НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

7/1983

Издается ежемесячно с 1967 г.

Б. В. Гнеденко

МАТЕМАТИКА И НАУЧНОЕ ПОЗНАНИЕ

Издательство «Знание» Москва 1983

ББК 22.1
Г 56

ГНЕДЕНКО Борис Владимирович — академик АН УССР, лауреат Государственной премии, крупный специалист в области теории вероятностей и математической статистики. Б. В. Гнеденко не только крупный ученый, но и блестящий педагог и популяризатор научных знаний, член Президиума Правления Всесоюзного общества «Знание».

Рецензент: Жидков Н. П. — кандидат физико-математических наук.

Гнеденко Б. В.

Г 56 Математика и научное познание. — М.: Знание, 1983. — 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 7).
11 к.

Брошюра посвящена особым, свойственным математике возможностям формирования у студентов и школьников основ научного мышления и деятельности. В ней рассказывается об источниках нового в математике, о происхождении математических понятий, о соотношении математики и практики.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей.

1702010000 ББК 22.1
51

Предисловие

Один из крупнейших естествоиспытателей нашего времени сказал, что математика является значительно большим, чем наука, поскольку она является языком науки. Эта фраза требует пояснения, поскольку в западных странах и США слово «наука» (science) употребляется в более узком смысле, чем в нашей стране, а именно только для обозначения естественных дисциплин и не включает в себя гуманитарных и социальных предметов. Приведенное утверждение в последние годы приобретает все большее число сторонников, поскольку к математике за помощью обращаются представители не только физики и астрономии, авиации и космонавтики, но и организаторы производства, медики, работники транспорта, агрономы и социологи. Математика стала не только орудием количественных расчетов, но и методом точного исследования и формулировки понятий и задач. Каждому ясно, что без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен современный прогресс физики, так бы и остались нерешенными многие принципиально важные проблемы авиации и космонавтики, метеорологии и радиотехники.

В связи с таким увеличением роли математики в жизни общества возникает необходимость на любых ступенях математического образования стремиться не только к изложению фактического материала, но и к изложению методологических моментов науки, в том числе связей математики с познанием окружающего нас мира и его закономерностей, возникновения и формирования понятий математики. Несомненно, что такой подход позволит помочь формированию правильного научного мировоззрения учащихся. Эта задача необычайно сложна и многосторонняя. Несомненно, что основную роль в ее решении играют социальные дисциплины, и в первую очередь философия, но каждая естественнонаучная дисциплина и математика могут внести в ее решение свой особый вклад, осветить возникающие мировоззренческие вопросы со специфической стороны.

Великие педагоги и ученые прошлого отдавали должное воспитанию мировоззрения и посвящали много сил тому, чтобы ученики восприняли их жизненные позиции, их представление о месте науки в жизни человеческого общества, их отношение к делу и к выбору направления личной деятельности.

В замечательной речи «О важнейших предметах воспитания» Н. И. Лобачевский затронул ряд проблем, которые и в наши дни остаются актуальными как для средней, так и для высшей школы. Вот некоторые из них: воспитать стремление к познанию, самостоятельность мышления, научное мировоззрение, любовь к отечеству и представление о собственной чести, умение направлять приобретенные знания на общественную пользу, трудолюбие, желание развивать природные способности. Лобачевский, борясь со схоластикой в преподавании, словами Френсиса Бэкона направлял умы студенческой молодежи на познание природы: «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно».

Полезно вспомнить такие слова К. Д. Ушинского: «Каждый класс, начиная с самого младшего, должен иметь свое округленное мировоззрение, доступное возрасту учеников... С каждым годом это миросозерцание должно округляться, расширяться, пополняться».

В некрологе, посвященном своему замечательному учителю, А. М. Ляпунов писал: «Когда, наконец, получался желаемый вывод, П. Л. Чебышев садился, но не на кафедру, а на кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особенный интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория». Эти замечания воспитывали активное отношение учеников к науке, к выбору тем для исследования, создавали их взгляды на назначение науки и ученого. Иными словами, Чебышев в своих лекциях обращал на вопросы методологического характера особое внимание, и студенты с нетерпением ждали этой части его лекции.

Далее А. М. Ляпунов писал: «П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды».

Сейчас, когда математика стала орудием познания и практической деятельности, воспитание правильных методологических установок на занятиях по математике особенно важно. Пренебрежение этим также можно считать своего рода воспитанием, но воспитанием самым худшим, которое приносит не пользу, а вред.

Сейчас нужно научиться так строить преподавание, чтобы в наиболее полной степени осуществлять принцип, высказанный Д. И. Менделеевым: посев научный для жатвы народной. Нам нужно воспитать наших учеников в привычке к самостоятельному мышлению, в смелости к самостоятельным поискам нового, в вере в свои силы и в способности длительное время сосредоточивать мысли на волнующей проблеме, на разыскивании новых путей ее решения. Нужно воспитывать не стандартное мышление, а саму живую мысль, вечно ищущую и создающую интеллектуальные ценности, открывающие новые возможности для производства материальных ценностей. Ведь живая мысль нужна не только для совершенствования научных знаний, поиска новых методов работы, но и в практической жизни. Недаром в былые годы в России была широко в ходу поговорка «дурная голова рукам работу дает». В этой поговорке нет пренебрежения к физической работе, но есть убеждение в том, что хорошая мысль позволяет облегчить физический труд, сделать его более производительным и целенаправленным.

В эпоху научно-технического прогресса машины, технологические процессы, технические системы стареют исключительно быстро. Для того чтобы не отстать от времени, не изготовлять то, что уже не является передовым и совершенным, необходимо научиться смотреть вперед, улучшать, совершенствовать старое и еще важнее — создавать новое на базе иных принципов. Другими словами, нам необходимо воспитывать молодое поколение в атмосфере творчества, поиска новых, более совершенных решений, неудовлетворенности достигнутым. И таких ищущих граждан стране нужны не единицы, а многие десятки тысяч, поскольку возможностей для поиска, изменения к лучшему технологических процессов, конструкций, уборочных агрегатов, условий работы и пр. имеется много повсюду, на любом участке трудовой деятельности. Нужно научиться замечать недостатки и находить пути их устранения. При этом следует помнить, что каждое, пусть даже небольшое совершенствование методов расчета, увеличение производительности труда в масштабах страны становится весомым вкладом в ее прогресс.

К сожалению, мы нередко не замечаем недостатков в нашей работе, не стремимся устранять то, что нам мешает, а это приводит к излишнему утомлению и замедлению трудового процесса. Я позволю себе привести лишь два примера, поскольку знаю, что практически каждый читатель без труда может умножить их число.

Вспоминаю, как я был на одном из наших крупных машиностроительных заводов и наблюдал за работой линии станков. На автокаре к станкам подвозились детали массой около 20 кг, опускались вручную на пол, а затем рабочий-станочник поднимал деталь и устанавливал на станок. Спрашивается, почему не установить около станков столики, на которые укладывались бы привезенные детали? Ведь при этом не нужно будет затрачивать никому не нужные усилия при разгрузке автокара и при подъеме деталей с пола. Я об этом сказал начальнику цеха и в ответ услышал: «А мы к этому привыкли и не замечаем».

Второй пример связан с погрузо-разгрузочными работами на транспорте. Мне неоднократно приходилось наблюдать, как загружаются и разгружаются крытые вагоны: мощный подъемный кран подносит (или относит) к вагону 10—20 т груза, опускает его около вагона, а затем вручную или же посредством автопогрузчиков этот груз подается в вагон, где его укладывают в должном порядке. Так поступают с ящиками, мешками и рассыпными грузами. Естественно спросить: а кто определил, что грузить можно только через двери? Почему нельзя сделать раздвижную крышу и загружать (и разгружать) вагон через верх непосредственно краном? Мне ответят, что так никто не делает, таких вагонов промышленность не производит. Но ведь всегда случается так, что чего-то не делают только потому, что этого еще нет, до этого люди еще не дошли. Но, спрашивается, когда уже имеется идея и идея сулит огромный выигрыш на погрузо-разгрузочных работах, почему нужно продолжать старые традиции, а не завести новые, пока и они не устареют и не потребуют замены на более совершенные? Нам нужно как можно скорее преодолеть страх перед новым, чтобы хорошее старое не закрывало дорогу новому, перспективному, сулящему экономию времени, средств, труда. Воспитание такого отношения к делу следует начинать в школе, продолжать в вузе и закреплять на практической работе.

Точки зрения, жизненные концепции, привычки, приобретенные в детстве и юности, необычайно стойки, и многие, выработав их, уже не в состоянии взглянуть на дело с других позиций, даваемых самой практикой, самой жизнью. Я вспоминаю, как мне довелось работать над проблемами организации погрузки и выгрузки грузов в морских портах и на железнодорожных станциях. Я был удивлен исключительно стойкой приверженностью к полностью детерминистическому подходу, не допускающему никаких иных, которые учитывали бы влияние случайных факторов, — различия грузов в разных вагонах, отличия производительности разных бригад, количества прибывших грузов и т. д. Мы к этому примеру вернемся позднее, когда обратимся к вопросам теории массового обслуживания — математической теории, созданной в самые последние десятилетия и нашедшей многочисленные применения во всех областях деятельности — инженерном деле, организации производства, медицинского и бытового обслуживания, в телефонной связи, в организации работы ЭВМ и пр.

В 16-м томе БСЭ (третье изд.) дано следующее определение: «Мировоззрение — система взглядов на объективный мир и место человека в нем, на отношение человека к окружающей его действительности и самому себе, а также обусловленные этими взглядами основные жизненные позиции людей, их убеждения, идеалы, принципы познания и деятельности, ценностные ориентации». Причем это далеко не все взгляды и представления об окружающем мире, а это идеалы и принципы, которые человек готов отстаивать и подкреплять серьезными доводами. Основой мировоззрения советских людей является марксистская философия.

Глава 1. ЧТО ИЗУЧАЕТ МАТЕМАТИКА?

§ 1. О предмете «математика»

На вопрос, который стоит в названии главы, ответить не так просто, и в зависимости от уровня математического образования ответы будут весьма различны. Школьник, только приступивший к изучению математики, ответит, что математика изучает правила счета предметов. И он будет прав. Это важная часть математики, и длительный период истории именно она составляла едва ли не единственный предмет ее занятий. Школьники постарше добавят к сказанному изучение геометрических объектов — линий, фигур, тел, преобразований, а старшие школьники — действие перехода к пределу и изучение функций. Лица, закончившие высшее техническое учебное заведение или же естественнонаучные факультеты университетов, уже не удовлетворятся определениями школьников, поскольку они знают, что в состав математики входят теория вероятностей, математическая статистика, дифференциальные уравнения, а также методы использования ЭВМ для целей вычисления, обработки опытных данных, получения и переработки информации. Однако и этим не исчерпывается содержание математики. Теория множеств, математическая логика, оптимизационные задачи, теория случайных процессов. Все это входит в состав математики и не сводится ни к арифметике, ни к геометрии, ни к основам математического анализа.

Но такого рода ответы уводят в сторону от заданного вопроса. Они попросту перечисляют те направления математической мысли, которые имеются в науке, но не отвечают на сам вопрос. Действительно, если бы подобный вопрос был задан физику, химику или биологу, то они не стали бы перечислять ветви физики, химии или биологии, а стали бы говорить о тех явлениях природы, которые они изучают. Допустим, биологи сказали бы, что биология изучает различные проявления жизненных явлений. Конечно, при этом возникла бы необходимость определить, что такое жизнь и жизненные явления, но все же такое определение дало бы достаточно точное представление о деятельности биолога и о содержании самой науки биологии.

Таких явлений природы, которые были бы объектом изучения математики, но не относились бы к явлениям физическим, химическим, биологическим или социальным, нет. Очень хорошо об этом сказано в статье А. Я. Хинчина «Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей» *. Нет нужды пересказывать эти идеи, мы лучше приведем его слова.

«Основной критерий, отличающий естественнонаучную дисциплину от математической, мы видим в том характере определения свойственной данной науке области исследования, который является типичным для этих двух категорий научных дисциплин. Каждая естественнонаучная дисциплина определяется материальной спецификой своего предмета, реальными чертами той области действительного мира, которую она изучает. Именно так определяют свой предмет физика, биология, психология. Один и тот же предмет может быть изучаем самыми различными методами, в том числе и математическими; но, переходя от одного метода к другому, мы всегда остаемся в пределах данной (естественнонаучной) дисциплины, ибо для нее реальный предмет, а не метод исследования составляет основную специфическую черту...

Напротив, определяющим признаком всякой математической дисциплины всегда является некоторый формальный метод, потенциально допускающий самые различные материальные воплощения, а следовательно, и практические применения. Может ли быть тот или другой предмет, то или другое явление реального мира исследуемо с помощью данного математического метода — этот вопрос решается не конкретной материальной природой предмета или явления, но исключительно их формальными структурными свойствами и прежде всего теми количественными соотношениями и пространственными формами, в которых они живут или протекают. Пример: метод дифференциальных уравнений — в физике, химии, биологии — для применения достаточно наличия двух непрерывно меняющихся величин, изменения которых имеют определенную относительную скорость».

В недавней статье «Геология и космос» (Известия, № 14 за 14 января 1983 г.) заместитель министра геологии СССР В. Волков писал: «Данные дешифрирования космических снимков в комплексе со сведениями о составе и возрасте горных пород, проявлениях полезных ископаемых, геохимических и геофизических аномалиях обраба-

* Вопросы философии, 1961, № 1, с. 91—102; № 2, с. 77—89.

тываются с помощью ЭВМ. Это позволяет наметить наиболее перспективные площади для детальных работ». Несомненно, что применение ЭВМ к геологическим исследованиям оставляет эти исследования геологическими. Принципы же работы ЭВМ, их математическое обеспечение разрабатывались без учета возможного геологического использования. Возможность использования ЭВМ для целей обработки космических снимков определена тем, что структурные свойства этих данных находятся в соответствии с логикой определенных программ работы ЭВМ.

