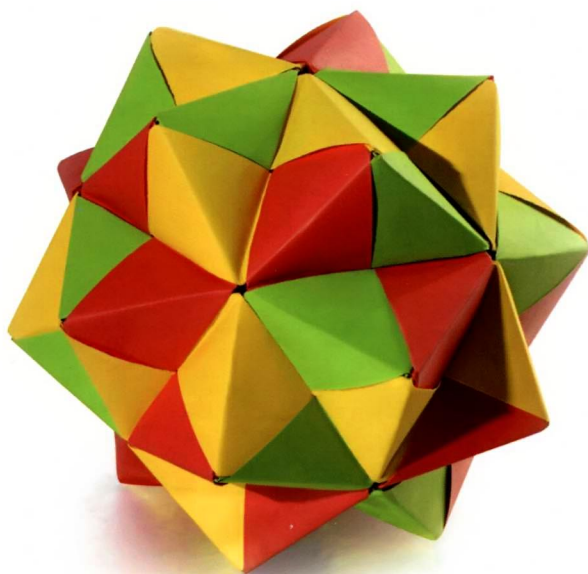


# *Мир* **МАТЕМАТИКИ**

**23**

**Тысяча граней  
геометрической  
красоты**  
Многогранники



**DeAGOSTINI**





# Мир математики



# **Мир математики**

**Клауди Альсина**

**Тысяча граней геометрической красоты**

**Многогранники**

**Москва — 2014**

**DeAGOSTINI**

УДК 51(0.062)  
ББК 22.1  
М63

М63 **Мир математики: в 40 т. Т. 23: Клауди Альсина.** Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники. / Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2014. — 144 с.

Окружающий нас мир полон изумительно красивых и сложных фигур, примерами которых можно считать и обычный цветок, и изломанные линии фьордов. Среди них отдельное место занимают многогранники — фигуры особого очарования с богатой родословной. На протяжении веков они привлекали внимание не только геометров, но и кристаллографов, архитекторов, художников, скульпторов и ювелиров. Читатели этой книги откроют для себя удивительный раздел геометрии, посвященный многогранникам, и познакомятся с оригинальными способами применения этих тел. Добро пожаловать в многогранный мир!

ISBN 978-5-9774-0682-6  
ISBN 978-5-9774-0718-2 (т. 23)

УДК 51(0.062)  
ББК 22.1

© Claudi Alsina, 2010 (текст)  
© RBA Coleccionables S.A., 2011  
© ООО «Де Агостини», 2014

Иллюстрации предоставлены:  
age fotostock, gettyimages.

Все права защищены.

Полное или частичное воспроизведение без разрешения издателя запрещено.

# Содержание

<b>Предисловие</b> .....	11
<b>Глава 1. Приглашение в мир многогранников</b> .....	13
Новости из страны многоугольников .....	13
Что такое многогранник .....	17
Многогранники в природе .....	20
Краткая история многогранников .....	24
Доисторический период .....	24
Многогранники в Древней Греции и Древнем Риме .....	25
Ключевой фрагмент сочинения «О природе мира и души» .....	26
Великий труд Евклида .....	28
Многогранники в эпоху Возрождения .....	34
Многогранники в 1700—2000 годах .....	40
Многогранники в наши дни .....	43
<b>Глава 2. Большие семейства многогранников</b> .....	45
Пять платоновых тел .....	45
Тетраэдр .....	48
Куб .....	50
Октаэдр .....	51
Додекаэдр .....	52
Икосаэдр .....	52
Пирамиды и бипирамиды .....	53
Призмы и антипризмы .....	55
Дельтаэдры .....	57
Архимедовы тела .....	59
Каталановы тела .....	61
Звездчатые многогранники .....	63
Другие семейства многогранников .....	66
Параллелепипеды .....	66
Поликубы .....	66
Многогранники, обладающие особыми свойствами .....	66
Зонотопы .....	68
Трапецоэдры .....	68

Ортогональные многогранники .....	68
Производные многогранники .....	68
Неправильные многогранники .....	68
Гиперкубы в четырех измерениях .....	69
Три правильных политопа .....	72
<b>Глава 3. Удивительные секреты многогранников .....</b>	<b>77</b>
Формула Эйлера .....	77
Формула $\Gamma + B = P + 2$ .....	78
Эйлер против Декарта и Пойа .....	80
Формула Эйлера для граней и вершин .....	82
Всегда существует треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань .....	82
Все грани не могут быть разными .....	83
Три особых многогранника .....	84
Различные плоские развертки .....	85
Гибкие многогранники .....	88
Удивительные пары .....	88
Загадка совершенной шкатулки .....	90
Тетраэдризация многогранников .....	91
Неразрешимая головоломка .....	92
Любопытные упаковки .....	92
Губка Менгера .....	94
<b>Глава 4. Многогранники в архитектуре и искусстве .....</b>	<b>97</b>
Сетчатые конструкции, опалубка и строительные леса .....	97
Многогранники в жилых домах .....	98
L-модуль Леоса .....	99
Кубический модуль Бофилей .....	100
Модуль Блома .....	100
Чудесные геодезические купола .....	101
Купола Фуллера .....	103
Купол Ercot Center .....	104
Купол Исодзаки .....	105
Купол Ла-Виллет .....	105
Купол Дали и другие сооружения .....	107
Гауди и многогранники .....	108

Некоторые любопытные произведения архитектуры .....	110
Пирамиды египтян, майя и современные пирамиды .....	111
Флорентийский баптистерий .....	112
Восьмиугольный купол Брунеллески .....	112
Атомиум Ватеркейна .....	114
Наклонные призмы КЮ и другие сооружения .....	114
Многогранники и искусство .....	115
<b>Глава 5. Многогранники в дизайне .....</b>	<b>119</b>
Футбольный мяч .....	119
Многогранники в играх .....	120
Кубики Сомы .....	120
Кубик Рубика .....	121
Игральные кости и лотереи .....	122
Головоломки .....	125
Долосы и тетраподы .....	125
Царство упаковок .....	126
Тетрапак .....	128
Многогранники дома .....	128
Геометрические лампы .....	129
Пирамидальные зонтики .....	130
Предметы из картона .....	131
Мебель в городе .....	131
Многогранники в ювелирном деле .....	132
Многогранное оригами .....	134
Как сложить коробку, куб и тетраэдр .....	135
<b>Эпилог .....</b>	<b>137</b>
<b>Библиография .....</b>	<b>139</b>
<b>Алфавитный указатель .....</b>	<b>141</b>





*Почему мы не рассматриваем многогранники  
сами по себе, не наслаждаемся их красотой  
и удивительными свойствами?*

Марджори Сенешаль



# Предисловие

Окружающий нас мир полон изумительно красивых и сложных фигур, примерами которых можно считать и обычный цветок, и изломанные линии фьордов. Мы создаем новые художественные, промышленные и архитектурные формы, начиная от барочных колонн и заканчивая автомобилями «Формула-1». Геометров всегда интересовали фигуры, с помощью которых можно описать природные объекты или создать новые искусственные предметы. И уже не одну тысячу лет математики при этом сталкиваются с определенными геометрическими фигурами.

Среди них особое место занимают многогранники — фигуры особого очарования с богатой родословной. В этой книге мы приглашаем вас открыть для себя эту часть геометрического мира, насладиться ее красотой, познакомиться с удивительными способами применения многочисленных трехмерных тел. Многогранники привлекали внимание не только геометров, но и кристаллографов, архитекторов, художников, скульпторов, производителей упаковки и ювелиров... Многогранники — один из многих видов геометрических фигур, которые окружают нас. Возможно, мы даже живем внутри одного из них. Надеемся, эта книга поможет вам полюбоваться достопримечательностями многогранного мира.

В начале мы пригласим вас на обзорную экскурсию по миру многогранников. Немного задержавшись в стране многоугольников, мы обсудим разные определения многогранников, чтобы вы смогли насладиться многообразием их свойств. Мы расскажем о многогранниках в природе, и во время подробного исторического экскурса вы сможете увидеть, как творчество геометров и художников на протяжении веков позволяло открывать все новые и новые секреты геометрических тел и создавать новые фигуры. Вы увидите, что изучение многогранников не прекращается и сегодня.

Затем мы нанесем визит благородному семейству, членами которого являются пять правильных многогранников. Эти пять фигур, также известные как платоновы тела (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр), имеют особое происхождение, отличаются удивительной красотой, с ними связаны различные мифы и легенды. Также мы кратко обрисует портреты всего «королевского двора» царственных правильных многогранников: простых пирамид, возвышенных призм и сложных звезд-

чатых многогранников. Вы узнаете, как с помощью воображения можно увидеть новые многогранники в пространствах с числом измерений больше трех.

В следующей главе вы откроете для себя удивительные секреты многогранников, начиная от любопытных свойств знаменитой формулы Эйлера и заканчивая прекрасными примерами многогранников, которые продемонстрируют существенную разницу между этими объемными телами и их скромными родителями — многоугольниками на плоскости.

Мы рассмотрим элегантные многогранники, которые применялись при строительстве известных зданий, и восхитительные купола, использованные в сложных проектах Гауди и сооружениях из стекла, чтобы вы смогли оценить их внутреннее и внешнее великолепие.

Последняя глава поможет вам увидеть вокруг множество примеров дизайна, в которых используются многогранники: футбольные мячи, бриллианты в обручальных кольцах, игры, подобные кубикам Сомы или кубику Рубика, различные виды упаковки. Вы поймете, что многогранники позволяют не только создавать произведения искусства, но и находить крайне полезные и функциональные решения. Искусство оригами поможет вам создать собственную коллекцию многогранников и, быть может, станет вашим хобби.

Завершает книгу эпилог и алфавитный указатель, который упростит работу с ней.

Многогранники ждут вас — пусть путешествие в их мир окажется для вас приятным!

# Приглашение в мир многогранников

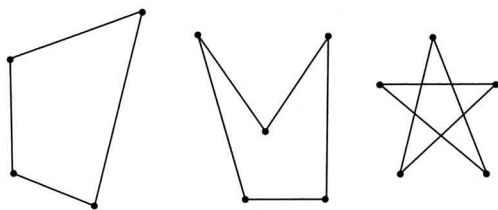
*Главная причина, по которой изучают правильные многогранники, не изменилась со времен Пифагора и заключается в том, что эти многогранники кажутся нам привлекательными.*

Гарольд Коксетер

Что такое многогранник? Где существуют многогранники? Какова их история? На эти три вопроса отвечает первая глава этой книги. Наш путь начнется на плоскости, в стране Многоугольнии, где уже много веков обитают многоугольники. Именно из многоугольников при переходе в трехмерное пространство получаются многогранники, которые после этого можно использовать в качестве моделей при работе над различными проектами, начиная от разработки методов перспективы Брунеллески и заканчивая точными чертежами создателя начертательной геометрии Гаспара Монжа. Удивительно, но интерес к многогранникам не угасает и сегодня.

