{k=1}^{n} C_k^{/}(x)y_k^{(n-1)}=f(x).$ Здесь символом $y_k^{(j)}$ обозначена $j-$тая производная от y_k по x. При этом предполагается, что все эти производные от $j=1$ до $j=n-1$ существуют. Такой метод определения общего решения неоднородного уравнения называется методом вариации произвольных постоянных. Таким образом показана принципиальная возможность найти общее решение обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения $n-$го порядка, если известно общее решение аналогичного однородного уравнения. До сих пор мы рассматривали линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, но оказывается в ряде случаев можно найти общее решение подобных уравнений и с переменными коэффициентами. Рассмотрим следующее обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами при производных $xy^{//}+y^{/}+xy=f(x).$ Вначале будем искать общее решение соответствующего однородного уравнения $xy^{//}+y^{/}+xy=0$. Ищем решение в виде ряда $y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_k, k=0,1,2,....$неизвестные пока нам коэффициенты. Тогда $y^{/}=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}; y^{//}=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$ и затем, предполагая, что все эти производные существуют, подставим это в однородное уравнение и в результате получим $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0.$ Приравнивая члены при одинаковых степенях x будем иметь: при $x^0, a_1 = 0.$ При $x^1, 2a_2 + 2a_2 + a_0 = 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{4}.$ При $x^2,\ 3\times 2\times a_3 + 3a_3 + a_1 = 0;\ a_3 = 0.$ Поэтому найдём, что все нечётные коэффициенты $a_{2k+1} = 0, k = 0,1,2,...$ Затем $a_4 = \frac{a_0}{64},\ a_6 = \frac{-a_0}{2^8 3^2},\ a_8 = \frac{a_0}{2^{14}3^2}$ и так далее $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}, k = 0,1,2,...$

И $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = J_0(x)$ -функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. Это одно ,так называемое фундаментальное решение этого уравния. А для уравнения 2-го порядка их должно быть два и тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x),$ где $Y_0(x)$ функция Бесселя 2-го рода нулевого порядка. Эта функция имеет ещё три названия: цилиндрическая функция, функция Вебера и функция Неймана. Для того чтобы найти это решение воспользуемся следующим правилом. Пусть нам известно какое либо решение однородного уравнения 2-го порядка в данном случае это будет $J_0(x)$, то тогда уравнение 2-го порядка можно свести к уравнению 1-го порядка с помощью подстановки $y(x) = J_0(x)\int z(x)dx,$ где $z(x)-$неизвестная пока функция, которая и является вторым фундаментальным решением. В результате подстановки $y(x)$ в наше однородное уравнение имеем $x(J_0^{//}(x)\int z(x)dx + 2J_0^{/}(x)z(x) + J_0(x)z^{/}(x)) +$ $+ J_0^{/}(x)\int z(x)dx + J_0(x)z(x) + xJ_0(x)\int z(x)dx = 0.$ А так как $xJ_0^{//}(x) + J_0^{/}(x) + xJ_0(x) = 0,$ то получим, что неизвестная нам пока функция $z(x)$ подчиняется дифференциальному уравнению первого порядка $xJ_0(x)\frac{dz}{dx} = -(2xJ_0^{/}(x) + J_0(x))z.$ Помимо того, что это уравнение первого порядка, оно ещё и с разделяющимися переменными и поэтому его решение нам хорошо известно $\frac{dz}{z} = -2\frac{J_0^{/}(x)}{J_0(x)}dx - \frac{dx}{x}.$ или $\ln(\frac{z}{D}) = -2\ln(J_0(x)) - \ln(x)$ и $z = Y_0(x) = \frac{D}{xJ_0^2(x)}.$ Это и есть второе фундаментальное решение однородного уравнения. Итак общее решение исходного однородного уравнения можно записать так $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$ А теперь для решения соответствующего неоднородного уравнения будем использовать метод вариации произвольных постоянных, в соответствии с которым общее решение такого уравнения будем искать в виде $y(x) = C_1(x)J_0(x) + C_2(x)Y_0(x).$ Тогда

$$y^{/}(x) = C_1^{/}(x)J_0(x) + C_1(x)J_0^{/}(x) + C_2^{/}(x)Y_0(x) + C_2(x)Y_0^{/}(x)$$
$$y^{//}(x) = C_1^{//}(x)J_0(x) + 2C_1^{/}(x)J_0^{/}(x) + C_1(x)J_0^{//}(x) + C_2^{//}(x)Y_0(x) + 2C_2^{/}(x)Y_0^{/}(x) + C_2(x)Y_0^{//}(x).$$

Подставляя эти выражения в исходное неоднородное уравнение будем иметь

$$xC_1^{//}(x)J_0(x) + 2xC_1^{/}(x)J_0^{/}(x) + xC_1(x)J_0^{//}(x) + xC_2^{//}(x)Y_0(x) +$$
$$+ 2xC_2^{/}(x)Y_0^{/}(x) + xC_2(x)Y_0^{//}(x) + C_1^{/}(x)J_0(x) + C_1(x)J_0^{/}(x) + C_2^{/}(x)Y_0(x) + C_2(x)Y_0^{/}(x) +$$

$+xC_1(x)J_0(x)+xC_2(x)Y_0(x)=f(x).$ А так как $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ удовлетворяют однородному уравнению $xy''+y'+xy=0,$ то предыдущее равенство можно преобразовать так

$$x(C_1'(x)J_0(x)+C_2'(x)Y_0(x))'+x(C_1'(x)J_0'(x)+C_2'(x)Y_0'(x))+C_1'(x)J_0(x)+C_2'(x)Y_0(x)=f(x).$$

Мы получили одно уравнение с двумя неизвестными $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ и поэтому можно добавить любое уравнение, связывающее эти же два неизвестных. Самый простое оно будет в том случае, когда положим $C_1'(x)J_0(x)+C_2'(x)Y_0(x)=0$ и тогда помимо этого уравнения мы получим ещё одно линейное алгебраическое уравнение относительно тех же двух неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. $C_1'(x)J_0'(x)+C_2'(x)Y_0'(x)=\dfrac{f(x)}{x}.$ А линейную алгебраическую систему двух уравнений с двумя неизвестными, мы, как говорится ,неоднократно проходили. Таким образом мы показали, что такое линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка со специально подобранными переменными коэффициентами допускает аналитическое решение. Теперь снова вернёмся к нашему знакомому уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и рассмотрим, так называемую краевую задачу для этого уравнения. Итак у нас снова есть функция $y(x)$ и x меняется в конечных пределах $0\le x\le\pi$. Обращаю Ваше внимание на то что пределы изменения аргумента конечны. Они представляют собой любые конечные числа, а числа 0 и π в данном случае приняты нами для простоты дальнейшего изложения. Итак имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y''+\omega^2y=f(x)$ с краевыми или как их часто и ,наверное, более правильно называют граничными однородными условиями $y(0)=0$ и $y(\pi)=0.$ И рассмотрим такое конечное интегральное преобразование $\bar{y}(\lambda)=\int\limits_0^\pi y(x)\sin(\lambda x)dx,$ где $\lambda-$вещественное число. Вначале поясним почему правильнее говорить граничные условия. Дело в том, что под словом граничные понимается условия на границе и только на границе. А под словом край можно понимать также и начальные условия. А теперь умножим обе части уравнения $y''+\omega^2y=f(x)$ на $\sin(\lambda x)$ и полученные выражения проинтегрируем от 0 до π. И тогда получим

$\int\limits_0^\pi y''(x)\sin(\lambda x)dx+\omega^2\int\limits_0^\pi y(x)\sin(\lambda x)dx=\int\limits_0^\pi f(x)\sin(\lambda x)dx.$ Рассмотрим первый из этих интегралов.

Полагая $y''(x)dx=dv;\sin(\lambda x)=u$, откуда $y'(x)=v;du=\lambda\cos(\lambda x)$ и далее, используя первый правила интегрирования по частям получим

$$\int\limits_0^\pi y''(x)\sin(\lambda x)dx=y'(x)\sin(\lambda x)I_0^\pi-\lambda\int\limits_0^\pi y'(x)\cos(\lambda x)dx=y'(\pi)\sin(\lambda\pi)-\lambda\int\limits_0^\pi y'(x)\cos(\lambda x)dx.$$

Нам неизвестно чему равно $y'(\pi)$ и поэтому, предполагая, что это выражение представляет собой конечную величину, положим , что $\lambda-$натуральное число, то есть $\lambda=k,$ где $k=1,2,3,...$ Тогда имеем $\int\limits_0^\pi y''(x)\sin(kx)dx=-k\int\limits_0^\pi y'(x)\cos(kx)dx,$ так как $\sin(k\pi)=0.$ Полагая

$y^{/}(x)dx = dv; \cos(kx) = u$, откуда $v = y(x); du = -k\sin(kx)dx$ и далее, ещё раз применяя правило интегрирования по частям, получим $\int_0^{\pi} y^{//}(x)\sin(kx)dx = -k(y(x)\cos(kx)I_0^{\pi} +$

$+k\int_0^{\pi} y(x)\sin(kx)dx) = -k(y(\pi)\cos(k\pi) - y(0)\cos(0) + k\int_0^{\pi} y(x)\sin(kx)dx)$ и так как мы имеем дело с однородными граничными условиями, то $y(\pi)\cos(k\pi) - y(0)\cos(0) = 0 \times (-1)^k - 0 \times 1 = 0.$ В итоге $\int_0^{\pi} y^{//}(x)\sin(kx)dx = -k^2\int_0^{\pi} y(x)\sin(kx)dx = -k^2\bar{y}(k).$ В результате наше неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y^{//} + \omega^2 y = f(x)$ с однородными граничными условиями $y(0) = 0; y(\pi) = 0$ преобразуется в алгебраическое уравнение первой степени относительно неизвестного $\bar{y}$, $-k^2\bar{y}(k) + \omega^2\bar{y}(k) = \bar{f}(k),$ решение которого очевидно $\bar{y}(k) = \dfrac{\bar{f}(k)}{\omega^2 - k^2}$. Таким образом мы получили решение нашей задачи (она в отличие от задачи с начальными условиями, которая получила название задача Коши, осталась, так уж исторически сложилось, задачей с граничными условиями) в изображениях. Пусть мы имеем некую функцию $z(x)$, представленную в виде тригонометрического ряда. Мы выше упоминали, что существуют и такие ряды. Итак

$z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ и мы пока не можем ничего сказать не о сходимости этого ряда ни коэффициентах a_k. Умножим обе части этого выражения на $\sin(nx)$ и проинтегрируем ряд почленно в пределах от 0 до π. Мы это делаем, конечно, формально, полагаясь лишь на то, что почленное интегрирование лишь улучшает сходимость известных нам степенных рядов. В результате получим $\bar{z}(n) = \int_0^{\pi} z(x)\sin(nx)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx.$ Из тригонометрии, как Вы помните, $\sin(kx)\sin(nx) = \dfrac{1}{2}(\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x))$. И тогда имеем

$\bar{z}(n) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\dfrac{\sin((n-k)x)}{n-k} - \dfrac{\sin((n+k)x)}{n+k})I_0^{\pi}$. При подстановке верхнего и нижнего пределов интегрирования, выражение в круглых скобках будет равно нулю во всех случаях, кроме одного, когда $n = k.$ В этом случае надо рассмотреть вот такой предел $\lim_{k \to n} \dfrac{\sin((n-k)\pi)}{n-k}.$

Получилась неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Можно раскрыть эту неопределённость с помощью правила Лопиталя, но теперь мы вправе воспользоваться ещё одним более простым способом. Мы проходили, что при разложении $\sin(x)$ в степенной ряд при малых значениях x можно ограничиться одним или в крайнем случае двумя членами степенного ряда и поэтому при малых значениях

$x, \sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!}$. Здесь значок ~ читается так: выражение слева эквивалентно выражению справа. Исходя из этого ,пишем

$$\lim_{k\to n} \frac{\sin((n-k)\pi)}{n-k} \sim \lim_{k\to n} \frac{(n-k)\pi - \frac{(n-k)^3\pi^3}{3!}}{n-k} = \lim_{k\to n} \frac{\pi - \frac{(n-k)^2\pi^3}{3!}}{1} = \pi.$$

В результате имеем $\bar{z}(n) = \frac{\pi}{2} a_n$ и поэтому $z(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}(n) \sin(nx).$ Эта и будет, искомая нами формула обращения. И тогда окончательно решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y^{//} + \omega^2 y = f(x)$ с однородными граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$ будет иметь вид $y(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(k)}{\omega^2 - k^2} \sin(kx).$ Такое аналитическое решение весьма удобно при доведение результатов до числа или, как говорят, для реализации на компьютере. Оно несколько необычно выглядит для Вас, но мы покажем на примере, что его можно привести к более знакомому для Вас виду. А пока обратим Ваше внимание на одно обстоятельство $\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx = 0,$ если $n \neq k$ и равно $\frac{\pi}{2},$ если $n = k.$ Напомню Вам одну похожую ситуацию. Помните, когда мы рассматривали вектора в трёхмерном пространстве, мы вводили единичные вектора вдоль каждой из этих трёх осей: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Эти все три вектора ортнормальны, что означает одновременно ортогональность и нормируемость. Ортогональность означает то, что их скалярное произведение $(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{j}, \bar{i}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{j}) = 0.$ Напомню, что скалярное произведение двух векторов-это число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Каждый из этих векторов имеет длину равную единице и поэтому произведение их длин то же равно единице, а угол между каждым из этих векторов равен $\frac{\pi}{2}$, а $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$ Поэтому эти вектора ортогональны или перпендикулярны друг другу. Теперь обнаружим, что $(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1.$ Это так, потому что угол между этими векторами равен 0, а

$\cos(0) = 1.$ Такие вектора называются нормированными, а так как они ещё и ортогональны, то отсюда их называют ортнормальными. А теперь вернёмся к нашим функциям, немного их видоизменив или точнее, умножив их на одно и то же число $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, и тогда имеем:

$\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)dx = 0,$ если $n \neq k$ и равно 1, если $n = k.$ То есть функции вида

$f(kx)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), k=1,2,...$ то же ортнормальны, но уже не в трёхмерном пространстве, а в некоем трудно вообразимом с житейской точки зрения, бесконечномерном пространстве функций $f(kx), k=1,2,...$, в котором таким образом $\int_0^\pi f_k(x)f_n(x)dx, k=1,2,,,;n=1,2,..$ введено скалярное произведение любой пары из этих функций. Этй функции называются однородными или собственными функциями следующей задачи $y^{//}+\lambda^2 y=0$ и $y(0)=y(\pi)=0$, где $\lambda-$некое вещественное число .Такая задача получила название задачи Штурма-Лиувилля по фамилиям двух математиков 19 века. Обратим внимание на следую щее обстоятельство, решением, удовлетворяющем уравнению $y^{//}+\lambda^2 y=0$, и граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$ будет функция $y(x)=0$. Это очевидно, но помимо такого, так называемого тривиального решения, существует бесчисленное, но счётное множество решений, имеющих уже известный нам вид $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), k=1,2,...$ Но это возможно при одном условии: $\lambda=k.$ Такие $\lambda-$называются собственные числа задачи Штурма- Лиувилля, а функции $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)-$ортнормированные собственные функции задачи Штурма- Лиувилля. Таким образом, решение неоднородного уравнения $y^{//}+\omega^2 y=f(x)$ с однородными граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$, которое мы получили с помощью конечного интегрального преобразования и, которое представлено в виде $y(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{f}(k)}{\omega^2-k^2}\sin(kx)-$это по сути дела разложение решения этой задачи по собственным функциям задачи Штурма- Лиувилля или, как иногда говорят, по соответствующим однородным решениям. А теперь покажем, что задачу Штурма- Лиувилля можно сформулировать и для уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим следующее однородное дифференциальное уравнение $y^{//}+(\lambda-q(x))y=0$ с однородными граничными условиями $y(a)=y(b)=0$. Здесь $q(x)-$некая интегрируемая функция от x. Она в принципе может и не быть непрерывной. А a и $b-$некие вещественные постоянные и тогда помимо тривиального решения $y(x)=0$ существует и счётное число однородных решений $\psi_n(x), n=1,2,...$ каждое из которых удовлетворяет нашему однородному уравнению и однородным граничным условиям при некоторых вполне определённых $\lambda_n, n=1,2,...$ Это значит, что

$$\psi_n^{//}(x)+(\lambda_n-q(x))\psi_n(x)=0,\ \psi_n(a)=\psi_n(b)=0,\ n=1,2,,,$$

Так как $n-$произвольное натуральное число, то для другого натурального числа $m\neq n$ также будет справедливо следующее утверждение

$$\psi_m^{//}(x)+(\lambda_m-q(x))\psi_m(x)=0,\ \psi_m(a)=\psi_m(b)=0,\ m=1,2,,,$$

А теперь, вычитая из второго равенство первое- получим

$$(\lambda_m-\lambda_n)\psi_m(x)\psi_n(x)=\psi_m(x)\psi_n^{//}(x)-\psi_n(x)\psi_m^{//}(x)=\frac{d}{dx}(\psi_m(x)\psi_n^{/}(x)-\psi_n(x)\psi_m^{//}(x)).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства в пределах от a до b. В результате получим

$(\lambda_m - \lambda_n)\int\limits_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = (\psi_m(x)\psi_n^{/}(x) - \psi_n(x)\psi_m^{/}(x))I_a^b = 0.$ И поэтому собственные функции, соответствующие различным собственным числам будут ортогональны. И, конечно, всегда можно сделать их ортнормальными, если умножить каждую из них на константу. И описанный здесь метод решения можно обобщить на более сложные уравнения, в частности на уравнения вчастных производных. А пока покажем на частном примере, что несколько необычное для нас решение в виде разложения по собственным функциям

задачи Штурма- Лиувилля приводит к более привычному для нас результату. Итак снова

рассмотрим линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y^{//} + \omega^2 y = A\sin(\gamma x)$ с однородными краевыми условиями $y(0) = y(\pi) = 0.$ Напомню, что общее решение этого уравнения имеет вид

$y(x) = D_1\cos(\omega x) + D_2\sin(\omega x) + \dfrac{A}{\omega^2 - \gamma^2}\sin(\gamma x),$ где D_1 и D_2 – произвольные постоянные. Так как $y(0) = 0,$ то $D_1 = 0.$ Из второго граничного условия найдём $D_2 = \dfrac{A}{\omega^2 - \gamma^2}\dfrac{\sin(\gamma\pi)}{\sin(\omega\pi)}$ и окончательное решение имеет вид $y(x) = \dfrac{A}{(\omega^2 - \gamma^2)\sin(\omega\pi)}(\sin(\gamma x)\sin(\omega\pi) - \sin(\gamma\pi)\sin(\omega x)).$ Чтобы избежать громоздких выкладок рассмотрим самый простой случай $\gamma = m -$ целое число и тогда выражение для $y(x)$ значительно упрощается $y(x) = \dfrac{A}{(\omega^2 - m^2)}\sin(mx)$ и

$$\bar{y}(k) = \frac{A}{\omega^2 - m^2}\int\limits_0^\pi \sin(mx)\sin(kx)dx = \frac{A}{2(\omega^2 - m^2)}\left(\frac{\sin((m-k)x)}{m-k} - \frac{\sin((m+k)x)}{m+k}\right)I_0^\pi = \frac{A\pi}{2(\omega^2 - k^2)}.$$

И мы получили конечное синус-изображение, умноженное на $\dfrac{\pi}{2},$ так как мы забыли нормировать собственные функции. Тем самым мы показали, что с помощью конечного синус-преобразование можно решить линейное неоднородное дифференциальное урав-

нение с однородными граничными условиями и ничего страшного нет в том, что вид его несколько необычен. Важно то, что решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям ,а это то, что нам и нужно. Стоит, правда заметить, что никто и никогда так не будет решать именно эти уравнения. Значительно проще это сделать, так сказать, классическим путём, найти общее решение и затем найти произвольные постоянные, удовлетворив граничным условиям. Мы же привели этот способ решения с тем, чтобы показать,

что такое решение возможно и мы ещё постараемся продемонстрировать Вам, что подобный алгоритм весьма эффективен для решения уравнений в частных производных.

А пока, на первый взгляд, весьма неожиданное отступление. Рассмотрим, не удивляйтесь, крыши домов, которые могут быть и остроконечными и почти плоскими, то- есть с различными углами наклона кровли к вертикальной стене. А в Японии, Корее и Китае крыши домов выглядят совсем экзотически с нашей житейской точки зрения. Они представляют собой цилиндрическую поверхность, при этом ось цилиндра параллельна поверхности земли, а вертикальное сечение этой поверхности далеко не окружность, а совсем непонятная для европейцев, кривая. На первый взгляд такое экзотическое сооружение- это дань каких-то религиозно мистических верований. Но это оказалось не так. В такой конструкции заложен чёткий физический и математический смысл. Одно из основных назначений крыши- это защита внутренних помещений дома от дождя. В сухих, засушливых зонах, где дождей не бывает несколько месяцев и даже лет, дома без крыши- это вполне нормальное явления, а как быть в тех местах, где дождь льёт как из ведра. Вот к таким районам как раз относится почти вся Япония и Корея, а также северо-восток Китая. Тут для дома нужна не просто крыша, а такая крыша, с которой вода скатится как можно скорее. На первый взгляд кажется, что чем остроконечней крыша, тем лучше. Именно так строили сельские дома в Финляндии. Да, конечно, кратчайшее расстояние между двумя точками на плоскости-это прямая и вертикальное сечение крыши должна быть прямая линия и чем она круче, тем, казалось бы быстрее, дождевая вода окажется на земле. Но дело в том, что по этой прямой линии вода движется с одинаковой скоростью, что в начале этой линии, что в конце. В связи с этим возникает такой вопрос, а нельзя ли найти такую линию по которой дождевая вода будет двигаться с переменной скоростью, но так, что время, за которое она пройдёт это расстояние будет минимальным среди других возможных кривых, в том числе и отрезка прямой. Вернёмся к нашей знакомой декартовой системе координат. Начало координат расположим на земле, ось y направим вертикально вверх, ось x справа от оси y перпендикулярно этой оси, а также перпендикулярно продольной оси дома, и теперь представим, что некая материальная точка (это может быть вода, камень или ещё что-нибудь), имеющая массу m падает вниз, причём необязательно вертикально вниз. Тогда кинетическая энергия этой материальной точки будет равна $\frac{mv^2}{2}$, а потенциальная энергия составляет mgy, где g – ускорение силы тяжести. Так как материальная точка движется к земле только за счёт гравитации, то $mgy = \frac{mv^2}{2}$. Мне могут возразить, что движению воды по крыше будут препятствовать силы трения между водой и материалом крыши. Да, это верно, но мы здесь рассматриваем идеальный случай и этими силами пренебрегаем. Насколько мне известно силы трения или точнее силы сопротивления движению воды по крыше неоднократно пытались учесть и даже ставили соответствующие эксперименты, но результат мало чем отличался от идеального случая и поэтому мы пренебрегаем этими силами. И из равенства кинетической и потенциальной энергий имеем $v = \sqrt{2gy}$. С другой стороны мгновенная скорость материальной точки равна $v = \frac{ds}{dt}$, где $ds, dt -$соответственно мгновенное изменение пути материальной точки и мгновенное изменение времени. Мгновенное изменение пути, или как говорят элемент пути равен $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ и тогда мгновенное изменение времени можно записать так $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$. А всё время, за которое вода скатится с крыши составит $t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^l \frac{\sqrt{1 + (y')^2}\,dx}{\sqrt{y}}$, где l в данном конкретном случае- это полуширина дома. И наша цель заключается в следующем: найти такую кривую $y(x)$, при которой интеграл

$\int_0^l \frac{\sqrt{1 + (y')^2}\,dx}{\sqrt{y}}$ достигает минимального значения. Здесь мы впервые столкнулись с новым для нас явлением. Мы ещё вернёмся к нашей конкретной задаче о том какой должна быть форма крыши, чтобы дождевая вода скатывалась бы максимально быстро. Такая задача называется задачей о брахистохроне, а пока рассмотрим более общий случай. Запишем следующее выражение $I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$, где a и b - произвольные вещественные числа, $F(x, y, y') -$ произвольная ,но дифференцируемая функция по всем трём аргументам. Иначе существуют следующие частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial y'}$. При этом не следует забывать, что $y -$ эта функция от x ,причём такая, что существует производная

$y'(x)$. Так вот я повторюсь, выражение $I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$ представляет необычное для нас явление. До сих пор мы имели дело с функцией $y(x)$, которая представляет собой некое правило, по которому каждому значению некоторого числа x, который называется аргументом ставится в соответствие другое число y, которое называется функцией. Так вот необычным для нас в новом выражении явлется, то ,что некоей функции $y(x)$ ставится в соответствие некое число $I(y)$. Такое выражение называется уже не функцией, а функционалом и это совершенно новое для нас понятие. И нам надо найти экстремум этого функционала. Пусть существует такая функция $y_0(x)$, которая доставляет экстремум этого функционала и рассмотрим некую совокупность кривых, $y_\varepsilon(x)$, зависящих от малого параметра ε и отстоящих на небольшое расстояние от функции $y_0(x)$, то есть

$y_\varepsilon(x) = y_0(x) + \varepsilon h(x)$, где $h(x)$ – некая произвольная, подчеркиваю, произвольная функция от x, но такая, что $h(a) = h(b) = 0$. Здесь у Вас могут возникнуть сразу несколько вопросов:

Что такое расстояние между функциями? Что такое большое и что такое большое расстояние ? И, наконец, в каком пространстве определяется и в каких единицах измеряется это расстояние? Чтобы, как математики говорят, корректно ответить на эти вопросы, надо вникнуть в специальный раздел математики, который называется функциональным анализом. Мы же поступим по другому. Я предлагаю Вам вспомнить, что когда мы говорили

о скалярном произведении двух функций, то мы упоминали некое формальное бесконечномерное пространство функций и ещё, когда мы упоминали, что некая совокупность функций аппроксимирует заданную функцию, то в качестве критерия близости упоминали метод наименьших квадратов. И, пожалуй, ничего большего на этом этапе сказать нельзя. Возвращаясь к функционалу, имеем $I(y_\varepsilon) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \varepsilon h(x), y_0'(x) + \varepsilon h'(x))dx$.

Таким образом наш функционал превратился в функцию от параметра ε. Составим такое выражение $\delta(I) = \dfrac{I(y_\varepsilon) - I(y_0)}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\int_a^b (F(x, y_0(x) + \varepsilon h(x), y_0'(x) + \varepsilon h'(x)) - F(x, y_0(x), y_0'(x)))dx.$

Выражение, которое стоит слева в этом равенстве называется вариацией функционала. Она внешне похожа на конечное изменение функции, вспомните $\dfrac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$, где мы увеличивали аргумент у функции на конечное число Δx, вычитали из нового значения функции предыдущее значение функции и затем делили полученную разность на это же конечное число. Здесь же совсем другое, мы из одного функционала, величина которого определятся функцией в некотором смысле близкой к исходной (степень близости определяется параметром ε) вычитаем другой функционал, величина которого определяется исходной функцией и полученное число делим на этот параметр. Раздел математики, который изучает проблемы, связанные с вариацией функционалов называется вариационным исчислением. И далее рассмотрим предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(I) = I'(0) =$

$$= \int_a^b \frac{dF}{d\varepsilon}dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}h'(x)\right)dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}h(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}h(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)h(x)\right)dx =$$

$=\int\limits_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}))h(x)dx+\frac{\partial F}{\partial y'}h(x)I_a^b=\int\limits_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}))h(x)dx,$ так как $h(b)=h(a)=0.$ В связи с тем, что функция $y_0(x)$ доставляет экстремум функционалу, то должно выполняться необходимое условие экстремума $I'(0)=0$ и тогда $\int\limits_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}))h(x)dx=0.$ Мы с вами уже хорошо знаем, что если определённый интеграл равен нулю, то совершенно не значит, что подынтегральное выражение то же равно нулю. Вспомните, например, ортогональность собственных функций задачи Штурм- Лиувилля. Но, вот здесь, как говорится другой случай. Дело в том, что $h(x)$ – произвольная, я ещё раз подчёркиваю –произвольная функция, удовлетворяющая однородным краевым, то тогда обязательно подынтегральная функция тождественно равна нулю. В этом суть, так называемой, основной леммы вариационного вычисления. И, согласно этой леммы, доказательство которой, как неоднократно происходит в нашем изложении, мы опускаем , необходимым условием экстремума нашего функционала будет $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})=0.$ И вот, наконец, мы можем вернуться к нашей задаче о брахистохроне. Напомню, что время, за которое дождевая вода скатится с крыши равно $t=\int\limits_0^l\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx,$ где $y(0)=H_1$-максимальная высота дома с крышей по отношению к поверхности земли, или ,как говорят высота конька и $y(l)=H_2$ – высота водослива над поверхностью земли. В нашем конкретном случае

$F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$ и тогда $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{-1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1+(y')^2}$;$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}.$

Теперь надо это подставить в необходимое условие экстремума функционала, которое также называют уравнением Эйлера-Лагранжа, название дано так в честь двух выдающихся математиков 18-того века, француза Лагранжа и Эйлера, о котором мы упоминали. Однако, подстановка, как говорится в лоб, приводит к излишне громоздким выражением и поэтому предлагается обходной маневр, возможный потому, наш функционал явно от x не зависит. Здесь нам предстоит вспомнить, что такое полный дифференциал и что такое прямая производная. Вначале рассмотрим более простую функцию $G(x,y(x)).$ Её полный дифференциал имеет вид : $dG=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy$, а прямая производная выглядит так $\frac{dG}{dx}=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$ А теперь найдём прямую производную от функции $F(y(x),y'(x))$.Её можно записать так $\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2}$ и так как F явно от x не зависит, то получим $\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''$. И далее рассмотрим вот такое выражение $\frac{d}{dx}(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'})=$

$$= \frac{dF}{dx} - y^{//}\frac{\partial F}{\partial y^{/}} - y^{/}\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}}) = \frac{\partial F}{\partial y}y^{/} + \frac{\partial F}{\partial y^{/}}y^{//} - y^{//}\frac{\partial F}{\partial y^{/}} - y^{/}\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}}) =$$

$= y^{/}(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}})) = 0,$ так как в скобках стоит уравнение Эйлера-Лагранжа.

Выпишем начало и конец этого длинного выражения $\frac{d}{dx}(F - y^{/}\frac{\partial F}{\partial y^{/}}) = 0,$ откуда следует, что $F - y^{/}\frac{\partial F}{\partial y^{/}} = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Подставляя сюда F и $\frac{\partial F}{\partial y^{/}}$, которые нам уже известны, получим $\frac{\sqrt{1+(y^{/})^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y^{/})^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y^{/})^2}} = C_1$. Или $2D_1 = \frac{1}{C_1^2} = y\,(1+(y^{/})^2)$ и затем делаем замену $y^{/} = ctg(\frac{v(x)}{2})$. Тогда $1+(y^{/})^2 = 1 + ctg^2(\frac{v}{2}) = \frac{1}{\sin^2(\frac{v}{2})}$ и в результате

$y = 2D_1\sin^2(\frac{v}{2}) = D_1(1-\cos(v))$. Дифференцируя это выражение по x, найдём

$y^{/} = D_1\sin(v)\frac{dv}{dx} = 2D_1\sin(\frac{v}{2})\cos(\frac{v}{2})\frac{dv}{dx}$ и это, смотри выше, равно $ctg(\frac{v}{2})$.

Тогда $\frac{dx}{dv} = 2D_1\sin^2(\frac{x}{2}) = D_1(1-\cos(v))$ и $x = D_1(v - \sin(v)) + D_2$. И мы получили так называемое параметрическое уравнение циклоиды: $x = D_1(v-\sin(v)) + D_2$ и $y = D_1(1-\cos(v))$, которая в данном случае и есть искомая нами брахистохрона . Используемое здесь параметрическое задание кривой нам встречается впервые и поэтому поясним, что параметр v может принимать любые действительные значения, задавая которые можно вычислить x и соответственно y, которые в свою очередь зависят от двух произвольных постоянных D_1 и D_2.