Математический результат обладает тем свойством, что он применим при изучении не только какого-то определенного явления или процесса, а может найти использование и во многих других, физическая природа которых принципиально отлична от ранее рассматриваемого. Так, правила арифметики применимы и в задачах экономики, и при технических расчетах, и при решении вопросов сельского хозяйства. Арифметические правила выработаны много столетий назад, их изучение сейчас имеет лишь педагогическое значение, поскольку в научном отношении относительно них сказать совершенно нечего, но прикладную ценность они сохранят на вечные времена. Арифметика представляет собой составную часть математики, и хотя ее традиционная часть уже не подлежит творческому продолжению внутри самой математики, она находит и будет находить многочисленные применения практического характера.

Но все-таки, чем же занимается математика, каков предмет ее исследований? Ответу на этот вопрос посвящено большое число работ. Рассмотрим две получившие широкое распространение точки зрения. Одна из них была высказана Ф. Энгельсом в известном произведении «Анти-Дюринг», другая — Н. Бурбаки в статье «Архитектура математики» (1948 г), а затем в книге «Очерки по истории математики». Согласно Ф. Энгельсу, «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» *. Н. Бурбаки утверждают, что «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры» **.

---

* Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 37.
** Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., Изд-во иностр. лит., 1963, с. 251.

В связи с двумя приведенными определениями полезно заметить, что их обсуждение было предметом остро написанной статьи Г. Кацивели «Математика и действительность» *. В этой статье два лица А и Б беседуют на тему об отношении математики к реальному миру. Мы приведем вкратце их слова:

«А. — Разве можно сомневаться в наши дни в том, что математика имеет дело с реальным миром? А радио и телевидение, а синхрофазотроны, а космические полеты — все это связано с огромным фронтом чисто математических изысканий, при которых используется не только элементарная математика или классическое дифференциальное и интегральное исчисление, но и самые новейшие математические теории. Например, возьмем многомерные пространства — вы ведь не возражаете, что фазовые пространства в статистической механике — пространства с огромным числом измерений, что они отражают непосредственную материальную действительность, хотя бы для задач динамики газа в сосуде?

Б. — Несомненно. Но все то, что вы приводите в пример, и большое количество других, не менее впечатляющих примеров, которые мог бы привести и я, кстати, полностью оправдывающих затраты общества на содержание математиков, — все это не является основной частью математики, а лишь ее «отходами», более или менее частными и случайными. На каждый ваш пример применения математических результатов к действительности я могу привести десяток примеров великолепных математических результатов, не имеющих никакого отношения к действительному миру. Таким образом, настоящая математика имеет своим предметом математические структуры сами по себе, без связи с нуждами действительного мира. А ваш основной тезис, кроме того, не подтверждается и фактической историей математики.

А. — Вот как? Можно просить Вас высказаться подробнее?

Б. — Пожалуйста. Я не отрицаю, что математика возникла и развивалась вначале под прямым воздействием практики. Из счета предметов возникла арифметика, из измерения расстояний и площадей — геометрия. Но в обеих этих областях сразу же возникла проблематика, никак не связанная с действительным миром, а именно

* Кацивели Г. Математика и действительность. Историко-математические исследования, вып. XX, 1975, с. 11—27.

ею, а не нуждами практики занимались великие математические умы. В арифметике это была проблема о распределении простых чисел...»

В этом диалоге лицо А. — слишком прямолинейно отстаивает тезис о том, что математика изучает действительность. Позиция лица Б. при ближайшем рассмотрении оказывается шаткой и совсем необоснованной. Как-никак изучение свойств целого положительного числа, возникшего из непосредственных нужд практики, едва ли может считаться совсем не связанной с действительным миром. Создается ощущение, что лицо Б пользуется прямолинейностью лица А. и выдает ему сомнительные суждения за истины в последней инстанции.

Точка зрения диалектического материализма очень четко и полно выражена словами В. И. Ленина, записанными им при конспектировании книги Гегеля «Наука логики»: «Абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*. От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины...»* * Абстрактное мышление, создание теории, изучение свойств понятий, согласно диалектическому материализму, не отрывает познание от действительного мира, но позволяет, если только они правильны, познавать его глубже, является необходимым шагом любого познания. Ленин подчеркнул позднее эту мысль, записав такие слова: «Математика, постепенно удаляясь от пространств, доступных чувственному восприятию, и возвышаясь до пространства геометрического, не удаляется, однако, от реального пространства, т. е. от истинных отношений между вещами. Она скорее приближается к ним» **.

В «Диалектике природы» Ф. Энгельс писал: «...вся так называемая чистая математика занимается абстракциями... *все* ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины...» *** Эти слова достаточно четко отражают мнение одного из основоположников марксистской философии относительно роли абстракции в математике. На этом фоне по меньшей мере странным является заявление лица Б. в статье Кацивели: «А как формируются математические структуры? Я утверждаю, что их источник — вовсе не

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152.

** Там же, с. 482.

*** Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 586.

материальный мир, а чистое мышление. Рассмотрим сначала структуры, возникшие в алгебре. Начнем с комплексных чисел. Комплексные числа прошли долгий путь развития в несколько веков — организации в структуру; но вплоть до начала XIX в. они считались «мнимыми», «воображаемыми», т. е. не имеющими никакого отношения к действительности» (с. 19).

В свете приведенных слов Ф. Энгельса на эту позицию лица Б. следует взглянуть совсем иначе, чем того желает Б. Вдобавок следует отметить и то, что мнимые и комплексные числа стали рассматриваться совсем не потому, что «чистое мышление» предложило их рассматривать. Они стали объектом математического исследования в связи с тем, что встретились при решении алгебраических уравнений второй и высших степеней. В рассуждениях Б. видна не подлинная попытка разобраться в существе дела, а игра словами.

Позиция Н. Бурбаки также требует некоторых пояснений. С этой группой французских математиков вполне можно согласиться, что математика занимается изучением математических структур. Собственно в этом нет ничего нового, поскольку математика всегда занимается тем, что изучает математика. Речь идет о том, откуда берутся эти структуры и какое отношение они имеют к миру действительности. Если это абстракции некоторых сторон реального мира, то позиция Бурбаки вполне согласуется с точкой зрения Ф. Энгельса. Но сами Н. Бурбаки писали, что «...основная проблема состоит во взаимодействии мира экспериментального и мира математического. То, что между материальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда не узнаем» *.

Это — разочаровывающий вывод, и он означает только одно, что Н. Бурбаки лишь поверхностно затронули важнейший вопрос: каков объект изучения математики. Они не постарались в историческом аспекте выявить процесс формирования основных понятий и основных задач, которыми она занимается.

* Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М. Изд-во иностр. лит., 1963, с. 258.

Подобный вопрос в определении Ф. Энгельса даже не может возникнуть, поскольку в нем уже содержится утверждение о том, что математические понятия являются лишь абстракциями от некоторых отношений и форм реального мира, они берутся из реального мира и поэтому естественным образом с ним связаны. В сущности этим объясняется поразительная применимость результатов математики к явлениям окружающего нас мира, объясняется успех того процесса, который мы сейчас наблюдаем и который получил наименование математизации знаний. Но вместе с тем мы отмечаем, что даже правила математики не обладают абсолютной достоверностью — для них также имеется ограниченная область применений, где они господствуют безраздельно. А вне этой области могут наблюдаться отклонения от них. Примеры, которые пояснили бы эту мысль, найти нетрудно. Вот один из них. Хорошо известно, что при смешении литра воды и литра спирта мы не получим двух литров смеси, молекулярное строение материи приведет к тому, что молекулы этих двух жидкостей расположатся компактнее и объем смеси будет меньше двух литров. Правило сложения арифметики нарушится. Можно привести и примеры того, что сумма существенно зависит от порядка суммирования. В связи с этим замечанием полезно вспомнить одно высказывание В. И. Ленина, записанное им в связи с рассмотрением учения о понятии в «Науке логики» Гегеля: «Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов etc., каковые понятия, законы etc. (мышление, наука=«логическая идея») и *охватывают* условно, приблизительно универсальную закономерность вечно движущейся и развивающейся природы» *.

Математика не является исключением из всех областей познания — она тоже позволяет изучать явления лишь приближенно. Но следует иметь в виду, что ее выводы логически абсолютно точны и строги. Ее приближенность носит не внутренний характер, а лишь связанный с описанием реальных явлений. Но об этом позднее в соответствующем месте будет сказано подробнее.

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 163—164.

§ 2. Методологические аспекты работы математиков

Крупнейшие математики прошлого и настоящего в своем большинстве интересовались не только решением конкретных задач и построением теорий. Их интересовали такие вопросы методологического характера, относящиеся к принципам науки: как возникают математические проблемы? Какое отношение имеет математика к запросам практики? Что является критерием жизненности математических теорий? Творит ли математик свободно или же на его построение накладываются ограничения, связанные с жизненной практикой? На эти и многие другие вопросы в произведениях классиков математической науки, как, впрочем, и в произведениях классиков марксизма-ленинизма, имеются интересные ответы. Некоторые из них приведены в настоящем параграфе.

Мы начнем с изложения некоторых положений философии И. Канта, поскольку они вызвали резкую критику ряда крупнейших математиков XIX в. — М. В. Остроградского, Н. И. Лобачевского и ряда других. Мы не ставим перед собой цели изложить всю философскую систему Канта, а коснемся лишь тех ее положений, которые оказали непосредственное влияние на философские взгляды математиков.

И. Кант (1724—1804) был одним из крупнейших представителей идеалистической философии. Его философская система крайне противоречива, и он сам писал в «Критике чистого разума»: «Я должен был ограничить область знания, чтобы дать место вере». Центром философских взглядов Канта является его агностицизм, ограничение познаваемости мира и его явлений человеческим разумом. Некоторые явления природы, согласно Канту, непознаваемы принципиально и, следовательно, человек обречен никогда ничего о них не узнать. В то же время Кант учил, что человек обладает некоторыми врожденными понятиями, априорными формами знания. К таким доопытным формам знания относятся наши представления о времени и пространстве. Евклидовость пространства, по Канту, является не отвлечением от результатов наблюдений, а вложена в нас заранее. С позиций Канта рассудок, чтобы судить о чем бы то ни было, должен заранее обладать представлениями о некоторых основных понятиях, а также о логических категориях (единство, множество, отрицание, причинность, возможность, необходимость и др.). Понятия, по Канту, не образуются на основе долголетнего опыта, а постоянно находятся в нашем сознании, нашем «я». Критикуя отрицание Кантом объективного характера законов природы, обнаруживаемых усилиями науки, В. И. Ленин писал: «Кантианско-махистская формула «человек дает законы природе» есть формула фидеизма» *.

Философия Канта в XVIII — первой половине XX столетия нашла множество приверженцев в среде ученых. Математикам и механикам особенно широко известны две разновидности кантианства, получившие названия махизма и конвенционализма. Первая система была разработана известным ученым в области механики Э. Махом (1838—1916), вторая — крупнейшим математиком и физиком второй половины прошлого века А. Пуанкаре (1854—1912). Многочисленные модернизации этих идеалистических систем, так или иначе базирующихся на кантианстве, систематически появляются и в наше время. Всем им в какой-то мере свойственны агностицизм, непознаваемость мира человеком.

Однако имелись крупные ученые, которые подняли свой голос против кантианства и всеми средствами стремились показать молодому поколению ложность идей кантианства, ограничивающего полет мысли и стремление к познанию мира. Особенно критике со стороны Лобачевского подвергались идеи Канта о врожденных идеях и доопытном знании.

В работе «О началах геометрии» (1829) Н. И. Лобачевский (1792—1856) писал: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу... Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным не должно верить» **. Этим утверждением сказано очень многое: во-первых, полное несогласие с идеей Канта о врожденных идеях, а во-вторых, дало представление о том, что математические понятия и объекты исследования возникают не сами по себе, а в связи с исследованием природы. Несколько раньше в обозрении преподавания чистой матема-

* Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч., т. 18, с. 166.

** Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 1. М., Гостехиздат, 1964, с. 186.

тики на 1822—1823 гг. Лобачевский писал: «То неоспоримо, что мы всеми нашими понятиями о телах одолжены чувствами. Подтверждается истина сего и тем, что там останавливается наше суждение, где перестают руководствовать нас чувства; и что мы отвлекаем от тел и такие понятия, к которым наклоняют нас чувства... Пример тому прямые, кривые линии и поверхности, которых в телах природы нет...» * Позднее в большом сочинении «Новые начала геометрии» он вновь писал во вступлении: «Первыми данными, без сомнения, будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств» **.

Для Лобачевского источником наших знаний, в том числе и в математике, является реальный мир и те явления, которые в нем протекают и наблюдаются нами. Не ограничиваясь непосредственными наблюдениями, мы на их базе строим понятия, отвлекаясь от непосредственных данных наших чувств. Конечно, разум на основании прежних наблюдений и полученных выводов делает дополнительные выводы, находит следствия и о том, чего мы еще не наблюдали. Но всегда эти логические следствия следует проверять на опыте. Согласно Лобачевскому в основе математики должны лежать не произвольные понятия, а лишь те, которые приобретаются из наблюдений за природой и ее явлениями. А «все те понятия, которые не могли быть приобретены нашими чувствами... должны быть откинуты. Те, которые хотели ввести подобные понятия в математику, не нашли себе последователей»***.

На той же странице Лобачевский еще раз возвращается к этому тезису и пишет: «... все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики, а часто даже не оправдываются ею. Одинаковость начальных понятий всех людей, их простота и малое число показывают, что они суть необходимое следствие существа вещей относительно к природе человека, а посему и будут всегда прочным основанием наук».

* Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.— Л., Наука, 1976, с. 62.

** Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. II. М., Гостехиздат, 1949, с. 164.

*** Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма, с. 62.

Все цитаты, приведенные нами из произведений Н. И. Лобачевского, имеют явную антикантианскую направленность. В ту пору именно философские взгляды И. Канта были модным учением, которое имело в России официальное признание. Профессора философии излагали его в своих университетских лекциях и прививали его молодым умам. Лишь отдельные голоса поднимались тогда против учения Канта, и среди них твердо звучали высказывания двух математиков — Н. И. Лобачевского и Т. Ф. Осиповского. Они оба воспитывали своих учеников в духе материалистических взглядов, пусть иногда и наивных с позиций диалектического материализма. Но для них первичным источником наших знаний был внешний мир, который существует вне нашего сознания и познаваем.