## Новости из страны многоугольников

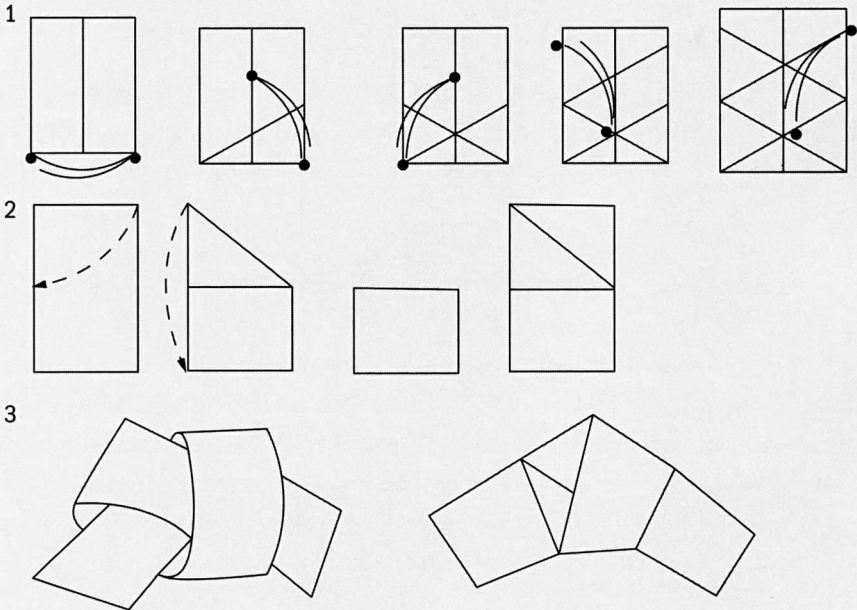
В вымышленной стране Многоугольнии, которая является частью нашего мира, обитают самые разные многоугольники. Треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники, пятиконечные звезды и другие фигуры можно встретить в окружающем нас мире повсюду: на фасадах зданий и на тротуарах, на логотипах и флагах. Многоугольник — это геометрическая фигура на плоскости, заданная последовательностью вершин  $B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1} = B_1$  и сторон (угол между сторонами не может быть развернутым)  $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$ .



Многоугольники: выпуклые, невыпуклые и с самопересечениями.

## МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОРИГАМИ

Многоугольники можно не только строить с помощью линейки, циркуля и транспортира, но и складывать из листов бумаги (искусство складывания фигур из бумаги называется оригами).

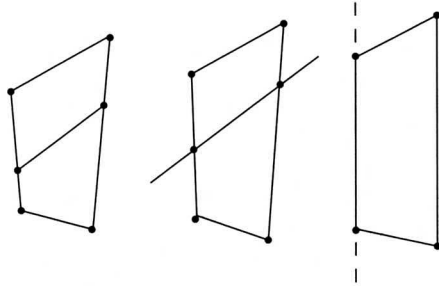


*Многоугольники, сложенные из листов бумаги.*

На рис. 1 приведена последовательность действий при складывании равносторонних треугольников и шестиугольников, на рис. 2 — схема складывания квадратов, на рис. 3 — схема, позволяющая построить правильный пятиугольник (для увеличения точности потребуется провести вспомогательную линию). Будет интересно показать, что полученная фигура действительно является правильным пятиугольником: так как лист бумаги обладает постоянной шириной, все его стороны обязательно будут равны, но равенство углов нужно доказать. На веб-странице <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/papiroflexia/> содержится обширная информация о способах применения древнего искусства оригами в математике.

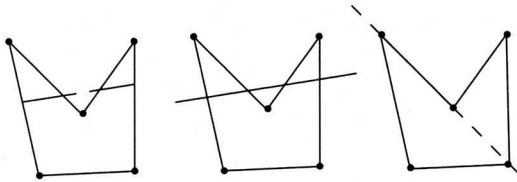
На рисунке на предыдущей странице вы увидели различные типы многоугольников. Классические многоугольники являются простыми, но определенный интерес представляют и многоугольники с самопересечениями. Чтобы разобраться в терминологии, познакомьтесь со следующими формулировками.

Многоугольник выпуклый, если отрезок, соединяющий две любые его точки, находится внутри многоугольника, то есть любая прямая пересечет выпуклый многоугольник не более чем в двух точках; многоугольник всегда будет находиться по одну сторону от прямой, соединяющей две его соседние вершины.



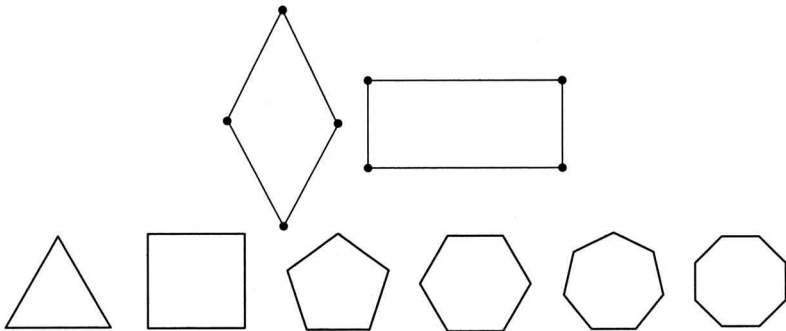
Три определения выпуклого многоугольника.

Невыпуклый многоугольник не обладает ни одним из вышеуказанных свойств.



Три определения невыпуклого многоугольника.

В равностороннем многоугольнике длины всех его сторон равны, в равноугольном — все его углы равны. И тот, и другой называются правильными.



Вверху слева — равносторонний неравноугольный прямоугольник, вверху справа — равноугольный неравносторонний прямоугольник. Внизу — правильные многоугольники.

Стороны многоугольника могут располагаться так, что его вершины не будут лежать в одной плоскости. Такие многоугольники называются пространственными.

В классической геометрии построения с помощью циркуля и линейки занимают особое положение. Но если описать окружность вокруг равностороннего треугольника, квадрата, пятиугольника и шестиугольника нетрудно, то для семиугольника это вызвало большие сложности, и лишь через несколько веков математики смогли доказать, что такое построение вообще невозможно. К счастью, существуют способы выполнить его с помощью других инструментов.

## МНОГОУГОЛЬНИКИ ГАУДИ

Выпуклые и звездчатые плоские многоугольники присутствуют в творчестве Гауди в двух вариантах: как фигуры, определяющие форму элементов конструкции (этажей, окон, перегородок, облицовочной плитки), и как элементы узоров (изготовленных из керамики, образованных буквами и т. д.). В работах Гауди из всех плоских правильных многоугольников чаще всего используются треугольники, квадраты, пятиугольники, шестиугольники, восьмиугольники, десятиугольники и двенадцатиугольники. Классическими примерами, многие из которых можно увидеть в зданиях Барселоны, являются кирпичные треугольники дома Бельесгуард, квадраты из облицовочной плитки в доме Висенс, пятиугольные окна Эль-Каприччо или шестиугольники из плитки на Пасео-де-Грасия. Однако наиболее удивительным образом Гауди использовал многоугольники в колоннах нефа храма Святого Семейства, превзойдя всех своих предшественников. Колонны храма Святого Семейства — результат тонкой геометрической игры, состоящей в перемещении многоугольников и пересечении фигур. Вне сомнения, они представляют собой кульминацию подробных исследований Гауди. Два равных правильных многоугольника смещены вверх и повернуты в противоположных направлениях, образуя колонну, сечениями которой на разной высоте являются последовательности многоугольников со все большим числом сторон. В главе 4 творчество этого гениального архитектора рассматривается более подробно.

*Колонны храма Святого Семейства.*



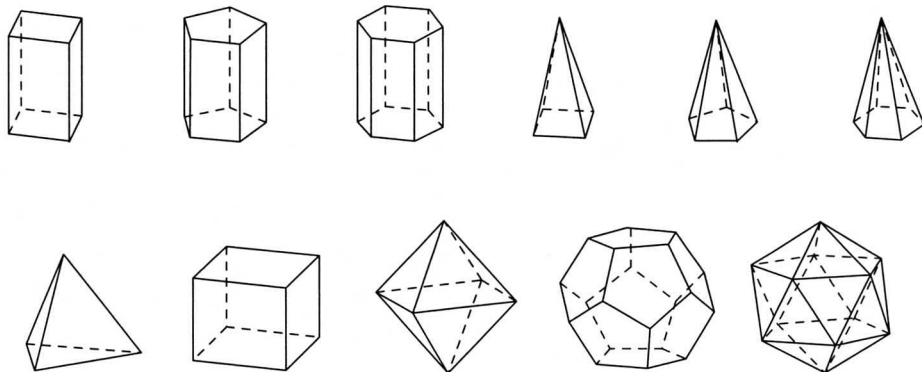


Существует бесконечно много разновидностей многоугольников, но важнейшим из них является треугольник, так как и выпуклые, и невыпуклые многоугольники всегда можно разбить на треугольники различными способами. В следующей таблице приведены названия многоугольников с числом сторон до десяти.

Название	Число сторон
Треугольник	3
Четырёхугольник	4
Пятиугольник (пентагон)	5
Шестиугольник (гексагон)	6
Семиугольник (гептагон)	7
Восьмиугольник (октагон)	8
Девятиугольник (эннеагон)	9
Десятиугольник (декагон)	10

## Что такое многогранник

Многогранник — это геометрическое тело с плоскими гранями, прямыми ребрами, являющимися границами граней многогранника, и вершинами — точками, в которых сходятся ребра.



Различные многогранники.

В толковом словаре вы найдете следующее определение многогранника.

**Многогранник.** (от греч. πολύεδρος). 1. муж. (мат.) Геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими прямолинейными гранями.

## НАЗВАНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Многогранники часто обозначаются греческими названиями по числу граней (тетраэдр имеет четыре грани, пентаэдр — пять, гексаэдр — шесть, гептаэдр — семь и т. д.). Также используются названия, описывающие геометрические тела точнее: пятиугольная призма, ромбододекаэдр, усеченный куб и т. д. Некоторые многогранники имеют собственное название, например многогранник Кельвина.

Это очень общее определение, в котором никак не описываются ребра, вершины и форма граней многогранника.

В настоящее время используется следующее определение многогранника.

**Многогранник** (в трехмерном пространстве) — совокупность конечного числа плоских многоугольников, расположенных в разных плоскостях, такая, что каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне).