То есть мы нашли общее решение уравнения Эйлера –Лагранжа, которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и доставляет экстремум функционалу $\int_0^l \frac{\sqrt{1+(y^{/})^2}}{\sqrt{y}}dx.$ У Вас могут возникнуть, вероятно, следующие вопросы: 1. Мы нашли экстремум функционала, а обещали найти минимум, а экстремум-это и минимум и максимум. 2. Как найти значения произвольных постоянных, исходя из граничных условий? 3. Мы нашли, что брахистохрона-это циклоида (в общем довольно не-простая кривая), а как её нашли безграмотные восточные строители? 4. Да, мы познакомились с новым для нас вариационным исчислением, а зачем нам это здесь в разделе о обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка? Начнём с первого вопроса. Согласно теории вариационного исчисления, достаточным условием локального минимума является условие Лежандра: $\frac{\partial}{\partial y'}(\frac{\partial F}{\partial y'}) \geq 0$, а при локальном максимуме знак неравенства будет обратный. Существуют и другие условия минимума и максимума функционала. Мы остановимся лишь на условии Лежандра, и это потому что нам в дальнейшем понадобится только экстремум функционала. А пока покажем, что мы действительно нашли минимум функционала $\int_0^l \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx$. В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial y'}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y'}(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y''}{(1+(y')^2)\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Нам надо проверить знак только при y'', так как все остальные сомножители положительны. Мы уже знаем, что $y' = ctg(\frac{v}{2})$ и тогда $y'' = \frac{-1}{2\sin^2(\frac{v}{2})} \frac{dv}{dx} = \frac{-1}{4D_1 \sin^4(\frac{v}{2})}$. И всё определяет знак произвольной постоянной D_1, который в данном случае отрицателен (мы это покажем ниже) и наш функционал действительно достигает минимума. Затем ответим на второй вопрос, как найти произвольные постоянные. Непосредственная подстановка граничных условий приводит к неоправданно громоздким выражениям в чём вы сами непосредственно можете убедиться. Поэтому введём новые координаты $Y = -2\frac{y-H_1}{H_2-H_1}$; $X = \frac{\pi}{l}x$.

В этих координатах уравнение брахистохроны (циклоиды) выглядит точно также $X = D_1(v-\sin(v)) + D_2$; $Y = D_1(1-\cos(v))$, но найти здесь постоянные D_1 и D_2 существенно проще. Действительно, при $X = 0, Y = 0$ и этому соответствует параметр $v = 0$ и поэтому D_2 равно нулю. Постоянную D_1 примем равную -1, как и обещали. В результате получим $X = \sin(v) - v$; $Y = \cos(v) - 1$. Действительно в этом случае при $v = 0$ получим $X = 0$ и $Y = 0$, а при $v = -\pi$ будем иметь $X = \pi$ и $Y = -2$. В координатах $X0Y$, где $0 \leq X \leq \pi; -2 \leq Y \leq 0$ мы получили часть циклоиды в виде монотонно убывающей функции с вершиной в начале координат. А в координатах $x0y$, где $0 \leq x \leq l; H_2 \leq y \leq H_1$, один из скатов крыши восточного дома. Для ответа на третий вопрос, как же всё- таки средневековые, часто безграмотные, и тем более не знающие математики, японские, корейские и китайские строители нашли такую необычную форму для своих крыш, я предлагаю Вам вспомнить, что Вы неоднократно слышали такую фразу: « Я не знаю, как это объяснить, но это так.». Эти слова произносят люди, которых в обиходе называют практиками своего дела: они водят машины, кроют крыши, стоят дома и так далее и так далее. Вот они нашли такую замечательную кривую методом проб и ошибок, а затем передавали эти знания своим ученикам. Некоторые из таких практиков своего дела описаны в серьёзной научной литературе. Так известный кораблестроитель ,академик А.Н. Крылов, который был кстати очень хорошим математиком, писал, что он и его ассистенты долго рассчитывали (тогда не было компьютеров) корпус корабля, а в это же время и притом значительно быстрее к такому же результату пришёл потомственный рабочий кораблестроитель Титов, не имевший даже среднего образования. Или ещё, известный математик, основатель целой науки-аэродинамики академик Н.Е. Жуковский с помощью новейших тогда методов функций комплексного переменного обосновывал, форму крыла самолета и выбора оптимальных

углов атаки и в это же время эту же форму вычертил и воплотил в жизнь инженер И.И. Сикорский. И я уже упоминал Вам американского инженера Хевисайда, который придумал операционный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и, который на вопрос, а как же это можно применять, когда ничего не обосновано, отвечал, что практически никто из людей не знает как происходит процесс пищеварения, но едят все. Я это говорю к тому, чтобы исследователи не отмахивались от мнения практиков, терпеливо их выслушивали, потому что их мнение, а тем более обоснование их мнения может привести иногда к неожиданным и потому оригиналь ным выводам. На вопрос почему мы всё это, начиная с задачи о брахистохроне и

заканчивая основами вариационного исчисления, излагаем в разделе об обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка? Дело в том, что это нам поможет в численных методах решения подобных уравнений. Пока, я думаю, этот ответ не совсем

понятен, но в процессе дальнейших изложений мы постараемся это разъяснить. А пока, если крыша в виде куска циклоиды не убедила Вас в том, что мы действительно нашли ту крышу, с которой вода скатится за минимальное время, рассмотрим более простой пример, какая кривая, соединяющая две точки на плоскости будет обладать минимальной длиной. Мы, конечно, знаем ответ на этот вопрос- это прямая. А сейчас попробуем это

обосновать. Итак ,длина дуги кривой, соединяющей две точки на плоскости

(x_1, y_1) и (x_2, y_2) равна $l(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y^{/}(x))^2}\, dx$, где $y(x_1) = y_1$ и $y(x_2) = y_2$.

В этом случае уравнение Эйлера- Лагранжа имеет вид $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}}) =$

$$= \frac{y^{//}\sqrt{1+(y^{/})^2} - \frac{y^{/} y^{//} y^{/}}{\sqrt{1+(y^{/})^2}}}{1+(y^{/})^2} = \frac{y^{//}(1+(y^{/})^2) - (y^{/})^2 y^{//}}{(1+(y^{/})^2)^{1.5}} = \frac{y^{//}}{(1+(y^{/})^2)^{1.5}} = 0.$$ А так как знаменатель

никогда в ноль не обращается, то мы получили простейшее дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = 0$, общее решение которого ,очевидно $y(x) = C_1 x + C_2$, а это и есть общее уравнение прямой на плоскости. Тем самым мы обосновали, что кратчайшее расстояние между двумя точками на плоскости будет прямая. Если сюда подставить граничные условия $y_1 = C_1 x_1 + C_2$; $y_2 = C_1 x_2 + C_2$, то из этой линейной алгебраической системы

двух уравнений с двумя неизвестными, читатель легко найдёт значение произвольных постоянных и в результате получит хорошо известное ему уравнение прямой на плоскости, проходящее через две заданные точки. Но мне бы хотелось обратить Ваше внимание на следующее: в функционале $l(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ стоит производная первого порядка от

неизвестной функции, а дифференциальное. уравнение, реализующее минимум этого

функционала $y'' = 0$ содержит производную второго порядка от неизвестной функции. То есть мы сузили класс функций, среди которых ищем решение, так как все функции, которые имеют непрерывную вторую производную, естественно, имеют непрерывную и даже дифференцируемую первую производную. А в более широком классе функций, очевидно, проще найти решение, чем в более узком классе функций. И это даже лучше, что неизвестная функция стоит под знаком интеграла, так как интегрирование только улучшает качество функции, так как можно интегрировать разрывные функции, и в том числе, как Вы помните, такую экзотическую функцию, как функцию Дирихле. Поэтому было бы более желательно не сводить вычисление экстремума функционала к решению уравнения Эйлера-Лагранжа, а действовать с точностью до наоборот. И ещё, Вы все прекрасно знаете второй закон механики Ньютона: сила прямо пропорциональна ускорению, а коэффициентом пропорциональности является масса тела: $F = ma$, где $F -$ сила, $m -$ масса , $a -$ ускорение. Мы уже с Вами рассматривали этот закон в виде дифференциального уравнения второго порядка, описывающего движение тела в поле силы тяжести $m\ddot{y} = -G$, где начало координат выбрано на поверхности Земли, ось $y - k$ направлена вертикально вверх, $G -$ сила, с которой тело притягивается к Земле или вес тела, направлена вниз к Земле и поэтому перед ней стоит знак минус и, наконец, мы об этом уже писали

$\ddot{y}-$ вторая производная от $y - k$ по времени. В свою очередь $G = mg$, где $g -$ знакомое нам

ускорение свободного падения. В результате мы получили следующее обыкновенное

дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{y} = -g$. Так мы пришли к хорошо известному нам уравнению, содержащему вторую производную по времени. Но к этому же уравнению можно придти и с другой стороны. Пусть некое тело движется только вдоль одной координаты, в данном случае это координата $y - k$. Такое движение называется одномерным. И пусть существует некая функция ,называемая функцией Лагранжа,

$L(t, y(t), \dot{y}(t))$, зависящая от $t-$времени, $y(t)-$координата $y-k$ как функция времени и $\dot{y}(t)-$первая производная этой координаты по времени. Во-первых ,отметим, что Лагранж - выдающийся французский математик и механик конца 18 и начала 19 века. И далее сформулируем следующий принцип, который впоследствии получил название принципа Гамильтона (английский математик и механик 19 века). Так вот согласно этому принципу за время от t_0 до t_1 одномерное движение тела будет осуществляться так и только так, чтобы первая вариация функционала $\int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t))dt$, а мы уже знаем, что это такое ,обращалась бы в ноль. Остаётся добавить, что функция Лагранжа $L = T - U$, где $T-$кинетическая, а $U-$потенциальная энергия движущегося тела. Вблизи Земли ,там где ускорение силы тяжести можно счипостоянной величиной, они соответственно равны $T = \frac{m(\dot{y}(t))^2}{2}$ и $U = mgy(t)$. Таким образом наш функционал приобретает вид $I(y) = m\int_{t_0}^{t_1}(\frac{(\dot{y}(t))^2}{2} - gy(t))dt$. Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа для этого функционала: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) = 0$ или $-g - \frac{d}{dt}(\dot{y}(t)) = 0$ и мы пришли но уже с другой стороны к уже известному нам уравнению $\ddot{y} = -g$. Вполне законный вопрос: а для чего всё это делалось? Один из ответов нам уже известен. Уравнение содержит вторую производную по времени, а функционал только первую и поэтому функций, доставляющих экстремум функционалу, значительно больше, чем функций, удовлетворяющих даже такому простому дифференциальному уравнению второго порядка. Попробуйте, например, решить такое уравнение, когда g не константа, а функция, имеющая большое число разрывов, а для соответствующего функционала это будет возможно даже в том случае, когда в качестве g будет такая экзотическая функция, как функция Дирихле. Второй ответ заключается в том, что функционал $\int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t))dt$ и принцип Гамильтона- это более общее понятие, чем второй закон Ньютона, так как именно исходя из них выводится второй закон Ньютона, а не наоборот. И этот факт стал известен ещё в 19 веке. И поэтому в принципе могут существовать такие экзотические траектории $y(t)$, которые могут доставлять экстремум указанному функционалу и не удовлетворять закону Ньютона. Из того, что здесь изложено складывается такая необычная ситуация. До сих пор мы говорили о том, что лучше всего найти аналитическое решение, удовлетворяющее уравнению и краевым (в данном случае это граничным и начальным) условиям, описывающим некоторое физическое явление. И вдруг оказывается, что эти уравнения реализуют только экстремум некоего функционала. Отсюда, если бы мы могли каким- то образом непосредственно вычислить экстремум этого функционала, то мы бы более точно отразили картину исследуемого физического явления. И это уже делается, начиная примерно с 60-х годов 20 века. Но осуществить последнее можно только с помощью численных методов и мы на конкретном примере это покажем. Говоря же о необычности указанной ситуации, мы имели в виду, что в этом случае может оказаться, что численное решение задачи будет в некоторых конкретных обстоятельствах более точно отражать физическую картину явления, чем аналитическое её решение. Ну, а теперь перейдём к конкретному примеру. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка $y^{//} - y = 1$ с однородными граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$. Общее решение этого уравнения нам уже хорошо известно, оно складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и имеет вид $y(x) = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x)$ и частного решения неоднородного уравнения, которое очевидно равно -1. И поэму общее решение исходного уравнения запишем так $y(x) = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x) - 1$. Удовлетворяя граничным условиям, окончательно получим: $y(x) = \frac{1-e^{-1}}{e-e^{-1}} \exp(x) + \frac{e-1}{e-e^{-1}} \exp(-x) - 1$. Можете самостоятельно убедиться в том, что полученное выражение удовлетворяет указанным выше однородным граничным условиям. А теперь запишем функционал $I(y) = \int_0^1 (y^2(x) + (y^/(x))^2 + 2y(x))dx$. Функция $y(x)$, которая доставляет экстремум этому функционалу, удовлетворяет исследуемому нами дифференциальному уравнению. Действительно: $F(x, y(x), y^/(x)) = y^2(x) + 2y(x) + (y^/(x))^2$ и тогда $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2; \frac{\partial F}{\partial y^/} = 2(y^/(x)); \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^/}) = 2y^{//}(x)$. Затем, следуя уравнению Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^/}) = 0$, получим исходное уравнение $y^{//} - y = 1$. И далее, как уже говорилось, поступим с точностью до наоборот. Мы не будет решать, уже решённое нами уравнение, а будем действовать так. Разобьём для начала интервал $[0,1]$ на пять равных частей. Конечно части могут быть и не равные, но мы ,как всегда в этом изложении, рассматриваем самый простой случай. Длина каждого интервала в этом случае равна 0.2. А значение неизвестной нам пока функции $y(x)$ обозначим следующим образом

$y(0) = y_0 = 0; y(0.2) = y_1; y(0.4) = y_2; y(0.6) = y_3; y(0.8) = y_4;\ y(1.0) = y_5 = 0.$

Как Вы видите, из граничных условий нам известны значения функции $y(x)$ только в крайних точках нашего интервала: $y_0 = y_5 = 0$. Остальные же остаются пока неизвестными. А затем через две крайние точки каждого из этих интервалов проведём прямую линию, а она, как Вы знаете только одна и, как Вы надеюсь, помните удовлетворяет следующему уравнению, например, для первого интервала $0 \le x \le 0.2$ $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ и с учётом, сказанного выше ,получим $y = 5y_1x$ и $y^/ = 5y_1$. Тогда для второго интервала $0.2 \le x \le 0.4$

$y = 5(y_2 - y_1)(x - 0.2) + y_1$; $y^/ = 5(y_2 - y_1)$. Для третьего интервала $0.4 \le x \le 0.6$

$y = 5(y_3 - y_2)(x - 0.4) + y_2$; $y^/ = 5(y_3 - y_2)$. Для четвёртого интервала $0.6 \le x \le 0.8$

$y = 5(y_4 - y_3)(x - 0.6) + y_3$; $y^/ = 5(y_4 - y_3)$. Для пятого интервала $0.8 \le x \le 1.0$

$y = -5y_4(x - 0.8) + y_4$; $y^/ = -5y_4$. Возвращаясь к нашему функционалу пишем

$$I(y) = \int_0^1 (y^2(x) + (y^/(x))^2 + 2y(x))dx = \int_0^{0.2} Fdx + \int_{0.2}^{0.4} Fdx + \int_{0.4}^{0.6} Fdx + \int_{0.6}^{0.8} Fdx + \int_{0.8}^{1.0} Fdx =$$

$$= \int_0^{0.2} (25y_1^2 x^2 + 10y_1 x + 25y_1^2)dx + \int_{0.2}^{0.4} (25(y_2 - y_1)^2 (x - 0.2)^2 + 10(y_2 - y_1)(y_1 + 1)(x - 0.2) +$$

$$+ y_1^2 + 2y_1 + 25(y_2 - y_1)^2)dx +$$

$$+ \int_{0.4}^{0.6} (25(y_3 - y_2)^2 (x - 0.4)^2 + 10(y_3 - y_2)(y_2 + 1)(x - 0.4) + y_2^2 + 2y_2 + 25(y_3 - y_2)^2)dx +$$

$$+ \int_{0.6}^{0.8} (25(y_4 - y_3)^2 (x - 0.6)^2 + 10(y_4 - y_3)(y_3 + 1)(x - 0.6) + y_3^2 + 2y_3 + 25(y_4 - y_3)^2)dx +$$

$+ \int_{0.8}^{1.0} (25y_4^2 (x - 0.8)^2 - 10y_4(y_4 + 1)(x - 0.8) + 2y_4 + 26y_4^2)dx.$ Приведённые здесь интегралы легко берутся, как интегралы от степенной функции и поэтому.

$$I(y) = [25y_1^2 \frac{x^3}{3} + 10y_1 \frac{x^2}{2} + 25y_1^2 x]_0^{0.2} + [25(y_2 - y_1)^2 \frac{(x - 0.2)^3}{3} + 10(y_2 - y_1)(y_1 + 1)\frac{(x - 0.2)^2}{2} +$$
$$+ (y_1^2 + 2y_1 + 25(y_2 - y_1)^2)x]_{0.2}^{0.4} +$$
$$+ [25(y_3 - y_2)^2 \frac{(x - 0.4)^3}{3} + 10(y_3 - y_2)(y_2 + 1)\frac{(x - 0.4)^2}{2} + (y_2^2 + 2y_2 + 25(y_3 - y_2)^2)x]_{0.4}^{0.6} +$$
$$+ [25(y_4 - y_3)^2 \frac{(x - 0.6)^3}{3} + 10(y_4 - y_3)(y_3 + 1)\frac{(x - 0.6)^2}{2} + (y_3^2 + 2y_3 + 25(y_4 - y_3)^2)x]_{0.6}^{0.8} +$$

$+ [25y_4^2 \frac{(x - 0.8)^3}{3} - 10y_4(y_4 + 1)\frac{(x - 0{,}8)^2}{2} + (2y_4 + 26y_4^2)x]_{0.8}^{1.0}$. Подставляя верхние и нижние пределы интегрирования, получим $I(y) = 5.0667y_1^2 + 0.2y_1 +$

$$+ 0.0667(y_2 - y_1)^2 + 0.2(y_2 - y_1)(y_1 + 1) + 0.2y_1^2 + 0.4y_1 + 5(y_2 - y_1)^2 +$$

$$+ 0.0667(y_3 - y_2)^2 + 0.2(y_3 - y_2)(y_2 + 1) + 0.2y_2^2 + 0.4y_2 + 5(y_3 - y_2)^2 +$$

$$+ 0.0667(y_4 - y_3)^2 + 0.2(y_4 - y_3)(y_3 + 1) + 0.2y_3^2 + 0.4y_3 + 5(y_4 - y_3)^2 +$$

$+0.0667\,y_4^2-0.2y_4(y_4+1)+0.4y_4+5.2y_4^2$. Тут я Вам должен кое-что напомнить. Когда мы рассматривали функцию одной переменной $y(x)$, то нами говорилось о том, что, для того чтобы найти точки подозрительные на экстремум надо продифференцировать эту функцию по x и полученный результат приравнять нулю, то есть решить уравнение $f'(x)=0$, которое в данном случае будет алгебраическим уравнением относительно x, а корень этого уравнения и будет тем значением x, при котором функция $f(x)$ достигает экстремума. Для функции же нескольких ,например, трёх переменных $R(x,y,z)$, для определения координаты точки в трёхмерном пространстве, в которой эта функция достигает экстремума, надо найти частные производные $\frac{\partial R}{\partial x};\frac{\partial R}{\partial y};\frac{\partial R}{\partial z}$ и каждую из них приравнять нулю. В результате мы получим алгебраическую, необязательно линейную, систему трёх уравнений с тремя неизвестными, из решения которой в принципе можно найти координаты точки ли точек (в случае нелинейной системы таких точек может быть несколько), где функция $R(x,y,z)$ достигает экстремума. Этот факт можно доказать, но это, как уже было не один раз, мы опускаем. Возвращаясь к нашему функционалу, мы видим, что он превратился в некую функцию, зависящую от четырёх параметров y_1,y_2,y_3,y_4. Экстремум такой функции в трудно вообразимом с житейской точки зрения 4-х мерном пространстве достигается в точке, определяемой из решения ,в данном случае линейной, алгебраической системы четырёх уравнений с четырьмя неизвестными

$$\frac{\partial I}{\partial y_1}=0;\ \frac{\partial I}{\partial y_2}=0;\ \frac{\partial I}{\partial y_3}=0;\ \frac{\partial I}{\partial y_4}=0.$$

Полученная таким образом алгебраическая система четырёх уравнений с четырьмя неизвестными будет обязательно в данном случае линейной, так как параметры $y_i, i=1,2,3,4.$ входят в исходный функционал максимум во второй степени. Забегая вперёд скажем, что это же утверждение остаётся в силе для такой же алгебраической системы n уравнений с n неизвестными. И ещё мы с Вами выше уже упоминали о многомерном и даже бесконечномерном пространстве, так что упомянутое здесь 4-х мерное пространство уже можно считать привычным. В результате, проведя вычисления с точностью до 4-х знаков после запятой, получим следующую линейную алгебраическую систему 4-х уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{aligned}
20.2667y_1-9.9334y_2 &= -0.4\\
-9.9334y_1+20.2667y_2-9.9334y_3 &= -0.4\\
-9.9334y_2+20.2667y_3-9.9334y_4 &= -0.4\\
-9.9334y_3+20.2667y_4 &= -0.4
\end{aligned}$$

Эта система обладает симметричной трёхдиагональной матрицей. Мы уже с Вами говорили о том, что главной диагональю матрицы $a_{ij}, i=1,2,3,4; j=1,2,3,4.$ является последовательность $a_{ii}, i=1,2,3,4.$ В нашем случае она имеет вид

20.2667, 20.2667, 20.2667, 20.2667. $a_{i,i+1}, i = 1,2,3$ – это диагональ, расположенная выше главной диагонали и в нашем случае она имеет вид
$-9.9334, -9.9334, -9.9334.$ И точно такой же вид будет иметь $a_{i-1,i}, i = 2,3,4$ – диагональ, расположенная ниже главной диагонали. Отсюда следует, что данная матрица не изменится, если строчки и столбцы поменять местами между собой, то есть строчки станут столбцами, а столбцы строчками. Такая матрица называется симметричной. Эта матрица обладает ещё рядом положительных качеств, но это уже выходит за рамки нашего повествования. А пока заметим, что такая матрица называется у людей, занимающихся вычислительной математикой ,матрицей жёсткости метода конечных элементов. А тот метод ,который мы в данном случае используем, называется методом конечных элементов. Такой метод в настоящий момент является наиболее эффективным и наиболее часто используемым при решении различных задач математической физики, механики, теории жидкости и газов, аэродинамики, теории упругости и так далее и так далее. Мы же здесь проиллюстрировали возможности этого метода на примере простейшего обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. И, наконец, в правой части нашей системы стоит столбец свободных членов $b_i = -.0.4, i = 1,2,3,4.$ Чтобы приступить к решению такой линейной системе алгебраических уравнений снова, как уже быпо не раз, обратимся, как говорят литераторы, к лирическому отступлению. Читатель, уже ,наверное, справедливо заметил, что всё, изложенное здесь ни учебник, ни трактат, ни научная монография, а скорее всего, как мне кажется, литературное произведение по математике. Именно поэтому такое сочинение не содержит, как полагается в научной статье, нумераций формул и ссылок на используемую литературу. Но теперь наступил момент, что без использоования научной терминологии мне не обойтись. Напомню Вам, что практически в начале этого повествования, когда мы рассматривали линейные системы и матрицы, я писал, что метод Гаусса несомненно универсален, но он не учитывает некоторые конкретные характеристики матрицы, в том числе, в частности, часто встречающуюся в приложениях , её полосовую структуру. Там также написано, что к решению таких матриц имеет отношение автор этих строк. Я не изложил тогда этот алгоритм, опубликованный в ряде статей на русском и английском языках, полагая, что читателю он будет сложен для понимания. Мне кажется, что в настоящий момент, по прочтению предыдущих страниц читатель стал более подготовлен и сможет разобраться в изложенной ниже статье. И ещё, один из моих учителей Р.М. Финкельштейн, говорил, что любая монография- это на 97 % чужие мысли и только на 3% свои, я следуя этому мудрому совету, поместил ниже свою статью. Если всё же она окажется сложной для понимания, то можно её и опустить.

АЛГОРИТМ ПОУЗЛОВОЙ ПРОГОНКИ

(Излагается на примере)

Рассмотрим матрицу пятого порядка

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ & & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{matrix} = \begin{matrix} 5 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 5 & 1 \\ & & 1 & 1 & 5 \end{matrix}$$

Исходную систему запишем так

$$a_{i,i-2}U_{i-2} + a_{i,i-1}U_{i-1} + a_{i,i}U_i + a_{i,i+1}U_{i+1} + a_{i,i+2}U_{i+2} + a_{i,i+3}U_{i+3} = b_i \ , \qquad (1)$$

где b_i – правая часть. i=1,2,3,4,5

В общем случае имеем

$$\sum_{j=1}^{L} a_{i,i-j}U_{i-j} + a_{i,i}U_i + \sum_{j=1}^{M} a_{i,i+j}U_{i+j} = b_i \qquad (2)$$

i=1,2,.....,N

N -порядок матрицы.

M - число полос ,лежащих выше главной диагонали. M-целое число ,принимающее любые целые значения от нуля до N-1.

L - число полос ,лежащих ниже главной диагонали.L-целое число ,принимающее любые целые значения от нуля до N-1.

В нашем случае N=5,M=3,L=2.

Ищем решение (1) в виде:

$$U_i = E_i U_{i+1} + F_i \qquad (3)$$

i=1,2,3,4,5.

Тогда

$$U_{i-1} = E_{i-1}U_i + F_{i-1}; U_{i-2} = E_{i-2}U_{i-1} + F_{i-2} = E_{i-2}E_{i-1}U_i + E_{i-2}F_{i-1} + F_{i-2};$$

$$U_{i+1} = \frac{U_i - F_i}{E_i}; U_{i+1} = E_{i+1}U_{i+2} + F_{i+1}; U_{i+2} = \frac{U_{i+1} - F_{i+1}}{E_{i+1}} = \frac{U_i - F_i}{E_i E_{i+1}} - \frac{F_{i+1}}{E_{i+1}};$$

$$U_{i+2} = E_{i+2}U_{i+3} + F_{i+2}; U_{i+3} = \frac{U_{i+2} - F_{i+2}}{E_{i+2}} = \frac{U_i - F_i}{E_i E_{i+1} E_{i+2}} - \frac{F_{i+1}}{E_{i+1}E_{i+2}} - \frac{F_{i+2}}{E_{i+2}};$$

Подставляем это в (1) и собираем коэффициенты при U_i

$$U_i(a_{i,i-2}E_{i-2}E_{i-1} + a_{i,i-1}E_{i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1}\frac{1}{E_i} + \frac{a_{i,i+2}}{E_i E_{i+1}} + \frac{a_{i,i+3}}{E_i E_{i+1} E_{i+2}}) =$$

$$= b_i - a_{i,i-2}(E_{i-2}F_{i-1} + F_{i-2}) - a_{i,i-1}F_{i-1} + a_{i,i+1}\frac{F_i}{E_i} + a_{i,i+2}(\frac{F_i}{E_i E_{i+1}} + \frac{F_{i+1}}{E_{i+1}}) +$$

$$+ a_{i,i+3}(\frac{F_i}{E_i E_{i+1} E_{i+2}} + \frac{F_{i+1}}{E_{i+1}E_{i+2}} + \frac{F_{i+2}}{E_{i+2}}) \ . \qquad (4)$$

i=1,2,3,4,5.

Так как вектор U_i выражаются через два вектора E_i и F_i, то на соотношение (4) можно наложить ещё какое либо одно дополнительное условие, например, левая часть в выражении (4) равна нулю и тогда, так как вектор U_i ,в общем случае, произволен ,то и правая часть (4) так же равна нулю. Отсюда следует ,что

$$E_{i+2} = \frac{-a_{i,i+3}}{E_{i+1}E_i(a_{i.i} + a_{i,i-1}E_{i-1} + a_{i,i-2}E_{i-2}E_{i-1}) + a_{i,i+1}E_{i+1} + a_{i,i+2}} \quad (5)$$

и $$F_{i+2} = -\ [b_i - a_{i,i-2}(E_{i-2}F_{i-1} + F_{i-2}) - a_{i,i-1}F_{i-1} + a_{i,i+1}\frac{F_i}{E_i} + a_{i,i+2}(\frac{F_i}{E_iE_{i+1}} +$$

$$+\frac{F_{i+1}}{E_{i+1}}) + a_{i,i+3}(\frac{F_i}{E_iE_{i+1}E_{i+2}} + \frac{F_{i+1}}{E_{i+1}E_{i+2}} + \frac{F_{i+2}}{E_{i+2}})]\frac{E_{i+2}}{a_{i,i+3}} \quad . \quad i=1,2,3,4 \quad (6)$$

Соотношение (4) при i=5 пока рассматривать не будем.

Последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$F_{i+2} = [E_iE_{i+1}E_{i+2}(b_i - F_{i-1}(a_{i,i-1} + a_{i,i-2}E_{i-2}) - F_{i-2}a_{i,i-2}) + F_i(a_{i,i+1}E_{i+1}E_{i+2} +$$

$$+a_{i,i+2}E_{i+2} + a_{i,i+3}) + F_{i+1}E_i(a_{i,i+2}E_{i+2} + a_{i,i+3})] / (-a_{i,i+3}E_iE_{i+1}) . \quad (7)$$

В общем случае

$$E_{i+M-1} = -a_{i,i+M} / [\prod_{l=1}^{M-1} E_{i+l-1}(a_{i,i} + \sum_{j=1}^{L} a_{i,i-j}\prod_{l=1}^{j} E_{i-l}) + \sum_{j=1}^{M-1} a_{i,i+j}\prod_{l=j+1}^{M-1} E_{i+l-1}] \quad (8)$$

$$F_{i+M-1} = [\prod_{l=0}^{M-1} E_{i+l}(b_i - \sum_{j=1}^{L} F_{i-j}\sum_{l=j}^{L} a_{i,i-l}\prod_{n=j+1}^{l} E_{i-n}) + \sum_{j=1}^{M-1} F_{i+j-1}\prod_{r=0}^{j-2} E_{i+r}\sum_{l=j}^{M} a_{i,i+l} \times$$

$$\times \prod_{n=l}^{M-1} E_{i+n}]/(-a_{i,i+M}\prod_{l=0}^{M-2} E_{i+l}) \ . \quad (9)$$

i=1,2,.........,N-1.

Зависимость (9) можно, с использованием (8),представить в следующем виде

$$F_{i+M-1} = -\frac{E_{i+M-1}}{a_{i,i+M}}(b_i - \sum_{j=1}^{M-1} F_{i+j-1}(\sum_{s=1}^{j-1} a_{i,i+s}\prod_{p=s}^{j-2} E_{i+p} + \prod_{s=0}^{j-2} E_{i+s}(a_{i,i} +$$

$$+\sum_{j=1}^{L} a_{i,i-j}\prod_{n=1}^{j} E_{i-n})) - \sum_{j=1}^{L} F_{i-j}\sum_{s=j}^{L} a_{i,i-s}\prod_{p=j+1}^{s} E_{i-p}) \ . \quad (10)$$

i=1,2,........,N-1.

Из (5) при i=1,2,3,4 имеем

$$i = 1; E_3 = \frac{-a_{1,4}}{E_2E_1a_{1,1} + a_{1,2}E_2 + a_{1,3}} \quad (11)$$

$$i = 2; E_4 = \frac{-a_{2,5}}{a_{2,4} + a_{2,3}E_3 + E_3E_2(a_{2,2} + a_{2,1}E_1)} \quad (12)$$

$$i = 3; E_5 = \frac{-a_{3,6}}{a_{3,5} + a_{3,4}E_4 + E_4E_3(a_{3,3} + a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1)} \quad (13)$$

$$i = 4; E_6 = \frac{-a_{4,7}}{a_{4,6} + a_{4,5}E_5 + E_5E_4(a_{4,4} + a_{4,3}E_3 + a_{4,2}E_3E_2)} \quad . \tag{14}$$

В формулах (13-14) встречаются элементы матрицы $a_{3,6}, a_{4,6}$ и $a_{4,7}$,которые выходят за границу используемых индексов, так как порядок матрицы N=5.