Философские вопросы математики постоянно возникают в современной монографической и учебной литературе. Очень наглядный пример такого (но неприемлемого для нас) подхода содержится в превосходной, что касается формального изложения математической части, книге В. Феллера. Для него соотношения теории вероятностей являются не чем иным, как «правилами игры». В этом отношении характерен весь § 1 Введения к книге*.

В предисловии к переводу А. Н. Колмогоров отмечал методологические недостатки книги Феллера. Я позволю себе привести из этого предисловия довольно значительную цитату, поскольку она хорошо характеризует подход к этим вопросам советской науки.

«Подчеркивая в предисловии и в ряде мест книги свою практическую направленность и связь теории с опытом, Феллер излагает вопрос между теорией, опытом и практикой неправильно. Особенно отчетливо его ошибочная концепция изложена во Введении к книге. Феллер объявляет здесь, что каждая научная теория должна рассматриваться с трех различных точек зрения: 1) с точки зрения ее формального логического содержания, 2) с точки зрения связанных с ней интуитивных представлений и 3) с точки зрения приложений. Философский анализ соотношений между этими сторонами дела Феллер объявляет не имеющим большого интереса. Способ применения математических теорий объясняется делом чисто техническим. Об обратном влиянии практики на развитие теории не говорится ничего вра-

* Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во иностр. лит. М., 1952; 2-е изд. М., Мир, 1964.

зумительного. Таким образом, возможность применения теории к практическим задачам оказывается ничем не объясненной случайностью. Абзац, посвященный «формальному логическому содержанию» теории, в основном сведен к аналогии между математической теорией и шахматами. Переходя к «интуитивным соображениям», Феллер пытается на минуту установить все же различие между научной теорией и игрой в шахматы, отмечая, что геометрия, в отличие от шахматной игры, опирается на данные «интуиции». Но различие это оказывается у Феллера весьма эфемерным, так как затем он заявляет, что сама интуиция произвольно меняется под влиянием развития теории и что как раз шахматисты обладают весьма прочной и приводящей их к правильным выводам «шахматной» интуицией.

Излишне говорить советскому читателю, что пропущено здесь основное звено: познание действительности. Только правильное знание и позволяет науке вернуться к практике, из которой она выросла, и руководить ею. Позабыв об этом, Феллер не может объяснить ни формального логического строения научной теории, ни интуиции, ни возможности применений. Система формальных правил обращения с символами только тогда имеет «логическое содержание», когда она дает возможность получать правильные выводы о каких-либо реальных вещах. В наблюдении этих реальных вещей, а не в самой логической схеме коренится соответствующая интуиция (например, геометрическая). Возможность же применять теорию объясняется только тем, что сама теория возникла из практического соприкосновения с окружающим нас миром. Так просто разрешаются все парадоксы, разбросанные во введении Феллера к его книге».

В книге Ф. Энгельса «Анти-Дюринг» содержатся следующие, представляющие для нас несомненный интерес строки: «Подобно основным формам бытия, г-н Дюринг считает также возможным вывести всю чистую математику непосредственно из головы, априорно, т. е. не прибегая к опыту, который мы получаем из внешнего мира.

В чистой математике,— утверждает г-н Дюринг,— разум имеет дело «с продуктами своего собственного свободного творчества и воображения»; понятия числа и фигуры представляют собой «достаточный для нее и создаваемый ею самой объект» и потому она имеет «значение, независимое от *особого* опыта и реального содержания мира».

Что чистая математика имеет значение, независимое от *особого* опыта каждой отдельной личности, это, конечно, верно... Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди научились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины... Как и все другие науки, математика возникла из практических потребностей людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей, — и как раз *только поэтому* может вообще применяться»*.

---

* Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 36—37.

В приведенной цитате содержится ответ на мучительный вопрос, который ставили перед собой многие поколения математиков и философов: каким образом наука, казалось бы, не имеющая прямых связей с физикой, химией, биологией, экономикой и техникой, применяется с одинаковым успехом ко всем этим областям знаний? Этот вопрос тем более уместен, что понятия математики и выводы из них, которые вводятся и строятся без всяких видимых связей с проблемами, понятиями и задачами естественных и технических дисциплин, находят в них всевозрастающее применение и способствуют более точному познанию. При этом уверенность в правильности математических выводов настолько велика, что если построена математическая теория того или иного явления и затем установлено, что ее выводы расходятся с опытными данными, то сомнение возникает не относительно правил математики и ее логических выводов, а относительно тех исходных предпосылок, на базе которых строилась эта теория.

Несомненно, что удовлетворительного ответа на эти вопросы получить нельзя, если придерживаться той точки зрения, которая высказывается не только В. Феллером, но и многими другими математиками и философами. Эта точка зрения получила, пожалуй, наиболее яркое выражение в известной монографии Бэлла по истории математики. Он ее сформулировал следующим образом: «Вплоть до ... смелых творений Лобачевского и Бойяи может быть непосредственно прослежена распространенная оценка математики как произвольного творения математиков. В точности тем же способом, каким романист придумывает характеры, диалоги и положения, для которых он является одновременно и автором, и хозяином, математик изобретает постулаты, на которых он основывает свои математические системы»*.

Если бы положение было именно таким, то существовала бы не одна математика, а столько математик, сколько имеется математиков. Каждый будет придумывать свои характеры и правила игры. Естественно, что при таком отношении к делу связь математики с познанием действительного мира теряется и может появиться лишь в результате маловероятного совпадения. Ведь никто не ожидает того, что при игре в шашки удастся познать законы природы, скажем, законы динамики популяций. Но ведь в точ-

* Bell E. T. The development of mathematics, New York — London, 1945, p. 330.

ности такое же положение имеет место при произвольном создании понятий математики. Должно быть ясно, что математика является чем-то большим, чем собрание произвольно созданных понятий и правил игры в них. Отсюда ясно, что ошибочна исходная предпосылка и понятия математики не строятся произвольно.

Познавательная мощь математики состоит совсем в другом — истинных истоках ее понятий и правил оперирования, о чем писал Ф. Энгельс и о чем было сказано в критических заметках А. Н. Колмогорова, сделанных им по поводу книги В. Феллера.

Понятия математики создаются не по произволу исследователя, а являются абстракциями от реальных процессов отношений между вещами или же абстракций над абстракциями.

Новые математические теории постоянно проверяются путем сравнения того, что они могут дать нового по сравнению с тем, что давали старые.

Математические теории, сделавшись более общими, не теряют и тех объектов, которые они изучали раньше. Но в связи с обобщением понятий расширяются возможности применений и обогащаются методы исследования. Зачастую при этом обобщение приводит к замечательному факту: если доказательство частного факта требовало больших усилий и специальных построений, то с более общих и широких позиций этот факт становится почти очевидным.

Каждый раз, когда существующий математический аппарат оказывается недостаточным для исследования интересующих практику явлений, наука ищет и рано или поздно находит новые средства (понятия, подходы, методы), которые уже оказываются достаточными для более полного и точного описания свойств этих явлений и для прогноза их поведения. Но при этом математика строит свои новые понятия и новые разделы не произвольно, а на базе того, что уже было создано ранее, и новых требований практики.

В результате математика и ее средства исследования не остаются неизменными, а подвергаются процессу непрерывного обновления, совершенствования и обогащения. И в этом обновлении и совершенствовании значительную, если не сказать решающую, роль играет общественная практика.

Таким образом, нельзя смотреть на математику как на дисциплину, которая растет, не спрашивая практику, куда и как развиваться. В действительности между математикой и практикой существует постоянная двусторонняя связь: математика предлагает практике то, чем она располагает, а практика постоянно сообщает математике, что ей необходимо. И эти требования практики становятся известными даже тем математикам, которые непосредственно не связаны с решением прикладных проблем. Но они живут не на необитаемом острове, и требования практики врываются в их жизнь и творчество через общение с коллегами, через прессу, через обзорные доклады и статьи. В этом непрерывном развитии и совершенствовании математики, в ее приспособляемости к нуждам общества и научного прогресса и состоит основная причина мощи математики, ее способность активно участвовать в процессе математизации знаний и в научно-техническом прогрессе.

«...Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды»*.

Теперь, в эпоху ускоренного научно-технического прогресса, позиция Чебышева особенно актуальна, и ее следует сделать основой математического воспитания и школьников, и студентов, и аспирантов.

§ 3. Об образовании математических понятий

В связи с бурным ростом значения математики и ее методов в научных исследованиях и в практической деятельности наше время названо периодом математизации знаний. Естественно, что вопросы, затронутые в предыдущем параграфе, приобретают при этом принципиальное значение. Чем вызвано то, что одни и те же математические методы и постановки задач находят использование в исключительно разнообразных ситуациях? Как случилось, что абстрактные понятия, возникшие внутри математики, нашли буквально неограниченные применения? Именно эти вопросы

---

* См.: Ляпунов А. М. Пафнутий Львович Чебышев.— В кн.: П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. М.— Л., Гостехиздат, 1946, с. 20.

оказываются неразрешимыми для Бурбаки, а также для многих представителей математики и философии, которые не обращаются к истории науки с целью выяснить процессы образования понятий и формирования математических теорий.

Диалектический материализм не испытывает этих затруднений, поскольку он не отрывает теоретические исследования от практической деятельности, а развитие науки является для него историческим процессом. Поэтому научные понятия, а также содержание науки изменяются от поколения к поколению и несут в себе черты той эпохи, в которой они появились. Это можно проследить на тех дисциплинах, которые преподаются в школе, — арифметике, геометрии, началах алгебры и математического анализа. Это же относится и к тем дисциплинам, которые продолжают развиваться, прогрессируют. Теперь к сказанному уместно добавить, что именно по этой причине содержание математического образования не может оставаться неизменным. Было бы нелепым сегодня, в эпоху огромного воздействия электронной вычислительной техники, ограничиться изложением арифметики на том уровне, на каком она излагалась в школах времен Ивана Грозного или Петра I. Точно так же было бы серьезной ошибкой строить университетское математическое образование (для любых специальностей) на базе идей и научных идеалов конца XIX в.

Постараюсь проиллюстрировать сказанное на примере, который особенно близок мне как в силу личных интересов, так и в силу того, что последние год — полтора я этому вопросу уделял особое внимание. Речь пойдет о формировании основных понятий теории вероятностей — дисциплины, которая в настоящее время находится на острие математических интересов естествознания, инженерного дела, социальных исследований. Этих понятий совсем немного, и, в сущности, речь в первую очередь должна идти о следующих трех: случайном событии и его вероятности, случайной величине и ее функции распределения, случайном процессе и его вероятностных характеристиках.

Первичные представления о случайном событии относятся к глубокой древности, и в простейших случаях попытки охарактеризовать числом возможность их осуществления были еще тысячи за две лет до нашего летоисчисления. Так, в Древнем Китае в ту пору были проведены переписи населения с целью установления возможных воинских контингентов и оценки размеров податного сословия. Позднее в Древнем Риме сведения о населении использовались для подсчета необходимых запасов продовольствия. Азартные игры также приводили к попыткам оценивать возможности каждого из интересовавших игроков события — определенного выпада игральных костей, сочетания игральных карт. До XIII—XIV вв. эти попытки носили чисто качественный характер и никак не повлияли на развитие количественных методов в решении подобного рода вопросов. Значение случайного при изучении природы на качественном уровне прекрасно изложено в замечательном философском трактате «О природе вещей» римского поэта и философа Тита Лукреция Кара.

В 1477 г. Бенвенуто д'Имола издал в Венеции «Божественную комедию» Данте и в комментариях к VI части «Чистилища», в которой Данте упоминает игроков в кости, д'Имола поместил подсчеты возможных исходов при бросании трех костей. Эти подсчеты крайне примитивны и ошибочны. Так, например, он утверждал, что суммы очков 3 и 4 (а также 17 и 18) могут появиться лишь единственным способом. На самом деле 3 и 18 могут появиться действительно лишь единственным способом, а 4 и 18 — тремя различными способами. Пусть эта попытка была неудачна, поскольку д'Имола не различал индивидуальности костей (первая, вторая и третья), но она уже была сделана и направляла размышления последующих мыслителей на определенную числовую характеристику случайных событий.

В 1494 г. в Венеции был издан основной труд Л. Пачоли (1445— ок. 1514) «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», в котором содержались задачи на справедливый раздел ставки, когда игра заканчивается до ее завершения.

Далее оценкой разных ситуаций в играх и задачей о дележе ставок занимались многие математики, в частности — Дж. Кардано (1501—1576), Н. Тарталья (ок. 1499—1557). Их задачи позднее интересовали Б. Паскаля (1623—1662), П. Ферма (1601—1665), Х. Гюйгенса (1629—1695). Они впервые дали правильное их решение и, в сущности, приблизились вплотную к введению понятия математического ожидания. Однако в явном виде они не подошли к введению ни этого понятия, ни понятия вероятности случайного события. Они ограничивались подсчетом числа благоприятствующих случаев (шансов, как они говорили).

Понятие вероятности случайного события, как отношение числа благоприятствующих ему шансов к числу всех возможных, появилось в науке уже в начале XVIII в. в работе Я. Бернулли (1654—1705). Вводилось это понятие несмело, неуверенно, на самом простом примере. Общего же определения, даже несовершенного в работе Я. Бернулли, нет. Оно после Я. Бернулли развивалось и совершенствовалось на протяжении почти ста лет. И только в работах П. Лапласа это определение получило ту форму, которая сохранилась до нашего времени.

В главе I четвертой части сочинения Я. Бернулли «Ars conjectandi» дано следующее далекое от ясности определение: «Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее, как часть от целого». Сказанное поясняется примером: «Именно, если полная и безусловная достоверность, обозначаемая нами буквой α или единицей 1, будет, для примера, предположена состоящей из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же неблагоприятствуют, то будет сказано, что это событие имеет 3/5 α или 3/5 достоверности».

Мы не должны удивляться некоторой тяжеловесности изложения Я. Бернулли. Ведь она только подчеркивает ту мысль, что новое с трудом пробивает себе путь в науке, и требуется время, чтобы избавиться в научных определениях от лишних слов и предположений и в то же время не упускать того, что действительно необходимо и без чего не будет однозначности представлений о предмете изучения.