Рис. 1

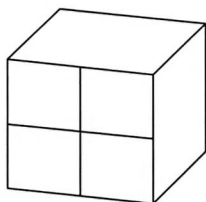
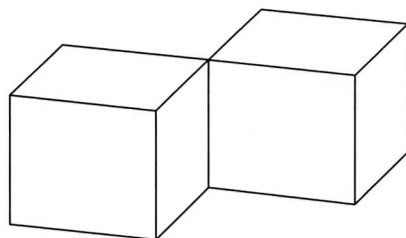


Рис. 2



На рис. 1 изображен куб, одна из граней которого разделена на четыре части. Согласно определению из толкового словаря, такой куб является многогранником. Однако согласно математическому определению из энциклопедии, это геометрическое тело не является многогранником, так как содержит смежные грани, расположенные в одной плоскости. Следует ли считать многогранником фигуру, изображенную на рис. 2?

Любопытно будет также определить различия между выпуклыми и невыпуклыми многогранниками. Чтобы понять, является ли многогранник выпуклым, можно рассмотреть отрезок, соединяющий две точки, расположенные внутри него или на его гранях, и проверить, находится ли этот отрезок полностью внутри многогранника.

Также можно проверить, будет ли многогранник целиком располагаться по одну сторону от плоскости каждой из его граней, или же указать, что сечение выпуклого многогранника с произвольной плоскостью должно быть выпуклым многоугольником.

На различных этапах истории математики многогранникам давались разные определения, и в результате родилось саркастическое замечание: «если у многогранников и есть что-то общее, то это название». Например, в античной Греции многогранники считались телами, однако позднее их стали рассматривать скорее как поверхности.

Очевидно, что можно выделить различные категории многогранников в зависимости от того, какими многоугольниками являются их грани (выпуклыми, невыпуклыми или многоугольниками с самопересечениями). Мы будем считать, что всякий многогранник обязательно должен обладать тремя свойствами: иметь конечное число многоугольных граней, общие точки которых определяют ребра или вершины многогранника, иметь ребра, которые принадлежат только двум граням, и вершины, в которых сходятся различные ребра и грани (не менее трех).

Большой интерес представляет понятие двойственности: какой многогранник получится, если соединить центры тяжести граней данного многогранника? На основе любого многогранника всегда можно создать бесконечное множество других.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПО ГРЮНБАУМУ

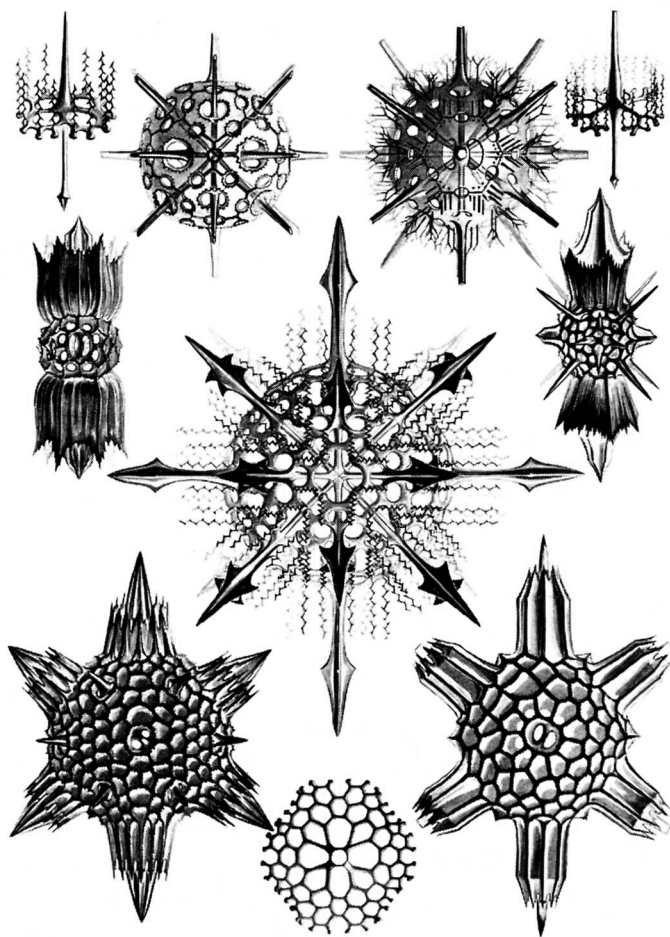
Бранко Грюнбаум дал многограннику определение, которому соответствует широкий класс этих геометрических тел. Согласно ему, многогранник  $M$  — это семейство многоугольников (называемых гранями  $M$ ), обладающее следующими тремя свойствами.

1. Каждое ребро грани многогранника является ребром только для еще одной грани.
2. Для каждой пары ребер  $P$  и  $P'$  многогранника  $P$  существует последовательность ребер  $(P_i)$  и граней  $(G_i)$   $P = P_0, G_1, P_1, G_2, P_2 \dots G_n, P_n = P'$ , в которой каждая вершина  $G_i$  является инцидентной  $P_{i-1}$  и  $P_i$ .
3. Любое компактное множество (ограниченное множество, которое помещается внутрь сферы и включает все точки на своей границе) может пересечь лишь конечное число граней  $M$ .

Разумеется, можно определить отдельный и весьма любопытный класс выпуклых многогранников как ограниченное множество в пространстве, понимаемое как пересечение конечного числа замкнутых полупространств, однако определение Грюнбаума охватывает гораздо более широкий класс этих фигур.

## Многогранники в природе

Фигуры, которые встречаются при изучении ботаники, зоологии и геологии, всегда вызывают большой интерес, в том числе и из-за своей сложной формы. Но не меньшее внимание привлекают и простые формы, обладающие определенной симметрией. Многогранники встречаются в природе не очень часто, но тем не менее они существуют. Так, в мире живых организмов существуют сферические формы, части которых имеют форму многогранников. Эрнст Геккель, сопровождавший Чарльза Дарвина в его путешествиях, описал радиолярии — одноклеточные существа, по форме напоминающие правильные и звездчатые многогранники.



Радиолярии. Рисунки Эрнста Геккеля.

## СИММЕТРИЯ, МНОГОГРАННИКИ И МЫЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ

Важным свойством многогранников является симметрия. Для всякой пространственной фигуры можно определить, при каких изометрических преобразованиях (преобразованиях, сохраняющих расстояние) внешний вид фигуры останется неизменным. Представьте себе куб: он имеет множество плоскостей симметрии, проходящих через его центр, также существует множество поворотов вокруг определенных осей, при которых форма куба сохраняется. Используя свойства симметрии куба, можно провести интересные геометрические эксперименты: например, поместив часть многогранника между зеркалами, расположенными определенным образом, можно увидеть многогранник целиком. Если погрузить модели многогранников, сделанные из проволоки, в мыльную воду (50 % воды, 40 % мыла и 10 % глицерина), а затем извлечь, то вы увидите, как мыльные пленки обозначат плоскости симметрии.

Некоторые рыбы или кораллы по форме напоминают купола или звездчатые многогранники. Некоторые животные, например пчелы, при постройке ульев используют шестиугольные призмы.

Форму многогранников имеют также гроздья некоторых плодов и различные виды семян: вспомните, например, сосновые шишки.

Сегодня известно, что белковые структуры большинства вирусов имеют форму многогранников (впервые это было замечено у вирусов полиомиелита). Структура вируса иммунодефицита человека представляет собой правильный икосаэдр.

Различные органические соединения, например  $C_{60}$  (фуллерен), содержат 60 атомов углерода, расположенных в форме футбольного мяча (усеченного икосаэдра),  $C_8H_8$  имеет форму куба.

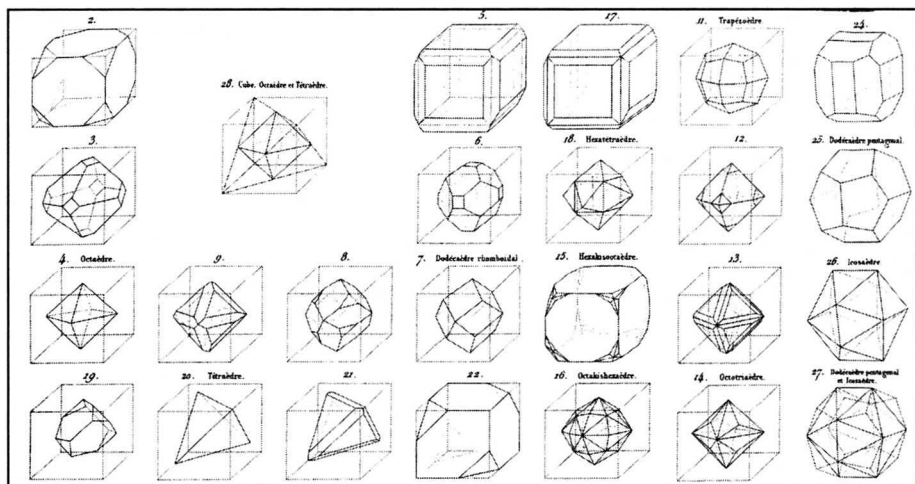
В геологии часто встречаются молекулы, имеющие форму многогранников, однако наиболее удивительные многогранники образуются при росте кристаллов на макроуровне.



Кристаллы пирита.

98,5 % массы земной коры состоит из восьми геохимических элементов, сочетания которых образуют около 3 тысяч минералов. Минералы с неупорядоченной структурой атомов называются аморфными (например, опал), с четкой структурой — кристаллическими (пирит). Среди кристаллических минералов выделяют особый класс кристаллов, которые характеризуются упорядоченной геометрической структурой как внешне, так и на атомном уровне. Такие кристаллы встречаются редко, так как для их формирования недостаточно особых химических соединений: пространство, где будут формироваться их грани, должно соответствовать определенным условиям, кроме того, для прохождения некоторых процессов (выпадение осадка из раствора, охлаждение магмы, сублимация и т. д.) требуется время.

Атомы, расположенные в виде правильной геометрической структуры, образуют элементарные ячейки, повторением которых в трех измерениях образуется кристаллическая решетка. Геометрический анализ подобных кристаллических решеток лежит в основе современной классификации кристаллических систем. Каждая элементарная ячейка представляет собой призму определенных размеров ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) и с определенными углами ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) и свойствами (эти свойства называются кристаллографическими свойствами). Выделяют семь классических кристаллических решеток: это кристаллы пирита, везувиана, сидерита, бериллия, барита, мела и аксинита.



Фрагмент кристаллографической таблицы XIX века.

В каждой из этих семи кристаллических решеток можно увидеть различные многогранники, которые обязательно обладают общими свойствами симметрии. Так, в кубической решетке присутствуют не только кубы, но и, например, октаэдры, так как

они обладают теми же осями и плоскостями симметрии, что и кубы. В таблице ниже перечислены некоторые примеры многогранников, которые можно увидеть в кристаллических решетках различных кристаллических структур.