Будем полагать ,что

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0,\text{если j или i меньше или равно нулю} \\ 0,\text{если j или i ,больше N} \\ a_{i,j} - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{15}$$

То есть числители выражений (13) и (14) равны нулю ,а так как E_5 и E_6 – произвольные, в общем случае не равные нулю, числа , то поэтому знаменатели соотношений (13) и (14) следует положить тождественно равными нулю и тогда из (13) получим

$$E_4 = \frac{-a_{3,5}}{a_{3,4} + E_3(a_{3,3} + a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1)} \ , \tag{16}$$

а из (14)

$$E_4 = \frac{-a_{4,5}}{a_{4,4} + a_{4,3}E_3 + a_{4,2}E_3E_2} , \tag{17}$$

то есть помимо (12) имеются ещё два дополнительных соотношения для E_4 .

В общем случае для матрицы порядка N,имеющей M полос выше главной диагонали и L полос ниже главной диагонали имеет место выражение

$$E_{N-1} = -a_{N-M,N} \,/\, \{\prod_{l=1}^{M-1} E_{N-M+l-1}(a_{N-M,N-M} + \sum_{j=1}^{L} a_{N-M,N-M-j} \prod_{l=1}^{j} E_{N-M-l}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M-1} a_{N-M,N-M+j} \prod_{l=j+1}^{M-1} E_{N-M+l-1}\} , \tag{18}$$

которое следует из (8) при условии, что i=N-M.Помимо него ,используя рассуждения аналогичные тем, которые были получены при выводе зависимостей (16--17),будем иметь ещё M-1 дополнительное соотношение для E_{N-1}

$$E_{N-1} = -a_{N-K,N} \,/\, \{\prod_{S=1}^{K-1} E_{N-K+S-1}(a_{N-K,N-K} + \sum_{j=1}^{L} a_{N-K,N-K-j} \prod_{P=1}^{j} E_{N-K-P}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{K-1} a_{N-K,N-K+j} \prod_{l=j+1}^{K-1} E_{N-K+l-1}\} . \tag{19}$$

к=1,2,.......,M-1

Подставим в выражения (11,12,16,17) численные значения элементов исходной матрицы. В результате вместо (11) и (12) иметь

$$E_3 = \frac{-1}{1 + E_2 + 5E_2E_1} \tag{20}$$

$$E_4 = \frac{-1}{1 + E_3 + E_3E_2(5 + E_1)} \quad . \tag{21}$$

А вместо (16) и (17) соответственно пишем

$$E_4 = \frac{-1}{1 + E_3(5 + E_2 + E_2 E_1)} \tag{22}$$

$$E_4 = \frac{-1}{5 + E_3 + E_3 E_2} \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (21),получим

$$1 + 5E_3 + E_3E_2 + E_3E_2E_1 = 1 + E_3 + 5E_3E_2 + E_3E_2E_1 \quad , \tag{24}$$

Откуда следует ,что E_2 = 1.

Сопоставляя (23) и (21),найдём

$5 + E_3 + E_3E_2 = 1 + E_3 + 5E_3E_2 + E_3E_2E_1$.

И

$$E_3 = \frac{4}{4E_2 + E_2E_1} \quad . \tag{25}$$

Теперь ,сравнивая (25) и (20),будем иметь

$-4E_2 - E_2E_1 = 4 + 4E_2 + 20E_2E_1$.

И

$$E_2 = \frac{-4}{8 + 21E_1} \tag{26}$$

Наконец из (26) и (24), пишем

$8 + 21E_1 = -4; E_1 = -0.5714.$

Здесь и ниже ограничимся 4-мя значащими цифрами после запятой. Далее для вычисления всех последующих E следует использовать только те из соотношений, которые выражаются не более чем через два предыдущих значения E. В общем случае, когда мы имеем матрицу, содержащую M полос выше главной диагонали и L ниже, необходимо выбирать только те формулы для E, которые выражаются не более чем L предыдущих E.(Можно показать, что такие соотношения всегда существуют).В противном случае решение линейной алгебраической системы будет неустойчивым ,то есть при N>> M погрешности в решении системы будут неограниченно возрастать с увеличением её порядка. Аналогичное замечание справедливо и при вычислении всех F. С учётом сказанного, используем следующие зависимости для вычисления E: (24),(25) и (23) соответственно.

$E_2 = 1.0000; E_3 = 1.1667; E_4 = -0.1363.$

Затем из (10) при L=2 и M=3 следует

$$F_{i+2} = -\frac{E_{i+2}}{a_{i,i+3}}(b_i - \sum_{j=1}^{2} F_{i+j-1}(\sum_{S=1}^{j-1} a_{i,i+S} \prod_{P=S}^{j-2} E_{i+P} + \prod_{S=0}^{j-2} E_{i+S}(a_{i,i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} a_{i,i-j} \prod_{n=1}^{j} E_{i-n})) - \sum_{j=1}^{2} F_{i-j} \sum_{S=j}^{2} a_{i,i-S} \prod_{P=j+1}^{S} E_{i-P}).$$

Или

$$F_{i+2} = -\frac{E_{i+2}}{a_{i,i+3}}(b_i - F_{i+1}(a_{i,i+1} + E_i(a_{i,i} + a_{i,i-1}E_{i-1} + a_{i,i-2}E_{i-1}E_{i-2})) - F_i(a_{i,i} +$$

$$+ a_{i,i-1}E_{i-1} + a_{i,i-2}E_{i-1}E_{i-2}\ ) - F_{i-1}(a_{i,i-1} + a_{i,i-2}E_{i-2}) - F_{i-2}a_{i,i-2}). \qquad (27)$$

i=1,2,3,4.

При $i = 1; F_3 = -\frac{E_3}{a_{1,4}}(b_1 - F_2(a_{1,2} + a_{1,1}E_1) - F_1 a_{1,1})$. (28)

При $i = 2; F_4 = -\frac{E_4}{a_{2,5}}(b_2 - F_3(a_{2,3} + E_2(a_{2,2} + a_{2,1}E_1)) - F_2(a_{2,2} + a_{2,1}E_1) -$

$- F_1 a_{2,1})$. (29)

При $i = 3; F_5 = -\frac{E_5}{a_{3,6}}(b_3 - F_4(a_{3,4} + E_3(a_{3,3} + a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1)) - F_3(a_{3,3} +$

$+ a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1) - F_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1) - F_1 a_{3,1})$. (30)

При $i = 4; F_6 = -\frac{E_6}{a_{4,7}}(b_4 - F_5(a_{4,5} + E_4(a_{4,4} + a_{4,3}E_3 + a_{4,2}E_3E_2)) - F_4(a_{4,4} +$

$a_{4,3}E_3 + a_{4,2}E_3E_2) - F_3(a_{4,3} + a_{4,2}E_2) - F_2 a_{4,2})$. (31)

В формулах (30) и (31) встречаются элементы $a_{3,6}$ и $a_{4,7}$,которые выходят за границу индексов, так как порядок матрицы N =5 и в соответствии с (15) знаменатели в выражениях (30) и (31) равны нулю. Так как F_5 и F_6-произвольные, в общем случае, числа ,то числители соотношений (30) и (31) следует положить равными нулю и, исходя из этого ,при i=3 будем иметь:

$$F_4 = (b_3 - F_3(a_{3,3} + E_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1)) - F_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1) - F_1 a_{3,1})/(a_{3,4} +$$

$$+ E_3(a_{3,3} + a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1)),$$

но из (13) следует ,что

$$(a_{3,4} + E_3(a_{3,3} + a_{3,2}E_2 + a_{3,1}E_2E_1)) = -\frac{a_{3,5}}{E_4}\ .$$

И тогда

$$F_4 = -\frac{E_4}{a_{3,5}}(b_3 - F_3(a_{3,3} + E_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1)) - F_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1) - F_1 a_{3,1}). \quad (32)$$

Рассмотрим соотношение (31).Используя (14),найдём, что коэффициент при F_5 тождественно равен нулю, а коэффициент при F_4,исходя из той же формулы (14), равен $-a_{4,5}/E_4$ и тогда окончательно при i=4 будем иметь

$$F_4 = -\frac{E_4}{a_{4,5}}(b_4 - F_3(a_{4,3} + a_{4,2}E_2) - F_2 a_{4,2}). \qquad (33)$$

В общем случае для матрицы порядка N,имеющей M полос выше главной диагонали и L полос ниже главной диагонали, помимо соотношения

$$F_{N-1} = -\frac{E_{N-1}}{a_{N-M,N}}(b_{N-M} - \sum_{j=1}^{M-1} F_{N-M+j-1}(\sum_{S=1}^{j-1} a_{N-M,N-M+S} \prod_{P=S}^{j-2} E_{N-M+P} + \prod_{S=0}^{j-2} E_{N-M+S} \times$$

$$\times(a_{N-M,N-M}+\sum_{j=1}^{L}a_{N-M,N-M-j}\prod_{n=1}^{j}E_{N-M-n}))-\sum_{j=1}^{L}F_{N-M-j}\sum_{S=j}^{L}a_{N-M,N-M-S}\prod_{P=j+1}^{S}E_{N-M-P}), \quad (34)$$

которое следует из (10) при i= N-M, будем иметь ещё M-1 выражение для F_{N-1}

$$F_{N-1}=-\frac{E_{N-1}}{a_{N-K,N}}(b_{N-K}-\sum_{j=1}^{L}F_{N-K-j}\sum_{l=j}^{L}a_{N-K,N-K-l}\prod_{n=j+1}^{l}E_{N-K-n}-\sum_{S=1}^{K-1}F_{N-K+S-1}\times$$

$$\times(\sum_{P=1}^{S-1}a_{N-K,N-K+P}\prod_{r=p}^{S-2}E_{N-K+r}+\prod_{P=0}^{S-2}E_{N-K+P}(a_{N-K,N-K}+\sum_{j=1}^{L}a_{N-K,N-K-j}\times$$

$$\times\prod_{P=1}^{j}E_{N-K-P}))). \quad \text{к=1,2,.......,M-1.} \quad (35)$$

В нашем конкретном случае ,если $b_1=1, b_2=2, b_3=3, b_4=4, b_5=5$ (*)

вместо (28) с указанной выше точностью получим

$$F_3=-1.1667-2.1667F_2+5.8333F_1 \quad (36)$$

Вместо (29)

$$F_4=0.2727-0.7403F_3-0.6039F_2-0.1364F_1 \quad (37)$$

Взамен (32)

$$F_4=0.4091-0.7403F_3-0.0584F_2-0.1364F_1 \quad (38)$$

Вместо (33)

$$F_4=0.5455-0.2727F_3-0.1364F_2. \quad (39)$$

Сопоставляя (38) и (37),получим

$$F_2=-0.25. \quad (40)$$

Сравнивая (39) и (37),будем иметь

$$F_3=-0.5833-F_2-0.2971F_1. \quad (41)$$

Далее ,сопоставляя (41) и (36),найдём

$$F_2=-0.5+5.25F_1. \quad (42)$$

Если сравнить (40) и (42),то можно записать

$$F_1=0.0476. \quad (43)$$

Итак окончательно, с учётом сказанного выше, и, с использованием соответственно формул (40), (41) и (39), получим:

$$F_1=0.0476; F_2=-0.25; F_3=-0.3472; F_4=0.6742. \quad (44)$$

Теперь вернёмся к формуле (4), из которой при i=5, следует

$$U_5=\frac{b_5-F_4(a_{5,4}+a_{5,3}E_3)-F_3a_{5,3}}{a_{5,5}+a_{5,4}E_4+a_{5,3}E_4E_3}. \quad (45)$$

В общем случае при матрице порядка N,ширине верхней полосы M и нижней L, получим

$$U_N=\frac{b_N-\sum_{K=1}^{L}F_{N-K}\sum_{j=K}^{L}a_{N,N-j}\prod_{l=K+1}^{j}E_{N-l}}{\sum_{j=0}^{L}a_{N,N-j}\prod_{l=1}^{j}E_{N-l}}. \quad (46)$$

Из (45),с учётом (44) и (*), и, с указанной выше точностью, вычислим
$U_5 = 0.8261.$

И далее из (3), с учётом (44) и (*), найдём
$U_4 = 0.5616; U_3 = 0.3080; U_2 = 0.0580; U_1 = 0.0145.$

Это и есть искомые значения неизвестных.

Заметим, что здесь ничего не говорилось о тех случаях ,когда имеют место нулевые диагонали внутри полосы или есть нулевые элементы на краю полосы. Все эти случаи нетрудно получить, исходя из приведённых алгоритмов. Изложенный алгоритм был реализован на компьютере. Были просчитаны тысячи различных линейных алгебраических систем. Порядок систем вариировался от нескольких десятков до нескольких тысяч. Ширина полосы менялась от трехдиагональной до полностью заполненной матрицы. Результаты расчетов показали, что точность вычисления здесь выше ,чем в известных алгоритмах , таких, например, как алгоритм Гаусса и Холецкого(последнего, как известно, только для симметричных систем).Этот факт ранее известен из реализации прогонки для трехдиагональных матриц. Здесь же он распространен на любое число диагоналей. Что же касается его эффективности, то описанный алгоритм может быть эффективнее известных, в частности, в том случае, когда число полос, лежащих выше главной диагонали значительно меньше числа полос, расположенных ниже ее. Целесообразно использовать указанный алгоритм и в том случае, когда необходимо иметь дело не с одной, а с несколькими правыми частями, так как все прогоночные коэффициенты E и большую часть выражений, необходимых для определения F, требуется вычислить только один раз.

А теперь вернёмся к нашей системе, которая значительно проще той, которая упоминается в статье в качестве примера. Согласно (1), запишем эту систему так.
$a_{i,i-1}y_{i-1} + a_{i,i}y_i + a_{i,i+1}y_{i+1} = b_i$ i=1,2,3,4. В нашем случае N=4,M=1,L=1.

Ищем решение такой системы в виде: $y_i = E_i y_{i+1} + F_i$, где согласно (8),(10) и (46) имеем :

$$E_i = \frac{-a_{i,i+1}}{a_{i,i} + a_{i,i-1}E_{i-1}};\ F_i = \frac{-E_i}{a_{i,i+1}}(b_i - F_{i-1}a_{i,i-1}),\ i = 1,2,3.\ y_4 = \frac{b_4 - F_3}{a_{4,4} + a_{4,3}E_3}.$$ Отсюда

$$E_1 = \frac{-a_{1,2}}{a_{1,1}} = \frac{9.9334}{20.2667} = 0.4901;\ E_2 = \frac{-a_{2,3}}{a_{2,2} + a_{2,1}E_1} = \frac{9.9334}{20.2667 - 9.9334 \times 0.4901} = 0.6451;$$

$$E_3 = \frac{-a_{3,4}}{a_{3,3} + a_{3,2}E_2} = \frac{9.9334}{20.2667 - 9.9334 \times 0.6451} = 0.7168.$$

$$F_1 = \frac{-E_1}{a_{1,2}}b_1 = \frac{-0.4901}{-9.9334}(-0.4) = -0.0197;\ F_2 = \frac{-E_2}{a_{2,3}}(b_2 - F_1 a_{2,1}) = \frac{-0.6451}{-9.9334}(-0.4 - (-0.0197)\times$$

$$\times(-9.9334)) = -0.0387;\ F_3 = \frac{-E_3}{a_{3,4}}(b_3 - F_2 a_{3,2}) = \frac{-0.7168}{-9.9334}(-0.4 - (-0.0387)\times(-9.9334)) = -0.0566.$$

$$y_4 = \frac{b_4 - F_3 a_{4,3}}{a_{4,4} + a_{4,3}E_3} = \frac{-0.4 - (-0.0566)\times(-9.9334)}{20.2667 + (-9.9334)\times 0.7168} = -0.0732.$$ И тогда

$y_3 = E_3 y_4 + F_3 = 0.7168 \times (-0.0732) - 0.0566 = -0.1091$; $y_2 = E_2 y_3 + F_2 = 0.6451 \times (-0.1091) - 0.0387 = -0.1091$; $y_1 = E_1 y_2 + F_1 = 0.4901 \times (-0.1091) - 0.0197 = -0.0732$. Теперь проверим с какой точностью мы нашли неизвестные в линейной системы алгебраических уравнений. Для этого подставим полученные значения неизвестных в исходную линейную систему алгебраических уравнений.

$$2.2667(-0.0732) - 9.9334(-0.1091) = -0.3998. \qquad (-0.4)$$

$$-9.9334(-0.0732) + 20.2667(-0.1091) - 9.9334(-0.1091) = -0.4003. \qquad (-0.4)$$

$$-9.9334(-0.1091) + 20.2667(-0.1091) - 9.9334(-0.0732) = -0.4003. \ (-0.4)$$

$$-9.9334(-0.1091) + 20.2667(-0.0732) = -0.3998. \ (-0.4)$$

Справа в круглых скобках расположены исходные значения правых частей, которые отличаются от полученных только в четвёртом знаке, а поскольку мы производили вычисления с точностью до четвёртого знака, то приведённый здесь алгоритм не ухудшает точности вычислений. В результате мы получили следующую функцию:

При $0 \le x \le 0.2 \quad y = -0.3660x$,

при $0.2 \le x \le 0.4 \quad y = -0.1795(x - 0.2) - 0.0732$,

при $0.4 \le x \le 0.6 \quad y = -0.1091$,

при $0.6 \le x \le 0.8 \quad y = 0.1795(x - 0.6) - 0.1091$,

при $0.8 \le x \le 1.0 \quad y = 0.3660(x - 0.8) - 0.0732$.

И эта функция доставляет экстремум функционалу $I(y) = \int_0^1 (y^2(x) + (y'(x))^2 + 2y(x))dx$ и удовлетворяет однородным граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$. Мы уже сталкивались с подобным изображением функции. Полученная функция интегрируема, непрерывна, но не везде внутри интервала $0 \le x \le 1.0$ дифференцируема. Вы, возможно, ещё не забыли, что мы начали наше исследование с решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y = 1$, удовлетворяющего однородным граничным условиям $y(0) = y(1)$ и нашли, что функция $y(x) = \frac{1 - e^{-1}}{e - e^{-1}} \exp(x) + \frac{e - 1}{e - e^{-1}} \exp(-x) - 1$ удовлетворяет и уравнению и этим граничным условиям. С точностью до четвёртого знака после запятой эту функцию можно записать так $y(x) = 0.2689 \exp(x) + 0.7311 \exp(-x) - 1$. Назовём это выражение так $y_a(x)$ – аналитическое решение, а функцию, полученную с помощью вариациионного исчисления y_p – приближённое решение. Тогда имеем:

$x = 0.1$; $\quad y_a(0.1) = -0.0414$, $y_p(0.1) = -0.0366$.

$x = 0.2$; $\quad y_a(0.2) = -0.0730$, $y_p(0.2) = -0.0732$.

$x = 0.3$; $\quad y_a(0.3) = -0.0954$, $y_p(0.3) = -0.0912$.

$x = 0.4$; $\quad y_a(0.4) = -0.1088$, $y_p(0.4) = -0.1091$.

$x = 0.5$; $\quad y_a(0.5) = -0.1133$, $y_p(0.5) = -0.1091$.

$x = 0.6$; $\quad y_a(0.6) = -0.1088$, $y_p(0.6) = -0.1091$.

$x = 0.7; \quad y_a(0.7) = -0.0954, \ \ y_p(0.7) = -0.0912.$

$x = 0.8; \quad y_a(0.8) = -0.0731, \ \ y_p(0.8) = -0.0732.$

$x = 0.9; \quad y_a(0.9) = -0.0413, \ \ y_p(0.9) = -0.0366.$

Вы сами видите, что даже при таком грубом дроблении интервала, приведённое здесь приближённое решение, даёт вполне удовлетворительные результаты. А теперь попробуем обобщить полученный результат на случай, когда число делений расчётного интервала $[0,1]$ будет не пять, а, например, n.

Тогда при $0 \le x \le \frac{1}{n}; \quad y = n\,y_1 x;\ y' = n\,y_1.$

при $\frac{i}{n} \le x \le \frac{i+1}{n}; \quad y = n(y_{i+1} - y_i)(x - \frac{i}{n}) + y_i;\ y' = n(y_{i+1} - y_i).\ i = 1,2,\ldots,n-2.$

при $\frac{n-1}{n} \le x \le 1; \quad y = -n\,y_{n-1}(x - \frac{n-1}{n}) + y_n;\ y' = -n\,y_{n-1}.$

И $I(y) = \int\limits_0^1 (y^2(x) + (y'(x))^2 + 2y(x))dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{i=\frac{k-1}{n}}^{i=\frac{k}{n}} F\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (n^2 y_1^2 x^2 + 2ny_1 x + n^2 y_1^2)dx +$

$$+\sum_{i=1}^{n-2} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (n^2 (y_{i+1} - y_i)^2 (x - \frac{i}{n})^2 + 2n(y_{i+1} - y_i)(y_i + 1)(x - \frac{i}{n}) + y_i^2 + 2y_i + n^2 (y_{i+1} - y_i)^2)dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1} (n^2 y_{n-1}^2 (x - \frac{n-1}{n})^2 - 2n\,y_{n-1}(y_{n-1} + 1)(x - \frac{n-1}{n}) + 2y_{n-1} + (n^2 + 1)y_{n-1}^2)dx.$$

Приведённые зависимости громоздкие, но простые и читатель может легко убедиться в их справедливости, если подставит сюда $n = 5$ и получит точно такие же выражения, которые приведены выше. После интегрирования , получим

$$I(y) = [n^2 y_1^2 \frac{x^3}{3} + ny_1 x^2 + n^2 y_1^2 x]_0^{\frac{1}{n}} + \sum_{i=1}^{n-2} [n^2 (y_{i+1} - y_i)^2 \frac{(x - \frac{i}{n})^3}{3} + n(y_{n+1} - y_i)(y_i + 1) \times$$

$$\times (x - \frac{i}{n})^2 + (y_i^2 + 2y_i + n^2 (y_{i+1} - y_i)^2 x]_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} + [n^2 y_{n-1}^2 \frac{(x - \frac{n-1}{n})^3}{3} - n\,y_{n-1}(y_{n-1} + 1) \times$$

$$\times (x - \frac{n-1}{n})^2 + (2y_{n-1} + (n^2 + 1)y_{n-1}^2)x]_{\frac{n-1}{n}}^{1} = (n + \frac{1}{3n})y_1^2 + \frac{y_1}{n} + (n + \frac{1}{3n})y_{n-1}^2 + \frac{y_{n-1}}{n} +$$

$+\sum\limits_{i=1}^{n-2} [(y_{i+1} - y_i)^2 (n + \frac{1}{3n}) + y_{i+1}(y_i + 1)\frac{1}{n} + \frac{y_i}{n}]$. Экстремум такого функционала достигается в точке $n-1$-мерного пространства, координаты которого определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений $n-1$ го порядка с $n-1$ неизвестным

$\frac{\partial I}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial y_i} = 0,\ i = 2,3,..n-2.$ И $\frac{\partial I}{\partial y_{n-1}} = 0.$

Полученная система линейных алгебраических уравнений будет выглядеть так

$$4(n+\frac{1}{3n})y_1+(-2n+\frac{1}{3n})y_2=-\frac{2}{n}.$$

$$(-2n+\frac{1}{3n})y_i+4(n+\frac{1}{3n})y_{i+1}+(-2n+\frac{1}{3n})y_{i+2}=-\frac{2}{n},\quad i=1,2,3,...,n-3.$$

$$(-2n+\frac{1}{3n})y_{n-2}+4(n+\frac{1}{3n})y_{n-1}=-\frac{2}{n}.$$

Вы можете сами убедиться в справедливости этих выражений, если подставите сюда значение $n=5$, и получите известный уже Вам результат. Подобная линейная алгебраическая система тоже хорошо нам знакома, для которой в терминах, указанных выше, имеем $N=n-1, M=1, L=1$. Ищем решение такой системы в виде: $y_i=E_i y_{i+1}+F_i$, где согласно (8),(10) и (46) будем иметь :

$$E_i=\frac{-a_{i,i+1}}{a_{i,i}+a_{i,i-1}E_{i-1}};\ F_i=\frac{-E_i}{a_{i,i+1}}(b_i-F_{i-1}a_{i,i-1}),\ i=1,2,..n-2.\ y_{n-1}=\frac{b_{n-1}-F_{n-2}}{a_{n-1,n-1}+a_{n-1,n-2}E_{n-2}}.$$ и окончательно

$$E_i=\frac{-(-6n^2+1)}{4(3n^2+1)+(-6n^2+1)E_{i-1}};\ F_i=\frac{E_i}{(-6n^2+1)}(6+F_{i-1}(-6n^2+1)),i=1,2,..n-2;E_0=F_0=0.$$

$$y_{n-1}=\frac{-6-3n\times F_{n-2}}{4(3n^2+1)+(-6n^2+1)\,E_{n-2}}.$$

Дальше производить вычисления в общем виде, на мой взгляд, не целесообразно. Значительно удобнее на этом этапе вычислений подставить конкретное значение n, и, так как $n=5$ уже было, можно читателю самостоятельно продолжить последующие вычисления для $n=10$. Для этого значения n достаточно ограничиться простейшим калькулятором. Для больших же значений $n=100,1000$ и так далее, следует использовать компьютер, а заодно и проверить себя на предмет составления простейших вычислительных программ на базе уже готового алгоритма. Подытожив то что мы получили, заметим , что приведённый выше алгоритм фактически пригоден для любой задачи с граничными условиями практически для любого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, так как граничные условия всегда можно свести к однородным, отправив неоднородность в правую часть уравнения. Например, пусть мы имеем неоднородные граничные условия $y(0)=a;\ y(1)=b$, где a и $b-$ любые действительные числа. В этом случае замена $z=y+a(x-1)-bx$ приведёт дифференциальное уравнение для $y-$к к дифференциальному уравнению для z, у которого несколько изменится правая часть, а граничные условия будут однородными $z(0)=z(1)=0$. И ещё, возможно несколько философский вопрос:

к какой категории отнести полученное решение? Действительно, с одной стороны –это, вроде бы численное решение. А с другой, решение представлено в виде вполне определённой функции. Правда такая функция выглядит несколько непривычно, но такие функции вполне имеют право на существование. Привычное нам аналитическое решение содержит ряды по элементарным и специальным функциям и затем пользователь с помощью таблиц доводит полученное решение до числа. Причём получающееся решение вычисляется с такой же точностью, с которой составлены таблицы, представленные часто в виде математического обеспечения компьютера. Здесь же, дробя произвольно расчётный интервал, мы можем так же получить решение с любой, наперёд заданной точностью. Не забудем также и то, что решение использует значительно более широкий класс функций, чем решение соответствующего дифференциального уравнения, которое использует в два раза более высокий порядок производной. Правда для этого требуется, как говорится, поставить так называемую обратную задачу вариационного исчисления. Так называется задача построения по данному дифференциальному уравнению функционала $I(y)$, уравнением Эйлера- Лагранжа, для которого оно и будет. В общем случае иногда это довольно сложно, но существует одна теорема, которая для довольно широкого класса уравнений позволяет это сделать. Итак пусть мы имеем уравнение (неважно в обык новенных или частных производных это уравнение), записанное в виде $Au = f$. Здесь $A-$некий линейный оператор. Это новое для нас понятие. В данном случае- это некое действие над функцией u, зависящей от одного или нескольких переменных. Например, в хорошо знакомом нам уравнении $u^{//}(x) - u(x) = f(x)$,таким линейным оператором будет следующее выражение: $\frac{d^2}{dx^2} - E$, где $E-$так называемый единичный или тождественный оператор, то есть $E(u) = u$. Если же функция u зависит от двух переменных $u(x, y)$, то таким оператором будет ,например $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} -$ оператор Лапласа (великий французский математик начала 19 века) и однородное (в правой части стоит ноль) уравнение, которое в операторном виде можно записать так $Au = 0$ или в дифференциальном виде так $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, называется уравнением Лапласа, а неоднородное уравнение $Au = f(x, y) -$ уравнением Пуассона (то же великий французский математик и то же начала 19 века). И ещё может возникнуть и такой вопрос, что означает слово линейный по отношению к оператору. Оператор A называется линейным, если имеет место следующее равенство $A(u + v) = Au + Av$, где u и v любые функции. Чтобы Вы не подумали, что любой оператор является линейным, приведём следующий простой пример. Пусть оператор A означает возведение функции в квадрат, то есть $A(u) = u^2$. И в этом случае $A(u + v) = u^2 + 2uv + v^2$ и это не равно $u^2 + v^2$. Введём такое понятие, как скалярное произведение двух функций. Оно обозначается точно также (напомню Вам), как и скалярное произведение двух векторов (u,v), но в отличие от векторов оно равно $(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ заданы на интервале $a \le x \le b$. Если же u и v – функции двух переменных, заданные в двумерной области S, то соответствующее скалярное произведение двух функций будет иметь вид $(u,v)=\int_s u(x,y)v(x,y)dxdy.$ Аналогично определяется скалярное произведение функций трёх переменных, но интеграл в этом случае берётся не по площади, а по объёму. Затем назовём оператор A симметричным, если $(Au,v)=(u,Av)$, то есть скалярное произведение не изменится, если вначале оператор A применить к функции u и полученную новую функцию Au скалярно умножить на v или применить оператор A к функции v и функцию u скалярно умножить на новую функцию Av. И ещё оператор A называется положительным (иногда говорят положительно определённым), если $(Au,u)\ge 0$ (равенство нулю имеет место только при $u=0$). Так вот при выполнении всех этих условий: линейный оператор A симметричен и положителен, то тогда уравнение $Au=f$ доставляет не просто экстремум, а минимум следующего функционала $I(u)=(Au,u)-2(u,f)$. В качестве примера рассмотрим следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. $Au=-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})+q(x)u=f(x)$ с однородными граничными условиями $u(0)=u(1)=0$ и далее предположим, что $p(x), p^{/}(x), q(x), f(x)$ являются непрерывными на указанном интервале и $p(x)\ge p_0>0,\ q(x)\ge q_0>0$ для каждого $x\in[0,1]$. С учётом всех этих предположений докажем, что данный линейный оператор является симметричным и положительным. Имеем $(Au,v)=-\int_0^1 \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})v(x)dx+\int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx.$ Применим к первому из этих интегралов правило интегрирования по частям, полагая $U(x)=v(x)$ и $\frac{dV(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}).$ Тогда $V(x)=p(x)u^{/}(x)$ и $dU=v^{/}(x)dx,$ а значит $\int_0^1 U(x)dV(x)=U(x)V(x)I_0^1-\int_0^1 V(x)dU(x)$ или $\int_0^1 \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})v(x)dx=v(x)p(x)u^{/}(x)I_0^1-\int_0^1 p(x)u^{/}(x)v^{/}(x)dx$ и так как $v(0)=v(1)=0$, то первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в ноль и $(Au,v)=-\int_0^1 \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})v(x)dx+\int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx=\int_0^1 u^{/}(x)p(x)v^{/}(x)dx+\int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx.$ и снова применим правило интегрирования по частям к первому интегралу, стоящему в правой части этого выражения, полагая $dV=u^{/}(x)dx; U=p(x)v^{/}(x).$ И поэтому $V(x)=u(x);$ $dU=\frac{d}{dx}(p(x)v^{/}(x))dx.$ Тогда, интегрируя по частям, получим, что первый интеграл равен:

$\int_0^1 u'(x)p(x)v'(x)dx = p(x)v'(x)u(x)I_0^1 - \int_0^1 u(x)\frac{d}{dx}(p(x)v'(x))dx$ и так как $u(0)=u(1)=0,$

то первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в ноль и

$(Au,v)=\int_0^1 u(x)(-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dv}{dx})+q(x)v(x))dx=(u,Av),$ что означает, что оператор $A-$ симметричен. Теперь покажем, что он положителен. Имеем (смотри выше)

$(Au,v)=\int_0^1 u'(x)\,p(x)\,v'(x)\,dx+\int_0^1 q(x)\,u(x)\,v(x)dx,$ а теперь здесь положим $v(x)=u(x)$. Тогда

$(Au,u)=\int_0^1 p(x)(u'(x))^2\,dx+\int_0^1 q(x)\,u^2(x)dx \ge p_0\int_0^1 (u'(x))^2\,dx+q_0\int_0^1 u^2(x)dx \ge 0.$ И равенство нулю