При формулировке главного предложения главы 5 четвертой части книги Я. Бернулли вновь упоминает об отношении числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных. При этом он опять не оговаривает, а, по-видимому, предполагает само собой разумеющимся, что эти случаи должны быть равновероятными. Это обстоятельство не отмечалось еще долгое время ни Муавром, ни Лагранжем, и только в 1812 г. П. Лаплас в своей известной книге «Аналитическая теория вероятностей» дал то определение, которое используется и теперь, когда знакомят читателя с классическим понятием вероятности. В этом определении уже содержится требование равновероятности всех случаев (шансов).

Изучение книги Я. Бернулли показывает нам и нечто большее, а именно, что параллельно с введением классического определения вероятности он рассматривал и статистическое. Это обстоятельство важно не только само по себе, но и по той причине, что оно позволяет понять, почему до Я. Бернулли не вводили понятия вероятности как числа, заключенного между 0 и 1, равного отношению числа шансов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к числу всех возможных.

В 4-й главе четвертой части Бернулли поставил перед собой такой вопрос: как определить вероятность случайного события, когда у нас нет возможности подсчитать числа всех возможных и благоприятствующих событию случаев? На этот вопрос Я. Бернулли ответил словами: «Но здесь нам открывается другая дорога для достижения искомого. И то, что не дано вывести á priori, то, по крайней мере, можно получить á posteriori, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах... Ибо если, например, при наблюдениях, сделанных некогда над тремя сотнями людей того же возраста и сложения, в каких теперь находится Тит, было замечено, что из них двести до истечения десяти лет умерли, то можно заключить с достаточным основанием, что имеется вдвое больше случаев Титу умереть в течение ближайшего десятилетия, чем остаться в живых по истечении этого срока... Этот опытный способ определения числа случаев не нов и не необычен».

Нет необходимости говорить о том, что в приведенных цитатах четко прослеживается мысль о статистическом определении вероятности, которая при большом числе наблюдений близка к отношению числа случаев, когда событие произошло, к числу всех наблюдений. Как писал Я. Бернулли, и в ту пору этот подход был «не нов и не необычен». Обе концепции вероятности — классическая и статистическая уже присутствуют в трактате Бернулли, хотя они изложены и не очень четко. Но мы знаем, как важен в науке первый шаг.

Теперь естественно спросить себя — чем же было вызвано то, что ни Паскаль, ни Ферма, ни Гюйгенс не пришли к мысли определять вероятность случайного события как отношение? Чем было вызвано то, что Я. Бернулли обратил на это внимание и ввел в науку столь важное понятие, как вероятность? Что же произошло в период между публикациями Х. Гюйгенса и Я. Бернулли и сделало естественным введение классического определения вероятности?

Несомненно, что формулировка Я. Бернулли закона больших чисел для простейшей схемы последовательных независимых испытаний является достаточным для этого основанием. Однако это только одна из причин. Имеется и другая, которая оказала решающее влияние на ход мысли Я. Бернулли. Я имею в виду замечательные исследования по вопросам политической арифметики Дж. Граунта (1620—1674) и У. Петти (1623—1687). Их работы, касающиеся демографии и использования статистических данных для получения весьма существенных выводов, оказали серьезное влияние на лучшие умы того времени. Эти работы читали и обсуждали. Мимо них не прошел и Я. Бернулли.

В 1662 г. была опубликована небольшая книга Дж. Граунта «Естественные и политические наблюдения, перечисленные в прилагаемом оглавлении и сделанные над бюллетенями смертности...», с которой начинается жизнь статистики как особой науки. Им были проанализированы регистрации умерших в Лондоне за 20 лет. Смертей было наблюдено 229 250, из них детских в возрасте от 0 до 5 лет 71 124. Граунт заметил, что приблизительно одна треть, а именно 71 124/229 250 умерли в детском возрасте от разных причин, которые Граунт тщательно указал. Сейчас нам важно отметить, что Граунт начал рассматривать частоты, а не сами численности и подчеркнул устойчивость частот: «...мы хотели бы отметить, что некоторые из случайностей имеют постоянное отношение к числу всех похорон».

Интересные примеры использования понятия частоты имеются и в произведениях У. Петти. Так, в небольшой книге «Два очерка по политической арифметике, относящиеся к людям, зданиям, больницам Лондона и Парижа», опубликованной в 1682 г. в Лондоне и через четыре года в Париже, приведены сравнительные данные о смертности в госпиталях «шарите» Лондона и Парижа*. Оказалось, что в одной больнице для бедных в Париже из 2647 больных скончались 338 человек, а из 3281 больного в лондонской больнице умерли 461. Частоты смертности для каждого из госпиталей Петти считал равными $^1/_8$. В действительности же, как легко подсчитать, для парижской больницы она равна 0,136, а для лондонской — 0,140. Интересно заметить, что Петти не пользовался десятичными дробями. Еще более ужасными были результаты для парижского госпита-

* Шарите — милосердие, так назывались госпитали для бедных, организуемые церковью.

ля L'Hotel dieu (Божий дом), в котором из 21 591 больного скончались 5630, и, таким образом, смертность имела для этого госпиталя значение 0,262 (Петти считал ее равной $^1/_4$).

Нет нужды говорить о том, что введение в науку понятия частоты события было достаточным основанием для введения классического понятия вероятности. И совсем не выработка правил игры или же свободное творчество привело Я. Бернулли к понятию вероятности, а накопленный ранее опыт других исследователей и нужды практики при сравнении возможности появления различных случайных событий в сложных ситуациях.

Понятие вероятности еще не существовало, а уже появилась задача, для решения которой классическое понятие вероятности оказывалось недостаточным. А именно, в 1692 г. Дж. Арбутнот (1667—1735) предпринял перевод на английский язык книги Х. Гюйгенса «О расчетах в азартных играх» и написал к ней дополнение. В этом дополнении он поместил задачу, существенно выпадавшую из общего стиля принятых в ту пору задач. Теперь мы скажем, что это была первая задача на геометрические вероятности. Сам Арбутнот предложенную задачу не решил, а предложил другим попробовать на ней свои силы.

Вот формулировка этой задачи. Наудачу подбрасывается прямоугольный параллелепипед с длинами ребер a, b, c. Спрашивается, чему равны вероятности выпадения каждой из граней?

Первое решение было предложено Т. Симпсоном (1710—1761). Идея его решения состояла в следующем: опишем около параллелепипеда сферу, а затем из центра сферы проведем через ребра a, b, c прямые до пересечения с поверхностью сферы. В результате сфера будет разбита на шесть непересекающихся областей. Отношение площадей этих областей к площади всей сферы и будет равняться вероятностям выпадения на плоскость соответствующих граней. К сожалению, Симпсон допустил при осуществлении этого плана действий ошибку и получил ошибочный ответ.

В 1733 г. появилась статья Ж. Бюффона (1707—1788), в которой была поставлена задача о бросании иглы на разграфленную плоскость (на прямоугольники и другие правильные фигуры). При этом требуется найти вероятность пересечения контура иглой. Именно в этой работе появилось представление о геометрических вероятностях как отношении меры множества благоприятных случаев к мере множества всех возможных случаев. Позднее эта идея развивалась в работах Дж. Сильвестра (1814—1897) и М. Крофтона, в результате которых появилась новая ветвь геометрии — интегральная геометрия.

Однако такое безоблачное развитие понятия вероятности получило серьезное предупреждение в учебнике французского математика Ж. Бертрана: в 1889 г. он показал, что постановка задачи Бюффона о бросании иглы логически несовершенна и ей можно давать неограниченно большое число различных интерпретаций, приводящих к разным ответам. Нужна большая четкость формулировок, и само понятие вероятности должно излагаться не на интуитивном, а на строго формальном уровне. Критические замечания Бертрана вызвали интерес к логическим основаниям теории вероятностей. Многие ученые принялись за тщательное изучение возникавших при этом вопросов. Работами Сильвестра и Крофтона уже была подготовлена почва к использованию для этой цели понятия меры множества. Первым эту идею высказал Э. Борель (1871—1956) и достаточно далеко развил А. Ломницкий (1881—1941). В 1933 г. эта концепция вероятности была подробно изложена в превосходной небольшой монографии А. Н. Колмогорова (род. 1903 г.) «Основные понятия теории вероятностей». Именно с этой монографии теоретико-множественная точка зрения при построении основ теории вероятностей стала доминирующей.

Это совсем не означает, что параллельно не развивались иные подходы. Достаточно назвать аксиоматическое изложение (первое во времени) теории вероятностей, предложенное С. Н. Бернштейном (1880—1968), и серию талантливых работ Р. Мизеса (1883—1958) по развитию статистического подхода к построению этой науки. Нам здесь следует отметить, что каждый из этих подходов, как на фундаменте, базировался на предшествующих результатах, не откидывал их в сторону, а стремился придать основным понятиям теории вероятностей большую логическую отчетливость, строгость и широту применений.

Закончилось ли развитие понятий случайного события и его вероятности? Конечно, нет. Если во времена Лапласа и в более поздние времена понятие случайного события воспринималось как интуитивно очевидное, не требующее разъяснений, в аксиоматике А. Н. Колмогорова оно уже было формализовано и означало одно из допустимых подмножеств элементарных событий. Теперь ищут другие подходы к построению основных понятий теории вероятностей, на базе иных, чем теория множеств, исходных математических представлений. Здесь имеется множество еще не решенных вопросов, имеющих как математическое, так и общефилософское значение. В частности, сделаны попытки ответить на вопрос: что такое случайность? Мы не будем касаться уже предложенных подходов, ограничимся указанием на то, что еще не все сделано.

§ 4. Об источниках нового в математике

Мы знаем, что математика относится к самым древним научным дисциплинам и ее начала теряются в глубине тысячелетий. На протяжении истории она неоднократно изменяла свои идеалы и направления основных своих исследований, но она не отбрасывала ранее добытые знания, а включала их в качестве естественного компонента в новые. При этом, как правило, старые знания являлись прочным фундаментом. Каждый такой этап прогресса математики не только обогащал ее новыми понятиями, методами и идеями, но позволял также охватить своим влиянием новые области практической деятельности, к которым до этого у нее не было пути для завязывания деловых связей. В наши дни математика переживает новый расцвет и при этом значительно изменяет свое лицо. Во-первых, она становится более абстрактной, а потому для установления действительных источников возникновения ее задач и понятий при изложении ее содержания необходимо не забывать исторического аспекта и указывать на истоки их появления. Во-вторых, на смену одним ведущим направлениям ее развития приходят другие. Сейчас все большее значение приобретает алгебраизация математики, проникновение идеи случайного, поиски оптимальных решений, глубокое проникновение вычислительных аспектов с применением ЭВМ даже в абстрактные разделы самой математики. И в-третьих, область применений математических методов невиданно раздвигается.

Истоки математических идей разнообразны и не вполне равноправны. Индивидуальные особенности различных математиков и полученное ими воспитание приводят к тому, что тот или иной источник для них превалирует над другими. И здесь важно, чтобы признавались все источники возникновения математических идей, так как человечество потеряло бы многое, лишившись любого из них. Ведь наука только потому и остается наукой, что в ней постоянно возникают новые стремления, идеалы, уточнения постановок проблем и новые проблемы. Она потеряла бы свою общественную ценность, если бы лишилась стремления к обновлению без постоянного поиска идеалов и новых проблем, без поиска новых перспектив дальнейшего развития. Об этом прекрасно сказал один из крупнейших математиков последнего столетия Д. Гильберт (1862—1943) в своем знаменитом докладе на втором Международном конгрессе математиков в 1900 г.: «... развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону, как бесплодные, чтобы заменить их новыми... Всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития... Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты»*.

Откуда же возникают новые проблемы в математике? Что является их источником? Каковы те пути, которые приводят к появлению новых идей и методов, представляющих всеобщий интерес, а не только интерес для небольшой группы лиц, выдвинувших ту или иную мысль? Частично на эти вопросы мы уже ответили в предыдущих параграфах, однако вопросы заслуживают и дополнительного к ним внимания.

Среди ряда путей появления нового в математике на первое место следует поставить требования практики, поскольку практика не только выдвигает новые проблемы, но и закрепляет в науке перспективные теории и методы и отвергает то, что не находит применений.

О роли практики для прогресса математики написано большое число превосходных работ, в которых дан анализ пути превращения конкретной задачи практики в математически оформленную проблему. Позднее мы коснемся этого пути и сами. Сейчас же приведем замечательные слова П. Л. Чебышева (1821—1894) — одного из замечательных математиков прошлого, давшего многое для развития прикладных и теоретических аспектов математики. «Несмотря на ту высокую степень развития, до которой до-

---

* Проблемы Гильберта. М., Наука, 1969, с. 13.

ведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях: она предлагает вопросы существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых методов, и в этом наука находит себе верного руководителя в практике»*.

Для подтверждения этого тезиса влияния практики на математику можно привести многочисленные примеры из прошлого и настоящего развития науки. Однако многие ученые, не интересуясь проблемами практики и не анализируя явные и глубинные связи математики с практикой, заявляют примерно следующее: «Да, конечно, в далеком прошлом тезис о влиянии практики на математику правилен, особенно на начальных шагах ее развития. Но то, что мы видим в настоящее время, убедительно показывает другое — математика развивается в силу внутренних побуждений, и гениальные ученые своим предвидением открывают ей несравненно более широкие перспективы развития, чем вся практика, стиснутая в своих требованиях множеством условий».

Чем, в сущности, отличается от этих слов такое утверждение Ж. Дьедоне — одного из крупнейших представителей группы Н. Бурбаки? «...Я хотел бы подчеркнуть, сколь мало новейшая история оправдывает благочестивые пошлости прорицателей краха, регулярно предупреждающих нас о гибельных последствиях, которые математика неминуемо навлечет на себя, если откажется от применений к другим наукам. Я не собираюсь утверждать, что тесный контакт с иными областями, такими, как теоретическая физика, не выгоден для обеих сторон. Однако совершенно ясно, что из всех поразительных достижений, о которых я рассказал, ни одно, за возможным исключением теории распределений, ни в малейшей степени не пригодно для физических применений. Даже в теории уравнений с частными производными сейчас гораздо больше упор на «внутренние» и структурные проблемы, чем на вопросы, имеющие прямое физическое значение. Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов че-

* Чебышев П. Л. Черчение географических карт.— Полн. собр. соч., т. 5. М., Изд-во АН СССР, 1951, с. 150.

ловеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышлений над большими проблемами, которые мы еще должны решить в нашей собственной науке»*.

В связи с этой цитатой мы приведем созвучные слова из книги А. Рея, часть которых была подчеркнута В. И. Лениным. «Математик, замечают рационалисты, мог бы попрежнему умножать богатства своей науки, даже если бы материальный мир внезапно исчез. Да, бесспорно, если бы он исчез теперь; но мог ли бы он создать математику, если бы материального мира никогда не существовало?..»** К словам Рея, подчеркнутым В. И. Лениным, можно добавить следующее. Прежде всего Ж. Дьедоне в своей статье касался далеко не всех направлений математической мысли. Он говорил лишь о некоторых, чисто абстрактных частях математики, которые близки его интересам. Но нужно иметь в виду, что влияние практики сказывается не только посредством проблем, которые она непосредственно выдвигает перед математикой, но и посредством сильно действующего незаметного воздействия через идейную атмосферу эпохи. Несомненно, что накопленных и еще не решенных задач в математике так много, что их вполне достаточно для многолетней работы многих математиков. Может случиться, что в результате такой работы математиков без влияния на них требований практики удастся создать не только такие ценности, которые будут иметь значимость лишь для теоретической науки, но и для естествознания, инженерной и экономической практики, поскольку математика является наукой не только о действительном, но и о возможном. Но отрыв математики от практики грозит ей прекращением полноценного развития, потерей роли мощного орудия познания окружающего нас мира, а также грозит ей началом вырождения и превращения в схоластику. Практика является для математики той питательной средой, в которой вырастают новые направления исследований и проверяются идеи на их жизнеспособность. Интересно отметить, что известный английский математик Г. Гарди (1877—1947) ставил себе в особую заслугу то,

---

* Дьедоне Ж. Современное развитие математики. — В сб. переводов «Математика», т. 10, № 3. М., Мир, 1966, с. 11.

** Ленин В. И. Философские тетради.— Полн. собр. соч., т. 29, с. 478.

что его математические результаты «не имеют и никогда не будут иметь какого-либо отношения к применениям». Прошло лишь несколько лет после того как он произнес эти слова, и ряд его теоретико-числовых результатов нашел серьезные применения в ядерной физике.

Ни у кого не вызывает сомнений то обстоятельство, что начала арифметики и геометрии были вызваны к жизни требованиями примитивной человеческой практики. Точно так же весь XVIII и XIX вв. прошли под знаком развития астрономии и количественного естествознания. Физика и астрономия широко использовали математические средства и одновременно выдвигали перед математикой новые вопросы, которые нуждались не только в использовании традиционных методов, но и в развитии новых, а также в развитии целых областей математики. Так первые же попытки построения теории распространения тепла в твердых и жидких телах, изучение упругих свойств материалов, магнитных и электрических явлений и еще ряда других привели к необходимости решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также теории функций комплексного переменного. Исследования устойчивости движения планет солнечной системы, устойчивых форм вращающихся жидких масс (теория образования планет) привели к созданию теории устойчивости движения. В нашем веке эта теория получила разнообразные применения далеко за пределами астрономии — в авиации, расчетах быстровращающихся агрегатов технических систем и пр. Астрономические наблюдения и развитие экспериментальных исследований остро выдвинули проблему разработки теории ошибок наблюдений. Идеи о молекулярном строении материи существенно повысили требования к теории вероятностей и дали мощный толчок ее развитию. Геодезические съемки местности привели К. Ф. Гаусса (1777—1855) к исследованиям дифференциальной геометрии поверхностей. Молекулярные воззрения оказали существенное влияние на формирование многомерной геометрии. От физики, но уже в XX в., берут свое начало такие большие и важные в наши дни дисциплины, как функциональный анализ, теория случайных процессов, теория обобщенных функций. Непосредственно в недрах инженерной и экономической практики зародились теория информации, линейное и выпуклое программирование, теория графов, математическая теория надежности, теория массового обслуживания, теория оптимального управления. В биологии и агротехнике следует искать начала математической статистики, а в химии — планирования эксперимента.

Число таких примеров можно продолжать, но, как ни велико значение практики в прогрессе математики, к ней одной нельзя сводить все движущие силы ее развития. В том мощном потоке исследований, который характерен для нашего времени, когда ежегодно по математике публикуется что-нибудь около десяти тысяч работ, доказываются многие тысячи новых теорем, абсолютно необходима обобщающая мысль. Без такого обобщения нет возможности разобраться в этом изобилии результатов, отделить свежие идеи от старых, уже использованных, выработать общие методы. Чтобы «деревья» не мешали видеть «лес», необходимо частные выводы привести в систему, расположить отдельные результаты в порядке и найти те обобщающие факты, из которых многие результаты получаются в качестве частных выводов. Вот почему перед математикой постоянно возникает вопрос: является ли полученная закономерность изолированным фактом или же она существенное звено в цепи подобных же фактов? Позволяет ли вновь найденная закономерность включить в себя хотя бы некоторые из ранее полученных результатов? Если такую цепь взаимосвязанных результатов удастся подметить, то это позволит ранее найденное частное увидеть с более общих и при том единых позиций, заметить элементы порядка там, где ранее имелась лишь аморфная масса фактов, пусть даже полезных, изящных и интересных.

Как правило, создание общей теории на базе разрозненных фактов приводит к унификации и упрощению доказательств, к построению изящной и отточенной формы изложения, позволяющей с единых позиций излагать многочисленные факты, ранее казавшиеся изолированными и никак между собой не связанными. Зачастую то, на что ранее затрачивалось много усилий и остроумия в развитой теории, получается в качестве простого следствия общего результата или даже как тривиальный вывод из общего понятия. Конечно, такой обобщенный подход не дается даром и за него приходится платить бо́льшей абстрактностью вводимых понятий и бо́льшей общностью результатов. Но при этом всегда оказывается, что более общие точки зрения и понятия позволяют видеть дальше и глубже, дают более широкий взгляд на предмет, возможность доказывать различные результаты нагляднее, естественнее и проще, чем при непосредственном, так сказать, кустарном подходе.

С таких общих позиций и прикладные аспекты теории становятся более зримыми и действенными. Нужно только научиться прикладные задачи излагать на выработанном в этой теории языке. Конечно, построение абстрактной теории несколько отрывает ее от непосредственных практических проблем, но при этом «выковывается» метод, одновременно мощный и гибкий, пригодный не для какой-то одной частной проблемы, но для многих проблем сразу — лишь бы только изучаемые явления подпадали под действие тех логических основ, на которых покоится развитая теория.

Представление о чрезмерной абстрактности понятий и результатов не остается неизменным — оно относительно и изменяется с течением времени. И то, что вчера было абстрактным и с трудом укладывалось в сознании, сегодня воспринимается совершенно свободно, как само собой разумеющееся и необходимое для науки. Так случилось с понятием равномерной непрерывности функции. В начале нашего века оно входило лишь в программы тех, кто подготавливался к получению профессорского звания. Теперь же студенты первого курса университетов и пединститутов свободно его усваивают. Точно такая же ситуация сложилась и с понятиями теоретико-множественной топологии: в начале двадцатых годов они казались далекими от настоящей математики и не воспринимались многими, даже крупными математиками, как необходимые понятия всей математики. Теперь они становятся известными многим студентам еще до слушания лекций по соответствующему курсу.

Очень мощными средствами получения новых результатов являются аналогия и обобщение. Пожалуй, подавляющее большинство результатов получается именно на этом пути. Обобщение является частью построения теории. Но оно касается и отдельных результатов. Некто получил определенный математический факт, но при использованном им методе доказательства был вынужден наложить некоторые ограничительные условия. Другой исследователь, познакомившись с работой, заметил, что при изменении метода получения результата можно наложить более слабые ограничения, в которых имеет место обнаруженный факт. Обычно математики стремятся дойти до естественных границ выполнимости этого факта, т. е. обнаружить необходимые и достаточные условия его осуществимости.

Аналогия играет в математике огромную роль при обнаружении новых фактов. Я позволю себе привести пример, относящийся к моей собственной работе самого последнего времени. Последний год я вновь вернулся к изучению предельных закономерностей для максимального значения, принимаемого n независимыми случайными величинами с одним и тем же распределением $F(x)$.

Мне стал известен результат, полученный моим учеником — математиком из ГДР Г. И. Россбергом: если функции распределения сумм независимых случайных величин сходятся к предельному нормальному распределению на полуоси (им доказаны и более общие результаты), то сходимость к тому же распределению имеет место для всех значений аргумента. Естественно возник вопрос: а не будет ли верна эта теорема и для моего объекта исследования? За эту задачу я принялся вместе с моей ученицей из Алжира — Лейлой Сенуси-Берекси. Оказалось, что предположение верно, а именно, удалось доказать, что если сходимость к предельному распределению имеет место для значений аргумента внутри отрезка $[a, b]$, где предельная функция распределения имеет положительное изменение, то повсюду имеет место сходимость к тому же распределению. Когда я рассказал о полученной теореме моему коллеге А. Д. Соловьеву, то он спросил, не думал ли я о возможности использования этого факта для испытаний на надежность? Я ответил, что да, но у меня возникают пока затруднения (речь о них пойдет позднее). Схема идеи А. Д. Соловьева состояла в следующем: в технике широко используются параллельные и последовательные соединения. Если таких элементов много, то мы находимся «вблизи от нашей теоремы»: для последовательного соединения элементов длительность жизни устройства равна минимуму жизни отдельных элементов, для параллельного — максимуму. Иными словами, мы находимся в точности «вблизи от нашей задачи». Затруднения же, которые у меня появились, состоят в следующем: испытания дают возможность не установить, а только оценить близость результатов к данному распределению. Это во-первых, а во-вторых, мы имеем дело не с предельным, а с допредельным распределением, и задачу нужно ставить так: если распределение в данном интервале длительности жизни параллельного соединения с точностью до ε равно $F(x)$ в отрезке $[a, b]$, то в каком отрезке эта близость будет с точностью до 2ε? Очевиден практический интерес такого результата: если мы на ограниченном отрезке испытаний можем установить только для этого отрезка функцию распределения, то теорема позволяет это сделать с меньшей точностью и за пределами наблюдений.

Укажем еще один источник новых проблем в математике. Это критический пересмотр ее исходных положений, ее основных понятий, а также представлений о полноте и строгости доказательств. Такого рода пересмотров на протяжении своей истории математика видела несколько: когда в Древней Греции начала формироваться дедуктивная математика; когда в XVII в. возник математический анализ; в начале XX в., когда в основу всей математики было положено понятие множества; в тридцатые годы нашего века, когда группа французских математиков объединилась для перестройки основ всей математики на основе понятия математической структуры. Очевидно, что в связи с прогрессом науки такого рода пересмотры совершенно необходимы как для сохранения единства математики, так и для приведения в соответствие с накопленными знаниями логического фундамента математики. Обычно такой пересмотр раскрепощает науку и придает ей новые возможности для быстрого развития.

Ряд понятий современной математики может показаться искусственным, чрезмерно абстрактным и оторванным от жизненной практики. Однако такие представления сложатся лишь при условии, что знакомство с математикой будет происходить с полным пренебрежением к процессу формирования понятий и задач математики, когда пренебрегают ее историей. Если же не забывать ее истории и серьезно проанализировать возникновение и развитие ее идей, то положение резко изменится и понятия математики получат глубокий и прозрачный смысл, связанный с жизнью.

Глава 2. ЧЕГО НЕ СЛЕДУЕТ ЗАБЫВАТЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ?

§ 5. Математика в современном мире

На глазах нашего поколения человечество сделало огромный шаг в познании законов окружающего мира. Так, например, были запущены космические станции, изучающие многие явления, еще недавно казавшиеся недоступными непосредственному наблюдению. Положено начало изучению планет, и в том числе нашего ближайшего соседа — Луны. С нее доставлены образцы грунта и снят портрет невидимой ее части. Человечество сделало первый шаг по овладению внутриатомной энергией и уже теперь, спустя каких-нибудь 29 лет после запуска первой атомной электростанции, использует энергию десятков электростанций, работающих на этом виде горючего. Океаны бороздят атомные ледоколы. Для производства вычислений используются совершеннейшие электронные вычислительные машины, способные производить миллионы операций в секунду. Математический метод исследования, ранее использовавшийся широко лишь в астрономии и физике, нашел многочисленные применения во множестве новых областей знаний и практической деятельности. Без предварительных сложных расчетов теперь не выпустят с завода ни одной мало-мальски сложной машины, не станут модернизировать технологический процесс. При изучении биологических явлений, в том числе и в медицине, широко используется математическое моделирование и применяются электронные вычислительные машины. Математика стала необходимым орудием познания, расчета и прогнозирования. Само проведение экспериментальных исследований потребовало разработки математической теории эксперимента, в частности оптимального планирования эксперимента. Недаром о роли математики в современном познании и практике теперь говорят много и впечатляюще, называя наше время временем математизации знаний.

Прежде чем сдать новую конструкцию автомобиля, самолета или атомного реактора в производство, приходится проводить многочисленные расчеты ее жизненности, приспособленности к выполнению возлагаемых на нее функций, безотказности, эффективности, согласованности узлов и деталей. Математические методы уже давно стали необходимым средством проектирования технических систем. Для того чтобы осуществить полеты в космос, потребовалась многолетняя работа математиков, направленная на расчеты, связанные с определением силы тяги, нагревателя ракеты, оценкой прочности конструкции и т. д. и т. д. Выполнить все эти расчеты без математики невозможно и заменить их экспериментом также невозможно, поскольку только организация экспериментов заняла бы огромное время и потребовала таких средств, которые не сумела бы выделить ни одна страна в мире.

И если физики заявляют, что «математика в современной физике является не просто орудием расчета, без нее невозможно само понимание свойств мира», то то же самое может заявить любая отрасль промышленности. Сейчас никак нельзя забывать, что математика в наши дни превратилась в производительную силу общества. И теперь там, где еще недавно царил чисто качественный подход к изучению явлений, отыскиваются количественные закономерности и применяются строгие математические методы. При этом чем грандиознее замыслы, тем более значительной становится роль математики. Это отчетливо видел В. И. Ленин, когда в основном своем философском труде «Материализм и эмпириокритицизм» писал о том, что «... приближение к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку»*, является крупнейшим достижением естествознания.