Система	Примеры многогранников
Кубическая	Кубы, октаэдры, ромбододекаэдры, икоситетраэдры
Тетрагональная	Тетраэдры, призмы, пирамиды
Тригональная	Ромбоэдры, треугольные пирамиды
Гексагональная	Шестиугольные призмы, гексагональные трапецоздры
Ромбическая	Параллелепипеды и пинакоиды
Моноклинная	Параллелепипеды
Триклинная	Параллелепипеды

Наиболее примечательны внешне следующие минералы: кристаллы кварца, имеющие форму призмы с одной остроконечной вершиной; кристаллы пирита, имеющие форму додекаэдров; кристаллы серы в форме ромбических призм; кристаллы лазурита в форме ромбододекаэдров; галенит, хлорид натрия, платина и алмазы, имеющие форму кубов; флюорит, магнетит, золото и медь, имеющие форму октаэдров; киноварь, кальцит и висмут в виде ромбоэдров.

В знаменитом Atlas der Krystallformen 1912 года, составленном Виктором Гольдшмидтом, описано 16 геометрических форм, которые принимают кристаллические решетки золота. Иногда ювелиры придают драгоценным камням форму многогранников, подчеркивая их «правильность».

Математическая теория симметрии (и ее роли в природе) появилась в XIX веке именно потому, что геологи стали проявлять интерес к кристаллографии и геометрической классификации кристаллических систем. Именно тогда возникло неожиданное кристаллографическое ограничение, согласно которому симметрия вращения возможна только при повороте на угол в  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  или  $60^\circ$ , но не при повороте, например, на  $72^\circ$  или другие углы. Поэтому когда в 1984 году были открыты квазикристаллы с пятиугольной симметрией в некоторых точках, это стало большим сюрпризом.

Кристаллография изучает рост, форму и геометрию кристаллов с помощью химических опытов, позволяющих увидеть связи между химическими формулами и расположением атомов, и физических экспериментов (например, дифракции рентгеновских лучей), которые помогают выявить геометрическую структуру атомов. Поэтому специалисты по кристаллографии очень любят многогранники.

## Краткая история многогранников

Так как особые многогранники (кубы, ромбододекаэдры, призмы, пирамиды и другие) можно встретить в природе, можно сказать, что они сопровождали людей всегда. Однако интересно будет выделить в истории человечества этапы творческого подъема, когда совершались великие математические открытия, позволившие проникнуть в тайны этих удивительных фигур.

### Доисторический период

В Шотландии археологи обнаружили множество сфер, высеченных из камня. Их возраст оценивается в 4 тысячи лет. Ведутся жаркие споры о том, не являются ли эти сферы грубо изготовленными правильными многогранниками, а также об их возможном применении.

Ювелирные украшения в форме многогранников, возраст которых насчитывает несколько тысяч лет, были найдены в Африке, Месопотамии и Египте. Именно в эпоху фараонов были построены великолепные пирамиды Египта. Хотя легендарная пирамида Хеопса, или Великая пирамида, — один из наиболее изученных древних памятников, математики выделяют ее среди остальных еще и потому, что в так называемом Московском математическом папирусе, написанном около 1890 года до н. э., приведены расчеты по вычислению ее объема.



Египетские пирамиды Гизы. Фотография, выполненная с воздушного шара в начале XX века Эдуардом Спелтерини.



С другой стороны, некоторые авторы указывают, что тетраэдр, октаэдр и куб были известны уже в Древнем Вавилоне и Египте.

Многогранники издавна использовались при изготовлении игральные костей: так, археологами была найдена этрусская игральная кость в форме додекаэдра, датируемая 1000 годом до н. э.

## Многогранники в Древней Греции и Древнем Риме

Пифагор Самосский (около 582 года до н. э. — 507 год до н. э.) создал космологическое учение, связавшее правильные многогранники с устройством Вселенной. Из пифагорейской философии родился мистицизм, в котором многогранники соотносились с четырьмя основными элементами природы: тетраэдр символизировал огонь, куб — землю, октаэдр — воздух, икосаэдр — воду, а додекаэдр отождествлялся с небесной сферой. У пифагорейцев вызывали большой интерес особые свойства правильных многоугольников и сокрытые в них отношения между числами. Даже символом пифагорейской школы была пентаграмма — пятиконечная звезда, связанная с правильным пятиугольником. Вероятно, Пифагору были известны три правильных многогранника, однако есть сомнения в том, что он знал о существовании двух остальных.

Первая теория о пяти правильных телах принадлежит великому греческому математику Теэтету Афинскому (415 год до н. э. — 369 год до н. э.) Его основные открытия касались иррациональных чисел и были изложены в «Началах» Евклида, в разделе, посвященном пяти правильным многогранникам.

Однако правильные многогранники обрели популярность благодаря Платону, который создал в своей Академии подлинный культ геометрии и рассказал о многогранниках в знаменитом диалоге «Тимей».

В нем Платон упоминает о соответствии между многогранниками и четырьмя элементами природы и возводит додекаэдр в ранг мистического символа космоса. Платон отождествлял многогранники с прекрасным («следует объяснить, какими свойствами должны обладать прекраснейшие из тел»), однако эта красота была связана не с их геометрической формой, а с воплощенными в ней упорядоченными математическими свойствами и идеями.

Платон мудро сочетал философские и чисто математические идеи. Показательны два его высказывания: «А что же касается числовых отношений, сокрытых в их числах, в их движениях и остальных свойствах, нужно всегда считать, что Бог <...> создал их целиком и в точности и тем самым установил математическую гармонию между элементами»; «... Теперь должно сказать, каковы же те четыре рожденных

**ПЛАТОН (427/428 ГОД ДО Н. Э. — 347 ГОД ДО Н. Э.)**

Этот выдающийся греческий философ, ученик Сократа и учитель Аристотеля, оказал огромное влияние на западную философию. Его Академия стала своеобразной точкой отсчета в истории образования, а в своих трудах («Пир», «Государство», «Федр», «Тимей» и «Теэтет») Платон ввел многие важные понятия метафизики, политики, философии, науки и т. д.

Уместнее было бы упоминать Платона под его подлинным именем, Аристокл, так как Платон — это прозвище, которое означает «широкоплечий».



*Платон в окружении учеников на мозаике, найденной в Помпее и хранящейся в Национальном археологическом музее Неаполя.*

тела, прекраснейшие из всех, которые не подобны друг другу, однако способны, разрушаясь, друг в друга перерождаться. Если нам удастся попасть в точку, у нас в руках будет истина о рождении земли и огня, а равно и тех [стихий], что стоят между ними как средние члены пропорции. Тогда мы никому не уступили бы в том, что нет видимых тел более прекрасных, чем эти, притом каждое из них прекрасно в своем роде. Поэтому надо приложить старания к тому, чтобы привести в соответствие четыре отличающихся красотой рода тел и доказать, что мы достаточно уразумели их природу»<sup>1</sup>. Платон определяет правильный многогранник так: «имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части». Поэтому неудивительно, что название «платоновы тела» прочно закрепилось в науке.

### **Ключевой фрагмент сочинения «О природе мира и души»**

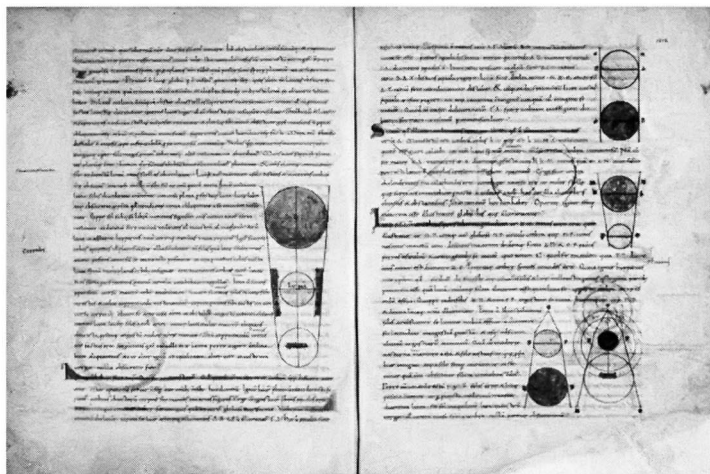
Далее мы приведем большой фрагмент сочинения «О природе мира и души», который был написан предположительно Тимеем Локрийским и длительное время включался в собрание трудов Платона. Это произведение играет ключевую роль в понимании представлений Платона о многогранниках.

«Начало всего порожденного есть материя как объект и идея как первопричина формы. Мать и восприимница всего, что рождено видимым и вообще чувственным, — это земля, воздух, огонь, вода или какой-либо другой [вид], который родился из этих четырех [стихий] либо из которого сами они родились.

<sup>1</sup> Здесь и далее перевод С. А. Аверинцева. — Примеч. ред.

Во-первых, каждому, разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякое тело имеет глубину. Между тем любая глубина по необходимости должна быть ограничена некоторыми поверхностями; притом всякая прямолинейная поверхность состоит из треугольников. Эти треугольники являются либо равнобедренными, то есть половиной квадрата, либо прямоугольными со сторонами разной длины, в которых больший угол в три раза превышает меньший, меньший есть третья часть прямого, а средний угол в два раза больше наименьшего, поскольку равен двум третям прямого угла. Наибольший, прямой, угол содержит на третью часть больше, чем наименьший. Такой треугольник есть половина равностороннего треугольника, разделенного на две равные части перпендикуляром, проведенным из вершины к основанию. Эти два треугольника также прямоугольные, однако в первом стороны, заключающие между собой прямой угол, равны, и только они являются таковыми, между тем как во втором треугольнике все три стороны различны. Назовем последний неправильным, первый — получетырехугольником. Получетырехугольник есть основа строения земли, поскольку из него происходит квадрат, состоящий в свою очередь из четырех получетырехугольников, а из квадрата рождается куб — прочнейшее и неподвижнейшее из тел, имеющее шесть сторон и восемь углов. По этой причине земля есть тяжелейшее и наиболее неподвижное из тел, не могущее превратиться в другие элементы, поскольку ее треугольники принадлежат к совершенно иному виду, нежели остальные. Земля в самом деле — единственное тело, состоящее из получетырехугольников; прочие же тела, огонь, воздух и вода, образуются из неправильного элемента, поскольку соединением шести неправильных треугольников образуется равносторонний треугольник, из которого составляется пирамида с четырьмя сторонами и четырьмя равными углами, являющая собой природу огня — тончайшего и подвижнейшего из родов. За этой пирамидой идет октаэдр, который имеет восемь сторон и шесть углов и который есть элемент воздуха, в конце — икосаэдр, который имеет двадцать сторон и двенадцать углов и который есть самый массивный и неотесанный из этих трех элементов — элемент воды. Эти три тела, поскольку состоят из одного элемента, преобразуются из одного в другое. Додекаэдр же есть образ мира, поскольку по форме своей ближе всего к сфере. Огонь благодаря своей великой подвижности пронзает всё без исключения, воздух — всё, за исключением огня, наконец, вода проникает в землю так, что заполняет ее целиком и не оставляет промежутков. Все эти роды находятся во всеобщем движении, соударяемые и толкаемые одни другими, поочередно создаваемые и уничтожаемые.