имеет место тогда и только тогда, когда $u(x)=0.$ Таким образом мы показали, что уравнение $Au=f$ или $-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})+q(x)u=f(x)$ является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала $I(u)=\int_0^1((-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})+q(x)u(x))u(x)-2f(x)u(x))dx.$ А поскольку экстремум

подобного функционала мы находить уже умеем, то тем самым мы сможем решить практически любое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с однородными граничными условиями. На примере задачи о брахистохроне, мы показали, что возможно получить решение и нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, при условии, если удастся построить соответствующий функционал. Законный вопрос, а как быть с обыкновенными дифференциальными

уравнениями более высокого порядка чем два? Один из возможных ответов такой: надо найти какое-нибудь частное решение этого уравнения и затем понизить порядок исход-

ного уравнения точно также, как мы уже проделывали, переходя от уравнения второго

порядка к уравнению первого порядка. А возможен и более общий метод, связанный с нахождением экстремума функционала, содержащем производные более высокого порядка, чем один. Существует такая теорема, которую в принципе несложно доказать, о том ,что экстремум функционала $I(u)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})dx$ с граничными условиями $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)};\quad y(x_1)=y_1, y'(x_1)=y_1',...,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$ доставляет функция, удовлетворяющая следующему уравнению Эйлера- Лагранжа

$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y^{//}})+......+(-1)^n\frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0.$ Применим эту теорему для нахождения экстремума функционала $I(u)=\int\limits_0^1((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx,$ где $y(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $y(0)=y^{/}(0)=0$ и $y(1)=y^{/}(1)=0.$ Тогда по отношению к данному уравнению $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y^{/}})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y^{//}})=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y^{//}})=-2(y^{//}-y)-2+2(y^{(4)}-y^{//})=0$ или будем иметь следующее линейное обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение четвёртого порядка $y^{(4)}-2y^{//}+y=1$ с указанными выше однородными граничными условиями. Обратите внимание на то, что в дифференциальном уравнении максимальная величина производной равна четырём, то есть искомая неизвестная функция $y(x)$ должна, как минимум, иметь непрерывную четвёртую производную, в то время как в указанном выше функционале достаточно, чтобы эта же функция имела интегрируемую вторую производную. Согласно теории решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений, их общее решение складывается из общего решения однородного уравнения $y^{(4)}-2y^{//}+y=0$ и частного решения неоднородного уравнения. Так вот частное решение исходного неоднородного уравнения найти очень просто- это $y(x)=1.$ В этом Вы сами можете легко убедиться, если подставите это значение $y-$к в исходное уравнение. Теперь будем искать общее решение однородного уравнения. Ищем это решение в виде $y(x)=\exp(kx),$ где $k-$неизвестное нам пока число. Подставляя $y(x)$ в однородное уравнение имеем $(k^4-2k^2+1)\exp(kx)=0$ или, так как $\exp(kx)\neq 0,$ то найдём, что неизвестное нам k удовлетворяет следующему биквадратному уравнению $k^4-2k^2+1=0$, из решения которого следует, что $k^2=1.$ И тогда $k_1=1, k_2=-1, k_3=1, k_4=-1.$ То есть мы имеем два различных корня, каждый из которых имеет кратность два. Отсюда общее решение исходного уравнения можно записать так $y(x)=C_1\exp(x)+C_2\exp(-x)+C_3x\exp(x)+C_4x\exp(-x).$ Можно непосредственно проверить, что каждое из этих четырёх различных (иногда говорят независимых) решений удовлетворяет однородному уравнению. Если же, к примеру, первый из корней будет иметь кратность три, то мы получим три различных решения $\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)$ и так далее. Теперь найдём из граничных условий пока ещё произвольные постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4.$

Итак решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:
$y(x)=C_1\exp(x)+C_2\exp(-x)+C_3x\exp(x)+C_4x\exp(-x)+1,$ а
$y^{/}(x)=C_1\exp(x)-C_2\exp(-x)+C_3(x+1)\exp(x)+C_4(1-x)\exp(-x).$ И тогда постоянные $C_1, C_2\ C_3, C_4$ определяются из решения следующей линейной алгебраической системы четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$C_1+C_2=-1$$
$$C_1\exp(1)+C_2\exp(-1)+C_3\exp(1)+C_4\exp(-1)=-1$$

$$C_1 - C_2 + C_3 + C_4 \qquad = 0$$
$$C_1 \exp(1) - C_2 \exp(-1) + C_3 2\exp(1) \qquad = 0,$$

откуда $C_2 = -1 - C_1$ и $C_4 = -1 - C_3 - 2C_1$. Подставляя эти значения в систему, и, ограничиваясь четырьмя знаками после запятой, будем иметь линейную алгебраическую систему двух уравнений с двумя неизвестными, которую мы с Вами неоднократно уже решали. Заметим, что на этом этапе вычислительного процесса, как мне кажется ,наиболее удобно перейти непосредственно к числам, с тем, чтобы можно было избежать излишне громоздких выражений. Далее имеем:

$1.6146C_1 + 2.3504C_3 = -0.2642$

$3.0862C_1 + 5.4366C_3 = -0.3679$, откуда $C_1 = -0.3750;\ C_3 = 0.1452.$ И затем

$C_2 = -0.6250;\ C_4 = -0.3952.$ Итак, окончательно

$$y(x) = -0.375\exp(x) - 0.625\exp(-x) + 0.1452\,x\exp(x) - 0.3952\,x\exp(-x) + 1.$$

Я предоставляю читателю возможность самостоятельно проверить, что такая функция удовлетворяет однородным граничным условиям. Далее рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала $I(u) = \int\limits_0^1 ((y^{//}(x) - y(x))^2 - 2y(x))dx$, где $y(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $y(0) = y^{/}(0) = 0$ и $y(1) = y^{/}(1) = 0.$ Поступим точно также, как и выше, когда мы исследовали функционал, экстремум которого приводит к дифференциальному уравнению второго порядка. Разделим интервал [0,1] на десять частей и обозначим $y(0) = y_0 = 0;\ y(0.i) = y_i$, где $i = 1,2,...,9$ и $y(1.0) = y_{10} = 0.$ Рассмотрим вначале первый участок дробления $0 \le x \le 0.1$. Ищем функцию $y(x)$ на этом участке в виде $y(x) = A_1x^2 + B_1x + C_1$, где A_1, B_1, C_1 пока неизвестные нам вещественные числа. И вообще на всех десяти участках дробления $(i-1)\times 0.1 \le x \le 0.1i,\ i = 1,2,...,10$ функция $y(x)$ будет иметь вид $y(x) = A_ix^2 + B_ix + C_i$ $, i = 1,2,...,10.$ Здесь в отличие от предыдущего случая, на каждом участке дробления мы ищем $y(x)$ в виде квадратичной зависимости, так как в функционале под знаком интеграла стоит вторая производная по координате x. Заметим, что длина участков может быть разной по длине. Мы рассматриваем простейший случай, когда они равны. Итак на первом участке при $0 \le x \le 0.1, y(0) = 0$ и поэтому $C_1 = 0.$ А так как $y^{/}(x)$ на этом участке равна $y^{/}(x) = 2A_1x + B_1$ и $y^{/}(0) = 0,$ то $B_1 = 0.$ И поэтому на этом участке имеем $y(x) = A_1x^2$ и ввиду того что $y_1 = y(0.1) = 0.01A_1$, то $A_1 = 100y_1$ и в итоге на первом участке $y(x) = 100y_1x^2$. И на этом же участке $y^{/}(x) = 200y_1x;\ y^{//}(x) = 200y_1$. Теперь перейдём ко второму участку $0.1 \le x \le 0.2$. Там $y(x) = A_2x^2 + B_2x + C_2$ и эта кривая должна проходить через три точки $(0,0);\ (0.1, y_1);(0.2, y_2)$. Вспомните, именно так мы обозначали координаты точек на плоскости. Тогда $C_2 = 0,$ а A_2 и B_2 определяется из решения следующей линейной алгебраической системы двух уравнений с двумя неизвестными $0.01A_2 + 0.1B_2 = y_1$;

$0.04A_2 + 0.2B_2 = y_2$. Откуда следует, что на этом участке

$y(x) = 50(y_2 - 2y_1)x^2 + 5(-y_2 + 4y_1)x$ и $y^{//} = 100(y_2 - 2y_1)$. Теперь Вы можете самостоятельно проверить, что эта кривая проходит через три указанные точки. Аналогично рассуждая, найдём, что через следующие три точки $(0.1, y_1); (0.2, y_2); (0.3, y_3)$ проходит кривая $y(x) = 50(y_3 - 2y_2 + y_1)x^2 + 5(-3y_3 + 8y_2 - 5y_1)x + y_3 - 3y_2 + 3y_1$ и $y^{//}(x) = 100(y_3 - 2y_2 + y_1)$. Так будет выглядеть искомая кривая и и её вторая производная на участке $0.2 \le x \le 0.3$

На участке при $0.3 \le x \le 0.4$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_4 - 2y_3 + y_2)$ и

$y(x) = 50(y_4 - 2y_3 + y_2)x^2 + 5(-5y_4 + 12y_3 - 7y_2)x + 3y_4 - 8y_3 + 6y_2$.

На участке при $0.4 \le x \le 0.5$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_5 - 2y_4 + y_3)$ и

$y(x) = 50(y_5 - 2y_4 + y_3)x^2 + 5(-7y_5 + 16y_4 - 9y_3)x + 6y_5 - 15y_4 + 10y_3$.

На участке при $0.5 \le x \le 0.6$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_6 - 2y_5 + y_4)$ и

$y(x) = 50(y_6 - 2y_5 + y_4)x^2 + 5(-9y_6 + 20y_5 - 11y_4)x + 10y_6 - 24y_5 + 15y_4$.

На участке при $0.6 \le x \le 0.7$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_7 - 2y_6 + y_5)$ и

$y(x) = 50(y_7 - 2y_6 + y_5)x^2 + 5(-11y_7 + 24y_6 - 13y_5)x + 15y_7 - 35y_6 + 21y_5$.

На участке при $0.7 \le x \le 0.8$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_8 - 2y_7 + y_6)$ и

$y(x) = 50(y_8 - 2y_7 + y_6)x^2 + 5(-13y_8 + 28y_7 - 15y_6)x + 21y_8 - 48y_7 + 28y_6$.

На участке при $0.8 \le x \le 0.9$ имеем $y^{//}(x) = 100(y_9 - 2y_8 + y_7)$ и

$y(x) = 50(y_9 - 2y_8 + y_7)x^2 + 5(-15y_9 + 32y_8 - 17y_7)x + 28y_9 - 63y_8 + 36y_7$.

На участке при $0.9 \le x \le 1.0$ имеем $y^{//}(x) = 200y_9$ и $y(x) = 100y_9(x-1)^2$.

Как Вы видите, выражение для $y(x)$ на этом участке отличается от соответствующих выражений на предыдущих участках, кроме первого участка. Эти два участка непосредственно примыкают к границам исследуемого интервала и на них должны выполняться однородные краевые условия $y(0) = y^{/}(0) = 0$ на первом расчётном участке и $y(1) = y^{/}(1) = 0$ на последнем участке. Этот факт и отражён в представленных выше соотношениях. Приведённые здесь выражения можно обобщить на произвольное число n участков, и тогда на участках $0.1k \le x \le 0.1(k+1), k = 1,2,..,n-2$, имеем $y(0) = y^{/}(0) = 0$ на первом расчётном участке и $y(1) = y^{/}(1) = 0$ на последнем участке. Этот факт и отражён в представленных выше соотношениях. Приведённые здесь выражения можно обобщить на произвольное число n участков , и тогда на участках

$0.1k \le x \le 0.1(k+1), k = 1,2,..,n-2$, имеем

$$y(x) = \frac{n^2}{2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})x^2 + \frac{n}{2}(-(2k-1)y_{k+1} + 4ky_k - (2k+1)y_{k-1})x +$$

$$+\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1} - (k^2-1)y_k + \frac{k}{2}(k+1)y_{k-1}$$ и $y^{//}(x) = n^2(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$. На участках

$0 \le x \le \frac{1}{n}$; $y(x) = n^2 y_1 x^2$; $y^{//}(x) = 2n^2 y_1$ и $\frac{n-1}{n} \le x \le 1.0$; $y(x) = n^2 y_{n-1}(x-1)^2$; $y^{//}(x) = 2n^2 y_{n-1}$. Вы можете легко проверить правильность эти формул, если подставите в них $n = 10$, и при этом не забудьте, что $y_0 = 0$. Полученные соотношения сопоставьте с предыдущими выражениями. А теперь вернёмся к нахождению экстремума функционала

$I(u)=\int\limits_0^1 F(y(x),y^{//}(x))dx=\int\limits_0^1((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=\sum\limits_{k=0}^{9}\int\limits_{0.1k}^{0.1(k+1)}Fdx$. Заметим, что последующие выражения будут не сложные, но довольно громоздкие. Наименее громоздкими будут зависимости на первом и на последнем участках. Поэтому начнём с первого участка

$$\int\limits_0^{0.1}((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=$$

$$=\int\limits_0^{0.1}((200y_1-100y_1x^2)^2-200y_1x^2)dx=100y_1\int\limits_0^{0.1}(100y_1(4-4x^2+x^4)-2x^2)dx=$$

$$=100y_1(400y_1x-400y_1\frac{x^3}{3}+100y_1\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3})_0^{0.1}=y_1^2(4000-\frac{40}{3}+0.02)-\frac{0.2}{3}y_1=$$

$=3986.6867y_1^2-0.0667y_1$. Напомню, что мы проводим вычисления с точностью до четвёртого знака после запятой, так как таблицы экспонент и тригонометрических функций в простейших стандартных справочниках приведены с такой же точностью. Если же у Вас есть калькулятор, который позволяет вычислять стандартные функции с большей точностью, то Вы проделаете эти же вычисления с той самой точностью. Если же единичный участок разделён на n частей, то на начальном участке будем иметь

$$I_0(y)=\int\limits_0^{\frac{1}{n}}((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{n}}(n^4y_1^2(2-x^2)^2-2n^2y_1x^2)dx=n^2y_1\int\limits_0^{\frac{1}{n}}(n^2y_1(4-4x^2+x^4)-2x^2)dx=n^2y_1(4n^2y_1x-$$

$-4n^2y_1\frac{x^3}{3}+n^2y_1\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3})_0^{\frac{1}{n}}=y_1^2(4n^3-\frac{4}{3}n+\frac{1}{5n})-\frac{2}{3n}y_1$. Положив здесь $n=10$, Вы получите предыдущее выражение. На последнем участке

$$\int_{0.9}^{1.0}((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=\int_{0.9}^{1.0}((200y_9-100y_9(x-1)^2)^2-200y_9(x-1)^2)dx=$$

$$=100y_9\int_{0.9}^{1.0}(100y_9(4-4(x-1)^2+(x-1)^4)-2(x-1)^2)dx=100y_9(400y_9x-400y_9\frac{(x-1)^3}{3}+$$

$$+100y_9\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{2}{3}(x-1)^3)_{0.9}^{1.0}=y_9^2(4000-\frac{40}{3}+0.02)-\frac{0.2}{3}y_9=3986.6867y_9^2-0.0667y_9.$$ Если же единичный участок разделён на n частей, то на последнем участке будем иметь

$$\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}(y_{n-1}(2n^2-n^2(x-1)^2)^2-2n^2y_{n-1}(x-1)^2)dx=$$

$$=\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}(n^4y_{n-1}^2(2-(x-1)^2)^2-2n^2y_{n-1}(x-1)^2)dx=n^2y_{n-1}\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}(n^2y_{n-1}(4-4(x-1)^2+(x-1)^4)-2(x-1)^2)dx=$$

$$=n^2y_{n-1}(4n^2y_{n-1}x-4n^2y_{n-1}\frac{(x-1)^3}{3}+n^2y_{n-1}\frac{(x-1)^5}{5}-2\frac{(x-1)^3}{3})_{\frac{n-1}{n}}^{1}=y_{n-1}^2(4n^3-\frac{4}{3}n+\frac{1}{5n})-\frac{2}{3n}y_{n-1}.$$ Положив здесь $n=10$, Вы получите предыдущее выражение. Наверное, стоит отдельно рассмотреть второй участок

$$\int_{0.1}^{0.2}((y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x))dx=\int_{0.1}^{0.2}(2500x^4(y_2-2y_1)^2+500x^3(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)+$$

$$+x^2(-10^4(y_2-2y_1)^2+25(-y_2+4y_1)^2-10^2(y_2-2y_1))-x(10^3(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)+$$

$$+10(-y_2+4y_1))+10^4(y_2-2y_1)^2)dx=$$

$$=(500x^5(y_2-2y_1)^2+125x^4(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)+\frac{x^3}{3}(-10^4(y_2-2y_1)^2+25(-y_2+4y_1)^2-$$

$$-10^2(y_2-2y_1))-x^2(500(y_2-2y_1)+5(-y_2+4y_1))+10^4(y_2-2y_1)^2x)_{0.1}^{0.2}=$$

$$=5\times10^{-3}(y_2-2y_1)^2+125\times10^{-4}(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)+\frac{1}{3}(-10(y_2-2y_1)^2+25\times10^{-3}\times$$

$$\times(-y_2+4y_1)^2-0.1(y_2-2y_1))-5(y_2-2y_1)-0.05(-y_2+4y_1)+10^3(y_2-2y_1)^2=$$

$$=996.6717(y_2-2y_1)^2+0.0083(-y_2+4y_1)^2-4.9875(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)-0.0333\times$$

$$\times(y_2-2y_1)-0.05(-y_2+4y_1)=1001.6675y_2^2+4026.7196y_1^2-4016.6782y_1y_2+0.0167y_2--0.1334y_1.$$ А теперь приготовьтесь к самым громоздким выражениям. Рассмотрим подынтегральную функцию на участках $0.1k\le x\le 0.1(k+1),\ k=1,2,..,n-2$.

$$(y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x)=\frac{n^4}{4}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2(x^4-4x^2+4)+\frac{n^2}{4}(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-$$

$$-(2k+1)y_{k-1})^2x^2+(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})^2-\frac{n^3}{2}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})\times$$

$$\times(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})(2x-x^3)+n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+$$

$$+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})(2-x^2)-n(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+$$

$$+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})x-n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k+1})x^2-n(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})x-$$
$$-k(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-k(k+1)y_k=\frac{n^4}{4}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2x^4+\frac{n^3}{2}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})\times$$
$$\times(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})x^3+(-n^4(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2+\frac{n^2}{4}(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-$$
$$-(2k+1)y_{k-1})^2-n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})-n^2(y_{k+1}-$$
$$-2y_k+y_{k-1}))x^2+(-n^3(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})-n(-(2k-1)y_{k+1}+$$
$$+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})-n(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-$$
$$-(2k+1)y_{k-1}))x+n^4(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2+(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})^2+$$
$$+n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-k(k-1)y_{k+1}+2(k^2-1)y_k-k(k+1)y_{k-1})-k(k-1)y_{k+1}+2(k^2-1)y_k-$$

$-k(k+1)y_k$. Как видите, выражение получилось весьма громоздким и вероятность того, чтобы пропустить или добавить здесь какой-либо символ весьма велика. И поэтому не случайно один из известных российских математиков первой половины 20 века Р.О. Кузьмин говорил, что самое распространённое действие в математике это ошибка. Поэтому, чтобы по- возможности избежать ошибок, сверяем подобное выражение с более простым, полученным ранее и желательно другим способом. Если Вы подставите сюда в правую часть после второго равенства $y_0=0, n=10$ и $k=1$, то получите

$$2500(y_2-2y_1)^2x^4+500(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)x^3+(-10^4\times$$
$$\times(y_2-2y_1)^2+25(-y_2+4y_1)^2-10^2(y_2-2y_1))x^2+(-10^3(y_2-2y_1)(-y_2+4y_1)-10\times$$

$\times(-y_2+4y_1))x+10^4(y_2-2y_1)^2$, что полностью совпадает с подынтегральным выражением, записанным выше. Можете это ещё раз проделать самостоятельно. Но этой проверки будет недостаточно, так как на первом участке мы имеем укороченное выражение. Надо проверить ещё один участок, например, второй. Поэтому подставим в правую часть после второго равенства $n=10, k=2.$ В результате имеем

$$2500(y_3-2y_2+y_1)^2x^4+500(y_3-2y_2+y_1)(-3y_3+8y_2-5y_1)x^3+(-10^4\times$$
$$\times(y_3-2y_2+y_1)^2+25(-3y_3+8y_2-5y_1)^2-10^2(y_3-2y_2+y_1)(-y_3+3y_2-3y_1)-10^2\times$$
$$\times(y_3-2y_2+y_1))x^2+(-10^3(y_3-2y_2+y_1)(-3y_3+8y_2-5y_1)-10(-3y_3+8y_2-5y_1)\times$$
$$\times(-y_3+3y_2-3y_1)-10(-3y_3+8y_2-5y_1))x+10^4(y_3-2y_2+y_1)^2+(-y_3+3y_2-3y_1)^2+$$

$+10^2(y_3-2y_2+y_1)(-2y_3+6y_2-6y_1)-2y_3+6y_2-6y_1$. А теперь попробуйте получить точно такое же выражение, зная чему равны на втором участке функция и её вторая производная. Теперь надо проинтегрировать полученное выражение в пределах $\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}$, где $k=1,2,...,n-2$. Это не сложно проделать, так как подынтегральная функция содержит только степени от x. Например, $\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n^4}{4}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2 x^4 dx = \frac{n^4}{4}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2 \frac{x^5}{5} I_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} =$

$= \frac{1}{20n}(y_{k+1}^2+4y_k^2+y_{k-1}^2-4y_{k+1}y_k+2y_{k+1}y_{k-1}-4y_k y_{k-1})$. И таким же образом

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n^3}{2}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})x^3 = \frac{1}{8n}(-(2k-1)y_{k+1}^2+$$

$$+(8k-2)y_k y_{k+1}-4ky_{k+1}y_{k-1}+(8k+2)y_{k-1}y_k-8ky_k^2-(2k+1)y_{k-1}^2).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n^4(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})^2 x^2 dx = -\frac{n}{3}(y_{k+1}^2+4y_k^2+y_{k-1}^2-4y_{k+1}y_k+2y_{k+1}y_{k-1}-4y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n^2}{4}(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})^2 x^2 dx = \frac{1}{12n}((2k-1)^2 y_{k+1}^2+16k^2 y_k^2+$$

$$+(2k+1)^2 y_{k-1}^2-8k(2k-1)y_{k+1}y_k+2(4k^2-1)y_{k+1}y_{k-1}-8k(2k+1)y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})x^2 dx = -\frac{1}{3n}\times$$

$$(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}^2-2(k^2-1)y_k^2-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1}^2+(2k^2-k-1)y_{k+1}y_k-k^2 y_{k+1}y_{k-1}+\ (2k^2+k-1)y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})x^2 dx = -\frac{1}{3n}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n^3(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})xdx = -\frac{n}{2}(-(2k-1)y_{k+1}^2-8ky_k^2-$$

$$-(2k+1)y_{k-1}^2-4ky_{k+1}y_{k-1}+(8k-2)y_{k+1}y_k+(8k+2)y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})(-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}+(k^2-1)y_k-\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})xdx =$$

$$= -\frac{1}{2n}((2k-1)\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1}^2+4k(k^2-1)y_k^2+(2k+1)\frac{k}{2}(k+1)y_{k-1}^2-(k-1)(4k^2+k-1)y_{k+1}y_k-$$

$$-(k+1)(4k^2-k-1)y_k y_{k-1}+\frac{k}{2}(4k^2-2)y_{k+1}y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} -n(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1})xdx = -\frac{1}{2n}(-(2k-1)y_{k+1}+4ky_k-(2k+1)y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^4 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 dx = n^3 (y_{k+1}^2 + 4y_k^2 + y_{k-1}^2 - 4y_k y_{k+1} + 2y_{k+1} y_{k-1} - 4y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (-\frac{k}{2}(k-1)y_{k+1} + (k^2-1)y_k - \frac{k}{2}(k+1)y_{k-1})^2 dx = \frac{1}{n}(\frac{k^2}{4}(k-1)^2 y_{k+1}^2 + (k^2-1)^2 y_k^2 +$$

$$+\frac{k^2}{4}(k+1)^2 y_{k-1}^2 - k(k-1)(k^2-1)y_{k+1}y_k + \frac{k^2}{2}(k^2-1)y_{k+1}y_{k-1} - k(k+1)(k^2-1)y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})(-k(k-1)y_{k+1} + 2(k^2-1)y_k - k(k+1)y_{k-1})dx = n(-k(k-1)y_{k+1}^2 -$$

$$-4y_k^2(k^2-1) - k(k+1)y_{k-1}^2 + (4k^2-2k-2)y_{k+1}y_k - 2k^2 y_{k+1}y_{k-1} + (4k^2+2k-2)y_k y_{k-1}).$$

$$\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (-k(k-1)y_{k+1} + 2(k^2-1)y_k - k(k+1)y_{k-1})dx = \frac{1}{n}(-k(k-1)y_{k+1} + 2(k^2-1)y_k - k(k+1)y_{k-1}).$$ Собирая сомножители при $y_{k+1}^2, y_k^2, y_{k-1}^2, y_{k+1}y_k, y_{k+1}y_{k-1}, y_k y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k-1}$, имеем

$$I_k(y) = \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F dx = y_{k+1}^2 (\frac{30k^4 - 120k^3 + 180k^2 - 120k + 31}{120n} + \frac{n(-6k^2 + 12k - 5)}{6} + n^3) + y_k^2 \times$$

$$\times(\frac{15k^4 - 30k^3 + 15k + 8}{15n} + \frac{4n}{3}(-3k^2 + 3k + 2) + 4n^3) + y_{k-1}^2(\frac{30k^4+1}{120n} + \frac{n}{6}(-6k^2+1) +$$

$$+n^3) + y_{k+1}y_k(\frac{-60k^4 + 180k^3 - 150k^2 + 23}{60n} + \frac{n}{3}(12k^2 - 18k + 1) - 4n^3) +$$

$$+ y_{k+1}y_{k-1}(\frac{1}{30n}(15k^4 - 30k^3 + 15k^2 - 2) + \frac{2n}{3}(-3k^2 + 3k - 1) + 2n^3) + y_k y_{k-1}(\frac{1}{60n}\times$$

$$\times(-60k^4 + 60k^3 + 30k^2 - 7) + \frac{n}{3}(12k^2 - 6k - 5) - 4n^3) + \frac{y_{k+1}}{6n}(-6k^2 + 12k - 5) +$$

$+\dfrac{2y_k}{3n}(3k^2 - 3k - 2) + \dfrac{y_{k-1}}{6n}(-6k^2+1)$, где $k = 1,2,...,(n-2)$; $y_0 = 0$. Для проверки правильности полученных выражений, подставим $k = 1$. Тогда получим

$$I_1(y) = y_2^2(\frac{1}{120n} + \frac{n}{6} + n^3) + y_1^2(\frac{8}{15n} + \frac{8n}{3} + 4n^3) + y_2 y_1(-\frac{7}{60n} - \frac{5n}{3} - 4n^3) + \frac{y_2}{6n} - \frac{4}{3n}y_1.$$ А, если здесь положим $n = 10$, то найдём уже известные нам зависимости. Мне могут возразить, что проверка полученных соотношений при $k = 1$ не показательна, так как многие слагаемые, правильность которых желательно проверить, при таком k обращаются в ноль. Это сомнение справедливо. Напомню Вам, что на втором участке

$$y(x) = \frac{n^2}{2}(y_3 - 2y_2 + y_1)x^2 + \frac{n}{2}(-3y_3 + 8y_2 - 5y_1)x + y_3 - 3y_2 + 3y_1$$ и $$y''(x) = n^2(y_3 - 2y_2 + y_1).$$

Затем составим выражение $(y^{//}(x)-y(x))^2-2y(x)$ и далее проинтегрируем его в интервале $\frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}$. Мы это с Вами уже делали для каждого из участков и поэтому я предлагаю Вам проделать данный конкретный путь самостоятельно. В результате Вы получите

$$y_3^2(\frac{31}{120n}-\frac{5n}{6}+n^3)+y_2^2(\frac{38}{15n}-\frac{16n}{3}+4n^3)+y_1^2(\frac{481}{120n}-\frac{23n}{6}+n^3)+y_3y_2\times(\frac{-97}{60n}+$$

$+\frac{13n}{3}-4n^3)+y_3y_1(\frac{58}{30n}-\frac{14n}{3}+2n^3)+y_2y_1(\frac{-367}{60n}+\frac{31n}{3}-4n^3)-\frac{5y_3}{6n}+\frac{8y_2}{3n}-\frac{23y_1}{6n}$. Точно такой же результат Вы получите, если подставите $k=2$ в выражение для $I_k(y)$. И на всех участках $I(y)=y_1^2(4n^3-\frac{4}{3}n+\frac{1}{5n})-\frac{2}{3n}y_1+\sum_{k=1}^{n-2}I_k(y)+\ y_{n-1}^2(4n^3-\frac{4}{3}n+\frac{1}{5n})-\frac{2}{3n}y_{n-1}$. В дальнейшем, как мне кажется, следует перейти к конкретным числам с тем, чтобы избежать излишне громоздких построений. Итак пусть $n=10$ и тогда $I_0(y)=3986.6867y_1^2-0.0667y_1$.

$I_1(y)=1001.6675y_2^2+4026.72y_1^2-4016.6784y_2y_1+0.0167y_2-0.1333y_1$.

$I_2(y)=991.6925y_3^2+3946.92y_2^2+962.0675y_1^2-3956.8284y_3y_2+1953.5266y_3y_1-$
$-3897.2784y_2y_1-0.0833y_3+0.2667y_2-0.3833y_1$.

$I_3(y)=962.0675y_4^2+3789.72y_3^2+918.6925y_2^2-3818.8784y_4y_3+1875.1266y_4y_2-$
$-3721.6284y_3y_2-0.3833y_4+1.0677y_3-0.8833y_2$.

$I_4(y)=913.6925y_5^2+3559.92y_4^2+848.0675y_3^2-3607.0284y_5y_4+1760.5266y_5y_3-$
$-3475.0784y_4y_3-0.8833y_5+2.2667y_4-1.5833y_3$.

$I_5(y)=847.5675y_6^2+3264.72y_5^2+767.2925y_4^2-3327.8784y_6y_5+1613.3266y_6y_4-$
$-3165.4284y_5y_4-1.5833y_6+3.8667y_5-2.4833y_4$.

$I_6(y)=767.2925y_7^2+2913.72y_6^2+674.0675y_5^2-2990.4284y_7y_6+1438.3266y_7y_5-$
$-2802.8783y_6y_5-2.4833y_7+5.8667y_6-3.5833y_5$.

$I_7(y)=674.0675y_8^2+2518.92y_7^2+571.6925y_6^2-2606.0833y_8y_7+1241.5266y_8y_6-$
$-2400.0283y_7y_6-3.5833y_8+8.2667y_7-4.8833y_6$.