Теперь, по сравнению с положением в начале текущего столетия, мы далеко продвинулись в изучении явлений микро- и макромира. При этом выяснилось, что математика является тем самым языком, на котором только и удается изложить присущие микромиру закономерности. О том, как далеко удалось продвинуться на этом пути, достаточно много говорит тот факт, что о существовании некоторых элементарных частиц и их природе удалось узнать не из опыта, а из результатов расчета. Но для того чтобы математика и далее оказывалась способной к исследованию новых явлений микромира (да и не только микромира), она должна систематически развивать свои методы, оттачивать разработанные ею орудия исследования.

Как ни велики успехи научного познания, проблем для изучения, и притом весьма значительных и сложных, остается очень много. Более того, при совершенствовании методов исследования выясняется, что многие вопросы, которые казались хорошо изученными, требуют основательной доработки. Среди задач, требующих теперь самого пристального внимания, хотелось бы отметить такие, как познание процессов мышления, действие памяти, управление познавательной деятельностью, выяснение причин психических заболеваний и разыскание стойких средств противодействия их наступлению. Нам ясно, как важны эти проблемы и как далеки мы еще от серьезного их решения. Если бы мы научились хорошо управлять познавательным процессом, то как изменило бы это интеллектуальный потенциал страны, как облегчило бы работу пе-

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 326.

дагогов в начальной, средней и высшей школе. Это дало бы возможность в заданные сроки дать более широкое и глубокое обучение и приблизить к творческому восприятию большее число людей.

Наш век поставил перед человечеством ряд животрепещущих задач. Перечислим некоторые из них: управление процессами (технологическими, движения к заданной цели, мышления, передачи информации, перевозки грузов и т. д.); организация связи между лицами и группами лиц (телефонной, телеграфной, радио, почтовой и т. д.); производство обширных вычислительных работ; прогнозирование протекания того или иного процесса (развития пассажирских перевозок, потери надежности сложным технологическим устройством, прогрессирования того или иного заболевания и т. д.). Таких проблем частных и общих можно привести сотни и не исчерпать всех даже важнейших.

Современный транспорт — авиация, автомобили, морские и речные суда — обладает большими скоростями и соответственно большой инерцией движения. В связи с этим возникают многочисленные задачи управления его движением как для достижения заданной цели, так и для достижения максимальной безотказности. Как правило, мы накладываем дополнительные требования — минимальные затраты на горючее, максимальную быстроту выполнения задания, минимальные общие расходы и пр.

Близкие задачи возникают и в промышленности. При современных скоростях технологических процессов (проката в металлургической промышленности, изготовления бумаги, получения оттисков в полиграфии, изготовления пластиковой пленки и пр.) человек с помощью своих пяти чувств уже не способен не только целесообразно управлять технологическим процессом, но даже просто следить за его качеством. Ведь известно, что при прокатке балок или проволоки скорость передвижения прокатываемых изделий превышает скорость экспресса и достигает 150 км/ч. А при ручном управлении процессом изготовления бумаги удается удержаться вблизи от оптимального режима не более 10 % рабочего времени. Остальные же 90 % времени производственный процесс далек от наилучшего протекания, что приводит к снижению производительности и ухудшению качества продукции, к перерасходу исходных материалов.

В результате появляется острая проблема передачи управления скоростными процессами, так же как и сбор необходимой для управления информации, автоматам.

Но следует заметить, что автоматическое устройство само по себе на базе сведений о температуре, химическом составе сырья, напряжении, токе не в состоянии решать, как изменять технологический процесс. Автомату следует придать программу работы, предусматривающую в деталях правила его поведения в зависимости от значений управляющих параметров. Автомат «не понимает» слов «делай лучше», «следи за качеством обработки», поскольку ему нужна точная программа действий в разнообразных ситуациях, которые могут встретиться в процессе работы. Но для этого необходимо предварительно разработать такую программу, а это предполагает наличие количественного описания процесса. Так неизбежно прогресс в области техники приводит к необходимости использования математики весьма высоких уровней для решения проблем насущной практики. И следует сказать, что таких задач возникает очень много в самых разнообразных направлениях человеческой деятельности.

До того как возникла общая задача управления процессами, была изучена и вполне удовлетворительно решена интересная и важная проблема автоматического управления полетом самолета. Ею начали заниматься уже в тридцатые годы, и без успешного ее решения не могло быть и речи о сверхдальних перелетах без промежуточных посадок. Постепенно круг подобных задач расширялся и вместе с этим становилось яснее, что такой кустарный подход дальше нетерпим и что необходима разработка общих принципов и общей теории управления и не просто управления, а наилучшего в заданном смысле, т. е. оптимального управления. Такая задача, как одна из центральных задач нашего времени, возникла в середине этого столетия и привлекла к себе внимание многих крупных умов, в том числе и математиков. Принципиальных сдвигов в решении этой проблемы удалось добиться в нашей стране Л. С. Понтрягину (род. 1908), а в США Р. Беллману (род. 1920). Разработанные ими идеи привели к новым математическим дисциплинам — теории оптимального управления Л. С. Понтрягина и динамическому программированию Р. Беллмана. Родившись из задач инженерного дела, обе теории оказали одновременно большое влияние на прогресс самой математики и значительно расширили возможности применения математических методов к задачам практики.

Еще один пример такого же типа. В конце двадцатых — начале тридцатых годов развитие физики, теории связи и других отраслей инженерного дела привело к настоятельной необходимости создания математических методов, которые позволяли бы изучать случайные функции от одного или нескольких аргументов. В метеорологии нужно было изучать изменение скорости и направления ветра во времени и в пространстве. В ихтиологии представлял интерес вопрос о плотности микроорганизмов в водной толще и во времени. В теории телефонной связи следовало установить закономерности образования очередей на соединение и изменение длительности ожидания абонентом соединения в зависимости от загрузки сети. В физике изучались процессы диффузии как процесса проникновения молекул из двух или нескольких сред. Становилось невозможным пользоваться неопределенными понятиями и производить важные научные и практические расчеты без строгой математической теории. И такая теория была создана в значительной мере благодаря усилиям А. Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина (1894—1959), Е. Е. Слуцкого (1880—1948) и ряда других математиков. Она получила название теории случайных процессов и полей (процессов — для одного аргумента, полей — для двух и более). Глубокие теоретико-функциональные основы для построения теории случайных процессов закладывались А. Н. Колмогоровым в его знаменитой монографии «Основные понятия теории вероятностей».

Огромное число задач перед рядом математических дисциплин выдвинули программы космического исследования околоземного пространства. Проблемы управления движением космического аппарата, сброса огромных количеств тепловой энергии с поверхности ракеты, оценку опасности встречи с космической пылью и метеоритами, проблему передачи информации в условиях значительных помех и множество других нужно было срочно решать. Многие из них были совсем новы для науки, и приходилось создавать новые методы их решения. С таким же положением дел приходилось и приходится сталкиваться постоянно и наблюдать влияние потребностей практики на прогресс математики, так же как и обратное воздействие математики на ускорение развития практики. В результате математизация естествознания, экономики, практической деятельности сделалась заметным явлением нашего времени.

Смысл математизации знаний состоит не в том, чтобы все познание свести к созданию логических и вычислительных схем и не оставить места ни эксперименту, ни непосредственному наблюдению. Такая программа завела бы познание в тупик. Цели математизации более реальны и плодотворны. Их смысл можно сформулировать, пожалуй, таким образом: из точно сформулированных предпосылок выводить логические следствия, в том числе и такие, которые доступны наблюдению; сделать доступными логическому и количественному анализу сложные и запутанные процессы, на которые, как правило, наслаивается множество второстепенных влияний; посредством математического анализа описывать не только уже установленные факты, но и предсказывать новые закономерности; получить возможность прогнозировать течение явлений, добиваясь не только качественного, но и количественного согласия с реальным их протеканием.

Если эти предсказания оправдываются, то теория укрепляет свое положение и накапливает дальнейшие выводы. Однако рано или поздно, поскольку математическая теория описывает реальные процессы лишь приближенно, обязательно наступит момент, когда какое-то следствие теории не подтверждается практикой или экспериментом или же какой-то опытный факт останется необъяснимым теорией. Это будет означать недостаточность теории, ее слабость, необходимость ее уточнения и дальнейшего совершенствования. В этом случае становится необходимым пересмотр исходных посылок теории, изменение тех фундаментальных положений, которые казались незыблемыми и были положены в ее основу.

С такого рода затруднениями встретилась аэродинамика в конце тридцатых годов, когда скорости самолетов поднялись с 200—300 км/ч до 600—700 км/ч. Предположение о несжимаемости воздуха оказалось уже неприемлемым. От него следовало отказаться и строить аэродинамику больших скоростей. Точно так же позднее, когда скорости самолетов достигли скорости звука, выявила свою недостаточность и теория полета самолетов с большими, но дозвуковыми скоростями. Ту же картину можно проследить на любой другой дисциплине, как прикладной, так и теоретической: теория развивается в определенных предпосылках до тех пор, пока она не приходит в противоречие с предъявляемыми к ней требованиями, когда она уже перестает давать новое. В этот момент требуется пересмотр начал теории из более глубоких предпосылок.

В результате можно сказать, что математизация наших знаний состоит не столько в том, чтобы использовать готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы создавать тот специфический математический подход, который позволил бы наиболее точно и полно описывать интересующий нас круг явлений, выводить необходимые следствия и использовать полученные результаты для практической деятельности. Так случилось с математикой, когда в начале прошлого века созрело время для изучения физических явлений переноса теплоты, магнитных и электрических явлений, построения волновой оптики. Именно тогда был разработан аппарат уравнений математической физики. Точно так же в конце XVII — начале XVIII в. насущной необходимостью для человечества была разработка методов движения. И мы знаем, что такой метод был найден и разработан, а именно И. Ньютон, Г. Лейбниц, их предшественники, современники и последователи разработали математический анализ, ставший мощным методом решения задач естествознания и инженерной практики.

Прежде чем практическая задача превратится в объект математического исследования, она должна пройти длительный путь. Прежде всего нужно ясно представлять себе, в чем состоит та практическая задача, которую следует решать. Эта задача должна быть четко сформулирована и понята не только практиком, но и математиком. Мой многолетний опыт учит, что нередко практики считают математику волшебным инструментом, который работает сам по себе, без предварительного проникновения математика в саму суть предлагаемой ему задачи. Проиллюстрируем эту мысль на примере управления педагогическим процессом. Об этом сейчас много говорят и говорят об оптимальном управлении. Сама эта идея заманчива и сулит при правильном ее применении большие результаты — ускорение восприятия, прочность закрепления, широту и глубину кругозора учащихся. Но немедленно возникает вопрос: какой смысл следует вложить в утверждение, что преподаватель должен управлять процессом обучения наилучшим образом? Ведь чтобы такое положение сделать предметом целенаправленной работы, этому пока еще расплывчатому утверждению следует придать точный и определенный смысл. А ведь можно понимать это пожелание многими различными способами. Так, можно добиваться того, чтобы лучшие учащиеся класса продвигались в познании материала программы быстрее. Но можно добиваться и того, чтобы все учащиеся класса в установленные сроки и с пониманием усвоили программный материал, возможно даже путем пренебрежения интересами лучших учащихся. Но можно предложить и многие другие критерии для оценки качества управления процессом обучения. Какой же из них принять? Я убежден, что для решений этой важнейшей задачи, стоящей перед обществом, далеко не все еще подготовлено к тому, чтобы появилась сама возможность использования для поставленной цели математических средств. Я не отрицаю важности этой проблемы, но ее решение требует предварительной большой работы по уточнению ее постановки, введения сравнительной оценки качества обучения, имеющейся в классе психологической обстановки, получения однозначной реакции на воспитательные и управляющие воздействия учителя.

Неоднозначность понимания оптимальности протекания процесса мы можем наблюдать и в более простых случаях, например при управлении движением ракеты при полете на Марс. Мы можем искать оптимальное управление хотя бы в таких двух постановках: найти траекторию полета, при которой расход горючего на достижение цели будет минимальным; найти траекторию, при следовании по которой цель будет достигнута за минимальное время, а расход горючего задан и допустим.

Математизация знаний является естественным процессом, который позволяет экономить средства на решение возникающих проблем, а также время на их исследование.

§ 6. Детерминистические и стохастические модели

Изучение явлений природы или производственных, экономических и любых иных процессов математическими методами осуществляется не напрямую, а посредством промежуточного шага — составления схемы изучаемого явления или, как это принято говорить, его математической модели.

Математическая модель является приближенным описанием на языке математики изучаемого явления или группы явлений. При составлении математической модели (как и любой другой) прежде всего необходимо тщательно изучить само явление, установить характерные связи между величинами, его характеризующими, установить присущие ему основные свойства, которые следует учитывать при его изучении. Эта часть математического изучения интересующего нас явления особенно существенна, поскольку она определяет и используемый позднее математический аппарат исследования, и точность описания, и глубину соответствия модели изучаемому явлению.

После того как математическая модель составлена и принята, начинается собственно составление математической схемы применения избранного моделью математического аппарата. Уже чисто логическим путем составляются различного рода уравнения между числовыми характеристиками явлений, выводятся следствия. Нередко оказывается, что уже имеющиеся математические средства недостаточны для описания модели. В этих случаях приходится разрабатывать новую математическую теорию, которая была бы способна дать удовлетворительное математическое описание модели. Так случилось, например, во времена Г. Лейбница и Н. Ньютона при создании математической модели движения. Средств элементарной математики для этой цели было недостаточно, и потребовалось создание математического анализа. С таким же положением вещей наука столкнулась в нашем веке при изучении явлений диффузии, броуновского движения, динамики биологических популяций. Существовавшего в ту пору круга идей теории вероятностей оказалось недостаточно, и потребовалось ввести в рассмотрение понятие случайного процесса и развить его теорию.

Третий этап моделирования — проверка соответствия модели изучаемому явлению. Если модель плохо отражает качественную или количественную сторону описания изучаемого процесса, то эту модель следует заменить на другую, более точную.