Таковы роды, из которых Бог создал этот мир, который осязаем благодаря земле и видим благодаря огню; это есть две противоположности; и Бог использовал воду



Средневековая рукопись с латинским переводом диалога «Тимей» Платона, выполненным Халкидием.

и воздух, чтобы связать их крепкой связью, которая есть соотношение, поддерживающее само себя по своей силе и которому подчиняется весь мир. Для связи поверхностей достаточно было бы одного среднего члена отношения, но для твердых тел требуется два. Бог расположил две середины и два окончания так, что огонь относится к воздуху, как воздух к воде и вода к земле; либо же, сократив прогрессию, огонь относится к воде, как воздух к земле; или же, обратив порядок членов, имеем, что земля подобна воде, как вода подобна воздуху и воздух — огню; и, сократив их, имеем, что земля к воздуху относится, как вода к огню; и поскольку все эти элементы равны по силе, закон их отношений таков, что они всегда равны. И поэтому этот мир является таковым по причине божественной связи пропорций. Каждый из четырех элементов содержит многие роды. Огонь есть пламя, свет, блистающий луч по причине неравенства треугольников, которые есть в каждом из этих родов. Также имеется воздух чистый и сухой, влажный и облачный, вода текущая и сжатая, подобно снегу, инею, граду, льду. Есть жидкость сырая, подобно маслу и меду, другая — плотная, подобно рыбе и воску; или тела плавкие, как золото, серебро, железо, олово, сталь; или крошащиеся, как сера, горная смола, селитра, соли и камни, относящиеся также к этому же роду».

## Великий труд Евклида

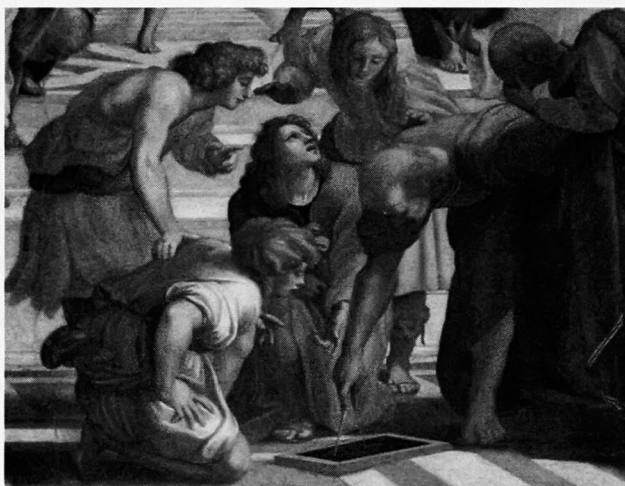
Великий труд Евклида представлял собой не просто собрание всех знаний о геометрии того времени — эти знания были представлены согласованным и логичным образом, с соблюдением правил дедукции. Евклид мог использовать идеи Пифагора,

результаты, полученные Евдоксом, и т. д., но он взял у Платона идею абстракции, а также унаследовал от Аристотеля строгость дедуктивного метода. Каждая из тринадцати книг Евклида начинается с общих утверждений, или аксиом — очевидных высказываний, не требующих доказательства. Затем следуют 15 постулатов геометрии, задающих правила игры, и на их основе последовательно доказываются в общей сложности 465 предложений, или теорем.

Как в книге IV, так и в книге X Евклид использует открытия Теэтета, а также в книге XI заимствует у него результаты, касающиеся размеров многогранников.

### ЕВКЛИД АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (ОК. 325 ГОДА ДО Н. Э. — ОК. 265 ГОДА ДО Н. Э.)

Сведений о жизни Евклида не сохранилось (неизвестны в том числе место и год его рождения). Единственное, что можно с точностью утверждать, — он преподавал в Александрии, переживавшей в то время период расцвета. Евклид обучался вместе с последователями школы Пифагора и оставил после себя множество трудов (многие из них были утеряны) по геометрии, оптике, музыке, астрономии, механике, коническим сечениям и т. д. «Начала» стали первым большим учебником в истории математики, а именем автора этой книги стала называться сама геометрия (геометрия Евклида). «Начала» оказали огромное влияние на преподавание геометрии на протяжении более чем двух тысячелетий, благодаря чему в разное время было создано множество переводов этой книги (сначала она была переведена на арабский, затем — на латынь). Установлено, что «Начала» — наиболее издаваемая книга после Библии.



*Евклид на картине Рафаэля.*

Книга XII посвящена объемам призм и пирамид, книга XIII — правильным многогранникам. В некотором роде эта книга стала кульминацией всего труда Евклида.

Далее мы приведем 28 определений из книги XI.

Определение 1. Тело есть то, что имеет длину, ширину и высоту.

Определение 2. Граница же тела — поверхность.

Определение 3. Прямая будет перпендикулярна к плоскости, если она со всеми прямыми, касающимися ее и находящимися на этой <расположенной внизу> плоскости, образует прямые углы.

Определение 4. Плоскость будет перпендикулярна к плоскости, если прямые, проведенные в одной из этих плоскостей под прямыми <углами> к общему сечению плоскостей, будут под прямыми <углами> к другой плоскости.

Определение 5. Наклон прямой к плоскости будет, если из верхнего конца прямой провести к плоскости перпендикуляр и полученную точку соединить прямой с концом прямой в плоскости: угол, заключенный между проведенной <прямой> и данной, <и будет наклоном>.

Определение 6. Наклон плоскости к плоскости будет острый угол, заключенный между прямыми, проведенными в каждой плоскости под прямыми углами к общему сечению в одной и той же точке.

Определение 7. Плоскость к плоскости и другая к другой считаются одинаково наклоненными, если упомянутые углы наклона будут равны между собой.

Определение 8. Параллельные плоскости суть несходящиеся.

Определение 9. Подобными телесными фигурами будут заключенные между равными по количеству подобными плоскостями.

Определение 10. Равные же и подобные телесные фигуры будут заключенные между равными по количеству и по величине подобными плоскостями.

Определение 11. Телесный угол <в случае> более чем двух прямых, касающихся друг друга и не находящихся в одной плоскости, есть наклон между всеми прямыми. Иначе: телесный угол есть <угол>, заключенный между более чем двумя плоскими углами, не находящимися в одной и той же плоскости и составленными вместе у одной точки.

Определение 12. Пирамида есть телесная фигура, заключенная между плоскостями <и> восстановленная от одной плоскости к одной точке.

Определение 13. Призма есть телесная фигура, заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны, подобны и параллельны, остальные же параллелограммы.

Определение 14. Сфера будет, если при неподвижности диаметра полукруга вращающийся полукруг снова вернется в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и есть сфера>.

Определение 15. Ось же сферы есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается полукруг.

Определение 16. Центр же сферы есть то же самое, что и <центр> полукруга.

Определение 17. Диаметр же сферы есть какая-нибудь прямая, проведенная через центр и ограниченная с обеих сторон поверхностью сферы.

Определение 18. Конус будет, если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, <прилежащих> к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернется в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и есть конус>. И если неподвижная прямая будет равна другой, вращающейся, <той, что> при прямом угле, то конус будет прямоугольным, если же меньше, то тупоугольным, если же больше, то остроугольным.

Определение 19. Ось же конуса есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается треугольник.

Определение 20. Основание же — круг, описываемый вращающейся прямой.

Определение 21. Цилиндр будет, если при неподвижности одной из сторон прямоугольного параллелограмма, <прилежащих> к прямому углу, вращающийся параллелограмм снова вернется в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и будет цилиндром>.

Определение 22. Ось же цилиндра есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается параллелограмм.

Определение 23. Основания же — круги, описываемые вращающимися двумя противоположными сторонами.

Определение 24. Подобные конусы и цилиндры суть те, у которых оси и диаметры оснований пропорциональны.

Определение 25. Куб есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами.

Определение 26. Октаэдр есть телесная фигура, заключающаяся между восемью равными и равносторонними треугольниками.

Определение 27. Икосаэдр есть телесная фигура, заключающаяся между двадцатью равными и равносторонними треугольниками.

Определение 28. Додокаэдр есть телесная фигура, заключающаяся между двенадцатью равными, равносторонними и равноугольными пятиугольниками.



Книга XIII, в свою очередь, содержит 18 предложений. Проанализировав различные ключевые вопросы о многоугольниках, начиная с предложения 13, Евклид рассматривает исключительно многогранники. Далее приведены последние предложения «Начал».

Предложение 13. Составить пирамиду, охватить ее заданной сферой и показать, что диаметр сферы будет в квадратах в полтора раза больше стороны пирамиды.

Предложение 14. Составить октаэдр, охватить его сферой, как и выше, и показать, что диаметр сферы будет в квадратах вдвое больше стороны октаэдра.

Предложение 15. Составить куб, охватить его сферой, как и пирамиду, и показать, что диаметр сферы будет в квадратах в три раза больше стороны куба.

Предложение 16. Составить икосаэдр, охватить сферой, как и вышеупомянутые фигуры, и показать, что сторона икосаэдра будет иррациональной — так называемой «меньшей».

Предложение 17. Составить додекаэдр, охватить его сферой, как и вышеупомянутые фигуры, и показать, что сторона додекаэдра будет иррациональной — так называемым вычетом.

Предложение 18. Сопоставить стороны пяти этих фигур и сравнить <их> между собой.



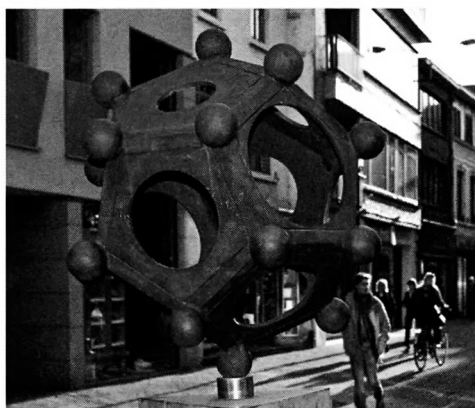
Страница венецианского издания «Начал» Евклида 1482 года.



Благодаря Евклиду интерес греческих математиков к правильным многогранникам заметно возрос. Так, Архимед (287 год до н. э. — 212 год до н. э.) дал определение тринадцати полуправильным многогранникам, которые затем изучил Папп (годы жизни — ок. 320 года н. э.).

В это же время в Китае также возник интерес к многогранникам. Объемы элементарных многогранников были приведены в книге «Математика в девяти книгах» (100 год н. э.), а Лю Хуэй вычислил объемы некоторых многогранников (263 год н. э.).

В период с 200 по 500 год римляне изготовили великое множество бронзовых додекаэдров (двенадцатигранников) с круглыми отверстиями разных размеров, вершины которых были украшены сферами.