$I_8(y)=571.6925y_9^2+2094.72y_8^2+464.0675y_7^2-2188.6283y_9y_8+1030.1267y_9y_7-$
$-1971.8834y_8y_7-4.8833y_9+11.0667y_8-6.3833y_7$. $I_9(y)=3986.6867y_9^2-0.0667y_8$. И далее суммарный функционал $I(y)=\sum_{k=0}^{9}I_k(y)$ будет зависеть от параметров $y_1,y_2,...,y_9$ и необходимое условие экстремума этого функционала составит, как мы уже знаем, девять следующих равенств $\frac{\partial I}{\partial y_k}=0,$ где $k=1,2,...,9.$ Но мы поступим по другому. Мы не будем суммировать все функционалы $I_k(y)$, а заметим, что параметр y_1 входит только в три функционала $I_0(y),I_1(y),I_2(y)$ и тогда получим $\frac{\partial I_0}{\partial y_1}=7973.3734y_1-0.0667=0.$

$\frac{\partial I_1}{\partial y_1}=8053.44y_1-4016.6784y_2-0.1333=0.$ $\frac{\partial I_2}{\partial y_1}=1924.135y_1+1953.5266y_3-$

$-3897.2784y_2-0.3833=0.$ А теперь все эти три выражения просуммируем. В результате получим с соответствующими округлениями первую строчку приведённую ниже матрицу жёсткости и правую часть линейной системы алгебраических уравнений девятого порядка с девятью неизвестными. Может быть излишне добавлять, что остальные строчки этой матрицы получены аналогично.

$$17951y_1-7914y_2+1954y_3=0.5833$$
$$-7914y_1+11735y_2-7678y_3+1875y_4=0.6$$
$$1954y_1-7678y_2+11259y_3-7294y_4+1761y_5=0.6$$
$$1875y_2-7294y_3+10579y_4-6772y_5+1613y_6=0.6$$
$$1761y_3-6772y_4+9705y_5-6131y_6+1438y_7=0.6$$
$$1613y_4-6131y_5+8666y_6-5390y_7+1242y_8=0.6$$
$$1438y_5-5390y_6+7501y_7-4578y_8+1030y_9=0.6$$
$$1242y_6-4578y_7+5536y_8-2189y_9=-7.4$$
$$1030y_7-2189y_8+9117y_9=4.9$$

Полученная матрица симметрична относительно главной диагонали и кроме того она имеет две полосы выше главной диагонали и ввиду симметрии две полосы ниже этой же диагонали. И поэтому мы можем воспользоваться тем же самым алгоритмом при решении подобных систем, которые использовали выше. Итак для такого вида матрицы имеем $N=9, M=2, L=2.$ Согласно (3) ищем решение в виде $y_i=E_iy_{i+1}+F_i$, где, следуя (8) имеем $E_{i+1}=\dfrac{-a_{i,i+2}}{E_i(a_{i,i}+a_{i,i-1}E_{i-1}+a_{i,i-2}E_{i-1}E_{i-2})+a_{i,i+1}}$, где $i=1,2,...,7.$ Относительно коэффициентов $F_i, i=1,2,..,7$ смотри ниже.

При $i=1$ имеем $E_2=\dfrac{-a_{1,3}}{E_1a_{1,1}+a_{1,2}}=\dfrac{-1954}{17951E_1-7914}.$

При $i=2$ имеем $E_3=\dfrac{-a_{2,4}}{E_2(a_{2,2}+a_{2,1}E_1)+a_{2,3}}=\dfrac{-1875}{E_2(11735-7914E_1)-7678}.$

$$i=3\ E_4=\frac{-a_{3,5}}{E_3(a_{3,3}+a_{3,2}E_2+a_{3,1}E_2E_1)+a_{3,4}}=\frac{-1761}{E_3(11259-7678E_2+1954E_2E_1)-7294}.$$

$$i=4\ E_5=\frac{-a_{4,6}}{E_4(a_{4,4}+a_{4,3}E_3+a_{4,2}E_3E_2)+a_{4,5}}=\frac{-1613}{E_4(10579-7294E_3+1875E_3E_2)-6772}.$$

$$i=5\ E_6=\frac{-a_{5,7}}{E_5(a_{5,5}+a_{5,4}E_4+a_{5,3}E_4E_3)+a_{5,6}}=\frac{-1438}{E_5(9705-6772E_4+1761E_4E_3)-6131}.$$

$$i=6\ E_7=\frac{-a_{6,8}}{E_6(a_{6,6}+a_{6,5}E_5+a_{6,4}E_5E_4)+a_{6,7}}=\frac{-1242}{E_6(8666-6131E_5+1613E_5E_4)-5390}.$$

$$i=7\ E_8=\frac{-a_{7,9}}{E_7(a_{7,7}+a_{7,6}E_6+a_{7,5}E_6E_5)+a_{7,8}}=\frac{-1030}{E_7(7501-5390E_6+1438E_6E_5)-4578}.$$

Согласно (19), существует ещё одно выражение для E_8. Именно одно, потому что в нашем случае $M = 2$. $E_8 = \dfrac{-a_{8,9}}{a_{8,8} + a_{8,7}E_7 + a_{8,6}E_7E_6} = \dfrac{2.189}{5.536 - 4.578E_7 + 1.242E_7E_6}$. Здесь мы разделили числитель и знаменатель последнего выражения на 1000, так как обычный калькулятор с такими большими числами не оперирует. А большинство читателей, которые захотят повторить приведённые вычисления, пользуются именно таким калькулятором. И далее, приравнивая два соотношения для E_8, получаем

$$\frac{2.189}{5.536 - 4.578E_7 + 1.242E_7E_6} = \frac{-1.030}{-4.578 + 7.501E_7 - 5.39E_7E_6 + 1.438E_7E_6E_5},$$

$E_7 = \dfrac{4.320}{11.704 - 10.519E_6 + 3.148E_6E_5}$ и, сравнивая с другим выражением для E_7, имеем

$$\frac{4.320}{11.704 - 10.519E_6 + 3.148E_6E_5} = \frac{-1.242}{-5.39 + 8.666E_6 - 6.131E_6E_5 + 1.613E_6E_5E_4},$$

$E_6 = \dfrac{8.749}{24.372 - 22.576E_5 + 6.968E_5E_4}$ и, сравнивая с другим выражением для E_6, имеем

$$\frac{8.749}{24.372 - 22.576E_5 + 6.968E_5E_4} = \frac{-1.438}{-6.131 + 9.705E_5 - 6.772E_5E_4 + 1.761E_5E_4E_3},$$

$E_5 = \dfrac{18.594}{52.445 - 49.228E_4 + 15.407E_4E_3}$ и, сравнивая с другим выражением для E_5, имеем

$$\frac{18.594}{52.445 - 49.228E_4 + 15.407E_4E_3} = \frac{-1.613}{-6.772 + 10.579E_4 - 7.294E_4E_3 + 1.875E_4E_3E_2},$$

$E_4 = \dfrac{41.325}{117.301 - 110.774E_3 + 34.864E_3E_2}$ и, сравнивая с другим выражением для E_4,

$$\frac{41.325}{117.301 - 110.774E_3 + 34.864E_3E_2} = \frac{-1.761}{-7.294 + 11.259E_3 - 7.678E_3E_2 + 1.954E_3E_2E_1},$$

$E_3 = \dfrac{94.858}{270.205 - 255.897E_2 + 80.749E_2E_1}$ и, сравнивая с другим выражением для E_3, имеем

$$\frac{94.858}{270.205 - 255.897E_2 + 80.749E_2E_1} = \frac{-1.875}{-7.678 + 11.735E_2 - 7.914E_2E_1}, \quad E_2 = \frac{221.686}{633.352 - 599.302E_1}$$ и,

сравнивая с другим выражением для E_2, получим $\dfrac{221.686}{633.352 - 599.302E_1} = \dfrac{-1.954}{-7.914 + 17.951E_1}$, откуда окончательно $E_1 = 0.184$. И далее вычислим все остальные $E_i, i = 2,3,...,8$. Причём, как указано в статье, для вычисления этих E_i надо из двух различных формул выбирать ту из них, которая содержит наименьшее число предыдущих значений E_i. Например, выше приведены две различные формулы для вычисления коэффициента E_4

$E_4 = \dfrac{41.325}{117.301 - 110.774E_3 + 34.864E_3E_2}, E_4 = \dfrac{-1.761}{-7.294 + 11.259E_3 - 7.678E_3E_2 + 1.954E_3E_2E_1}$. Первая из них зависит от двух значений E_i, E_3 и E_2, а вторая формула зависит от трёх значений E_i, E_3, E_2, E_1. Поэтому следует выбирать именно первую формулу. Законный вопрос, а что будет, если выберем вторую формулу? Ответ такой: для нашей конкретной системы девяти уравнений с девятью неизвестными мы не заметим разницы, а с увеличением порядка системы до 100 и более погрешности вычисления будут такими, что использовать полученное решение не представляется возможным. С учётом сказанного, найдём: $E_2 = 0.4238, E_3 = 0.5645,\ \ E_4 = 0.6548, E_5 = 0.7177, E_6 = 0.7645, E_7 = 0.8016, E_8 = 0.8331$. Тем самым мы закончили вычисление, так называемых, прогоночных коэффициентов $E_i, i = 1,2,..,8$. А теперь приступим к вычислению прогоночных коэффициентов $F_i, i = 1,2,..,8$. Согласно (10), имеем $F_{i+1} = \dfrac{-E_{i+1}}{a_{i,i+2}}(b_i - F_i(a_{i,i} + a_{i,i-1}E_{i-1} + a_{i,i-2}E_{i-1}E_{i-2}) -$

$- F_{i-1}(a_{i,i-1} + a_{i,i-2}E_{i-2}) - F_{i-2}a_{i,i-2}), i = 1,2...,7$. Поэтому при

$$i = 1;\ F_2 = -\frac{E_2}{a_{1,3}}(b_1 - F_1 a_{1,1}) = \frac{-0.4238}{1954}(0.5833 - 17951 F_1) = -0.0001 + 3.8934 F_1.$$

$$i = 2;\ F_3 = -\frac{E_3}{a_{2,4}}(b_2 - F_2(a_{2,2} + a_{2,1}E_1) - F_1 a_{2,1}) = \frac{-0.5645}{1875}(0.6 - F_2(11735 - 0.184\times 7914) +$$

$$+ F_1 \times 7914) = -0.0002 + 3.0947 F_2 - 2.3826 F_1.$$

$$i = 3;\ F_4 = -\frac{E_4}{a_{3,5}}(b_3 - F_3(a_{3,3} + E_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1)) - F_2(a_{3,2} + a_{3,1}E_1) - F_1 a_{3,1}) = \frac{-0.6548}{1761}\times(0.6 -$$

$$- F_3(11259 + 0.4238(-7678 + 0.184\times 1954)) - F_2(-7678 + 0.184\times 1954) - 1954 F_1 = -0.0002 +$$

$$+ 3.0329 F_3 - 2.7210 F_2 + 0.7265 F_1.$$

$$i = 4;\ F_5 = -\frac{E_5}{a_{4,6}}(b_4 - F_4(a_{4,4} + E_3(a_{4,3} + a_{4,2}E_2)) - F_3(a_{4,3} + a_{4,2}E_2) - F_2 a_{4,2}) = \frac{-0.7177}{1613}\times(0.6 -$$

$$- F_4(10579 + 0.5645(-7294 + 0.4238\times 1875)) - F_3(-7294 + 0.4238\times 1875) - 1875 F_2 = -0.0003 +$$

$$+ 3.0750 F_4 - 2.8922 F_3 + 0.8344 F_2.$$

$$i = 5;\ F_6 = -\frac{E_6}{a_{5,7}}(b_5 - F_5(a_{5,5} + E_4(a_{5,4} + a_{5,3}E_3)) - F_4(a_{5,4} + a_{5,3}E_3) - F_3 a_{5,3}) = \frac{-0.7645}{1438}\times(0.6 -$$

$$- F_5(9705 + 0.6548(-6772 + 0.5645\times 1761)) - F_4(-6772 + 0.5645\times 1761) - 1761 F_3 = -0.0003 +$$

$$+ 3.1479 F_5 - 3.0715 F_4 + 0.9361 F_3.$$

$$i = 6;\ F_7 = -\frac{E_7}{a_{6,8}}(b_6 - F_6(a_{6,6} + E_5(a_{6,5} + a_{6,4}E_4)) - F_5(a_{6,5} + a_{6,4}E_4) - F_4 a_{6,4}) = \frac{-0.8016}{1242}\times(0.6 -$$

$$- F_6(8666 + 0.7177(-6131 + 0.6548\times 1613)) - F_5(-6131 + 0.6548\times 1613) - 1613 F_4 = -0.0004 +$$

$$+ 3.2424 F_6 - 3.2753 F_5 + 1.0410 F_4.$$

$$i = 7;\ F_8 = -\frac{E_8}{a_{7,9}}(b_7 - F_7(a_{7,7} + E_6(a_{7,6} + a_{7,5}E_5)) - F_6(a_{7,6} + a_{7,5}E_5) - F_5 a_{7,5}) = \frac{-0.8331}{1030}\times(0.6 -$$

$$- F_7(7501 + 0.7645(-5390 + 0.7177\times 1438)) - F_6(-5390 + 0.7177\times 1438) - 1438 F_5 = -0.0005 +$$

$+3.3722F_7 - 3.5247F_6 + 1.1631F_5$. Из (35) следует, что существует ещё одно значе-ние F_8.
$F_8 = -\dfrac{E_8}{a_{8,9}}(b_8 - F_7(a_{8,7} + a_{8,6}E_6) - F_6 a_{8,6}) = \dfrac{0.8331}{2189}(-7.4 - F_7(-4578 + 0.7645 \times 1242) -$
$-1242F_6) = -0.0028 + 1.3806F_7 - 0.4726F_6$. И далее, приравнивая два соотношения для F_8, получаем $0.0028 + 1.3806F_7 - 0.4726F_6 = -0.0005 + 3.3722F_7 - 3.5247F_6 + 1.1631F_5$,

$F_7 = -0.0018 + 1.5325F_6 - 0.5840F_5$ и, сравнивая с другим выражением для F_7, имеем

$-0.0018 + 1.5325F_6 - 0.5840F_5 = -0.0004 + 3.2424F_6 - 3.2753F_5 + 1.0410F_4$,

$F_6 = -0.0005 + 1.5740F_5 - 0.6088F_4$ и, сравнивая с другим выражением для F_6, имеем

$-0.0005 + 1.5740F_5 - 0.6088F_4 = -0.0003 + 3.1479F_5 - 3.0715F_4 + 0.9361F_3$,

$F_5 = -0.0001 + 1.5647F_4 - 0.5948F_3$ и, сравнивая с другим выражением для F_5, имеем

$-0.0001 + 1.5647F_4 - 0.5948F_3 = -0.0003 + 3.0750F_4 - 2.8922F_3 + 0.8344F_2$,

$F_4 = 0.0001 + 1.5212F_3 - 0.5525F_2$ и, сравнивая с другим выражением для F_4, имеем

$0.0001 + 1.5212F_3 - 0.5525F_2 = -0.0002 + 3.0329F_3 - 2.7210F_2 + 0.7265F_1$,

$F_3 = 0.0002 + 1.4345F_2 - 0.4806F_1$ и, сравнивая с другим выражением для F_3, имеем

$0.0002 + 1.4345F_2 - 0.4806F_1 = -0.0002 + 3.0947F_2 - 2.3826F_1$, $F_2 = 0.0002 + 1.1456F_1$ и, сравнивая с другим выражением для F_2, получим $0.0002 + 1.1456F_1 = -0.0001 + 3.8934F_1$, откуда окончательно $F_1 = 0.000135.$. И далее вычислим все остальные $F_i, i = 2,3,\ldots,8$. Причём, как указано в статье, для вычисления этих F_i надо из двух различных формул выбирать ту из них, которая содержит наименьшее число предыдущих значений F_i. Например, выше приведены две различные формулы для вычисления коэффициента F_4

$F_4 = 0.0001 + 1.5212F_3 - 0.5525F_2, F_4 = -0.0002 + 3.0329F_3 - 2.721F_2 + 0.7265F_1$. Первая из них зависит от двух значений F_i, F_3 и F_2, а вторая формула зависит от трёх значений F_i, F_3, F_2, F_1. Поэтому следует выбирать именно первую формулу, точно также как мы делали при вычислении коэффициентов E_i. При вычислении коэффициентов F_i и последующих значений y_i мы будем сохранять 6 знаков после запятой. В результате получим:

$F_2 = 0.000400;$

$F_3 = 0.000735; F_4 = 0.001016; F_5 = 0.001065; F_6 = 0.000599; F_7 = -0.000874; F_8 = -0.004306.$ Согласно

(46) $y_9 = \dfrac{b_9 - \sum\limits_{k=1}^{2} F_{9-k} \sum\limits_{j=k}^{2} a_{9,9-k} \prod\limits_{l=k+1}^{j} E_{9-l}}{\sum\limits_{j=0}^{2} a_{9,9-j} \prod\limits_{l=1}^{j} E_{9-l}} = \dfrac{b_9 - F_8(a_{9,8} + a_{9,7}E_7) - F_7 a_{9,7}}{a_{9,9} + E_8(a_{9,8} + a_{9,7}E_7)}$. Здесь все постоянные в правой части нам уже известны и поэтому $y_9 = -0.000009$. Следуя $y_i = E_i y_{i+1} + F_i$, получим:

$y_8 = -0.004313; y_7 = -0.004331; y_6 = -0.002712;$

$y_5 = -0.000881; y_4 = 0.000439; y_3 = 0.000983; y_2 = 0.000817; y_1 = 0.000285.$ Если теперь полученные значения неизвестных вставим в левую часть линейной алгебраической системы уравнений, то мы должны с некоторой погрешностью получить столбец правых частей нашей системы. Так, например, для первой строчки имеем

$b_1 = 17951\times 0.000285 - 7914\times 0.000817 + 1954\times 0.000983 =\ 0.571079(0.5833).$ Здесь в скобках приведены исходные значения правых частей. Аналогично рассуждая, найдём:
$b_2 = 0.607656(0.6); b_3 = 0.598054(0.6);$
$b_4 = 0.597730(0.6); b_5 = 0.607344(0.6); b_6 = 0.594670(0.6); b_7 = 0.599615(0.6);$
$b_8 = -7.353053(-7.4); b_9 = 4.898174(4.9).$ Ну, что тут можно сказать? Скорее всего только то, что мы исчерпали возможности обычного калькулятора и надо вычислять коэффициенты E_i, F_i и неизвестные y_i с большей точностью, а это уже под силу компьютеру, на котором и можно реализовать, изложенный здесь алгоритм. Реализация алгоритма на компьютереэто и есть, выражаясь языком вычислительной математики, доведение результатов расчётов до числа. В результате мы получили следующую функцию, которая доставляет экстремум исходного функционала. Эта функция

На участке $0 \le x \le 0.1$ имеет вид: $y(x) = y_1 x^2 = 0.0285x^2$.
На участке $0.1 \le x \le 0.2$ имеет вид: $y(x) = 50(y_2 - 2y_1)x^2 + 5(-y_2 + 4y_1)x =\ 0.01235x^2 + 0.001615x.$
На участке $0.2 \le x \le 0.3$ имеет вид: $y(x) = 50(y_3 - 2y_2 + y_1)\ x^2 +$
$+ y_1)x^2 + 5(-3y_3 + 8y_2 - 5y_1)x + y_3 - 3y_2 + 3y_1 = -0.0183x^2 + 0.01081x - 0.000613.$
На участке $0.3 \le x \le 0.4$ имеет вид: $y(x) = 50(y_4 - 2y_3 + y_2)x^2 +$
$+ 5(-5y_4 + 12y_3 - 7y_2)x + 3y_4 - 8y_3 + 3y_2 = -0.0355x^2 + 0.019405x - 0.001645.$
На участке $0.4 \le x \le 0.5$ имеет вид: $y(x) = 50(y_5 - 2y_4 + y_3)x^2 +$
$+ 5(-7y_5 + 16y_4 - 9y_3)x + 6y_5 - 15y_4 + 10y_3 = -0.0388x^2 + 0.02172x - 0.002041.$
На участке $0.5 \le x \le 0.6$ имеет вид: $y(x) = 50(y_6 - 2y_5 + y_4)x^2 +$
$+ 5(-9y_6 + 20y_5 - 11y_4)x + 10y_6 - 24y_5 + 15y_4 = -0.02555x^2 + 0.009795x + 0.000609.$
На участке $0.6 \le x \le 0.7$ имеет вид: $y(x) = 50(y_7 - 2y_6 + y_5)x^2 +$
$+ 5(-11y_7 + 24y_6 - 13y_5)x + 15y_7 - 35y_6 + 21y_5 = 0.0106x^2 - 0.02997x + 0.011454.$
На участке $0.7 \le x \le 0.8$ имеет вид: $y(x) = 50(y_8 - 2y_7 + y_6)x^2 +$
$+ 5(-13y_8 + 28y_7 - 15y_6)x + 21y_8 - 48y_7 + 28y_6 = 0.08185x^2 - 0.122595x + 0.041379.$
На участке $0.8 \le x \le 0.9$ имеет вид: $y(x) = 50(y_9 - 2y_8 + y_7)x^2 +$
$+ 5(-15y_9 + 32y_8 - 17y_7)x + 28y_9 - 63y_8 + 36y_7 = 0.2143x^2 - 0.32127x + 0.115551.$
На участке $0.9 \le x \le 1.0$ имеет вид: $y(x) = 100y_9(x-1)^2 = -0.0009(x-1)^2.$

Теперь в завершении приведем результаты вычисления с использованием двух решений: аналитического a и с использованием метода конечных элементов p. Тогда имеем:
$x = 0.0;\quad y_a(0.0) = -0.000000,\ \ y_p(0.0) = 0.000000.$
$x = 0.05;\quad y_a(0.05) = 0.000098,\ \ y_p(0.05) = 0.00071.$
$x = 0.1;\quad y_a(0.1) = 0.000340,\ \ y_p(0.1) = 0.000285.$
$x = 0.15;\ y_a(0.15) = 0.000669,\ \ y_p(0.15) = 0.000520.$
$x = 0.2;\quad y_a(0.2) = 0.001046,\ \ y_p(0.2) = 0.000817.$
$x = 0.25;\quad y_a(0.25) = 0.001414,\ \ y_p(0.25) = 0.000946.$

$x = 0.3;\quad y_a(0.3) = 0.00176,\ \ y_p(0.3) = 0.000983.$
$x = 0.35;\quad y_a(0.35) = 0.002044,\ \ y_p(0.35) = 0.000798.$
$x = 0.4;\quad y_a(0.4) = 0.002320,\ \ y_p(0.4) = 0.000439.$
$x = 0.45;\quad y_a(0.45) = 0.002469,\ \ y_p(0.45) = -0.000124.$
$x = 0.5;\quad y_a(0.5) = 0.002526,\ \ y_p(0.5) = -0.000881.$
$x = 0.55;\quad y_a(0.55) = 0.002475,\ \ y_p(0.55) = -0.001718.$
$x = 0.6;\quad y_a(0.6) = 0.002322,\ \ y_p(0.6) = -0.002712.$
$x = 0.65;\quad y_a(0.65) = 0.002131,\ \ y_p(0.65) = -0.003548.$
$x = 0.7;\quad y_a(0.7) = 0.001754,\ \ y_p(0.7) = -0.004331.$
$x = 0.75;\quad y_a(0.75) = 0.001397,\ \ y_p(0.75) = -0.004527.$
$x = 0.8;\quad y_a(0.8) = 0.001088,\ \ y_p(0.8) = -0.004313.$
$x = 0.85;\quad y_a(0.85) = 0.000706,\ \ y_p(0.85) = -0.002697.$
$x = 0.9;\quad y_a(0.9) = 0.000327,\ \ y_p(0.9) = -0.000009.$
$x = 0.95;\quad y_a(0.95) = 0.000162,\ \ y_p(0.95) = -0.000002.$
$x = 1.0;\quad y_a(1.0) = 0.000002,\ \ y_p(1.0) = 0.000000.$ Результаты сравнения в целом можно считать неудовлетворительными и это вызвано тем, что точность вычисления, произведённая на обычном калькуляторе, в этом случае, явно не достаточна, как для аналитического решения, так и для решения методом конечных элементов. Я же изложил как можно более подробно все выкладки, с тем, чтобы каждый желающий смог легко их проверить, а, возможно, и повторить этот алгоритм на компьютере, и при этом самостоятельно убедиться в том, что можно достичь значительно более лучших совпадений. А пока отметим, что с помощью метода конечных элементов можно в принципе найти решение любой задачи с граничными условиями для дифференциального уравнения любого порядка, но при условии, что будет вначале найден функционал, экстремум которого и будет представлять собой данное уравнение. При этом граничные условия я рекомендовал бы сделать однородными, а неоднородность отправить в правую часть уравнения. Я ещё раз повторю, что при реализации метода конечных элементов, мы будем иметь дело с функциями, порядок производных которой, будет в два раза меньше порядка исходного дифференциального уравнения. Матрица жесткости будет симметричной и будет содержать число полос выше и ниже главной диагонали в два раза меньше порядка исходного уравнения. И в этом весьма существенное преимущество этого метода по сравнению с другими численными методами, например, с методом конечных разностей. На этом, пожалуй, можно закончить раздел, посвящённый обыкновенным дифференциальным уравнениям. Читатель может мне возразить, что литература, посвящённая обыкновенным дифференциальным уравнениям содержит не менее сотни томов, и я, естественно, не мог её охватить всего лишь на десятках страниц. Как здесь не вспомнить афоризм Козьмы Пруткова о том, что нельзя объять необъятное. Многие выдающиеся математики прошлого и настоящего работали в

этой области. К ним несомненно относятся А.М. Ляпунов, Л.С. Понтрягин, Н.П. Еругин,

В.И. Арнольд, Э.Камке. Последний знаменит, пожалуй, самым известным справочником по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Другие, упомянутые здесь авторы внесли, не побоюсь этого слова, огромный вклад в исследовании поведения функций, удовлетворяющих конкретному дифференциальному уравнению. Моя задача была существенно скромнее и проще: показать, с помощью несложных средств, какие алгоритмы целесообразно использовать при решении данного дифференциального уравнения, и, что нужно делать при доведении этого решения до числа. Среди тех, кто занимается прикладной и вычислительной математикой бытует фраза, что надо решать конкретное дифференциальное уравнение, а не уходить от его решения. Эта фраза несёт приказной

и декларативный характер и поэтому в целом она неприемлема. Желательно, на мой взгляд, и то и другое, и непосредственное решение, чему посвящено всё предыдущее изложение, и исследование характера возможных решений, с чем любознательный читатель может самостоятельно познакомится и, уверяю Вас, найдёт там много интересного. Выше мы говорили о обыкновенных дифференциальных уравнениях. Но, если существуют обыкновенные дифференциальные уравнения, то есть и какие-то другие дифференциальные уравнения, которые к обыкновенным отнести никак нельзя. Наиболее обширным классом таких уравнений- являются уравнения в частных производных. В свою очередь этот класс можно разделить на три наиболее часто встречающихся подкласса: параболические, гиперболические и эллиптические уравнения. Об этих уравнениях мы в основном мы и будем говорить, причём сосредоточимся главным образом на том, как эти уравнения можно решить. При этом заранее оговорюсь, что при этом мы далеко не исчерпаем всех известных видов уравнений в частных производных и линейных систем этих уравнений. К параболическим уравнениям прежде всего относится уравнение теплопроводности (его часто называют уравнением Фурье). Самый простой вид этого уравнения можно записать так $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + q$, где $t-$температура, измеряемая в градусах, $\tau-$время, которое для инженерных расчётов измеряют обычно в часах, $a-$коэффициент температуропроводности, измеряемый для тех же расчётов в $\frac{m^2}{hour}$, где $m-$метры, m^2 – означает метры в квадрате, $hour-$по -английски –это час. В принятой сейчас в теоретической физике СИ (системе единиц) время измеряется в секундах и там размерность $[a] = \frac{m^2}{\sec}$, что означает квадратные метры, делённые на секунду. $x-$единственная здесь пространственная координата, измеряется в метрах . Здесь и всюду ниже символом [] будем обозначать размерность величины, стоящей в квадратных скобках. Например, $[t]$ - это градусы, $[\tau]-$это часы или секунды в зависимости от обстоятельств. Здесь $q-$интенсивность источника тепла,

$[q] = \dfrac{grad}{hour}$. Мы рассматриваем простейшую одномерную задачу, когда температура в пространстве меняется только по одной координате $0 \le x \le 1$. Это, на первый взгляд кажется далёкой от реальности схематизацией, но это не так. Именно такой модели соответствует стена любого здания, где два других размера которой существенно больше толщины стены. Здесь мы рассматриваем самый простой процесс теплопереноса, так называемый кондуктивный теплоперенос, когда поток тепла распространяется от более нагретой точки тела к менее нагретой точки, то есть в сторону обратную повышению температур. В этом состоит физическая сущность эмпирического, то есть взятого из эксперимента закона Фурье. Для корректной, то есть в данном случае для однозначной постановки задачи нам осталось сформулировать для неё краевые условия. Под словом краевые условия здесь понимается начальное и граничные условия. Мы уже выше говорили о подобных условиях. Ещё более упростим задачу и остановимся на однородных краевых условиях и на источнике тепла постоянной интенсивности $q = const$. В результате дело свелось к нахождению $t(x,\tau)$, которая в области $\tau > 0$ и $0 < x < 1$ подчиняется уравнению $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + q$, однородному начальному $t(x,0) = 0$ и однородным граничным условиям $t(0,\tau) = t(1,\tau) = 0$. Применим к указанному уравнению интегральное преобразование Лапласа, которое мы выше уже использовали. Согласно определению этого преобразования, обозначим

$\bar{t}(p) = \int\limits_0^\infty t(x,\tau)\exp(-p\tau)d\tau$, где $p-$ некое комплексное число, вещественная часть которого больше нуля или как пишут в этом случае $\mathrm{Re}(p) > 0$. Далее, умножим обе части исходного уравнения на $\exp(-p\tau)$ и проинтегрируем в указанных пределах. В результате пишем $\int\limits_0^\infty \dfrac{\partial t}{\partial \tau}\exp(-p\tau)d\tau = a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty t\exp(-p\tau)d\tau + \ q\int\limits_0^\infty \exp(-p\tau)d\tau.$ В первом интеграле применим правило интегрирования по частям, полагая $\dfrac{\partial t}{\partial \tau}d\tau = dv; u = \exp(-p\tau)$. Тогда

$v = t,\ du = -p\exp(-p\tau)d\tau.$ Согласно правилам интегрирования по частям, если Вы помните $\int udv = uv - \int vdu.$ Поэтому $\int\limits_0^\infty \dfrac{\partial t}{\partial \tau}\exp(-p\tau)d\tau = t(x,\tau)\exp(-p\tau)I_0^\infty + p\int\limits_0^\infty t\exp(-p\tau)d\tau = p\bar{t}(p).$ Здесь учтены однородные начальные условия и то, что при $\tau \to \infty$ $\exp(-p\tau) \to 0,$ так как $\mathrm{Re}(p) > 0.$ В результате имеем $p\bar{t}(x,p) = a\dfrac{d^2\bar{t}(x,p)}{dx^2} + \dfrac{q}{p}.$ Второе слагаемое в правой части появляется из следующих очевидных соображений $q\int\limits_0^\infty \exp(-p\tau)d\tau = -\dfrac{q}{p}\exp(-p\tau)I_0^\infty = \dfrac{q}{p}.$ Решение этого обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка можно записать так $\bar{t}(x,p) = C_1 ch(\sqrt{\dfrac{p}{a}}x) + C_2 sh(\sqrt{\dfrac{p}{a}}x) + \dfrac{q}{p^2}.$ Удовлетворяя граничным условиям, найдём, что $C_1 = -\frac{q}{p^2}; C_2 = \frac{q}{p^2}\frac{ch(\sqrt{\frac{p}{a}})}{sh(\sqrt{\frac{p}{a}})} - \frac{q}{p^2 sh(\sqrt{\frac{p}{a}})}$. В результате имеем

$\bar{t}(x,p) = -\frac{q}{p^2}\frac{sh(\sqrt{\frac{p}{a}}(1-x))}{sh(\sqrt{\frac{p}{a}})} - \frac{q}{p^2}\frac{sh(\sqrt{\frac{p}{a}}x)}{sh(\sqrt{\frac{p}{a}})} + \frac{q}{p^2}$. Можете проверить, что при при $x=0$ и при $x=1$ это выражение обращается в ноль. Для того чтобы найти оригинал этого изображения, вначале заметим, что во-первых в этом выражении есть слагаемое, оригинал которого мы уже находили- это $\frac{q}{p^2}$. Действительно, искомый оригинал равен $q\tau$. В этом легко убедиться непосредственно, если взять по частям следующий интеграл $q\int_0^\infty \tau\exp(-p\tau)d\tau$, что мы с Вами неоднократно проделывали. В теории операционного исчисления широко известна так называемая теорема о свёртке или значительно реже её называют формулой Бореля. Она гласит следующее. Пусть Вы имеете две функции от времени $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ и их соответствующие изображения $\bar{f}_1(p)$ и $\bar{f}_2(p)$, то оказывается оригиналами этого изображения будет такое выражение $\int_0^\tau f_1(\tau-y)f_2(y)dy$ или такое выражение $\int_0^\tau f_1(y)f_2(\tau-y)dy$. Этот факт нетрудно доказать. Действительно $\int_0^\infty \exp(-p\tau)(\int_0^\tau f_1(\tau-y)f_2(y)dy)d\tau =$