Заметим, что при составлении модели можно исходить из двух существенно различных позиций: детерминистической и стохастической. Согласно детерминистической точке зрения каждое достигнутое изучаемой системой состояние является результатом его перехода во вполне определенные состояния в последующие моменты времени, естественно зависящие от ранее достигнутого состояния. Таковы модели классической механики. Именно такого рода модель дарвиновской борьбы за существование была предложена в первой четверти нашего века итальянским математиком В. Вольтерра (1860—1940).

Далеко не всегда детерминистическая модель удовлетворительно передает особенности изучаемого явления. Более того, такие модели часто могут исказить природу явления и привести к крупным ошибкам в заключениях, которые выводятся на их основе. Позднее мы приведем пример такого рода. В этих случаях нередко хороший результат дают стохастические модели, идею которых можно описать следующими словами: достигнутое состояние неоднозначно определяет дальнейшее развитие явления. Его знание только уточняет вероятности перехода состояния в то или иное подмножество состояний. В 1918 г. стохастическая модель динамики численности стада рыб была предложена Ф. И. Барановым. Стохастическая модель броуновского движения в 1905 г. была развита польским физиком М. Смолуховским (1872—1917) и А. Эйнштейном (1879—1955). Стохастическая модель диффузии была разработана А. Н. Колмогоровым и им же была построена математическая теория марковских случайных процессов, являющаяся математическим аппаратом для изучения процесса диффузии.

Мы остановимся теперь несколько подробнее на одном примере, который носит, возможно, и весьма частный характер, но зато он позволяет как бы войти в жизнь стохастической модели, понять ее преимущества и большую ее гибкость по сравнению с детерминистической моделью.

Морские суда дальнего плавания являются мощным средством для перевозки грузов, развития коммерческих связей и обмена товарами, производимыми разными народами. В экономике нашей страны морской транспорт играет огромную роль, и эта роль будет повышаться со временем. Рост числа судов является положительным фактором в развитии экономики страны, но одновременно приводит к некоторым явлениям, требующим тщательного изучения. Чем больше судов, тем большее время нужно уделять погрузо-разгрузочным работам и тем больше общее время, затрачиваемое на ожидание погрузки и разгрузки. В связи с этим интересны такие данные, сообщенные мне специалистом по эксплуатации морских коммерческих портов. За некоторый (я сейчас точно не помню какой) промежуток времени грузооборот увеличился приблизительно на одну четверть, а простои в ожидании освобождения причалов для начала погрузо-разгрузочных работ выросли почти в 4 раза. Чем это вызвано? Не ошибка ли это? Или же это является следствием каких-то общих закономерностей?

При ответе на эти вопросы были проанализированы методы расчета пропускной способности портов, принятые в настоящее время. Оказалось, что они основаны на чисто детерминистической позиции, а именно состоят в следующем:

предположим, что в течение года порт должен обработать (погрузить и разгрузить) P т грузов. Порт принимает суда со средней грузоподъемностью p т. Таким образом, для выполнения плана порт в течение года должен принять и обработать P/p судов. Если на обработку одного судна в среднем затрачивается k суток, то на все принимаемые суда будет затрачено Pk/p суток. Если в данном порту в течение года s рабочих дней (а остальные дни порт закрыт или из-за ледостава, или из-за ураганного ветра), то, чтобы справиться с планом, порт должен ежедневно обрабатывать Pk/ps судов и, следовательно, иметь $n=Pk/ps$ причалов.

Проведенные рассуждения чрезвычайно распространены и используются как организаторами медицинского обслуживания, так и при подсчете необходимого числа магазинов для обслуживания населения, расчете необходимого количества городского транспорта, числа запасных деталей для машинного парка. Прежде чем оценить качество такого рода рассуждения, мы должны сделать два замечания.

Прежде всего в приведенном рассуждении молчаливо предполагается, что судно, прибывшее в порт, либо полностью разгружается, либо загружается от начала до конца. Однако наблюдение за работой многих портов показывает, что это предположение на практике не выполняется, поскольку часто бывает так, что судно заходит в порт лишь для того, чтобы забрать или разгрузить несколько ящиков, забрать запас продуктов и занимает причал не на все время, а лишь на два-три часа. Во-вторых, имеется еще одно очень сильное невысказанное предположение, а именно: работа организуется так, чтобы причалы были загружены полностью и в момент, когда судно отваливает от причала, на его место становится очередное судно. Если это предположение не будет выполнено, то баланс времени в приведенном рассуждении нарушится. Но для того чтобы это предположение имело место, должно быть одно из двух: или движение судов организовано так, что в момент окончания погрузо-разгрузочных работ в порт прибывает очередное судно, или же в порту всегда имеется очередь судов на обработку.

Был собран обширный статистический материал по планированию прибытия судов в порт. Оказалось, что графики движения предусматривают не момент прибытия судна в порт, а указывают промежуток времени, когда судно должно прибыть в порт. И размер этого промежутка времени весьма велик — до двадцати дней. Но существенно заметить, что в этой части график приблизительно в 60 % случаев нарушается и суда не укладываются в указанные им сроки прибытия. В результате предположение о согласованности прибытия судов со временем окончания периода обработки должно быть отброшено как ошибочное. Это решение вызывается еще одним обстоятельством — огромным разбросом времени обработки судов: оно, согласно наблюдению, может меняться от получаса до тридцати с лишним суток.

Таким образом, используемая модель нереальна, и детерминистический подход, который был нами описан, неизбежно приводит к тому, что суда должны терять большое время на ожидание начала обработки. Ясно, что прежде чем предлагать другую модель работы порта по обработке судов, следует тщательно изучить его реальную жизнь. Прежде всего, как прибывают в порт суда дальнего плавания? И далее, как может меняться длительность обработки судов? Эти два обстоятельства являются решающими для построения модели. Наблюдения над моментами прибытия судов по ряду портов Советского Союза показали, что они ведут себя в точности так, как моменты поступления вызовов от абонентов на телефонную станцию. Иными словами, на моменты прибытия судов следует смотреть как на случайный процесс. Обработка статистического материала по ряду портов показала, что этот процесс близок к пуассоновскому. Точно так же на длительность обработки следует смотреть как на случайную величину. Математическая модель обработки судов в порту обязана это учитывать.

То, что поток судов, непосредственно прибывающих в порт, должен быть пуассоновским, вытекает из одной теоремы, доказанной лет тридцать назад А. Я. Хинчиным. Обосновывается это тем, что весь поток судов, прибывающих в данный порт, слагается из большого числа частных потоков — судов, прибывающих из отдельных портов. Подобным образом поток вызовов, поступающих на центральную телефонную станцию, слагается из вызовов, поступающих от отдельных абонентов.

Мы не будем излагать здесь подробности модели обработки судов в порту, основанной на стохастической базе и учитывающей как стохастичность прибытия судов в порт, так и стохастичность процесса обработки.

Составление математической модели исследуемого процесса является центральной частью использования математики в практической деятельности и в естествознании. Мы видим, что этот шаг познания должен обязательно учитывать особенности процесса, предварительное тщательное его изучение. Любая неточность, любое пренебрежение реальностью, увлечение предлагаемой концепцией за счет существа проблемы жестоко мстят и приводят к ошибочным заключениям и тяжелым материальным потерям. Попытка описания процессов, по существу своему являющихся случайными, посредством детерминистической модели не может приводить к удовлетворительным результатам и будет расходиться с реальностью. Существующая система математического образования такова, что она особое внимание обращает на детерминистические концепции и прививает мысль о том, что любое явление мы можем описать в терминах полного детерминизма. Это заблуждение, воспринятое слишком прямолинейно в школе, остается с человеком всю жизнь. Мне приходилось встречаться с инженерами, которые были искренне убеждены, что всякий процесс, с которым сталкивается инженер, обязан быть описан посредством детерминистической модели. Стохастические же средства исследования относятся лишь к чистым проблемам естествознания и совсем не нужны практику. Традиция закрывала для них реальную обстановку, с которой они сталкивались повседневно. Нужно научиться смотреть на жизнь непредубежденным взором и интересы истины ставить превыше всего.

§ 7. Что следует требовать от математического образования?

Математическое образование получают все школьники, начиная с первого года обучения и до последнего класса. Само собой разумеется, что лишь сравнительно небольшая часть обучающихся впоследствии станут сами развивать математику. Но применять математические методы в жизни станут все. Вот почему так важно, чтобы в процессе обучения математика возникала перед школьниками не только в качестве системы логических правил, но и в качестве метода познания, в качестве приема решения задач практики. Школа должна открыть своим воспитанникам возможности математики в повседневной практике, использовании ее в самых разнообразных ситуациях. Но мало развивать только убеждение в силе математических методов для решения задач практики, необходимо также прививать любовь к применениям. Очень важно, чтобы учащиеся видели прикладные возможности всех разделов математической науки и прочувствовали значение строгих логических рассуждений.

Когда школьник переходит в профессионально-техническое учебное заведение или в техникум, содержание курса следует приблизить к интересам специальных дисциплин. Приблизить, но не подчинить. Математика должна остаться математикой, но в ней должно быть выделено прикладное начало, которое способно помочь решению специфических вопросов специальности.

Понятно, что в вузе математика также должна быть подчинена желанию воспитать специалиста, который был бы способен использовать весь арсенал получаемых им знаний. Но для этого в курсе математики необходимо указывать на ее связи с профилирующими дисциплинами факультета. Если это биологический или психологический факультет, то следует приводить не только иллюстрирующие примеры на упражнениях, но и на лекциях ни на минуту не упускать будущую специальность студентов. Однако это совсем не означает, что следует демонстрировать только значение математики для будущей специальности студента, необходимо выявлять и ее роль в общих задачах познания. Ничего дурного не будет, если студент-электротехник услышит об использовании математики в космонавтике или в управлении качеством продукции в бумагоделательном производстве. Важно, чтобы на этом показ познавательной роли математики не ограничивался, а чтобы студенты убедились в необходимости математических методов и для их будущей деятельности.

К сожалению, мне неоднократно приходилось сталкиваться с таким положением дел, когда преподаватель работал со студентами в течение полутора-двух десятков лет, но так и не удосужился посмотреть по специальным журналам, учебникам и монографиям, чем живет в настоящее время наука, изучаемая студентом, и чем может помочь математика в ее изучении и развитии. Как в таких условиях преподаватель может убедить студента, что ему для дальнейшей работы знание математики необходимо? Как можно уверенно и компетентно при этом избрать те части математики, которые особенно нужны будущему специалисту?

На всех ступенях обучения учить следует так, чтобы содействовать познанию окружающего нас мира и воспитывать качества, необходимые в жизни и в работе, — точность мышления, стремление к познанию, умение критически разобраться в обстановке, привычку к критическому восприятию подхода при решении стоящих перед человеком задач, искать оптимальное решение, а не просто решать возникающие проблемы. Учить так, чтобы полученные знания были не бесполезным грузом, а постоянно находились под рукой в готовности к использованию для выполняемого дела. Очевидно, что именно эта точка зрения должна быть основой математического образования на всех его ступенях. Но при таком подходе к обучению необходимо время от времени пересматривать как содержание обучения, так и его характер. Это особенно важно в нашу эпоху, когда объем научных знаний растет так стремительно и когда научные достижения быстро находят использование в промышленности и сельском хозяйстве.

Само собой разумеется, что всякие изменения содержания обучения должны производиться в результате глубокого изучения тенденций общественного развития, потребностей общества в определенных математических знаниях, а не в порядке волевых решений или решений, принятых только на основе состояния самой математической науки. Очень важно, чтобы учащиеся получали современные представления о состоянии науки, но нужно это делать так, чтобы они были доступны учащимся и удовлетворяли потенциальные потребности большинства. Все, что разработано в науке, невозможно познать за целую жизнь, а не только за короткий срок обучения в вузе и школе. Именно поэтому так необходим строгий отбор изучаемого материала.

Нередко приходится наблюдать стремление педагогов (особенно в вузах) передать студентам как можно больше сведений, заставить их решить как можно больше задач и примеров и тем самым набить руку в правилах действия. Однако следует набивать не руку, а воспитывать разум, находить решение, которое соответствует сути задачи, строить модель и ее математическое оформление. Одних формальных трафаретных знаний совершенно недостаточно для нашего времени, а необходимо умение гибко мыслить и вникать в физический смысл возникающих вопросов. Основная цель обучения состоит не в том, чтобы набить голову правилами действия для определенных ситуаций, а в том, чтобы знания превратить в орудие активного действия, приучить разум размышлять и искать решения и в тех случаях, для которых еще нет разработанных правил их изучения.

В своих философских работах В. И. Ленин так определил путь познания — «от живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике...*»*. Эту мысль Ленина следует сделать принципом всего обучения на любых ступенях от школы до аспирантуры. Однако, как правило, в действительности остается лишь средняя часть этой формулы, и обучающийся видит лишь создание абстрактной теории, и ему никто не показывает, как практика приводит к необходимости теоретических исследований и как развитая теория позволяет решать задачи практики на более высоком уровне. А между тем обе эти стороны познания исключительно важны как для формирования научного мировоззрения, так и для формирования учащегося в зрелого специалиста.

Действительно, показ происхождения теории из насущных задач практики, прослеживание того, как возникали понятия теории из привычных представлений, позволит учащимся выработать собственный взгляд на происхождение теоретического знания и на идеалы преподавания. Точно так же показ действенности математической теории при решении задач практики позволит молодым людям правильно оценить место теоретических дисциплин в жизни общества. Вот почему так важно превратить приведенное ленинское положение в фундамент всей системы математического образования и в каркас отдельных курсов. Конечно, при изложении различных дисциплин в разной степени следует подчеркивать каждую из трех составных частей триады Ленина. При этом, естественно, будет изменяться и наполняться новым, более широким содержанием представление и о «живом созерцании» и о «практике». Но всегда нужно стремиться вскрывать те связи, которые существуют между явлениями реального мира и проблемами практики и миром понятий, идей и результатов математической науки.

Педагогический принцип, основанный на триаде Ленина, представляет значительный методический интерес, поскольку он позволяет показать математику в связи с задачами, волнующими общество и представляющими общий интерес. Лучшие педагоги прошлого постоянно подчеркивали недостаточность чисто абстрактного изложения математики и настаивали на необходимости показа математики как

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152—153.