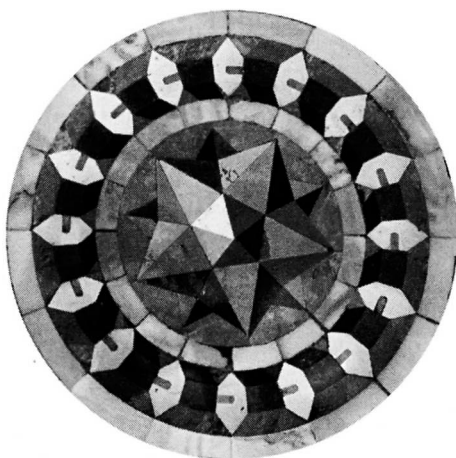


*Современная скульптура, воспроизводящая римский додекаэдр, установленная в бельгийском городе Тонгерене.*

До сих пор так и не ясно, как использовались эти прекрасные фигуры: они могли быть украшениями, подсвечниками, детскими игрушками, вазами для цветов или чем-то еще. Подобные изделия были обнаружены и в форме икосаэдра. К сожалению, в Средневековье интерес к геометрии в Европе значительно снизился: с художественной точки зрения можно выделить только полуправильные многогранники в Аахенском соборе (1170). Однако исследования многоугольников и многогранников, выполненные в эту эпоху арабами, а также приближенные представления более сложных фигур с помощью многогранников поистине удивительны. Арабы провели большую работу по переводу и распространению как греческих книг, так и трудов, созданных на Востоке, а в X веке Абу-л-Вафа занимался изучением сферических многогранников.

## Многогранники в эпоху Возрождения

Флорентийский художник Паоло Уччелло (1397—1475) интересовался новыми законами перспективы, а также изобразил приближенные представления различных тел в виде совокупностей многогранников. На иллюстрации ниже представлен звездчатый многогранник, выполненный из мрамора для венецианского собора Святого Марка, предположительно созданный Уччелло.



*Венецианский звездчатый многогранник.*

Основное отличие между средневековым искусством (а также искусством предшествующих эпох) и искусством Возрождения заключается в том, что в живопись было введено третье измерение. Художники той удивительной эпохи стремились покончить со средневековым мистицизмом и трагическими религиозными настроениями и посмотреть на мир глазами человека, впитавшего достижения искусства и философии античной Греции. Все это привело к тому, что в живописи возникло новое направление — реализм, целью которого было изобразить природу и людей так, чтобы передать трехмерность реального мира. Древнегреческая геометрия не могла предложить какого-либо решения этой задачи. Ни один раздел геометрии Евклида не содержал указаний на строгий метод, позволяющий передать трехмерную реальность на плоскости. Любопытно, что никто из математиков не задавался этим вопросом, и, как следствие, решение задачи (некая «оптическая» система изображения) должно было возникнуть в рамках самой живописи.

Первые правила перспективы можно увидеть уже в работах Дуччо (1255—1319), Джотто (1276—1337) и Амброджо Лоренцетти (ок. 1290—1348). Однако создателем новой теории перспективы стал гениальный архитектор и художник Филиппо Брунеллески (1377—1446).

Он понял, что картина словно окно, через которое художник смотрит по другую сторону реальности: все параллельные прямые в ней должны сходиться в одной точке — точке схода (картина может содержать несколько точек схода). Бесконечно удаленные точки в перспективе Брунеллески стали точками схода, и для зрителя изображение на картине ничем не отличалось от реального. Так был совершен первый прыжок в трехмерный мир.

В трактате «О перспективе в живописи» великого математика и художника Возрождения Пьеро делла Франчески (ок. 1410—1492) были приведены изображения некоторых тороидальных многогранников (так называемых мазоччо) и многогранных куполов. Этот гениальный художник вновь открыл различные виды полуправильных многогранников (так называемых архимедовых тел) и смог применить свои новаторские методы перспективы, используя многогранники в качестве моделей. Однако его увлечение математикой позволило ему открыть новые взаимосвязи между многогранниками, в особенности вписанными и описанными.

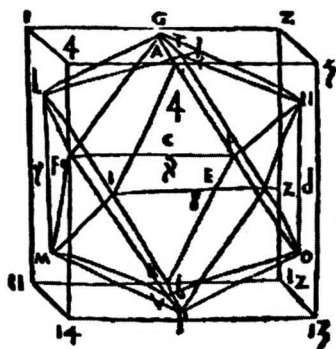


Рисунок Пьеро делла Франчески, на котором изображен икосаэдр, вписанный в куб.

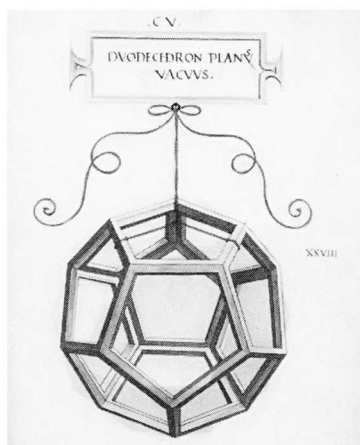
Лука Пачоли (1445—1517) изучал способы изображения многогранников, кубооктаэдров (усеченных) и звездчатых многогранников. При написании книги «О божественной пропорции» источником вдохновения для него служили неопубликованные рукописи Пьеро делла Франчески. Он также включил в свой труд рисунки Леонардо да Винчи, на которых были изображены прозрачные модели многогранников, и описал многогранники в своей книге об архитектуре.



Портрет Пачоли кисти Якопо де Барбари. 1495 год.

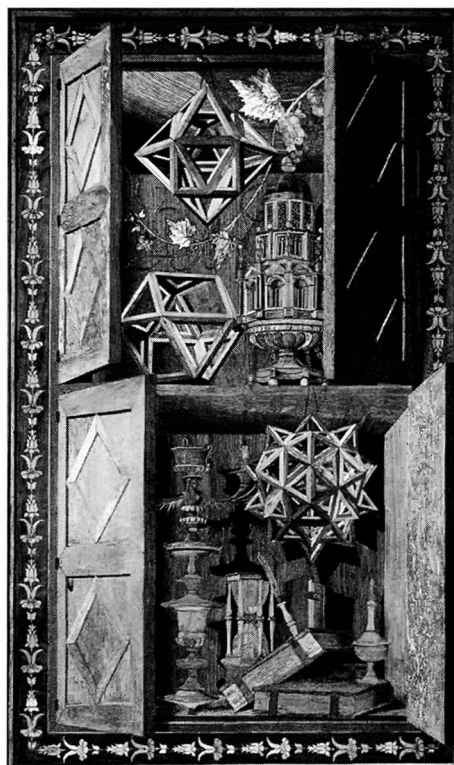
На этой знаменитой картине монах-францисканец Пачоли изображен рядом с неизвестным. Вы можете увидеть не только додекаэдр, но и полуправильный прозрачный многогранник: Пачоли изучал сечения многогранников с помощью стеклянных моделей, частично заполненных водой.

Леонардо да Винчи (1452—1519) первым изобразил многогранники с прозрачными гранями так, что зрителю были видны их ребра, расположенные сзади. Леонардо также изображал группы многогранников, а в своих знаменитых блокнотах оставил прекрасные рисунки, иллюстрирующие свойства этих фигур.



Один из рисунков, выполненных Леонардо да Винчи для книги Пачоли.

К концу XV века появились деревянные изделия, в которых можно было увидеть сложные многогранники. Наиболее удивительны работы Фра Джованни да Верона, выполненные в начале XVI века, которые вы можете видеть на иллюстрации.



*В этой работе итальянского художника и архитектора Фра Джованни да Верона используются законы перспективы, а также изображены несколько многогранников.*

Даниеле Барбаро (1513–1570) внес огромный вклад в создание новых геометрических методов в живописи, описав их в своей работе 1568 года «Практика перспективы». Он, подобно Пьеро делла Франческе, обратился к многогранникам, чтобы изучить приемы перспективы, но не смог превзойти Леонардо.

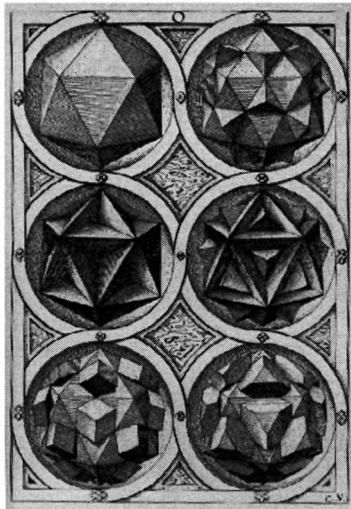
Альбрехт Дюрер (1471–1528) в 1525 году изобразил многогранники с прозрачными гранями, применив методы перспективы, а также создал первые развертки многогранников. Одна из самых знаменитых его работ — «Меланхолия I», на которой изображены различные математические объекты, в том числе прекрасный и загадочный неправильный многогранник.



«Меланхолия I» Альбрехта Дюрера.

Иоганн Нейдорфер (1497—1563) изучал немецкую каллиграфию и интересовался кубами и додекаэдрами (что можно видеть на картине Николаса Невшателя 1561 года). Он произвел некоторые расчеты, связанные с многогранниками.

Венцель Ямницер (1508—1585), будучи великим художником и выдающимся первооткрывателем новых многогранников, в своей книге *Perspectiva Corporum Regularium* (1557) изобразил прекрасные многогранные фигуры. Йост Амман (1539—1591) на основе рисунков Ямницера выполнил множество гравюр.



Рисунки Венцеля Ямницера.

В 1567 году была опубликована книга Лоренца Стоера *Geometria et Perspectiva*, в которой он применил методы перспективы при изображении многогранников. В книге Ханса Лейкера *Perspectiva* (1622) также изображались многогранники. В ту эпоху многие ремесленники и скульпторы, например Лоренц Цик (1594–1666), интересовались и самими многогранниками, и инструментами для их изготовления.

Великий математик и астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) интересовался не только законами физики, описывающими движение планет, — он также провел системное исследование многогранников, открыв два звездчатых многогранника, антипризмы, и вновь открыв многогранники Архимеда. Любопытно, что Кеплер равно увлекался как многогранниками, так и астрономией и создал любопытную модель, в которой связал космологию и правильные многогранники.