$= \int_0^\infty f_2(y)dy\int_y^\infty \exp(-p\tau)f_1(\tau-y)d\tau = \int_0^\infty f_2(y)\exp(-py)dy\int_0^\infty f_1(z)\exp(-pz)dz = \bar{f}_2(p)\bar{f}_1(p)$. Здесь мы меняем порядок интегрирования в двойном интеграле и переходим к другим переменным интегрирования. Между прочим, используя теорему о свёртке, можно получить простое решение интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром. Действительно,

пусть мы имеем такое уравнение $\int_0^x K(x-y)f(y)dy = \varphi(x)$. Здесь $\varphi(x)$ – известная функция от x, $K(x-y)$ – так же известная функция от разности аргументов $x-y$. Это выражение называют разностным ядром интегрального уравнения типа Вольтерра. И, наконец, $f(y)$ – неизвестная функция от y. Очевидно, что дифференцированием от интеграла здесь не избавиться. Давайте продифференцируем обе части этого уравнения по x. Имеем $K(0)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x-y)}{\partial x}f(y)dy = \varphi'(x)$. и от интеграла избавиться не удалось. Избавиться

можно только в том случае, когда ядро интегрального уравнения является вырожденным, то есть оно будет представлять собой сумму или разность, произведение или частное функции только от x на функцию только от $y.$ А теперь вернёмся к интегральному уравнению Вольтерра (это не француз Вольтер, а итальянец Вольтерра). Вы уже, наверное, догадались как решить это уравнение? Да, Вы правы. Умножим обе части этого уравнения на $\exp(-px), \operatorname{Re} p > 0$ и проинтегрируем в пределах от 0 до $+\infty$. В результате получим решение в изображениях $\bar{K}(p)\,\bar{f}(p) = \bar{\varphi}(p)$. И $\bar{f}(p) = \dfrac{\bar{\varphi}(p)}{\bar{K}(p)}.$ А дальше дело осталось за небольшим: обернуть это изображение. Кстати, существуют замечательные таблицы, составленные В.А. Диткиным и А.П. Прудниковым, которыми можно воспользоваться. Могут, конечно, задать вопрос: а как быть с другими интегральными уравнениями, у которых не разностное ядро, и которые имеют не подвижный верхний предел, а фиксированный- так называемые уравнения Фредгольма. Их решают тем же самым методом конечных элементов, о котором мы уже говорили и о котором ещё будем говорить. А теперь вернёмся к нашей простейшей задаче теплопроводности. Требуется найти оригинал изображения $\dfrac{sh(\sqrt{\dfrac{p}{a}}\alpha)}{sh(\sqrt{\dfrac{p}{a}})}$, где $\alpha -$ вещественное число и пусть таблиц Диткина и Прудникова под рукой нет. Я покажу как быть в этом случае. С помощью теории функций комплексного переменного доказана формула обращения преобразования Лапласа. Эта формула называется формулой Римана- Меллина и выглядит она так $f(\tau) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p)\exp(p\tau)dp,$ где $i = \sqrt{-1}, p = \sigma + i\omega, \sigma > s > 0.$ Здесь σ и ω - соответственно вещественные и мнимые части комплексного числа $p.$ Относительно вещественного числа s немного ниже. Эта формула выводится из разложения функции $f(x),$ для которой интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, в интеграл Фурье, который можно представить так $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)dx.$ Мы не будем выводить формулу Римана- Меллина, а просто показали Вам откуда она взялась. И ещё об этой формуле. Вероятно, остались непонятными верхний и нижний пределы интегрирования в этой формуле. В комплексной плоскости - это прямая параллельная мнимой оси (помните, что в комплексной плоскости есть вещественная ось, расположенная горизонтально и мнимая ось, перпендикулярная к ней) и расположена на неком расстоянии σ вправо от начала координат. Далее, многие из Вас находятся в полной уверенности, что любую функцию можно сколь угодно раз дифференцировать. Это, конечно, не так, но Вы слишком часто в отношении с Вашим математическим опытом встречались с такими функциями. Это и многочлены и экспонента и синусы и косинусы и логарифмы. Так вот такие функции в теории функций комплексного переменно переменного называются аналитическими. Вас наверное немало удивит, если интеграл, взятый от такой функции в комплексной области по любой замкнутой кривой, ограничивающей плоскую область, внутри которой функция аналитична, будет равен нулю. Поэтому, если в теории вещественных переменных мы всячески избегали тех аргументов, при которых функция обращались в бесконечность, то здесь наоборот, их надо тщательно искать. И эти значения аргумента называются полюсами функции. Так вот s – это то вещественное число, определяющую прямую $x = s$, правее которой расположена часть комплексной плоскости, где полюсов нет. Таким образом задача поиска оригинала для изображения с помощью так называемой леммы Жордана и больше я ничего добавлять не буду, свелась к поиску полюсов функции $\dfrac{sh(\sqrt{\frac{p}{a}}\alpha)}{sh(\sqrt{\frac{p}{a}})}$. Вначале заметим, что полюс этой функции будет нулём её знаменателя. Обозначим $\sqrt{\frac{p}{a}} = \omega + i\beta$, то есть некое комплексное число, где ω и β – неизвестные нам пока вещественные числа. Тогда

$sh(\sqrt{\frac{p}{a}}) = \exp(\omega)\dfrac{\exp(i\beta)-\exp(-i\beta)}{2} = 0;\ i\dfrac{\exp(i\beta)-\exp(-i\beta)}{2i} = \sin(\beta) = 0.$ Но синус обращается в ноль, как мы знаем, при $\beta = k\pi$, где $k = 0,1,2,...$ При этом $k = 0$ нас не устраивает, так как при $k = 0$ и числитель обращается в ноль. Поэтому $\beta = 0$ – это не полюс, а, так называемая, устранимая особая точка. Итак полюсами нашей функции будет бесконечный, но счётный набор чисел $\sqrt{\frac{p}{a}} = ik\pi$, где $k = 1,2,...$ Мы, естественно, положили $\omega = 0$, так как от него набор полученных чисел не зависит. Поэтому $p_k = -ak^2\pi^2$, где $k = 1,2,...$ И тогда согласно теории метода искомый оригинал изображения $\dfrac{sh(\sqrt{\frac{p}{a}}\alpha)}{sh(\sqrt{\frac{p}{a}})}$ будет иметь вид

$\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{sh(i\alpha k\pi)}{sh'_p(\sqrt{\frac{p}{a}})_{p_k}}\exp(p_k\tau)$. Здесь выражение $sh'_p(\sqrt{\frac{p}{a}})_{p_k}$ означает, что надо вначале взять производную по p, затем в полученное выражение вместо p подставить p_k. Итак, последовательно получим $sh'_p(\sqrt{\frac{p}{a}}) = ch(\sqrt{\frac{p}{a}})\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{p}{a}}}\dfrac{1}{a} = ch(\sqrt{\frac{p}{a}})\dfrac{1}{2\sqrt{pa}}$. Если сюда вместо p подставим

подставим p_k, то будем иметь $ch(ik\pi)\dfrac{1}{2iak\pi} = \dfrac{\cos(k\pi)}{2iak\pi} = \dfrac{(-1)^k}{2iak\pi}$. Изображение запишем так:

$2a\pi\sum_{k=1}^{\infty} ik(-1)^k sh(i\alpha k\pi)\exp(-ak^2\pi^2\tau) = 2a\pi\sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1}\exp(-ak^2\pi^2\tau)\sin(\alpha k\pi).$ Но это ещё не

не всё, так как нам требуется обернуть произведение двух изображений, каждое из которых мы уже обернули. Одно из изображений будет иметь вид τ, а другое $\exp(-\delta\tau)$. Мы временно забудем о наших значительно более громоздких изображениях. И тогда запишем $\int\limits_0^\tau \exp(-\delta y)(\tau - y)dy = \frac{-1}{\delta^2}(1-\exp(-\delta\tau)) + \frac{\tau}{\delta}$. В результате имеем $t(x,\tau) = q\tau - \frac{2q\tau}{\pi}\times$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x) + \frac{2q}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x) - \frac{2q}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\sin(k\pi x).$$

Согласно известному справочнику по математике : И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев Справочник по математике для инженеров и учащихся Втузов . Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1980.974стр. нижеследующие тригонометрические ряды не просто сходятся, но и имеют очень простую сумму. Смотри страницы 751 и 752. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\pi x) = \frac{\pi x}{2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k} = \frac{\pi - \pi x}{2}$.Тогда их сумма равна

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x) = \frac{\pi}{2}$. И на тех же страницах $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\sin(k\pi x) = \frac{\pi^2(\pi x)-(\pi x)^3}{12} = \frac{\pi^3}{12}x(1-x^2)$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k^3} = \frac{\pi^3 x}{12}(x^2-3x+2)$. И тогда их сумма равна $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x) =$

$= \frac{\pi^3}{12}(x - x^3 + x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{\pi^3}{4}x(1-x)$. И мы получим окончательное решение нашего уравнения $t(x,\tau) = \frac{q}{2a}x(1-x) - \frac{2q}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\sin(k\pi x)$, где линейный параметр

x – безразмерная величина $0 < x < 1$. Имеется ввиду, что $x = \frac{X}{l}$, где $l = 1$ метр. И тогда под знаком экспоненты и под знаком $\sin()$, как Вы видите, стоят безразмерные величины. А теперь давайте проверим полученное решение

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\sin(k\pi x). \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -\frac{q}{a} + \frac{2q}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\sin(k\pi x).$$

Мы с Вами говорили о том, что к почленному дифференцированию рядов надо подходить осторожно. Дело в том, что такое дифференцирование ухудшает качество сходимости ряда и это действие законно в том случае, когда продифференцированный ряд сходится. Здесь именно такой случай, так как полученный ряд, за счёт сомножителя, содержащего экспоненту в отрицательной степени прекрасно сходится. Далее подставим полученные значения производных в исходное уравнение $\frac{\partial t}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + q$. В итоге имеем Тождество. $\frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\sin(k\pi x) = -q + \frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\exp(-k^2\pi^2 a\tau)\ \sin(k\pi x) + q.$

Граничные условия очевидно выполняются, так как $t(0,\tau) = t(1,\tau) = 0$, За счёт того, что

$\sin(0) = \sin(k\pi) = 0$ и выражение $\frac{q}{2a}x(1-x)$ при этих же значениях x то же обращается в ноль. И, наконец, начальное условие $t(x,0) = \frac{q}{2a}x(1-x) - \frac{2q}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x)$, а сумму такого тригонометрического ряда мы совсем недавно уже вычисляли и поэтому и однородное начальное условие соблюдается. Тем самым мы окончательно убедились в том, что нашли решение представленного уравнения теплопроводности, которое удовлетворяет уравнению и всем краевым условиям. Теперь вернёмся к тому же самому уравнению с теми же самыми краевыми условиями, но применим для его решения метод конечных интегральных преобразований. Итак рассмотрим следующее конечное интегральное преобразование $\bar{t}(k,\tau) = \int_0^1 t(x,\tau)\sin(k\pi x)dx$ с формулой обращения $t(x,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(m\pi x)$. Для нахождения неизвестных нам пока коэффициентов $a_m, m = 1,2,...$ подставим этот тригонометрический ряд в формулу для конечного интегрального преобразования. В результате получим $\bar{t}(k,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)dx$ и дело свелось к вычислению следующего интеграла $\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)dx$, который раньше мы уже рассматривали. Напомним Вам об этом ещё раз. Из тригонометрии, мы, наверное, помним, что $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Поэтому наш интеграл можно преобразовать так

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(\pi x(m-k)) - \cos(\pi x(m+k)))dx = \frac{\sin(\pi x(m-k))}{2\pi(m-k)}I_0^1 - \frac{\sin(\pi x(m+k))}{2\pi(m+k)}I_0^1.$$

И это выражение, как Вы уже знаете, равно нулю при всех $m \neq k$ и равно $\frac{1}{2}$ при $m = k$. Кто этого не знает или не помнит, то пусть рассмотрит следующий предел $\lim_{k\to m}\frac{\sin(\pi(m-k))}{2\pi(m-k)}$ и применит здесь правило Лопиталя, то есть продифференцирует числитель и знаменатель по k и в полученное выражение подставит $k = m$. В результате мы получили очень простую формулу обращения $t(x,\tau) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\bar{t}(m,\tau)\sin(m\pi x)$. Проницательный читатель заметит, что доказывать здесь ортогональность не стоило, так как мы уже обсуждали собственные функции задачи Штурма- Лиувилля. Да, действительно это так, но мы это проделали ещё раз, чтобы получить формулу обращения. Следует заметить, что собственные функции такой задачи не только ортогональны, но и полны. И вот это свойство собственных функций или, как их часто называют однородных решений- это очень важное понятие в математике. Покажу это на следующем примере. Вспомните, как мы раскладывали вектор в трёхмерном пространстве и затем по трём его проекциям на оси координат его же и восстанавливали. При этом, как и следовало ожидать получали тот же самый вектор, который ранее раскладывали. Представьте себе такой нелепый случай, что мы по рассеянности разложили этот же вектор не на три координаты, а всего на две и с упорством, достойным лучшей участи, будем пытаться вернуться к исходному вектору. Вы сами понимаете, что у нас ничего не получится и это связано с тем, что мы использовали неполную систему координат. Теперь, как мне кажется становится понятным, что система собственных функций, которая представляет собой аналог системы координат в некоем бесконечномерном пространстве функций должна быть полна. Иначе, разлагая некую функцию на неполный ряд собственных функций, мы никогда не вернёмся к исходной функции. Как же определить полна или не полная данная система функций? Вернёмся к нашему примеру. И пусть из трёх ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ мы выбрали только два $\bar{i}$ и $\bar{k}$ и будем считать их за некую систему координат в трёхмерном пространстве. Но тогда любой вектор в таком пространстве будет ортогонален вектору $\bar{j}$. Теперь обобщим то что мы получили. Система неких функций будет неполной, если найдётся хоть одна такая функция, которая будет ортогональна ко всем функциям этой системы и не будет при этом тождественно равна нулю. Так вот для собственных функций задачи Штурма- Лиувилля такой функции найти нельзя. Вернёмся теперь к нашему конечному интегральному преобразованию. Умножим обе части уравнения теплопроводности на $\sin(k\pi x)$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы. В результате получим $\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^1 t(x,\tau)\sin(k\pi x)dx =$

$= a\int_0^1 \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}\sin(k\pi x)dx + q\int_0^1 \sin(k\pi x)dx$. Рассмотрим каждый из этих интегралов. Первый из них, согласно приведённому выше определению равен $\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^1 t(x,\tau)\sin(k\pi x)dx = \frac{d\bar{t}}{d\tau}$. Третий $q\int_0^1 \sin(k\pi x)dx = -q\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}I_0^1 = -q\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} = q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k\pi}$. И, наконец, второй, к которому мы применим хорошо нам знакомое правило интегрирование по частям, что даёт

$a\int_0^1 \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}\sin(k\pi x)dx = a(\frac{\partial t}{\partial x}\sin(k\pi x)I_0^1 - k\pi\int_0^1 \frac{\partial t}{\partial x}\cos(k\pi x)dx) = -ak\pi\int_0^1 \frac{\partial t}{\partial x}\cos(k\pi x)dx$, так как $\sin(k\pi) = \sin(0) = 0, k = 1,2,3..$ А теперь последний интеграл ещё раз проинтегрируем по частям $-ak\pi\int_0^1 \frac{\partial t}{\partial x}\cos(k\pi x)dx = -ak\pi(t(1,\tau)\cos(k\pi) - t(0,\tau) + k\pi\int_0^1 t\sin(k\pi x)dx)$, что с учётом однородных граничных условий и принятых обозначений даёт $a\int_0^1 \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}\sin(k\pi x)dx = -ak^2\pi^2\bar{t}$. В результате мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{d\bar{t}}{d\tau} = -ak^2\pi^2\bar{t} + q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k\pi}$ с начальным условием $\bar{t}(0) = 0$. Такое начальное условие получено после применения конечного синус -преобразования к исходному начальному условию $\bar{t}(0) = \int_0^1 t(x,0)\sin(k\pi x)dx = 0$. То есть по сути дела нам осталось решить задачу Коши для линейного неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

А это мы уже неоднократно проделывали, что позволяет нам записать искомое решение $\bar{t}(k,\tau)=q\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{ak^3\pi^3}-q\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{ak^3\pi^3}\exp(-ak^2\pi^2\tau).$ Можете самостоятельно проверить, что полученный результат удовлетворяет указанной задачи Коши. И далее воспользуемся формулой обращения, в результате применения которой имеем $t(x,\tau)=\dfrac{2q}{a\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^{k+1}+1)}{k^3}\sin(k\pi x)-\dfrac{2q}{a\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^{k+1}+1)}{k^3}\exp(-ak^2\pi^2\tau)\sin(k\pi x).$ Величину первой суммы мы уже знаем и поэтому окончательный результат нам хорошо известен и полностью совпадает с предыдущим решением.
$t(x,\tau)=\dfrac{q}{2a}x(1-x)-\dfrac{2q}{a\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^{k+1}+1)}{k^3}\exp(-ak^2\pi^2\tau)\sin(k\pi x).$ Вероятно, возникнут вопросы, а можно ли обобщить полученные результаты? Да, конечно, можно. Я ещё раз повторяю, что специально рассматривал самую простую задачу, чтобы на ней наглядно показать возможности наиболее известных методов её решения. А далее читатель, как мне кажется, сможет, правда не без труда, самостоятельно разобраться в специальной литературе по этому вопросу. Я назову некоторых авторов, которые плодотворно работали в области аналитических решений указанных задач. Это Г. А. Гринберг, Г. Карлслоу и Д. Егер, Э.М. Карташов, А. В. Лыков, Б.Я. Любов, Ш. Н Плят. И это только авторы известных монографий. Там читатель найдёт задачи и с другими граничными условиями и с другими источниками тепла. А также задачи для различных криволинейных стенок, решение которых потребуют специальных интегральных преобразований с существенными изменения известной задачи Штурма- Лиувилля, так что собственные функции будут не просто ортогональны, а ортогональны с некоторым весом. И я ещё раз повторю, что несмотря на то что одномерная задача теплопроводности, которая на первый взгляд кажется некоей идеализацией, продолжает находить применение в практике инженерных расчётов, в чём автор неоднократно смог убедиться. И ещё одно небольшое замечание. Вблизи границы, при наличии неоднородных граничных условий, аналитические решения, как отмечали упомянутые здесь авторы, плохо сходятся и поэтому желательно делать так как поступали мы: сводить граничные условия к однородным и всю неоднородность помещать в правую часть. И чтобы закончить с одномерными параболическими уравнениями, рассмотрим ещё одну одномерную задачу, так называемую задачу Стефана. Эта задача имеет ещё два названия: задача замерзания и оттаивания и задача с фазовым переходом. Математическая формулировка простейшей модификации данной задачи такова:
$\dfrac{\partial t}{\partial\tau}=a\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2},\tau>0,\ 0<x<\xi(\tau).$ Здесь $\xi(\tau)$ – неизвестная нам пока граница смены фаз, например, от воды ко льду. Эту неизвестную нам пока границу надо найти в процессе решения задачи. Известно лишь то, что в начальный момент времени этой границы не существует, то есть $\xi(0)=0$. А так как в начальный момент нет никакой границы, то значит и не существует начального условия. Граничных же усовий будет три :

$t(0,\tau) = t_c < 0,\ \ t(\xi(\tau),\tau) = 0,\ \dfrac{\partial t}{\partial x}(\xi(\tau),\tau) = B\dfrac{d\xi}{d\tau}$. Давайте обсудим все эти три условия. Первое из них означает, что на известной ровной поверхности (для определённости можно считать это поверхностью воды) задана постоянная $t_c = const < 0$ отрицательная температура по шкале Цельсия. То есть над поверхностью воды созданы идеальные условия для создания и роста ледяной корки. Условие $t(\xi(\tau),\tau) = 0$ означает, что за некое время τ толщина льда подросла до величины $\xi(\tau)$. При этом по толщине льда температура будет отрицательной, а на границе вода-лёд она будет постоянной и равной ноль градусов по Цельсию. Она так и останется равной нулю градусов до тех пор пока не подойдёт к этой границе очередная порция холода, которая заставит воду перейти из одного агрегатного состояния (жидкость) в другое агрегатное состояние (твёрдое тело, то есть лёд). Этот физический эффект и характеризует третье граничное условие. То есть изменение температуры при подходе к этой границе будет пропорциональна скорости продвижения этой границы. Коэффициент этой пропорциональности B – называется энтальпией фазового перехода. Таким образом с математической точки зрения мы получили довольно странные граничные условия. На одной границе- всё понятно, одна граница- одно условие, а на другой границе вместо одного условия –два, а в уравнении мы имеем только вторую производную по координате x. На первый взгляд кажется, что имеет место явный перебор условий на одной из границ. Ниже мы покажем, что это не так и наличие второго дополнительного условия поможет нам найти неизвестную нам границу. Но это же условие делает поставленную задачу нелинейной, так как граница области зависит от неизвестной

нам пока функции, то есть от температуры. Здесь мы впервые столкнулись с нелинейной задачей в уравнениях с частными производными. То есть здесь сумма двух решений или

как говорят суперпозиция решений не будет решением данной задачи. Я, возможно, нагнал на вас страху и Вы подумали, что и так предыдущие решения были весьма громоздкими, то что же будет здесь? Спешу Вас заверить, что мы получим самое простое, так называемое автомодельное решение искомой задачи. Вы помните, что неизвестная нам температура зависит от двух координат от x и от τ. Так вот, если бы удалось составить из комбинации двух координат одну координату и неизвестная нам температура оказалась бы функцией этой одной координаты, то такое решение называется автомодельным. Делаем следующую замену $z = \dfrac{x}{\xi(\tau)}$. Тогда

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\xi^2(\tau)}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$. $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial \tau}) = \frac{\partial t}{\partial z}(\frac{-x\xi^{/}(\tau)}{\xi^2(\tau)}) = -z\frac{\xi^{/}(\tau)}{\xi(\tau)}\frac{\partial t}{\partial z}$. Обратите внимание на то, что мы взяли производную по τ только через z. То есть мы перешли от переменных x, τ к переменным z, τ, но явная зависимость температуры от времени пока ещё осталась и поэтому исходное уравнение теплопроводности преобразовалось к следующему виду $\frac{\partial t}{\partial \tau} = z\frac{\xi^{/}(\tau)}{\xi(\tau)}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{a}{\xi^2(\tau)}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$. Теперь сделаем так, чтобы температура в левой части этого уравнения зависела бы только от τ, а в правой только от z. Этого можно добиться только в одном случае, когда $\xi(\tau) = \beta\sqrt{\tau + const}$, а так как по условию $\xi(0) = 0$, то имеем $\xi(\tau) = \beta\sqrt{\tau}$, где β – неизвестная нам пока положительная константа. В результате получим $\xi^2(\tau) = \beta^2\tau, \frac{\xi^{/}(\tau)}{\xi(\tau)} = \frac{\beta}{2\sqrt{\tau}\beta\sqrt{\tau}}$. И ещё раз преобразуем уравнение теплопроводности $\tau\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{z}{2}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{a}{\beta^2}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$. И мы действительно получили то, что хотели: слева в этом уравнении температура зависит только от τ, а справа только от z. И затем, как и обещали, мы будем считать, что температура зависит только от одной переменной z, то есть ищем так называемое автомодельное решение. И дело свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое с помощью очевидной замены $w = \frac{dt}{dz}$ сводится к совсем простому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{a}{\beta^2}\frac{dw}{dz} + \frac{z}{2}w = 0$. И с граничными условиями нам в этом частном случае повезло $t(0,\tau) = t_c$ преобразуется в $t(0) = t_c, t(\xi(\tau),\tau) = t(1) = 0$, так как при $x = \xi(\tau), z = 1$. И, наконец, третье и самое пока необычное для нас граничное условие. $\frac{\partial t(\xi(\tau),\tau)}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\xi(\tau)}\frac{dt}{dz}(1) = \frac{1}{\beta\sqrt{\tau}}t^{/}(1)$, а

$B\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \frac{\beta}{2\sqrt{\tau}}B$. И это граничное условие преобразуется к очень простому виду. $t^{/}(1) = \frac{\beta^2}{2}B$. И мы свели нашу задачу к решению следующего простого уравнения $\frac{a}{\beta^2}\frac{dw}{dz} + \frac{z}{2}w = 0$, где $w = \frac{dt}{dz}$ с граничными условиями $t(0) = t_c < 0, t(1) = 0, t^{/}(1) = \frac{\beta^2}{2}B$. Напом-

мню Вам, что положительный коэффициент β нам пока ещё неизвестен. И далее, как говорится, тряхнём стариной, и запишем решение хорошо нам знакомого уравнения

$\frac{a}{\beta^2}\frac{dw}{dz} = -\frac{z}{2}w$ или $\frac{dw}{w} = -\frac{\beta^2}{2a}zdz$. И $\ln(\frac{w}{C}) = -\frac{\beta^2 z^2}{4a}$, откуда $w = C\exp(-\frac{\beta^2 z^2}{4a})$. И окончательно $t(z) = Cerf(\frac{\beta z}{2\sqrt{a}}) + D$. Здесь C, D постоянные, которые с упомянутой выше константой β, мы найдём из трёх граничных условий. А с функцией $erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp(-z^2)dz$ мы с Вами уже встречались. Таблицы этой, так называемой специальной функции, хорошо известны и опубликованы в популярных справочниках по математике. Напомню Вам, что $erf(0) = 0$, что и так понятно, и $erf(\infty) = 1$. Используя два первых граничных условия, найдём $D = t_c$ и $C = -\frac{t_c}{erf(\frac{\beta}{2\sqrt{a}})}$. В результате $t(z) = t_c - \frac{t_c}{erf(\frac{\beta}{2\sqrt{a}})}erf(\frac{\beta z}{2\sqrt{a}})$. И, наконец, используем третье граничное условие, из которого следует $\beta B = \frac{-2t_c}{\sqrt{\pi a}\,erf(\frac{\beta}{2\sqrt{a}})}\exp(-\frac{\beta^2}{4a})$. Напомню, что $t_c < 0$ и

поэтому слева и справа – положительное число. Мы получили трансцендентное уравнение относительно неизвестного β. Мы уже с Вами обсуждали, что для решения подобных уравнений наиболее продуктивный способ- это последовательное деление области, где расположен корень пополам или образно говоря- метод поимки льва в пустыне. Такой метод давно и успешно аппробирован и его реализация на компьютере не вызывает никаких проблем. Искомый корень вычисляется с любой степенью точности. На этом решение исходной задачи заканчивается. Несмотря на простоту, такое решение имеет очень широкую сферу приложения, а движение неизвестной заранее границы по формуле $x = \beta\sqrt{\tau}$ даже называют в мерзлотоведении (науки, которая занимается проблемами, связанными с процессами, возникающими при замерзании и оттаивании), законом квадратного корня. Возникает естественный вопрос: можно ли обобщить полученный результат? Да, можно. Я здесь не буду говорить о многих известных способах это сделать. Расскажу только об одном. Известным российским математикам, академику А.А. Самарскому и проф. В.П. Моисеенко удалось доказать теорему о том, что задача Стефана сводится к следующему нелинейному относительно t уравнению, которое в одномерном виде (например бетонной стенки), можно записать так $(C(t) + A\delta(t))\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x})$, где $C(t)$ – объёмная теплоёмкость бетона, $[C(t)] = \frac{Joul}{m^3 grad}$. $\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности бетона, $[\lambda(t)] = \frac{Joul}{m\ grad\ hour}$. A – удельная энергия фазового перехода. Имеет ту же размерность,

что и объёмная теплоёмкость. И, наконец, $\delta(t)$ – так называемая дельта-функция от t. Эта функция получила широкое распространение в физике. Она равна нулю при $t > 0$ и при

$t < 0$ и обращается в бесконечность при $t = 0$. Несмотря на то, что эта разрывная функция и имеет такой экзотический вид, она интегрируема и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$. Зависимости $C(t)$ и $\lambda(t)$ принимаются, как правило, в следующем виде. При $t > 0, C(t) = C_1, \lambda(t) = \lambda_1$ и при $t < 0$, $C(t) = C_2, \lambda(t) = \lambda_2$. Здесь $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ – постоянные величины. Такого рода функции называются ступенчатыми. И для такой бетонной стенки ставятся обычные граничные условия : с одной стороны стенки температура холодной окружающей среды или теплообмен с ней, а с другой стороны- комнатная температура. Читатель вправе спросить, а куда же делась граница двух фаз и как её определить? Да, действительно, такой метод решения задачи Стефана не предполагает выделение границы раздела фаз. Поэтому подобный метод так и называется- метод без явного выделения границы раздела фаз. Эти границы получаются в процессе решения и число таких границ может быть не одно. И ещё, вероятно, возник вопрос, а кто же такой Стефан? Это австрийский математик, живший в 19 века и впервые получивший автомодельное решение, о котором мы говорили выше. И, наконец, возвращаясь к вопросу о том, как же решать это уравнение, заметим, что с помощью преобразования Кирхгофа $\theta = \int\limits_0^t \lambda(z)dz$ его можно свести к следующей системе уравнений: $(C(t) + A\delta(t))\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ и $\theta = \int\limits_0^t \lambda(z)dz$. Действительно, продифференцируйте преобразование Кирхгофа один раз по x и Вы получите $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda(t)\dfrac{\partial t}{\partial x}$, а если ещё раз продифференцируете, то будете иметь $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda(t)\dfrac{\partial t}{\partial x})$, что и требовалось показать. А теперь представим производную по времени в виде, так называемой, конечной разности, то есть на некоем k – том шаге по времени от начального значения производную по времени можно записать так $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \dfrac{t^{(k+1)} - t^{(k)}}{\Delta \tau}$, где предполагается, что мы используем одинаковые по продолжительности шаги по времени от начального до $k+1$-го, где $k = 0,1,2,...$ И тогда мы получим следующую систему обыкновенных интегро–дифференциальных уравнений, $(C(t^{(k+1)}) + A\delta(t^{(k+1)}))\dfrac{t^{(k+1)} - t^{(k)}}{\Delta \tau} = \dfrac{d^2\theta}{dx^2}$ и $\theta = \int\limits_0^{t^{(k+1)}} \lambda(z)dz$. А для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и такого вида интегрального уравнения можно использовать метод конечных элементов, что мы уже делали. При этом получится, что на каждом шаге по времени придётся решать трехдиагональную линейную систему алгебраических уравнений, что мы тоже уже проделывали. Мы здесь использовали, так называемую неявную схему по времени, которая как показано в теории метода сеток, является абсолютно устойчивой и более подробно об этом описано в специальной литературе и возможно мы к этому вопросу ещё вернёмся. И ещё остался один небольшой вопрос: почему уравнение теплопроводности называется параболическим? Вы, возможно, помните уравнение параболы $y = ax^2$ и теперь сравните его с одномерным уравнением теплопроводности $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$. Вероятно с определённой долей фантазии можно считать, что некая аналогия есть. Теперь сравните уравнение равнобокой гиперболы $x^2 - y^2 = v^2$ с одномерным гиперболическим уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и, наконец, уравнение эллипса, у которого две полуоси равны $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, с эллиптическим уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и, поскольку такое уравнение кривой скорее напоминает окружность, радиусом a, иногда такое же уравнение называется гармоническим уравнением, также как и круговые функции: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс называются гармоническими функциями. Ну и далее, как и обещали, рассмотрим подробнее следующее одномерное гиперболическое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q$. С помощью этого уравнения можно рассчитать колебание, например, бетонной стенки под действием сейсмической нагрузки. Здесь u – смещение стенки в метрах, τ – время (здесь, даже в инженерных расчётах время измеряют в секундах), x- линейная координата в метрах, v – коэффициент, имеющий размерность скорости и, зависящий от скорости звука в данном случае в бетоне, q – интенсивность сейсмического воздействия, измеряемая в метрах, делённых на секунду в квадрате и характеризует, например, акселлерограмму землетрясения или ускорение сейсмического воздействия . Рассмотрим самый простейший случай задачи $q = 1$. И однородные краевые условия: однородные начальные условия, которых в данном случае будет два $u(x,0) = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,0) = 0$, что означает, что в начальный момент времени смещение и начальная скорость смещения порознь равны нулю. И однородные граничные условия $u(0,\tau) = 0$ и $u(1,\tau) = 0$, то есть смещения на двух границах исследуемой стенки также равны нулю. Вот и все краевые условия, из которых можно однозначно найти решение исходной краевой задачи. Для решения этой задачи вначале используем преобразование Лапласа. $\bar{u}(x,p) = \int\limits_0^\infty u(x,\tau)\exp(-p\tau)d\tau$, где $\operatorname{Re} p > 0$. Умножим обе части уравнения на $\exp(-p\tau)$ и проинтегрируем в указанных пределах. Имеем $\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\exp(-p\tau)d\tau = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty u(x,\tau)\exp(-p\tau)d\tau +$

$+ q\int\limits_0^\infty \exp(-p\tau)d\tau$. Второй и третий интегралы в этом равенстве, если считать слева направо, нам уже известны. Это $v^2\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}$ и $\frac{q}{p}$ соответственно. Рассмотрим теперь первый интеграл и, как и раньше, проинтегрируем его по частям, полагая вначале $w = \exp(-p\tau)$ и $dv = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}d\tau$. Тогда $dw = -p\exp(-p\tau)d\tau$ и $v = \frac{\partial u}{\partial \tau}$. Поэтому $\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\exp(-p\tau)d\tau = \frac{\partial u}{\partial \tau}\exp(-p\tau)I_0^\infty +$

$+\ p\int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \tau}\exp(-p\tau)d\tau$ и с учётом того, что $\frac{\partial u(x,0)}{\partial \tau} = 0$ получим $\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\exp(-p\tau)d\tau =$

$= p\int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \tau}\exp(-p\tau)d\tau.$ И далее последний интеграл то же проинтегрируем по частям, полагая $w = \exp(-p\tau)$ и $dv = \frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau.$ Тогда $dw = -p\exp(-p\tau)d\tau$ и $v = u$.