метода познания окружающего нас мира. В этом отношении представляет интерес одно место в замечательной брошюре М. В. Остроградского и А. Блума «Размышления о преподавании»: «Кто из нас не видел, что из пятидесяти соучеников по меньшей мере сорок испытывали отвращение и падали духом из-за абстрактности идей, преподносимых до того, как они становились понятными на примерах, взятых из житейской практики?»* А ведь не только в прошлом веке, но и теперь при изложении математики так часто забывают об огромном значении примеров практического содержания для развития интереса учащихся к предмету и формирования правильного представления о назначении научных знаний. Чисто абстрактное изложение может принести пользу только на весьма высоком уровне полученных знаний, но и в этом случае указания на возможное практическое использование вводимых понятий и полученных результатов не только полезно, но и необходимо.

Сколько раз мне приходилось наблюдать, как курс математической статистики излагается чисто абстрактно, перечислением правил и теорем, но без рассмотрения результатов испытаний и их статистической обработки, без того, чтобы показать, как статистический материал может быть использован для получения существенных практических выводов. Как-то я попросил собрать для меня данные о росте пшеницы в поле и весе зерен в колосе. Для чего это нужно? Я ставил перед собой несколько целей. Первая из них состояла в том, чтобы, установив совместное распределение роста растений и веса созревшего на нем зерна, выяснить процент потерь зерна при срезании растений комбайном. Во-вторых, мне хотелось выяснить, как влияет рост растения на урожайность. Ведь можно высказать две гипотезы относительно связи полновесности колоса и роста растения. Прежде всего можно высказать предположение, что высокие растения высоки потому, что их корни проникли глубоко и доставляют растению в изобилии влагу и питательные вещества. Результатом этого должно быть и хорошее развитие колоса. Вторая гипотеза может быть такой: короткостебельные растения направляют питательные вещества не на формирование соломы, а на развитие колоса. Отсюда вывод — короткостебельные растения должны приносить больший урожай. Какая из этих гипотез вер-

* Остроградский М. В. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. М., Физматгиз, 1961, с. 35.

на? Ясно, что ответ может дать только обработка реального статистического материала.

Не пора ли нам всерьез продумать, каким должен быть курс математической статистики для математиков, биологов, инженеров, экономистов, психологов, чтобы это познание возникло не как сборник формальных правил, а как отточенное орудие обработки результатов эксперимента, как средство формирования испытаний, как способ отвечать на практически насущные вопросы?

Впрочем, те же вопросы возникают и при прочтении любого математического курса. Все они должны играть не только вспомогательную роль при проведении расчетов, но и методологическую в качестве метода познания. Само собой разумеется, что приближение математического образования к практике ни в коем случае не должно означать превращение ее в служанку на побегушках. Она должна сохранять свою логическую структуру и строгость изложения, но к этому дополнительно необходимо выяснять происхождение ее задач и понятий из недр практики и иллюстрировать широкие возможности и силу математических методов исследования естественнонаучных и прикладных проблем.

Такой подход к математическому образованию позволяет добиться того, что абстрактность ее понятий и методов исследования станет восприниматься не как отход от задач практики и повседневной жизни, а как необходимый прием изучения явлений реальной действительности с позиций свойственных им количественных закономерностей, логических связей, геометрических форм. Это способ, который выделяет интересующие нас соотношения в чистом виде, избавленном от многочисленных посторонних наслоений, позволяет избавлять выводы математики от привычных ассоциаций, связанных с частными проявлениями реальных явлений. Такое отделение математических понятий от породивших их явлений дает возможность доказанные математические результаты переносить и на многие другие явления, обладающие теми формальными особенностями, которые свойственны вводимым математическим понятиям и полученным на их базе математическим выводам. Именно этим обстоятельством объясняется широкая применимость одного и того же математического аппарата к явлениям различной физической природы. Учащийся при этом наглядно видит силу абстракции и ее необходимость. Он поймет, что в конце концов общее познание немыслимо без процесса абстрагирования в любой области деятельности. В этом отношении характерна следующая формулировка В. И. Ленина, которая при предлагаемом нами способе обучения заблещет дополнительными красками. «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное... от* истины, а подходит к ней. Абстракция *материи, закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом, *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*»*.

Без математически оформленных теорий, описывающих и анализирующих явления природы, во многих случаях человечество не смогло бы вникнуть в существо этих явлений, научиться рассчитывать их протекание и тем самым заранее прогнозировать их развитие. Так, для примера, без математически оформленных механики твердого тела, гидродинамики и аэродинамики было бы невозможно заранее рассчитывать механизмы и большие технические системы, современные морские суда и самолеты, запускать космические станции. Человечество было бы лишено возможности заранее предвычислять движение планет и предсказывать солнечные и лунные затмения.

Использование математики в инженерных, естественнонаучных, экономических и производственных исследованиях не всегда проходит без затруднений: не сразу удается построить удовлетворительную математическую модель явлений, подобрать необходимые математические средства исследования, почти адекватные реальным явлениям. Но разве в какой-либо области знания мы можем сразу без трудностей найти истину? Разве не всюду и всегда нам приходится первоначальную идею уточнять, улучшать, развивать, прежде чем она превратится в действенную силу, позволяющую использовать ее с пользой для практики и познания? Ведь каждый шаг в изучении явления, каждое открытие представляют лишь промежуточный этап в процессе познания природы и ее закономерностей. И сами закономерности — лишь вехи на неограниченном пути познания. В этом отношении прекрасны следующие слова В. И. Ленина: «... человеческое мышление по природе своей способно давать и дает нам абсолютную истину, которая складывается из суммы относительных истин. Каждая ступень в развитии науки прибавляет новые зерна в эту сумму абсолют-

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152.

ной истины, но пределы истины каждого научного положения относительны, будучи то раздвигаемы, то суживаемы дальнейшим ростом знания»*.

Каждая математическая теория тех или иных явлений природы, того или иного технологического процесса представляет лишь приближенное их отражение и, значит, рано или поздно будет наблюдено отклонение результатов теории от реального хода этих явлений. В такой момент, как мы говорили, возникает необходимость пересмотра основных положений теории, ее исходных предпосылок. В результате возникает новая, улучшенная модель изучаемых явлений; она должна объяснять не только ранее известные факты, но и вновь обнаруженные. Именно в этом и состоит прогресс наших знаний. При математическом изучении реальных явлений мы ни в коем случае не должны их подгонять под имеющиеся в нашем распоряжении понятия и средства исследования. Мы должны настойчиво искать такие средства и формы описания, которые соответствовали бы их природе. Именно такой подход привел человечество к величайшим открытиям и еще не раз сослужит в этом добрую службу.

Элементы математического анализа вместе с началами математической физики, аналитической геометрией и современной алгеброй являются основой применений математики. Но в наше время знание только этих разделов математики уже недостаточно. Без владения методами теории вероятностей, математической статистики, оптимального управления, программирования для ЭВМ теперь невозможно представить себе физика, механика, инженера и биолога. Мы должны помочь нашей молодежи активно овладеть всеми этими областями знания как орудиями дальнейшего познания.

Заключение

Вопросы связи математики с познанием окружающего нас мира далеко не исчерпаны нами. Мы должны были бы охватить многие вопросы и среди них такие, как воспитание творческого начала; привычку понимать, а не запоминать, уверенность в собственных силах и др. В заключение мы остановимся лишь на одном вопросе — на значении истории именно для методологии математики. Сведения из ис-

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 137.

тории математики могут создать в сознании учащихся картину длительного и сложного процесса формирования научных понятий и отдельных математических дисциплин, появления постановок задач, постепенного перехода от представлений, связанных с конкретными практическими задачами, к абстракциям, в которых еще чувствуется влияние практики, а затем от них уже к полностью абстрагированным и формализованным понятиям.

В средней школе естественно провести хорошую беседу, а возможно и ряд бесед по вопросам формирования понятия числа и числовых обозначений. Данные этнографии и описания счета у первобытных народов путешественниками прошлого дают яркую картину того, как постепенно расширялись представления людей о целом числе и о действиях с целыми числами, как постепенно возникало знание неограниченности числового ряда. Формирование же правил действия с дробными числами находится совсем в пределах обозримой истории. Очень важно и для учащихся интересно провести беседы о числовых обозначениях. Как от неуклюжих и совершенно непригодных для производства вычислений буквенных и римских обозначений человечество пришло к современной позиционной системе записи? Это удивительное изобретение, оказавшее огромное влияние на ход цивилизации, но мы к нему привыкли и считаем чем-то само собой разумеющимся, как бы данным человечеству от сотворения мира. Но в действительности это является созданием человеческого гения весьма позднего времени.

Мы коснулись только одного аспекта исторических бесед относительно арифметики. А сколько таких возможностей таится в истории арифметики, алгебры, геометрии и математического анализа, с которыми знакомятся учащиеся в школе!

Разумеется, сказанное в неменьшей мере касается и высшей школы. Разве студент не должен знать об истории изучаемых им наук? Разве ему безразлична история великих открытий? Разве он не хочет прикоснуться к тому процессу, который приводит к новому, более совершенному и дает истинное приращение человеческих знаний? Я считаю, что все это необходимо, если мы стремимся воспитать творчески мыслящего инженера, педагога, экономиста, биолога или математика, а не просто носителя определенной суммы знаний, нужных для выполнения строго определенных действий. И для исторических бесед, для бесед о творчестве великих ученых и изобретателей мы обязаны находить время, поскольку такого рода беседы открывают перед слушателями великий мир неизвестного, которое должно стать известным. Но эти беседы открывают и большее — пути и методы поиска еще неизвестных закономерностей.

Вузовское изложение только формальной стороны математических курсов способно лишь дать снимок, соответствующий какому-то моменту состояния изучаемой дисциплины, но увидеть ее в движении, в развитии позволяет только история науки. Как мало еще сделано в этом направлении, может убедительно показать опыт знакомства с распространенными учебниками, практически лишенными исторических сведений. Если же они иногда там появляются, то ограничены всего несколькими словами, как правило, хорошо известными читателям из других источников. А вопросов исторического характера у студентов возникает много, хотя бы из присущей молодежи любознательности. Еще разительнее другой факт — в педагогических институтах нет обязательного курса истории математики. Меня такое решение вопроса формирования будущего педагога удивляет, поскольку оно лишает его многих возможностей рационально строить урок, уверенно говорить о происхождении понятий и основных задач науки, заинтересовывать учащихся историческими задачами и примерами.

Приблизительно полтора года назад я задал себе естественный вопрос: кто впервые в истории ввел в употребление классическое понятие вероятности и каким способом? Я не смог найти ответа на этот вопрос не только в учебниках теории вероятностей, но даже в специальных книгах, посвященных ее истории. Вслед за этим вопросом появились совершенно естественно и два других: кто ввел определение случайной величины и ее функции распределения? Кто ввел понятие случайного процесса и его вероятностных характеристик, хотя бы в самой несовершенной форме?

Для ответа на эти вопросы мне пришлось обратиться к первоисточникам. А должны бы были существовать соответствующие книги, а также исторические очерки в учебниках.

Выяснилось, что первое определение классической вероятности, изложенное на простейшем примере урны, в которой содержатся пять шаров заданных цветов, встречается лишь в известном трактате Я. Бернулли «Искусство предположений». Это было хотя еще и несовершенное, но уже определение. Далее оно совершенствовалось и приняло ту форму, которая используется и поныне, лишь в трактате

П. Лапласа «Аналитическая теория вероятностей». Точно так же первая попытка определить случайную величину встречается лишь в тридцатые годы прошлого века в книге Пуассона, хотя перед этим целое столетие это понятие фактически использовалось многими исследователями. Однако они не задумывались над тем, что используемое понятие надо как-то определить. А вот понятие функции распределения, по-видимому, введено в науку было лишь А. М. Ляпуновым в 1900 г. в его знаменитом трактате о центральной предельной теореме. Наконец, понятие случайного процесса действительно строго определено было лишь в тридцатые годы нашего столетия в работах А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, Е. Е. Слуцкого, но интуитивные представления и даже отдельные результаты, которые следует отнести к теории случайных процессов, появлялись в науке значительно раньше, еще до начала XVIII в.

Задача истории науки сводится не только к описанию уже пройденного пути, но и к его осмыслению. История математики, как и всякая живая наука, со временем изменяет свое содержание и по-новому подходит к своим прежним задачам. Основное содержание истории науки мы сейчас видим не просто в собирании фактов, изложении жизни и творчества известных математиков, а в выявлении причин появления тех или иных руководящих идей, основных понятий и направлений исследования, в формулировке закономерностей развития математики, выявлении ее связей с жизнью общества.

* * *

Мировоззрение необходимо человеку как в жизни, так и в его повседневной деятельности. Математика имеет свои неповторимые возможности для формирования правильных взглядов на научное познание, для выявления глубоких связей, существующих между деятельностью и мыслью. Я буду счастлив, если то, что я предлагаю читателям, заинтересует их и послужит толчком для размышлений над большой и очень важной темой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова Н. В. Математические термины. М., Высшая школа, 1978.
2. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном. М., Знание, 1981.
3. Гнеденко Б. В. Математическое образование в вузах. М., Высшая школа, 1981.
4. Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. М., Просвещение, 1982.
5. Математика в современном мире. М., Мир, 1967.
6. Математика как профессия (О воспитательном эффекте математического образования). Сборник статей. М., Знание, 1980.
7. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности. М., Наука, 1980.
8. Рыбников К. А. Очерки методологии математики. М., Знание, 1982.

СОДЕРЖАНИЕ

Борис Владимирович ГНЕДЕНКО

МАТЕМАТИКА И НАУЧНОЕ ПОЗНАНИЕ

Главный отраслевой редактор *Л. А. Ерлыкин*. Редактор *Г. Г. Карвовский*. Мл. редактор *Г. И. Валюженич*. Обложка художника *Л. П. Ромасенко*. Художественный редактор *М. А. Бабичева*. Технический редактор *А. М. Красавина*. Корректор *В. И. Гуляева*.

ИБ № 135

Сдано в набор 25.05.83. Подписано к печати 11.07.83. Т-11612.
Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,57. Уч.-изд. л. 3,81.
Тираж 29 980 экз. Заказ 1441. Цена 11 коп.
Издательство «Знание», 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4.
Индекс заказа 834 307.
Типография Всесоюзного общества «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов, Московской области.