К группе 1 относятся кеплеровы звездчатые многогранники, другие многогранники и рисунок Платона, на котором правильные многогранники связываются с четырьмя первоэлементами. В группу 2 входят архимедовы тела, а на рис. 3 изображена фантастическая модель космологии Кеплера. Педро Гонсалес прекрасно описывает идеи Кеплера, связавшего геометрию и устройство Вселенной: «Кеплер был настоль-

Рис. 1

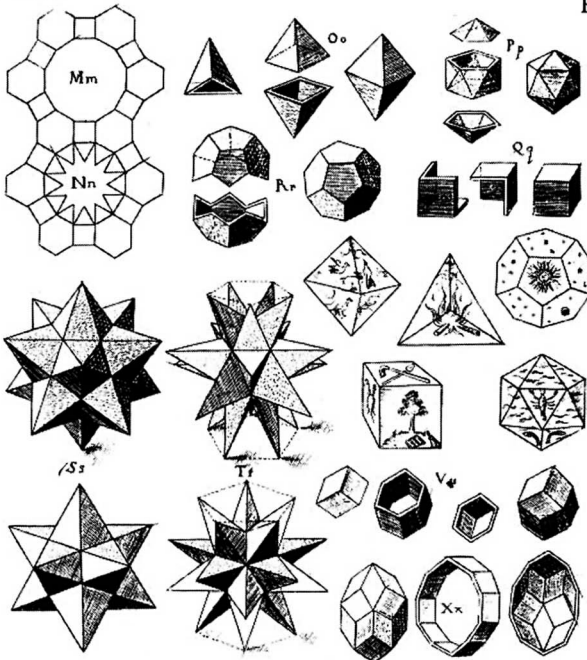


Рис. 2

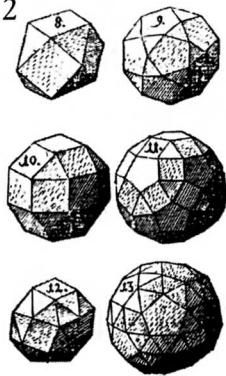
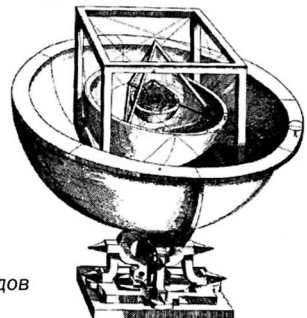


Рис. 3



На иллюстрациях представлены три группы рисунков из трудов математика и астронома Иоганна Кеплера.

ко очарован космогонией Пифагора и Платона, что создал свою космологию, взяв за основу пять правильных многогранников. Он счел, что правильные многогранники должны быть ключом, который использовал Творец при создании Вселенной. Во времена Кеплера было известно всего шесть планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн. Существует бесконечно много правильных многоугольников, однако правильных многогранников всего пять. Это не могло быть случайностью — Бог-геометр не совершал ошибок. Согласно Кёстлеру, Кеплер считал, что число планет и число правильных многогранников были связаны: «существует всего шесть планет, поскольку существует всего пять правильных многогранников». Кеплер описал модель Солнечной системы, в которой платоновы тела были вписаны или вложены друг в друга, связав радиусы вписанных концентрических сфер и орбит планет. Он посчитал, что открытые им совершенные структуры, заключавшие в себе сферы шести планет, — это незримый каркас Вселенной, и назвал свое открытие «Тайна мира». В орбиту (и соответствующую ей сферу) Сатурна Кеплер вписал куб, в него — сферу Юпитера, описанную вокруг тетраэдра. В этот тетраэдр он вписал сферу Марса. Между сферами Марса и Земли располагался додекаэдр, между Землей и Венерой — икосаэдр, между Венерой и Меркурием — октаэдр, а в центре модели находился «король» — Солнце. Согласно Лоулеру, «геометрия Пифагора, дополненная мистическим и философским идеализмом Платона и структурированная Евклидом, позволила Кеплеру увидеть сияющий образ совершенного Космоса — отражение великолепия Творца».

## Многогранники в 1700–2000 годах

В 1700–2000 годы главным стимулом интереса к многогранникам стало не искусство, а математика. Вначале Рене Декарт (1596–1650) доказал, что сумма угловых дефектов при вершинах многогранника (разностей между  $360^\circ$  и суммой углов между ребрами каждой грани, сходящейся в рассматриваемой вершине) для всех выпуклых многогранников одинакова и равна  $720^\circ$ .

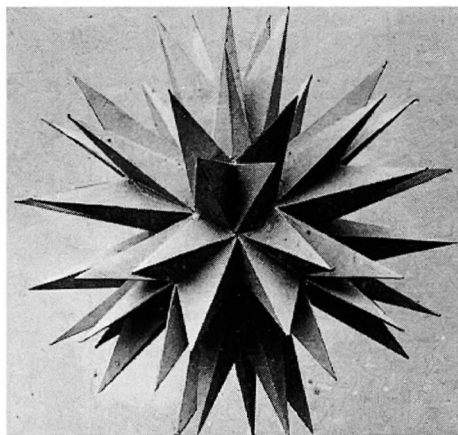
Следующая формула, сыгравшая огромную роль при изучении многогранников, была открыта великим Леонардом Эйлером (1707–1783). Знаменитая формула Эйлера  $G + B = P + 2$  (сумма числа граней и вершин равна числу ребер, увеличенному на 2) удивительным образом выполняется для всех выпуклых многогранников. Она позволила подойти к изучению многогранников с новой стороны. В главе 3 у нас будет возможность подробно рассмотреть следствия этой любопытной формулы.



Создатель начертательной геометрии Гаспар Монж (1746—1818), подобно художникам Возрождения, использовал многогранники в качестве идеальных моделей при работе над своей теорией.

Луи Пуансо (1777—1859) описал еще два звездчатых многогранника, получаемых из описанных Кеплером, пополнив коллекцию правильных невыпуклых многогранников, а Огюстен Луи Коши (1789—1857) доказал, что эти четыре многогранника Кеплера — Пуансо являются единственно возможными. Коши также изучил вопрос жесткости многогранников и графы, связанные с многогранниками. Эжен Шарль Каталан (1814—1894) исследовал многогранники, двойственные архимедовым телам, и с их помощью открыл так называемые каталановы тела (см. главу 2).

Ронделе опубликовал развертки правильных многогранников на плоскости (1812), Жозеф Бертран в 1848 году описал различные группы звездчатых многогранников, а великий французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912) получил новые доказательства и обобщения для формулы Эйлера, открыв новые подходы к изучению многогранников и топологии в целом. Людвиг Шлефли (1814—1895) ввел новые комбинаторные обозначения многогранников и с помощью предложенной им нотации впервые подошел к изучению так называемых политопов — многогранников в пространствах, имеющих больше трех измерений. Обозначения для звездчатых многогранников привел Патрик Дюваль (1903—1987), для однородных многогранников — Виллем Витхоф (1865—1939).

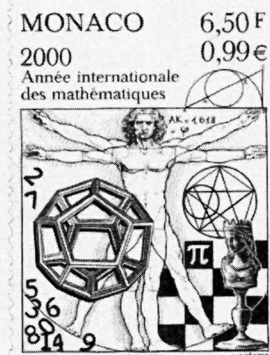


Многогранник на фотографии Макса Брюкнера.

Макс Брюкнер (1860—1934) в 1900 году создал рисунки и фотографии своей коллекции из 146 бумажных моделей многогранников. Данкан Соммервилль (1879—

## МНОГОГРАННАЯ ФИЛАТЕЛИЯ

Математические темы невероятно популярны в филателии, поэтому неудивительно, что на почтовых марках, выпущенных к событиям, связанным с математикой, часто изображают многогранники. В качестве примера приведем эту марку Монако, посвященную Международному году математики (2000). На ней представлен коллаж, на котором шахматы, пропорции, числа, многоугольники и додекаэдр да Винчи символизируют всю математику.



1934) рассматривал псевдоромб-кубооктаэдр, а Эрнст Стейниц (1871–1928) изучал многогранники, используя комбинаторный анализ.

Выдающийся математик Давид Гильберт (1862–1943) в своем знаменитом выступлении в Париже в 1900 году в числе 23 математических проблем XX века упомянул и задачи о многогранниках. Например, он поставил такую задачу: можно ли разрезать многогранники равного объема на конечное число равных частей-многогранников? Макс Ден (1878–1952) доказал, что нельзя.

Гарольд Скотт Макдональд Коксетер (1907–2003) ввел новые понятия, обобщения и многомерные расширения многогранников, став одним из ведущих специалистов по теории политопов. В 1938 году он привел полное описание 59 икосаэдров, изучив все возможные построения звездчатых многогранников и обратные им (Джеймс Бридж обнаружил еще один способ построения в 1974 году), и совместно с Джеффри Миллером открыл 12 новых однородных многогранников.

Очень интересным стало открытие Виктором Шлегелем (1843–1905) новой проекции, в которой многогранникам сопоставлялись плоские диаграммы, позволяющие упростить изучение этих тел в рамках топологии. Джордж Данциг в 1947 году внес вклад в разработку представлений многогранников с помощью графов, создав так называемый симплексный алгоритм.

Полную классификацию 92 выпуклых неоднородных многогранников с правильными гранями составил Норман Джонсон в 1966 году, а Виктор Залгаллер в 1969 году показал, что этот список является полным и окончательным.

Бридж в 1974 году перечислил множество новых многогранников, связанных с додекаэдром, а в 1978 году Роберт Коннелли внес очень важный вклад в построение

и изучение гибких многогранных фигур. Благодаря исследованиям, проведенным Хансом Фройденталем, Бартелем Леендертом ван дер Варденом, Бранко Грюнбаумом, Виктором Залгаллером, Гаем Инчбальдом, Ласло Феешем Тотом, Максом Брюкнером, Джозефом Малкевичем, Марджори Сенешаль и другими, интерес к многогранникам в математике сохранялся на протяжении всего XX столетия. Открытия Ричарда Бакминстера Фуллера, а также произведения искусства и архитектуры подтверждают, что многогранники по-прежнему притягивают внимание и деятелей искусства.

## Многогранники в наши дни

Изучение многогранников всегда было частью школьной программы. Сегодня они по-прежнему включены в курсы геометрии и изобразительного искусства, так как являются простыми пространственными фигурами, которые, однако, позволяют изучить различные ситуации в трехмерном пространстве и могут использоваться как модели для обучения. В начале нынешнего столетия математические исследования

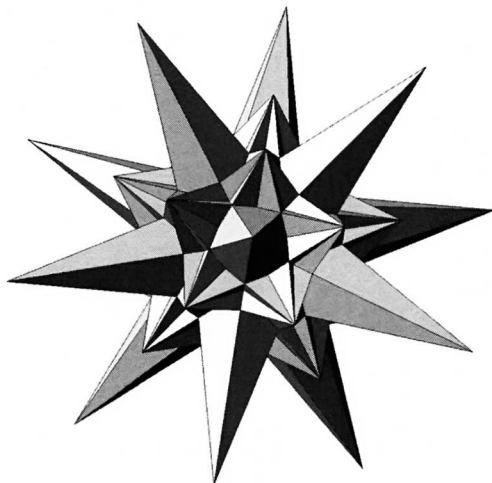
### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В 1971 году на стыке математики и информатики возникла новая дисциплина — вычислительная геометрия, которая занимается общим анализом алгоритмов, формулировка или конечная цель которых имеют отношение к геометрии. Вычислительная геометрия связана с компьютерной графикой, автоматизированным проектированием (системами CAD/CAM), а также применяется в робототехнике (при обработке движений и в системах компьютерного зрения), проектировании интегральных микросхем, геоинформационных систем, в инженерном деле и т. д. Классическими задачами вычислительной геометрии являются:

- для данных  $n$  точек плоскости найти быстрые алгоритмы, позволяющие определить, какая пара точек находится на минимально возможном расстоянии друг от друга;
- для данных  $n$  точек в пространстве найти наименьший содержащий их выпуклый многогранник;
- провести кратчайший путь от одной точки до другой в обход многогранников, расположенных между ними;
- выполнить разбиение многоугольников на треугольники по определенным критериям;
- найти точки, находящиеся внутри или вне данных многоугольных областей.