Поэтому $p\int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \tau}\exp(-p\tau)d\tau = p(u\exp(-p\tau)I_0^\infty + p\int\limits_0^\infty u\exp(-p\tau)d\tau)$ и с учётом того, что $u(x,0) = 0$, получим, что первый интеграл равен $\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\exp(-p\tau)d\tau = p^2\bar{u}.$ В результате исходное гиперболическое уравнение свелось к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка $p^2\bar{u} = v^2\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \frac{q}{p}$ с однородными граничными условиями $\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0.$ Общее решение такого уравнения, как мы уже знаем, имеет вид $\bar{u} = C_1 ch(\frac{p}{v}x) + C_2 sh(\frac{p}{v}x) + \frac{q}{p^3}.$ Удовлетворяя однородным граничным условиям получим, $\bar{u} = -\frac{q}{p^3}\frac{sh(\frac{p}{\omega}(1-x))}{sh(\frac{p}{\omega})} - \frac{q}{p^3}\frac{sh(\frac{p}{\omega}x)}{sh(\frac{p}{\omega})} + \frac{q}{p^3},$ где ω – имеет размерность не скорости (метры, делённые на секунды), а частоты (безразмерная единица, делёная на секунду). Дело в том, что в нашем случае толщина стенки равна 1 метру $\omega = \frac{v}{1_{metr}}.$ Поэтому в последней формуле для $\bar{u}$ и единица и x -безразмерные величины. Кстати, так как под знаком экспоненты должна быть безразмерная величина, то p – имеет ту же размерность частоты, что и ω. Для того чтобы получить оригинал изображения $\bar{u}$, заметим вначале, что оригиналом для $\frac{q}{p^3}$ будет выражение $\frac{q\tau^2}{2}.$ В этом нетрудно убедится непосредственно, если вычислить следующий интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \tau^2\exp(-p\tau)d\tau.$ Для этого его надо дважды проинтегрировать по частям. И далее обращение, как мы уже проходили, свелось к поиску полюсов функции $\frac{sh(\frac{p}{\omega}\alpha)}{sh(\frac{p}{\omega})}.$ Отметим, что α и ω - вещественные положительные числа. Обозначим $\frac{p}{\omega} = \sigma + i\beta$ – некое комплексное число, где σ и β - неизвестные нам пока вещественные числа. Читатель наверное уже заметил, что я практически слово в слово повторяю то, что было десятью страницами выше. Учитывая, что $sh(\frac{p}{\omega}) = \exp(\sigma)\frac{\exp(i\beta) - \exp(-i\beta)}{2} = 0$ имеем

$i\frac{\exp(i\beta)-\exp(-i\beta)}{2i}=i\sin(\beta)=0$. Но синус обращается в ноль, как мы знаем, при $\beta=k\pi$, где $k=0,1,2,...$ Но $k=0$ нас не устраивает, так как при $k=0$ и числитель обращается в ноль. Поэтому $\beta=0$ – это не полюс, а, так называемая, устранимая особая точка. Итак полюсами нашей функции будет бесконечный, но счётный набор чисел $\frac{p}{\omega}=ik\pi$, где $k=1,2,...$ Мы, естественно, положили $\sigma=0$, так как от него набор полученных чисел не зависит. Поэтому все полюса рассматриваемой функции имеют вид $p_k=i\omega k\pi$, где $k=1,2,...$ И, согласно теории метода обращения изображений по Лапласу, искомый оригинал будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh(i\alpha k\pi)}{sh_p^{/}(\frac{p}{\omega})_{p_k}}\exp(i\omega\tau k\pi)$, где выражение $sh_p^{/}(\frac{p}{\omega})_{p_k}$ означает, что надо вначале от $sh(\frac{p}{\omega})$ взять производную по p, а затем в полученное выражение вместо p подставить p_k. Итак последовательно получим $sh_p^{/}(\frac{p}{\omega})=\frac{1}{\omega}ch(\frac{p}{\omega})$. Если сюда вместо p подставить p_k, то будем иметь $\frac{1}{\omega}ch(ik\pi)=\frac{1}{\omega}\cos(k\pi)=\frac{(-1)^k}{\omega}$. И поэтому $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh(i\alpha k\pi)}{sh_p^{/}(\frac{p}{\omega})_{p_k}}\exp(i\omega\tau k\pi)=$

$=i\omega\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sin(\alpha k\pi)(\cos(\omega\tau k\pi)+i\sin(\omega\tau k\pi))$.Мы поступаем сугубо формально и ничего пока не будем говорить о сходимости этого ряда .Ниже будет понятно почему. Здесь самое время вспомнить, что на самом деле мы располагаем следующим изображением $-\frac{sh(\frac{p}{\omega}(1-x))}{sh(\frac{p}{\omega})}-\frac{sh(\frac{p}{\omega}x)}{sh(\frac{p}{\omega})}$ и поэтому оригинал первого из них имеет вид

$$i\omega\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin((1-x)k\pi)(\cos(k\pi\omega\tau)+i\sin(k\pi\omega\tau))=$$

$$=i\omega\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sin(k\pi)\cos(k\pi x)-\cos(k\pi)\sin(k\pi x))(\cos(k\pi\omega\tau)+i\sin(k\pi\omega\tau))=$$

$$=i\omega\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k+2}\sin(k\pi x)(\cos(k\pi\omega\tau)+i\sin(k\pi\omega\tau))=i\omega\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)-\omega\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi x)\sin(k\pi\omega\tau).$$

Аналогично рассуждая найдём, что оригинал второго из них равен

$-i\omega\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)-\omega\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin(k\pi x)\sin(k\pi\omega\tau)$, откуда следует, что оригинал их суммы равен $-\omega\sum_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^{k+1})\sin(k\pi x)\sin(k\pi\omega\tau)$. Но это ещё не всё, так как нам требуется обернуть произведение двух изображений, каждое из которых мы уже обернули. Одно из изобра - жений имеет вид $\frac{\tau^2}{2}$, а другое $\sin(\delta\tau)$. Мы временно забудем о наших более громоздких изображениях. И тогда, как мы уже знаем, дело сводится к вычислению следующего интеграла $\int_0^{\tau}(\tau-y)^2\sin(\delta y)dy$, которое я предлагаю сделать читателям самостоятельно. Это несложно сделать с помощью хорошо знакомого правила интегрирования по частям. В результате получим $\int_0^{\tau}(\tau-y)^2\sin(\delta y)dy = \frac{\tau^2}{\delta}+\frac{2}{\delta^3}\cos(\delta\tau)-\frac{2}{\delta^3}$. И, возвращаясь к нашим обозначениям, будем иметь $u(x,\tau)=\frac{q\tau^2}{2}-\frac{q\tau^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x)+\frac{2q}{\pi^3\omega^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x)-$ $-\frac{2q}{\pi^3\omega^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)$. И теперь уже все ряды прекрасно сходятся, правда, что касается третьего из рядов, то он сходится значительно хуже, чем при параболическом уравнении. Первый и второй ряды в этой формуле не просто сходятся, а даже суммируются и их суммы нам уже известны. Напомню Вам, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x)=\frac{\pi}{2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x)=\frac{\pi^3}{4}x(1-x)$, используя которые получим окончательно: $u(x,\tau)=\frac{q}{2\omega^2}x(1-x)-\frac{2q}{\pi^3\omega^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)$. Это решение удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q$. Напомню Вам, что это то же самое уравнение, что и исходное, ввиду того, что толщина стенки равна 1 метру. И далее действительно $\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=-\frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)$. $\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-q-\frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k}\sin(k\pi x)\cos(k\pi\omega\tau)$. Граничные условия $u(0,\tau)=$ $u(1,\tau)=0$ то же выполняются. Начальное условие $u(x,0)=0$ также выполняется. И ещё одно начальное условие $\frac{\partial u}{\partial\tau}(x,0)=\frac{2q}{\pi^2\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^2}\sin(k\pi x)\sin(0)=0$. Таким образом мы получили функцию $u(x,\tau)$, удовлетворяющую уравнению и всем краевым условиям. Тот же самый результат получится и в том случае, если мы для решения исходного уравнения применим конечное интегральное преобразование по координате, но мы этого делать не будем, так как такой же алгоритм, практически слово в слово повторяет алгоритм, приведённый выше для параболического уравнения. А конечное интегральное преобразование мы используем ниже для решения эллиптического уравнения. А пока назовём некоторых авторов, которые с успехом использовали аналитические методы для решения гиперболических уравнений. Это И.И. Блехман, И.Я. Гольденблат, А.И. Лурье, Я.Г. Пановко, О.А. Савинов, А.М. Уздин, А.А. Храпков, И.С. Шейнин, С.Г. Шульман. В их статьях и монографиях Вы найдёте не только одномерные, но и двумерные и

трёхмерные гиперболические уравнения, а зная как решается простейшее одномерное гиперболическое уравнение, Вы сможете понять и разобраться в результатах, полученных ими в их работах. А теперь перейдём к эллиптическому уравнению. Самое простое и известное из них –это уравнение Лапласа. Оно имеет вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Здесь, возможно, у читателя возникнет по крайней мере три вопроса. Почему мы здесь сразу перешли к двумерному уравнению, а не рассматривали одномерного уравнения, как было, например, с параболическим и гиперболическим уравнением? Дело в том, что одномерное уравнение в этом случае можно записать так $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ и это уже будет не уравнение в частных производных, а обыкновенное дифференциальное уравнение. А такие уравнения мы уже проходили и более того его решение представляет собой уравнение прямой $Ax+C=0$, параллельной оси ординат. Здесь А и C – произвольные постоянные. Второй вопрос можно сформулировать так: что такое физически представляет собой функция двух переменных $u(x,y)$? Напомню Вам, что двумерное уравнение теплопроводности формулируется так: $\frac{\partial t}{\partial \tau}=a(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2})$, где $t(x,y,\tau)$ – температура, зависящая от координат и времени. Если же граничные условия не будут зависеть от времени и плюс к этому прошло достаточно много времени с начала процесса так, что начальные условия не скажутся на распределение температур, то тогда температура будет зависеть только от пространственных координат и будет подчиняться следующему уравнению $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$, и такое распределение температур называется стационарным распределением температур. Точно такие же рассуждения годятся для описания стационарного гиперболического уравнения. Итак, мы пришли к выводу, что записанное выше двумерное уравнение Лапласа описывает некий двумерный стационарный процесс. И, наконец, третий вопрос: Вы, наверное, помните, что существует общее решение обыкновенного дифференциального уравнения, зависящее от определённого количества произвольных констант, число которых равно порядку уравнения. Так вот существует ли общее решение уравнения Лапласа? Ответ на этот вопрос однозначен, да существует, и вот оно: $u(x,y)=\ Af(x+iy)+Bg(x-iy)+C$, где f и g – произвольные функции своих аргументов и A,B и C – произвольные константы. Имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Af^{//}(x+iy)+Bg^{//}(x-iy)$, где $f^{//}(z),g^{//}(\bar{z})$ означает вторые производные по $z,\bar{z}$. И тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-Af^{//}(x+iy)-Bg^{//}(x-iy)$. Это решение иногда приводится в книгах по математической физике и при этом говорится, что из такого решения ничего извлечь нельзя, так как, как правило, наша задача состоит в том, чтобы найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую уравнению и граничным условиям. Такое утверждение не совсем справедливо, так как в 30-х –60-х годах такие решения широко применяли с использованием функции комплексного переменного $z=x+iy$ и сопряжённого ему $\bar{z}=x-iy$. Специалисты в этой области такие, как Н.Н. Павловский, С.Н. Нумеров, В.И.Аравин с успехом применяли эти методы для решения инженерных задач и, в частности, для определения напоров под плотитиной. Но, к сожалению, эти методы изначально не допускают обобщений на пространственную задачу, на неоднородные и не изотропные (имеющие одинаковые свойства в

различных направле-ниях) материалы и даже на плоские области с достаточно произвольной границей. В частности, эти методы приводят к неоправданным сложностям даже для таких простых плоских фигур, как прямоугольник. Вот такую задачу мы, как раз и рассмотрим. Итак требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=q$, где $q=const$ и однородным граничным условиям $u(0,y)=u(1,y)=0$ и $u(x,0)=u(x,1)=0$. То есть мы, как и раньше все неоднородности в граничных условиях отправим в правую часть и рассматриваем простейшую неоднородную задачу с однородными граничными условиями. Кстати, задача с граничными условиями для уравнения Лапласа получила название задачи Дирхле. В литературе такую задачу формулируют так $\Delta u=0, u_G=f(l)$, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. (Здесь Δ обозначают не приращение функции, к чему мы привыкли, а оператор Лапласа. Так исторически сложилось.) $u_G=f(l)$ – означает, что искомая функция u на границе исследуемой плоской области G, равна известной функции $f(l)$. А неоднородное уравнение Лапласа, как мы уже говорили, часто называют уравнением Пуассона. Теперь мы с терминологией покончим и вернёмся к решению нашей задачи, к которой применим уже хорошо нам известный метод конечных интегральных преобразований. Введём интегральное преобразование $\bar{u}(x,k)=\int_0^1 u(x,y)\sin(k\pi y)dy$, где $k=1,2,...$ с формулой обращения $u(x,y)=2\sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}(x,k)\sin(k\pi y)$ и далее умножим обе части уравнения на $\sin(k\pi y), k=1,2,..$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы. В результате получим $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^1 u(x,y)\sin(k\pi y)dy+\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(k\pi y)dy=$ $=q\int_0^1\sin(k\pi y)dy$. Рассмотрим каждый из этих интегралов. Первый из них, согласно приведённому выше определению равен $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^1 u(x,y)\sin(k\pi y)dy=\frac{d^2\bar{u}(x,k)}{dx^2}$. Третий интеграл равен $q\int_0^1\sin(k\pi y)dy=-q\frac{\cos(k\pi y)}{k\pi}I_0^1=q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k\pi}$. И, наконец, второй интеграл, к которому мы применим, уже неоднократно нами используемое, правило интегрирования по частям $\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(k\pi y)dy=\frac{\partial u}{\partial y}\sin(k\pi y)I_0^1-k\pi\int_0^1\frac{\partial u}{\partial y}\cos(k\pi y)dy=-k\pi\int_0^1\frac{\partial u}{\partial y}\cos(k\pi y)dy$, так как $\sin(k\pi)=$ $=\sin(0)=0,\ k=1,2,...$ А теперь последний интеграл проинтегрируем ещё раз по частям $-k\pi\int_0^1\frac{\partial u}{\partial y}\cos(k\pi y)dy=-k\pi(u(x,y)\cos(k\pi y)I_0^1+k\pi\int_0^1 u(x,y)\sin(k\pi y)dy)=$
$=-k\pi(u(x,1)\cos(k\pi)-u(x,0)+k\pi\bar{u}(x,k))=-k^2\pi^2\bar{u}(x,k)$, так как $u(x,1)=u(x,0)=0$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - k^2\pi^2\bar{u} = q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k\pi}$ с граничными условиями $\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0$. Решение такого уравнения и с такими граничными условиями нам хорошо известно

$\bar{u} = q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k^3\pi^3}\frac{sh(k\pi(1-x))}{sh(k\pi)} + q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k^3\pi^3}\frac{sh(k\pi x)}{sh(k\pi)} - q\frac{(-1)^{k+1}+1}{k^3\pi^3}$. Можете самостоятельно убедиться в том, что это решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка и однородным граничным условиям. Обращаю Ваше внимание на то, что x здесь безразмерная величина. Используя формулу обращения будем иметь

$u = -\frac{2q}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi y) + \frac{2q}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\frac{sh(k\pi(1-x))}{sh(k\pi)}\sin(k\pi y) +$

$+\frac{2q}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\frac{sh(k\pi x)}{sh(k\pi)}\sin(k\pi y)$. Мы уже знаем, что первый ряд в этом выражении не просто сходится, но и суммируется и, как Вы помните, он равен $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\sin(k\pi x) =$

$= \frac{\pi^3}{4}x(1-x)$. И тогда окончательно решение исходной задачи запишем так

$u(x,y) = -\frac{q}{2}y(1-y) + \frac{2q}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\frac{sh(k\pi(1-x))}{sh(k\pi)}\sin(k\pi y) + \frac{2q}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\frac{sh(k\pi x)}{sh(k\pi)}\sin(k\pi y)$. Я даю Вам возможность самим убедиться в том, что полученная функция удовлетворяет уравнению и всем граничным условиям. Это решение можно обобщить на пространственную задачу для уравнения Лапласа, но только для прямоугольного параллелепипеда. Если же приходится решать, даже в случае плоской задачи, уравнение Лапласа для произвольной плоской области, то нам снова придётся обратиться к методу конечных элементов и для этого нам понадобится теорема, о которой мы выше уже говорили. Итак пусть линейный оператор A симметричен, то есть $(Au,v) = (u,Av)$. Напомню, что выражение (Au,v) – это определённым образом введённое скалярное произведение двух функций Au и v в некоем функциональном пространстве и Au – это новая функция, полученная после того как к функции u применён оператор A. Ниже мы это ещё поясним. И, кроме того линейный оператор A будет положителен, то есть $(Au,u) \geq 0$ и равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $u = 0$. Так вот, если оператор A обладает такими свойствами, то решение уравнения $Au = f$ доставляет минимум следующего функционала $I(u) = (Au,u) - 2(u,f)$. Верно и обратное утверждение: пусть существует функция u, которая доставляет минимум указанного функционала, то это функция и является решением уравнения $Au = f$. К слову скажем, что функция будет доставлять экстремум такого функционала. Итак пусть дано, уже знакомое нам, уравнение Пуассона $Au =$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ с однородными граничными условиями $u(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \partial G$, где ∂G – граница области G, где мы ищем решение. В этом случае, приведённое выше скалярное произведение записывается так

$(Au,v)=\iint_G(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v)dxdy$ и тогда $(Au,v)-(Av,u)$ можно записать так

$(Au,v)-(Av,u)=\iint_G(\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}))dxdy$. И к этому интегралу по двумерной области G применим формулу Гаусса- Остроградского. О Гауссе мы уже с Вами говорили, а М.В. Остроградский- известный российский математик, живший в первой половине 19 века в Санкт-Петерсбурге и преподававший математику в институте инженеров путей и сообщений. Для плоской области эта формула может быть записана так: $\iint_G(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{\partial G}Pdx+Qdy$. Эта формула преобразует двойной интеграл по плоской области G в криволинейный интеграл по границе области ∂G, причём обход по этой границе должен производится в положительном направлении, так чтобы при движении вдоль этой границы область должна всегда находится слева, а граница области должна быть гладкой или кусочно гладкой. При этом функции $P(x,y),Q(x,y),\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ должны быть непрерывны в G. Заметим, что подобная же формула связывает интеграл по объёму V с интегралом по поверхности S ограничивающей этот объём $\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=$ $=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdydx$, причём поверхностный интеграл, стоящий в правой части этого равенства следует брать по внешней стороне поверхности S, ограничивающей область V. Последняя формула нам не пригодится и мы её привели потому, что такие обобщения существуют и более того распространяются на функциональные пространства более чем трёх измерений. В частности, подобную формулу часто используют в своей широко известной монографии по теоретической физике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Но вернёмся к формуле Гаусса –Остроградского для плоской области $(Au,v)-(Av,u)=$

$$=\iint_G(\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}))dxdy=\int_{\partial G}(-(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y})dx+(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})dy)=0,$$

ввиду однородных граничных условий и поэтому $(Au,v)=(Av,u)$, что означает, что оператор A – симметричен. Теперь покажем, что он положителен. Для этого дважды используем формулу Гаусса-Остроградского и однородные граничные условия, что даёт

$$(Au,u)=-\iint_G u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy=-\int_{\partial G}(-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\iint_G((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2)dxdy=$$

$=\iint_G((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2)dxdy\geq 0$. Но из $(Au,u)=0$ следует $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$, то есть $u(x,y)=0$. И поэтому все условия теоремы выполнены и это означает, что вместо решения уравнения Пуассона с однородными граничными условиями мы будем искать экстремум функционала $I(u)=\iint_G((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2-2fu)dxdy$. Ещё раз обращаю Ваше внимание на то, что искомая нами функция должна обладать интегрируемыми первыми производными и это значительно более слабое ограничение, которое накладывается на функцию, по сравнению с существованием вторых производных от этой функции по каждой из координат. Итак пусть расчётная плоская область G представляет собой единичный квадрат $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ и пусть $f(x, y) = const = 1,$ то есть по сути дела мы будем решать методом конечных элементов ту же самую задачу, которую только что решили методом конечных интегральных преобразований. Разобьём исследуемый квадрат на 50 треугольников так как показано на рисунке 2. Заметим, что мы рассматриваемый самый простой случай, когда все треугольники будут прямоугольными и равными между собой. Я уже упоминал о том, что треугольниками можно заполнить практически любую плоскую фигуру, ограниченную кусочно - гладкой кривой. На этом же рисунке приведён пример того, как это делать нельзя. Нарисована консольная (жёстко закреплённая с одной стороны) балка под действием сосредоточенной силы Р, приложенной к другому её концу. По горизонтали эта балка разбита на 8 треугольных элементов, а по вертикали всего два. Так вот в этом случае, прогиб балки, расчитанный методом конечных элементов будет отличаться от реального прогиба в три раза. Чтобы Вам наглядно показать ошибочность такого способа разбиения расчётной области на треугольные элементы, напомню Вам, что такое по определению представляет собой площадь плоской фигуры? Так вот площадь плоской фигуры- это число элементарных квадратов, площадь каждого из которых равна одной квадратной единице, и которых можно разместить внутри этой плоской фигуры. Чем больше таких элементарных квадратиков, а лучше треугольников, Вы разместите внутри этой плоской фигуры, тем точнее Вы вычислите площадь этой фигуры. Как бы Вы посмотрели на человека, который бы вписал во внутрь этой плоской фигуры прямоугольник и сказал бы, что площадь этой фигуры равна длине этого прямоугольника на его ширину? Так вот подобного же рода ошибку сделает тот, кто ограничится, указанном на рисунке разбиением консольной балки на два треугольных элемента по вертикали. Естественно возникнет вопрос: а насколько треугольных элементов в первом приближении по вертикали следует разбить консольную балку, чтобы полученный результат был бы близок к правдоподобному ? Конечно, точного ответа на такой вопрос не существует, но, как минимум это число должно быть равно шести и это повторяю только в первом приближении. Теперь вернёмся к первому нашему рисунку. Здесь номерами 1, 2, 3, , , , 36 обозначены номера узлов, которые представляют собой вершины прямоугольных треугольников. Номерами в кружках 1, 2, 3, …, 50 обозначены номера элементов, представляющие собой прямоугольные треугольники. Узел 1 совпадает с началом декартовой системы координат и поэтому каждый узел имеет свои значения в этой системе координат. Например, 13-ый элемент – это треугольник (смотри рисунок) имеет узлы с номерами 8, 14 и 15, координаты которых соответственно равны $(0.2; 0.2)$, $(0.4; 0.2)$ и $(0.4; 0.4)$. Так как на границе области неизвестная нам пока функция $u(x, y)$ обращается в ноль, то элементы 1, 10, 41 и 50 не следует рассматривать, потому что заранее известно, что значение функции $u(x, y)$

во всех трёх узлах каждого из этих элементов одинаковы и равны нулю. Итак, нам предстоит найти неизвестные нам пока значения функции $u(x, y)$ в оставшихся 46-ти элементах. Все эти элементы можно разделить на три группы. К первой относятся элементы, ни один из узлов которого не выходит на границу области, ко второй группе отнесём все элементы, один из узлов которого выходит на границу области и, наконец, к третьей группе отнесём элементы, два из узлов которого выходят на границу области и остаётся неизвестным всего один элемент. Для примера более подробно рассмотрим 13-ый элемент, все узлы которого принадлежат внутренним точкам области. Этот элемент ограничен прямыми $x = 0.4; y = 0.2$ и $y = x$. Пусть распределение неизвестной нам пока функции $u(x, y)$ внутри этого элемента имеет вид $U_{13} = ax + by + c,$ где a, b и c – неизвестные пока числа, которые будут разными для каждого из элементов. Такое представление вычислители называют линейным восполнением по каждому из элементов. Линейным оно называется потому, что x и y здесь в первой степени. Пусть далее значением функции $u(x, y)$ в узле 8 будет u_8, в узле 14 u_{14}, в узле 15- u_{15}, которые конечно нам пока неизвестны. В результате подстановки в U_{13} последовательно координаты точек 8, 14 и 15 будем иметь $u_8 = 0.2a + 0.2b + c; u_{14} = 0.4a + 0.2b + c; u_{15} = 0.4a + 0.4b + c,$ откуда, вычитая из u_{14}, u_8, получим $u_{14} - u_8 = 0.2a$ и $a = 5(u_{14} - u_8)$. Вычитая из u_{14}, u_{15}, будем иметь $u_{15} - u_{14} = 0.2b$ и $b = 5(u_{15} - u_{14})$ и тогда $c = 2u_8 - u_{15}$. В результате получим $U_{13} = 5(u_{14} - u_8)x + 5(u_{15} - u_{14})y + 2u_8 - u_{15}$.
И $\frac{\partial U_{13}}{\partial x} = 5(u_{14} - u_8); \frac{\partial U_{13}}{\partial y} = 5(u_{15} - u_{14})$. Затем $\left(\frac{\partial U_{13}}{\partial x}\right)^2 = 25(u_{14} - u_8)^2$ и $\left(\frac{\partial U_{13}}{\partial y}\right)^2 = 25(u_{15} - u_{14})^2$.

И тогда функционал, составленный только для одного тринадцатого элемента будет выглядеть так $I(U_{13}) = \iint\limits_{S_{13}} (25(u_{14} - u_8)^2 + 25(u_{15} - u_{14})^2 + 10(u_{14} - u_8)x + 10(u_{15} - u_{14})y + 4u_8 - 2u_{15})dS.$

Здесь двойной интеграл берётся по всей площади этого элемента. Такой интеграл вычисляется следующим образом $\iint\limits_{S_{13}} WdS = \int\limits_{0.2}^{0.4} (\int\limits_{0.2}^{x} Wdy)dx$, где W – означает подынтегральное выражение . Вычисляя внутренний интеграл, имеем $\int\limits_{0.2}^{x} Wdy = 25(u_{14} - u_8)^2 yI_{0.2}^{x} + 25(u_{15} - u_{14})^2 yI_{0.2}^{x} +$
$+ 10(u_{14} - u_8)xyI_{0.2}^{x} + 5(u_{15} - u_{14})y^2 I_{0.2}^{x} + (4u_8 - 2u_{15})yI_{0.2}^{x} = 25(u_{14} - u_8)^2(x - 0.2) +$
$+ 25(u_{15} - u_{14})^2(x - 0.2) + 10(u_{14} - u_8)x(x - 0.2) + 5(u_{15} - u_{14})(x^2 - 0.04) + (4u_8 - 2u_{15})(x - 0.2).$ После применения внешнего интегрирования будем иметь $\iint\limits_{S_{13}} WdS = 25(u_{14} - u_8)^2 \frac{(x - 0.2)^2}{2} I_{0.2}^{0.4} +$
$+ 25(u_{15} - u_{14})^2 \frac{(x - 0.2)^2}{2} I_{0.2}^{0.4} + 10(u_{14} - u_8)(\frac{x^3}{3} - 0.2\frac{x^2}{2})_{0.2}^{0.4} + 5(u_{15} - u_{14})(\frac{x^3}{3} - 0.04x)_{0.2}^{0.4} +$
$+ (4u_8 - 2u_{15})\frac{(x - 0.2)^2}{2} I_{0.2}^{0.4}$. Заметим, что $0.5 \times (x - 0.2)^2$ – это площадь каждого элемента. И кон окончательно $I(U_{13}) = 0.5(u_{14} - u_8)^2 + 0.5(u_{15} - u_{14})^2 + 0.066666(u_{14} - u_8) + 0.053333(u_{15} - u_{14}) +$
$+ 0.04(2u_8 - u_{15})$. Точно таким же образом получим подобные же выражения и для других внутренних элементов $U_{14} = 5(u_{15} - u_9)x + 5(u_9 - u_8)y + 2u_8 - u_{15}$.

$I(U_{14}) = 0.5(u_{15} - u_9)^2 + 0.5(u_9 - u_8)^2 + 0.053333(u_{15} - u_9) + 0.066666(u_9 - u_8) + 0.04(2u_8 - u_{15}).$
$U_{25} = 5(u_{21} - u_{15})x + 5(u_{22} - u_{21})y + 3u_{15} - 2u_{22}.$
$I(U_{25}) = 0.5(u_{21} - u_{15})^2 + 0.5(u_{22} - u_{21})^2 + 0.106666(u_{21} - u_{15}) + 0.093333(u_{22} - u_{21}) + 0.04(3u_{15} - 2u_{22}).$
$U_{26} = 5(u_{22} - u_{16})x + 5(u_{16} - u_{15})y + 3u_{15} - 2u_{22}.$
$I(U_{26}) = 0.5(u_{22} - u_{16})^2 + 0.5(u_{16} - u_{15})^2 + 0.093333(u_{22} - u_{16}) + 0.106666(u_{16} - u_{15}) + 0.04(3u_{15} - 2u_{22}).$
$U_{37} = 5(u_{28} - u_{22})x + 5(u_{29} - u_{28})y + 4u_{22} - 3u_{29}.$
$I(U_{37}) = 0.5(u_{28} - u_{22})^2 + 0.5(u_{29} - u_{28})^2 + 0.146666(u_{28} - u_{22}) + 0.133333(u_{29} - u_{28}) + 0.04(4u_{22} - 3u_{29}).$
$U_{38} = 5(u_{29} - u_{23})x + 5(u_{23} - u_{22})y + 4u_{22} - 3u_{29}.$
$I(U_{38}) = 0.5(u_{29} - u_{23})^2 + 0.5(u_{23} - u_{22})^2 + 0.133333(u_{29} - u_{23}) + 0.146666(u_{23} - u_{22}) + 0.04(4u_{22} - 3u_{29}).$
$U_{15} = 5(u_{15} - u_9)x + 5(u_{16} - u_{15})y + 2u_9 + u_{15} - 2u_{16}.$
$I(U_{15}) = 0.5(u_{15} - u_9)^2 + 0.5(u_{16} - u_{15})^2 + 0.066666(u_{15} - u_9) + 0.093333(u_{16} - u_{15}) + 0.04(2u_9 + u_{15} - 2u_{16}).$
$U_{16} = 5(u_{16} - u_{10})x + 5(u_{10} - u_9)y + 3u_9 - u_{10} - u_{16}.$
$I(U_{16}) = 0.5(u_{16} - u_{10})^2 + 0.5(u_{10} - u_9)^2 + 0.053333(u_{16} - u_{10}) + 0.106666(u_{10} - u_9) + 0.04(3u_9 - u_{10} - u_{16}).$
$U_{27} = 5(u_{22} - u_{16})x + 5(u_{23} - u_{22})y + 3u_{16} + u_{22} - 3u_{23}.$
$I(U_{27}) = 0.5(u_{22} - u_{16})^2 + 0.5(u_{23} - u_{22})^2 + 0.106666(u_{22} - u_{16}) + 0.133333(u_{23} - u_{22}) +$
$+ 0.04(3u_{16} + u_{22} - 3u_{23}).$ $U_{28} = 5(u_{23} - u_{17})x + 5(u_{17} - u_{16})y + 4u_{16} - u_{17} - 2u_{23}.$
$I(U_{28}) = 0.5(u_{23} - u_{17})^2 + 0.5(u_{17} - u_{16})^2 + 0.093333(u_{23} - u_{17}) + 0.146666(u_{17} - u_{16}) +$
$+ 0.04(4u_{16} - u_{17} - 2u_{23}).$ $U_{17} = 5(u_{16} - u_{10})x + 5(u_{17} - u_{16})y + 2u_{10} + 2u_{16} - 3u_{17}.$
$I(U_{17}) = 0.5(u_{16} - u_{10})^2 + 0.5(u_{17} - u_{16})^2 + 0.066666(u_{16} - u_{10}) + 0.133333(u_{17} - u_{16}) +$
$+ 0.04(2u_{10} + 2u_{16} - 3u_{17}).$ $U_{18} = 5(u_{17} - u_{11})x + 5(u_{11} - u_{10})y + 4u_{10} - 2u_{11} - u_{17}.$
$I(U_{18}) = 0.5(u_{17} - u_{11})^2 + 0.5(u_{11} - u_{10})^2 + 0.053333(u_{17} - u_{11}) + 0.146666(u_{11} - u_{10}) +$
$+ 0.04(4u_{10} - 2u_{11} - u_{17}).$ $U_{23} = 5(u_{20} - u_{14})x + 5(u_{21} - u_{20})y + 3u_{14} - u_{20} - u_{21}.$
$I(U_{23}) = 0.5(u_{20} - u_{14})^2 + 0.5(u_{21} - u_{20})^2 + 0.106666(u_{20} - u_{14}) + 0.053333(u_{21} - u_{20}) +$
$+ 0.04(3u_{14} - u_{20} - u_{21}).$ $U_{24} = 5(u_{21} - u_{15})x + 5(u_{15} - u_{14})y + 2u_{14} + u_{15} - 2u_{21}.$
$I(U_{24}) = 0.5(u_{21} - u_{15})^2 + 0.5(u_{15} - u_{14})^2 + 0.093333(u_{21} - u_{15}) + 0.066666(u_{15} - u_{14}) +$
$+ 0.04(2u_{14} + u_{15} - 2u_{21}).$ $U_{35} = 5(u_{27} - u_{21})x + 5(u_{28} - u_{27})y + 4u_{21} - u_{27} - 2u_{28}.$
$I(U_{35}) = 0.5(u_{27} - u_{21})^2 + 0.5(u_{28} - u_{27})^2 + 0.146666(u_{27} - u_{21}) + 0.093333(u_{28} - u_{27}) +$
$+ 0.04(4u_{21} - u_{27} - 2u_{28}).$ $U_{36} = 5(u_{28} - u_{22})x + 5(u_{22} - u_{21})y + 3u_{21} + u_{22} - 3u_{28}.$
$I(U_{36}) = 0.5(u_{28} - u_{22})^2 + 0.5(u_{22} - u_{21})^2 + 0.133333(u_{28} - u_{22}) + 0.106666(u_{22} - u_{21}) +$
$+ 0.04(3u_{21} + u_{22} - 3u_{28}).$ $U_{33} = 5(u_{26} - u_{20})x + 5(u_{27} - u_{26})y + 4u_{20} - 2u_{26} - u_{27}.$
$I(U_{33}) = 0.5(u_{26} - u_{20})^2 + 0.5(u_{27} - u_{26})^2 + 0.146666(u_{26} - u_{20}) + 0.053333(u_{27} - u_{26}) +$
$+ 0.04(4u_{20} - 2u_{26} - u_{27}).$ $U_{34} = 5(u_{27} - u_{21})x + 5(u_{21} - u_{20})y + 2u_{20} + 2u_{21} - 3u_{27}.$
$I(U_{34}) = 0.5(u_{27} - u_{21})^2 + 0.5(u_{21} - u_{20})^2 + 0.133333(u_{27} - u_{21}) + 0.066666(u_{21} - u_{20}) +$
$+ 0.04(2u_{20} + 2u_{21} - 3u_{27}).$ На этом вычисление функционалов для элементов, расположенных внутри расчётной области заканчивается. Теперь перейдём к вычислению функционалов для элементов, один из узлов которого выходит на границу расчётной области, и, значение искомой функции в этом узле по определению равно нулю.

$U_3 = 5u_8x + 5(u_9 - u_8)y + u_8 - u_9$.

$I(U_3) = 0.5u_8^2 + 0.5(u_9 - u_8)^2 + 0.026666u_8 + 0.053333(u_9 - u_8) + 0.04(u_8 - u_9)$.

$U_5 = 5u_9x + 5(u_{10} - u_9)y + 2(u_9 - u_{10})$.

$I(U_5) = 0.5u_9^2 + 0.5(u_{10} - u_9)^2 + 0.026666u_9 + 0.093333(u_{10} - u_9) + 0.08(u_9 - u_{10})$.

$U_7 = 5u_{10}x + 5(u_{11} - u_{10})y + 3(u_{10} - u_{11})$.

$I(U_7) = 0.5u_{10}^2 + 0.5(u_{11} - u_{10})^2 + 0.026666u_{10} + 0.133333(u_{11} - u_{10}) + 0.12(u_{10} - u_{11})$.

$U_{19} = 5(u_{17} - u_{11})x - 5u_{17}y + 2u_{11} + 3u_{17}$.

$I(U_{19}) = 0.5(u_{17} - u_{11})^2 + 0.5u_{17}^2 + 0.066666(u_{17} - u_{11}) - 0.173333u_{17} + 0.04(2u_{11} + 3u_{17})$.

$U_{29} = 5(u_{23} - u_{17})x - 5u_{23}y + 3u_{17} + 2u_{23}$.

$I(U_{29}) = 0.5(u_{23} - u_{17})^2 + 0.5u_{23}^2 + 0.106666(u_{23} - u_{17}) - 0.173333u_{23} + 0.04(3u_{17} + 2u_{23})$.

$U_{39} = 5(u_{29} - u_{23})x - 5u_{29}y + 4u_{23} + u_{29}$.

$I(U_{39}) = 0.5(u_{29} - u_{23})^2 + 0.5u_{29}^2 + 0.146666(u_{29} - u_{23}) - 0.173333u_{29} + 0.04(4u_{23} + u_{29})$.

$U_{48} = -5u_{29}x + 5(u_{29} - u_{28})y + 4u_{28} + u_{29}$.

$I(U_{48}) = 0.5u_{29}^2 + 0.5(u_{29} - u_{28})^2 - 0.173333u_{29} + 0.146666(u_{29} - u_{28}) + 0.04(4u_{28} + u_{29})$.

$U_{46} = -5u_{28}x + 5(u_{28} - u_{27})y + 3u_{27} + 2u_{28}$.

$I(U_{46}) = 0.5u_{28}^2 + 0.5(u_{28} - u_{27})^2 - 0.173333u_{28} + 0.106666(u_{28} - u_{27}) + 0.04(3u_{27} + 2u_{28})$.

$U_{44} = -5u_{27}x + 5(u_{27} - u_{26})y + 2u_{16} + 3u_{27}$.

$I(U_{44}) = 0.5u_{27}^2 + 0.5(u_{27} - u_{26})^2 - 0.173333u_{27} + 0.066666(u_{27} - u_{26}) + 0.04(2u_{26} + 3u_{27})$.

$U_{32} = 5(u_{26} - u_{20})x + 5u_{20}y + 3(u_{20} - u_{26})$.

$I(U_{32}) = 0.5(u_{26} - u_{20})^2 + 0.5u_{20}^2 + 0.133333(u_{26} - u_{20}) + 0.026666u_{20} + 0.12(u_{20} - u_{26})$.

$U_{22} = 5(u_{20} - u_{14})x + 5u_{14}y + 2(u_{14} - u_{20})$.

$I(U_{22}) = 0.5(u_{20} - u_{14})^2 + 0.5u_{14}^2 + 0.093333(u_{20} - u_{14}) + 0.026666u_{14} + 0.08(u_{14} - u_{20})$.

$U_{12} = 5(u_{14} - u_8)x + 5u_8y + u_8 - u_{14}$.

$I(U_{12}) = 0.5(u_{14} - u_8)^2 + 0.5u_8^2 + 0.053333(u_{14} - u_8) + 0.026666u_8 + 0.04(u_8 - u_{14})$. Теперь перейдём к вычислению функционалов для элементов, два узла которых выходят на границу расчётной области, и значение искомой функции в этих узлах по определению равно нулю.

$U_2 = 5u_8x + 5u_8y - u_8$. $I(U_2) = u_8^2 + 0.013333u_8$.

$U_4 = 5u_9x$. $I(U_4) = 0.5u_9^2 + 0.013333u_9$.

$U_6 = 5u_{10}x$. $I(U_6) = 0.5u_{10}^2 + 0.013333u_{10}$.

$U_8 = 5u_{11}x$. $I(U_8) = 0.5u_{11}^2 + 0.013333u_{11}$.

$U_9 = 5u_{11}x - 5u_{11}y + 4u_{11}$. $I(U_9) = u_{11}^2 + 0.013333u_{11}$.

$U_{20} = -5u_{11}y + 5u_{11}$. $I(U_{20}) = 0.5u_{11}^2 + 0.013333u_{11}$.

$U_{30} = -5u_{17}y + 5u_{17}$. $I(U_{30}) = 0.5u_{17}^2 + 0.013333u_{17}$.

$U_{40} = -5u_{23}y + 5u_{23}$. $I(U_{40}) = 0.5u_{23}^2 + 0.013333u_{23}$.

$U_{49} = -5u_{29}x - 5u_{29}y + 9u_{29}$. $I(U_{49}) = u_{29}^2 - 0.013333u_{29}$.

$U_{47} = -5u_{28}x + 5u_{28}$. $I(U_{47}) = 0.5u_{28}^2 + 0.013333u_{28}$.

$U_{45} = -5u_{27}x + 5u_{27}$. $I(U_{45}) = 0.5u_{27}^2 + 0.013333u_{27}$.

$U_{43} = -5u_{26}x + 5u_{26}$. $I(U_{43}) = 0.5u_{26}^2 + 0.013333u_{26}$.
$U_{42} = -5u_{26}x + 5u_{26}y + 4u_{26}$. $I(U_{42}) = u_{26}^2 + 0.013333u_{26}$.
$U_{31} = 5u_{26}y$. $I(U_{31}) = 0.5u_{26}^2 + 0.013333u_{26}$.
$U_{21} = 5u_{20}y$. $I(U_{21}) = 0.5u_{20}^2 + 0.013333u_{20}$.
$U_{11} = 5u_8y$. $I(U_{11}) = 0.5u_{14}^2 + 0.013333u_{14}$. Далее заметим, что узел 8 окружён элементами 2, 3, 12, 13, 14 и поэтому обозначим $I_8 = I(U_2) + I(U_3) + I(U_{12}) + I(U_{13}) + I(U_{14})$. Так мне кажется более наглядно и не стоит излишне загромождать последующие выкладки и суммировать сразу все функционалы. И тогда необходимым условием экстремума функционала I_8 будет $\frac{\partial I_8}{\partial u_8} = \frac{\partial I(U_2)}{\partial u_8} + \frac{\partial I(U_3)}{\partial u_8} + \frac{\partial I(U_{12})}{\partial u_8} + \frac{\partial I(U_{13})}{\partial u_8} + \frac{\partial I(U_{14})}{\partial u_8} = 0$. Нетрудно видеть, что
$\frac{\partial I(U_2)}{\partial u_8} = 2u_8 + 0.013333$; $\frac{\partial I(U_3)}{\partial u_8} = 2u_8 - u_9 + 0.013333$; $\frac{\partial I(U_{12})}{\partial u_8} = 2u_8 - u_{14} + 0.013333$;
$\frac{\partial I(U_{13})}{\partial u_8} = u_8 - u_{14} + 0.013333$; $\frac{\partial I(U_{14})}{\partial u_8} = u_8 - u_9 + 0.013333$. В результате имеем
$8u_8 - 2u_9 - 2u_{14} = -0.066666$. Аналогично рассуждая
для узла 9, найдём $-2u_8 + 8u_9 - 2u_{10} - 2u_{15} = -0.08$.
Для узла 10- имеем $-2u_9 + 8u_{10} - 2u_{11} - 2u_{16} = -0.08$.
Для узла 11- имеем $-2u_{10} + 8u_{11} - 2u_{17} = -0.08$.
Для узла 14- имеем $-2u_8 + 8u_{14} - 2u_{15} - 2u_{20} = -0.08$.
Для узла 15 –имеем $-2u_9 - 2u_{14} + 8u_{15} - 2u_{16} - 2u_{21} = -0.08$.
Для узла 16- имеем $-2u_{10} - 2u_{15} + 8u_{16} - 2u_{17} - 2u_{22} = -0.08$.
Для узла 17- имеем $-2u_{11} - 2u_{16} + 8u_{17} - 2u_{23} = -0.08$.
Для узла 20- имеем $-2u_{14} + 8u_{20} - 2u_{21} - 2u_{26} = -0.08$.
Для узла 21- имеем $-2u_{15} - 2u_{20} + 8u_{21} - 2u_{22} - 2u_{27} = -0.08$.
Для узла 22- имеем $-2u_{16} - 2u_{21} + 8u_{22} - 2u_{23} - 2u_{28} = -0.08$.
Для узла 23- имеем $-2u_{17} - 2u_{22} + 8u_{23} - 2u_{29} = -0.08$.
Для узла 26- имеем $-2u_{20} + 8u_{26} - 2u_{27} = -0.08$.
Для узла 27- имеем $-2u_{21} - 2u_{26} + 8u_{27} - 2u_{28} = -0.08$.
Для узла 28- имеем $-2u_{22} - 2u_{27} + 8u_{28} - 2u_{29} = -0.08$.
Для узла 29- имеем $-2u_{23} - 2u_{28} + 7u_{29} = -0.04$.

В результате мы получим матрицу жёсткости 16-го порядка, имеющую 4 полосы выше главной диагонали и 4 полосы ниже главной диагонали, причём на главной диагонали будет стоять число 8, кроме последнего элемента, равного 7. Все числа, стоящие на 1-ой и 4-ой полосах выше и ниже главной диагонали будут одинаковы и равны(–2). Все числа, стоящие на 2-ой и 3-ей полосах выше и ниже главной диагонали также будут одинаковы и равны нулю и это значительно облегчит вычислительный процесс. В используемых нами обозначениях эта матрица имеет вид N=16, M=4, L=4 . И поэтому автор надеется, что последующий процесс нахождения неизвестных линейной алгебраической системы с такой матрицей не должен вызвать принципиальных осложнений. А для удобства можно перейти к хорошо знакомым неизвестным $x_1 = u_8; x_2 = u_9; x_3 = u_{10}; x_4 = u_{11}; x_5 = u_{14}; x_6 = u_{15}; x_7 = u_{16}; x_8 = u_{17}; x_9 = u_{20}; x_{10} = u_{21}; x_{11} = u_{22}; x_{12} = u_{23}; x_{13} = u_{26}; x_{14} = u_{27}; x_{15} = u_{28}; x_{16} = u_{29}$. Теперь запишем линейную систему алгебраических уравнений. Она будет довольно большой и не будет вмещаться в формат страницы И поэтому запишем её в два приёма

$$
\begin{aligned}
&8x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 2x_5 = -0.066666\\
&-2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 2x_6 = -0.08.\\
&-2x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 2x_7 = -0.08\\
&-2x_3 + 8x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - 2x_8 = -0.08\\
&-2x_1 + 8x_5 - 2x_6 + 0x_7 + 0x_8 - 2x_9 = -0.08\\
&-2x_2 - 2x_5 + 8x_6 - 2x_7 + 0x_8 + 0x_9 - 2x_{10} = -0.08\\
&-2x_3 - 2x_6 + 8x_7 - 2x_8 + 0x_9 + 0x_{10} - 2x_{11} = -0.08\\
&-2x_4 - 2x_7 + 8x_8 - 2x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} - 2x_{12} = -0.08\\
&-2x_5 + 8x_9 - 2x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} - 2x_{13} = -0.08
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2x_6 - 2x_9 + 8x_{10} - 2x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} - 2x_{14} = -0.08\\
&-2x_7 - 2x_{10} + 8x_{11} - 2x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} - 2x_{15} = -0.08\\
&-2x_8 - 2x_{11} + 8x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} - 2x_{16} = -0.08\\
&-2x_9 + 8x_{13} - 2x_{14} + 0x_{15} + 0x_{16} = -0.08\\
&-2x_{10} - 2x_{13} + 8x_{14} - 2x_{15} + 0x_{16} = -0.08\\
&-2x_{11} - 2x_{14} + 8x_{15} - 2x_{16} = -0.08\\
&-2x_{12} - 2x_{15} + 7x_{16} = -0.04
\end{aligned}
$$

Решение подобной системы уравнений мы, как говорится, уже проходили. На этом можно и завершить решение исходной задачи таким методом, а желающие могут с помощью компьютера довести это решение до числа. Такой метод решения задачи допускает обобщение не только на любые плоские области, но и на любые пространственные области, но там в качестве элементов будут уже не прямоугольники и треугольники, а параллелепипеды и тетраэдры. Существует уже большое число специальных программ, которые реализуют этот метод на компьютерах. Более того для обоснования крупного инженерного проекта в настоящее время требуется его математическое обоснование и заказчики этого проекта требует расчёта по аппробированным программам, базирующихся **только** на методе конечных элементов. В создании этих программ большую роль сыграли математики-теоретики, такие как Р. Курант, С.Г. Михлин, Оганесян, В.Я Ривкинд, Л. А. Руховец и математики-прикладники, среди которых хотелось бы выделить Зенкевича, Л.А. Розина, Л.А. Гордона, В.А. Корнеева, А.П. Филина, Б.А.Шойхета, А.А. Храпкова, М. Бурышкина, Б. Белостоцкого, С. Динкевича, В.И. Сливкера, Л.Б.Гримзе, А.В. Вовкушевского, Н.А. Вульфовича и особенно Леонида Александровича Розина, создавшего целую школу по реализации метода конечных элементов. Я попытаюсь предугадать сразу несколько вопросов, которые возможно возникнут у читателей и постараюсь с определённой долей убедительности на них ответить. Итак, первый вопрос: если у нас есть такие удобные программы, то зачем нам нужны аналитические решения? На этот вопрос мне кажется следует дать два ответа: 1.Аналитические решения позволяют оперативно и в ряде случаев быстрее ответить на конкретный вопрос или, как говорят инженеры, на вскидку проверить верен ли полученный численный результат. 2. Проверить точность полученного численного решения, проделав численное решение задачи, аналитическое решение которой уже известно. Например, мы только что нашли аналитическое решение неоднородного гармонического уравнения с однородными граничными условиями для единичного квадрата и показали как можно найти решение этой же задачи методом конечных элементов. При этом мы разделили этот квадрат на 50 элементов. Сравнив эти два решения, мы сможем сделать выводы о том, стоит ли дробить этот квадрат дальше или такая точность нас устраивает. Это, конечно, хорошо скажет кто-то из читателей, но такое сравнение справедливо в том случае, когда область достаточно простая и можно для оценки точности получить аналитическое решение. А как быть для случая произвольной области. Как оценить в этом случае точность полученного нами решения? Убедительный ответ на этот вопрос мне неизвестен. Обычно отвечают так, увеличим число элементов в два раза и посмотрим, как изменится результат вычисления, но мы уже с Вами отмечали, что это означает сходимость в себе, откуда в принципе не следует сходимость к известному из теории единственному решению. Я даже скажу более. Непосредственные исполнители, использующие различные и, в том числе хорошо аппробированные программы, дробят исследуемую область на конечные элементы один раз, совершенно не заботясь о точности вычисления. А точность вычисления, особенно в тех местах, где расчётная область может резко менять своё очертание, существенно меняется. На это разработчики различных программ рекомендуют в особо ответственных случаях производить расчёт по различным программам и, при этом ещё лучше, совершенно разными исполнителями, никак не связанными между собой. Так всегда поступали проектировщики и строители в обозримом прошлом, в том числе и тогда, когда основным вычислительным инструментом была логарифмическая линейка. Некоторые рекомендуют использовать для проверки другой метод расчёта, например, метод конечных разностей. Этот метод хорошо теоретически обоснован. Его использовали такие выдающиеся математики, как Г.И. Марчук и Н.Н. Яненко и многие другие. Сторонники этого метода обоснованно считают, что он значительно проще в реализации, чем метод конечных элементов. Мы уже с Вами неоднократно говорили, что метод конечных элементов, например, для гармонического уравнения предполагает интегрируемость первой производной от неизвестной функции. Метод же конечных разностей предполагает непрерывность вторых производных и тем самым изначально проигрывает методу конечных элементов по множеству используемых функции. И есть ещё одна причина почему этот метод изначально проигрывает методу конечных элементов. Рассмотрим простейший случай. Пусть, например, расчётная область покрыта равномерной прямоугольной сеткой $i\Delta x;\ j\Delta y\ i = 1,2,..,N.\ j = 1,2,..,M$, где $\Delta x, \Delta y$ – шаги по координатам x, y соответственно и $N\Delta x, M\Delta y$ – максимальный размер расчётной области по этим же координатам. Тогда значение искомой функции u в точке с координатами (i, j), согласно методу конечных разностей связано с соседними точками по следующему правилу (так называемый 5-ти точечный шаблон, смотри рисунок3). Если же мы для этого же примера будем использовать метод конечных элементов с элементами в виде тех же прямоугольников и с линейным восполнением по каждому из элементов, то значение искомой функции u в точке с координатами (i, j) будет связано с соседними точками согласно другому правилу (так называемый 9-ти точечный шаблон, смотри тот же рисунок). И это для плоской задачи. Для трёхмерной задачи мы будем иметь дело с 27-ми точечным шаблоном по сравнению с 7-ми точечным. Дальнейшие комментарии, я думаю, излишни. И, несмотря на это, метод конечных разностей, ввиду его более простой реализации, может в ряде случаев конкурировать с методом конечных элементов, например, тогда, когда требуется подтвердить результаты расчёта другим методом. В случае, если исследуемая область резко меняет свои очертания, то для уточнения результатов расчётов отдельных фрагментов этой области могут помочь аналитические методы, которые, на мой взгляд, пока ещё не следует игнорировать. В настоящее время существуют уже не просто отдельные программы, но и целые расчётные комплексы, реализованные на компьютерах и базирующиеся на методе конечных элементов, доставляющем экстремум для различных функционалов. При этом имеются в виду не только упомянутые выше уравнения математической физики, но и линейные и нелинейные системы этих уравнений, как для плоских, так и для пространственных областей. Сервисная часть этих комплексов снабжена соответствующим набором различных конечных элементов, с тем, чтобы потребитель смог сам выбрать такие из них, которые с его точки зрения наиболее подходят для исследуемой области. Наличие таких комплексов, на мой взгляд, не означает, что в вычислительной математики все вопросы уже решены. Математика и в том числе вычислительная математика- это живой организм, который постоянно развивается и может быть Вы, дорогой читатель, примете в этом непосредственное участие. В заключении этого литературного произведения о математике, а именно такое определение возможно наиболее точно подходит для прочитанного Вами повествования, мне хотелось бы привести одну фразу, которую некоторые граждане приписывают Н.Г. Чернышевскому. Она звучит так:

"Можно не любить математику, но не любить историю невозможно". Автор согласен со второй частью этой фразы. Для него история тоже самый любимый предмет, но он надеется на то, что ,прочтя это литературное произведение, Вы, дорогой читатель, полюбите и математику.

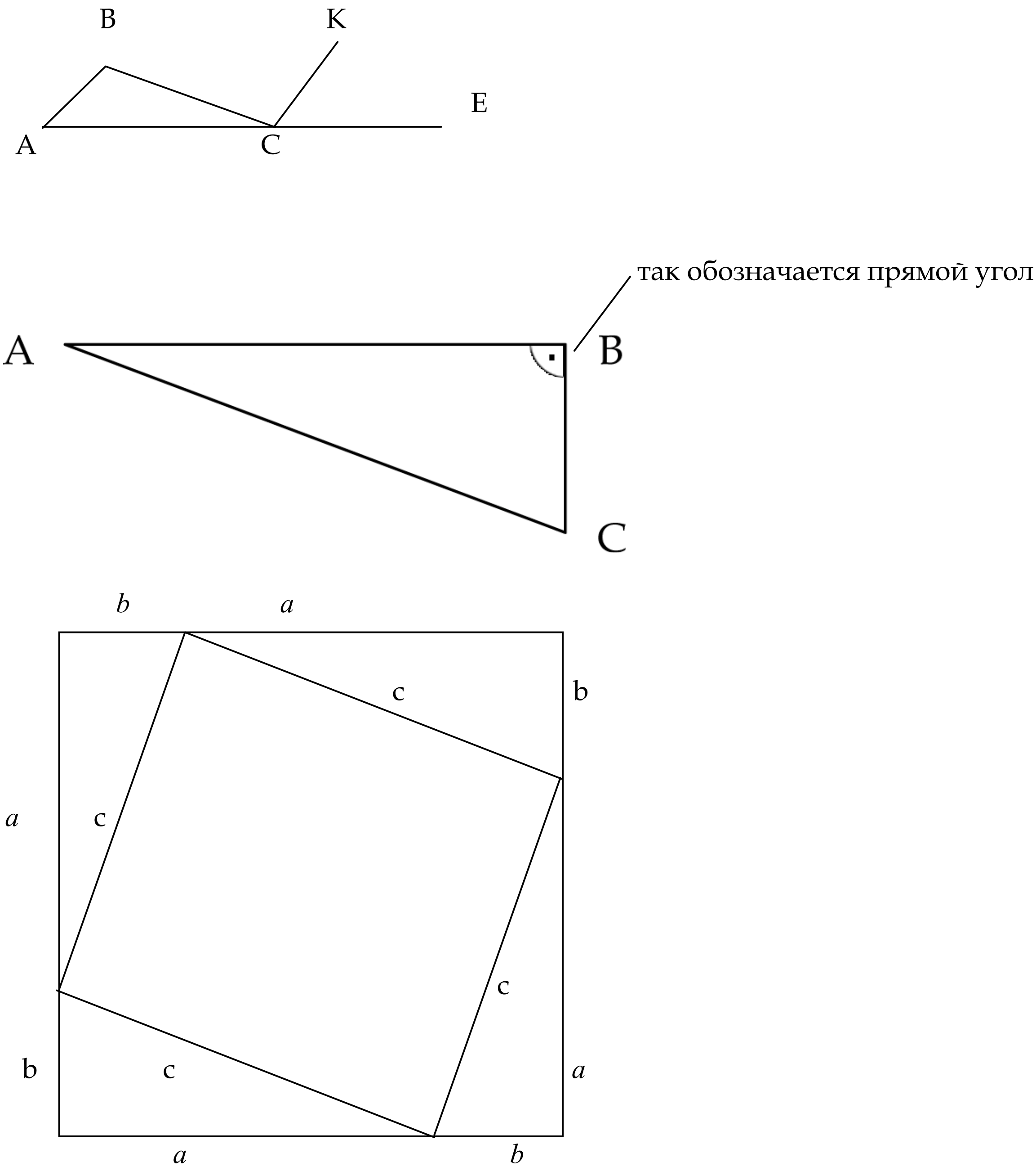
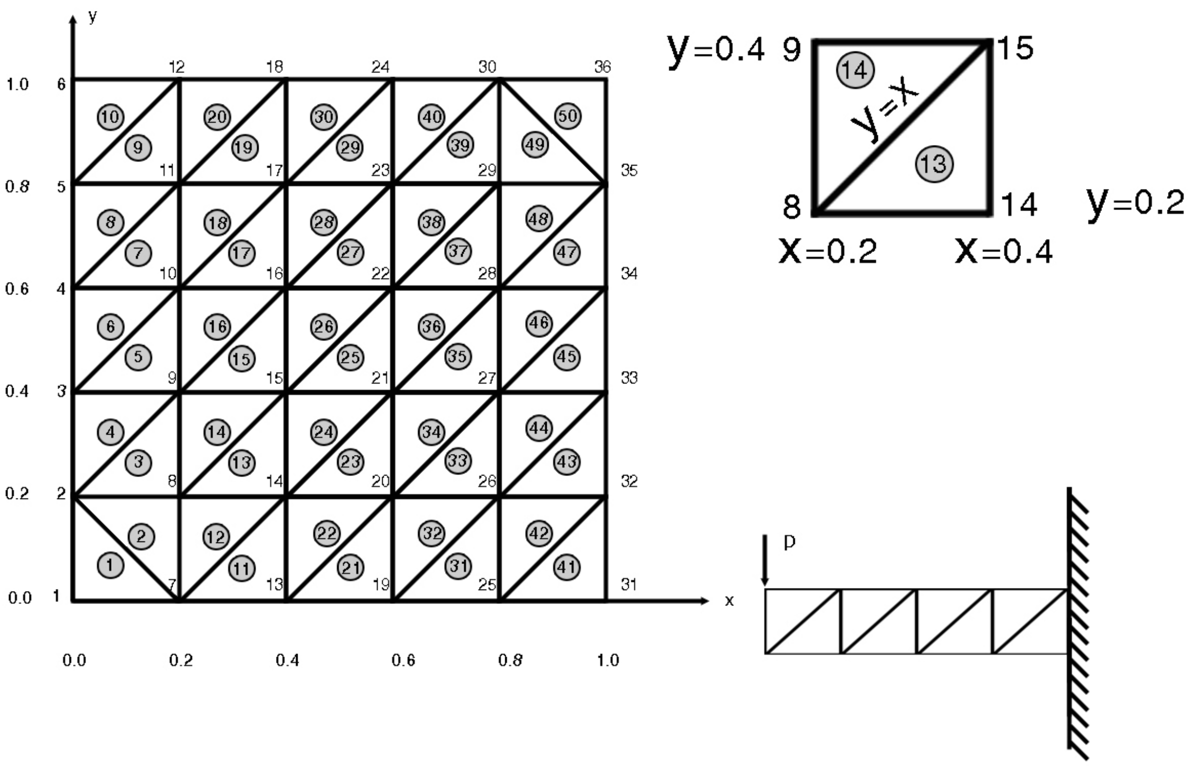


Рис. 1



Консоль

Рис. 2 Схема расчетной области. Неправильное разбиение на элементы для консольной балки.

	• Ui,j+1	
• Ui-1,j	**• Ui,j**	**• Ui+1,j**
	• Ui,j-1	

5-ти точечный шаблон

• Ui-1,j+1	**• Ui,j+1**	**• Ui+1,j+1**
• Ui-1,j	**• Ui,j**	**• Ui+1,j**
• Ui-1,j-1	**• Ui,j-1**	**• Ui+1,j-1**

9-ти точечный шаблон

Рис. 3

ЭТЮДЫ О МАТЕМАТИКЕ

АЛЕКСАНДР ЦЫБИН

Денвер, Колорадо 2012 г

Подписано в печать 19 августа 2012 г.

Формат 8.5″ на 11″. Тираж 1000 / book-on-demand

Издательство HMG Press, Denver, Colorado

8547 E. Arapahoe Rd., Ste J-177

Greenwood Village, CO 80112

Tel. 720-436-7613 Fax 866-559-2923

e-mail: **gorizont.press.@gmail.com**

Printed by On-Demand Publishing, LLC.