Решение этих задач с помощью циркуля и линейки абсолютно бесперспективно.

многогранников продолжают, подробно изучаются новые семейства многогранников (абстрактные многогранники в многомерных пространствах, многогранники, рассматриваемые с помощью графов, составные многогранники, обобщения многогранников и т. д.). Однако новый импульс изучению многогранников дала компьютерная графика и, в частности, вычислительная геометрия. Благодаря своей геометрической простоте многогранники прекрасно подходят для тестирования программ для работы с трехмерной графикой или для приближенного построения желаемых фигур. Современные программы (Google SketchUp, Matlab, Mathematica, Cabri3D, Stella и другие) и приложения на языке Java (A Plethora of Polyhedra, Hyperspace Star Polytope Slices) или созданные с помощью flash-технологии (World of Polyhedra) позволяют не только изображать многогранники, но и перемещать их, строить сечения, пересекать с другими фигурами и создавать геометрические композиции. Подобные программы и приложения используются в дизайне и при создании всевозможных изображений и виртуальных реальностей, охватывающих самые разные области, начиная от молекулярной химии и заканчивая видеоиграми и спецэффектами для кино.



*Виртуальный многогранник.*

В Интернете существует множество страниц, посвященных многогранникам. Советуем начать с этих двух сайтов: <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html> и <http://mathworld.wolfram.com/topics/Polyhedra.html>.

Евклид завершил «Начала» рассказом о многогранниках. Мало кто мог представить, что столько веков спустя обожаемые им платоновы тела по-прежнему будут демонстрировать все новые и новые полезные свойства и ставить перед математиками новые задачи. Старые добрые многогранники не умрут никогда!

# Большие семейства многогранников

*Можно сказать, что три первых правильных многогранника (тетраэдр, октаэдр и куб) с геометрической точки зрения просты, однако открытие двух остальных (додекаэдра и икосаэдра) — одно из самых прекрасных и удивительных открытий в истории математики.*

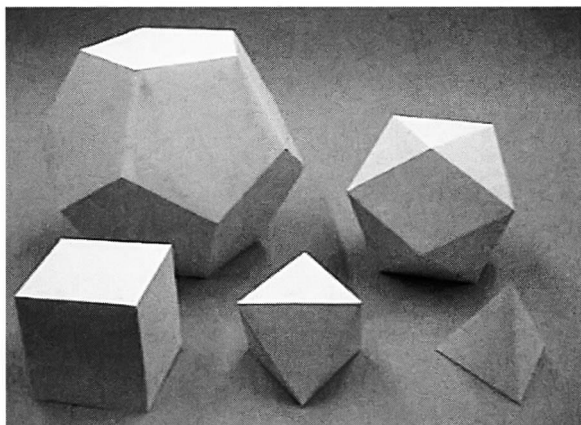
Генри Вейль

В этой главе мы подробно расскажем о крупных семействах многогранников. Если говорить метафорически, то мир многогранников можно представить как страну, в которой правят пять королей (правильных многогранников), а к королевскому двору принадлежит множество благородных семейств. Правильные формы редко встречаются в природе и потому всегда приятны человеческому глазу. На протяжении веков человек испытывает почти мистическую привязанность к правильным, симметричным и гармоничным фигурам. Философы, геометры, художники считали чисто геометрические формы, в частности многогранники, эталонами совершенства и красоты.

Эти идеи проникли в нашу культуру, и хотя никто не осмелится оспорить красоту лошади, бегущей галопом, или острова в Полинезии, куб или усеченный октаэдр часто считаются фигурами, простота и симметрия которых правят бал в мире идеалов красоты. Некоторые многогранники из тех, что ждут вас на следующей странице, знакомы вам со школьной скамьи, но какие-то из них вы, возможно, увидите впервые. Надеемся, что все они вам понравятся!

## Пять платоновых тел

Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, такой, что все его грани являются равными правильными многоугольниками, и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.



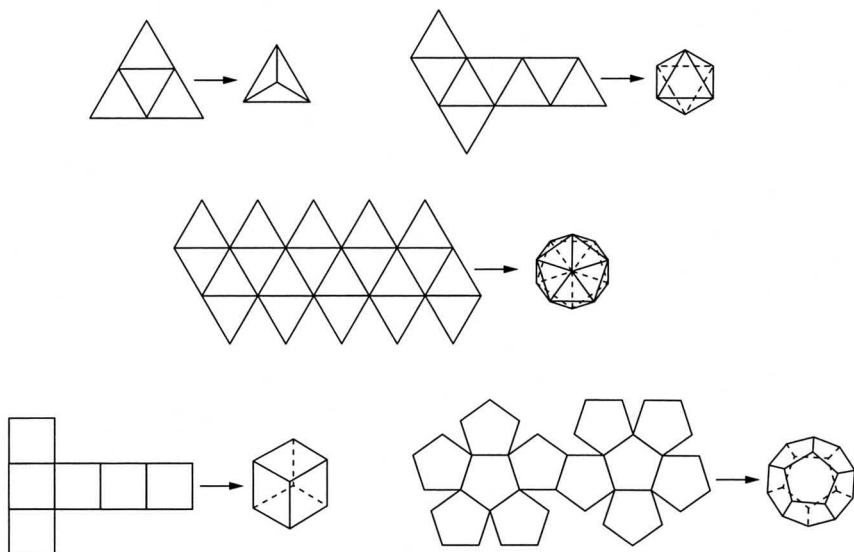
Пять правильных многогранников.

В следующей таблице приведены основные данные об этих телах.

	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
Число граней	4 треугольника	6 квадратов	8 треугольников	12 пятиугольников	20 треугольников
Число вершин	4	8	6	20	12
Число ребер	6	12	12	30	30
Двугранный угол	$70^{\circ}32'$	$90^{\circ}$	$109^{\circ}28'$	$116^{\circ}34'$	$138^{\circ}11'$

Любопытно, что если построить многогранники, двойственные правильным (для этого нужно соединить центры граней исходных многогранников), то мы получим тот же самый набор многогранников, правда другого размера: соединив центры граней тетраэдра, мы получим правильный тетраэдр, соединив центры граней куба — октаэдр, центры граней октаэдра — куб. Двойственны друг другу также икосаэдр и додекаэдр. Все это крайне важно, так как двойственные многогранники обладают одинаковой симметрией и, как следствие, в королевстве пяти платоновых тел наблюдается, по сути, всего три группы симметрии: тетраэдра, куба (идентичная группе симметрии октаэдра) и додекаэдра (идентичная группе симметрии додекаэдра).

Из-за идеального расположения граней этих многогранников всегда будет существовать сфера, проходящая через все их вершины, другая сфера, касающаяся всех граней, и третья, которая будет касаться всех их ребер.



Развертки правильных многогранников.

Вы видите пять разверток самых известных многогранников. Эти развертки идеально подходят для изготовления бумажных моделей. Тетраэдры, октаэдры и икосаэдры также можно изготовить из палочек и веревок — полученные модели будут устойчивыми, так как их грани имеют форму треугольников. Однако для кубов и додекаэдров вам потребуется добавить дополнительные диагонали, чтобы придать конструкции жесткость.

Почему правильных многогранников всего пять? Существуют ли другие правильные многогранники? Ответ на этот вопрос отрицательный, и причина этому очень проста. Если  $m$  правильных  $n$ -угольников должны сходиться в одной вершине (и при этом не располагаться в одной плоскости), то, поскольку углы этих многоугольников будут равны  $180^\circ - 360^\circ/n = 180^\circ (n - 2)/n$ , должно выполняться неравенство  $m \cdot 180^\circ (n - 2)/n < 360^\circ$ , откуда имеем неравенство  $(m - 2)(n - 2) < 4$ . Его возможные решения представлены в таблице.

$m$	$n$	Фигура
3	3	Тетраэдр
3	4	Куб
4	3	Октаэдр
3	5	Додекаэдр
5	3	Икосаэдр

Таким образом, подходящими многоугольниками являются только равносторонний треугольник, квадрат и правильный пятиугольник, откуда следует, что существует всего пять правильных многогранников.

Многогранник	Площадь поверхности	Объем
Тетраэдр	$S = a^2 \sqrt{3}$	$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$
Куб	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Октаэдр	$S = 2\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Додекаэдр	$S = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Икосаэдр	$S = 5\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

В таблице выше приведены формулы для расчета площадей и объемов пяти правильных многогранников по известной длине их ребер. Из таблицы становится понятно, почему Теэтет уделял особое внимание иррациональным числам — подлинным объектом его интереса были правильные многогранники. Также обратите внимание, что при неизменной длине ребра  $a$  объемы многогранников существенно отличаются. По этой причине при рассмотрении моделей платоновых тел неизменно создается впечатление, что маленький тетраэдр и большой икосаэдр очень отличаются: виной тому — выбор одинаковой длины ребра. Все пять правильных многогранников можно вписать в сферу, поэтому если мы рассмотрим пять одинаковых сфер радиуса  $R$ , то соответствующие им пять вписанных многогранников будут казаться не столь различными по размерам.

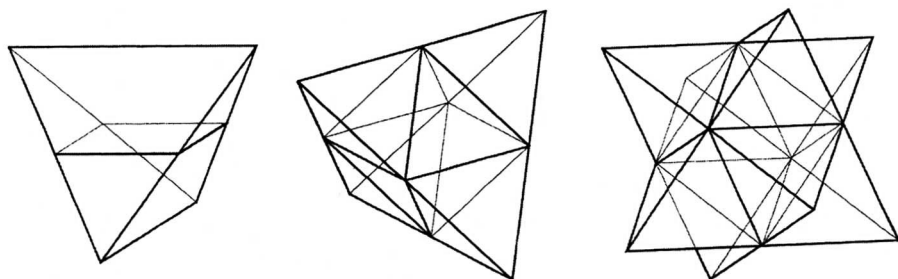
Теперь, когда мы рассмотрели это семейство многогранников в целом, мы можем выделить особые черты каждого из них.

## Тетраэдр

Это прекрасный многогранник, противоположные ребра которого скрещиваются в пространстве перпендикулярно друг другу (под углом  $90^\circ$ ). Его геометрический центр находится на пересечении четырех его высот (прямых, соединяющих вершины



с центрами противоположащих граней) и отстоит от оснований высот на расстояние, равное четверти высоты. В то же время геометрический центр тетраэдра — это середина отрезков, соединяющих середины двух противоположных ребер.



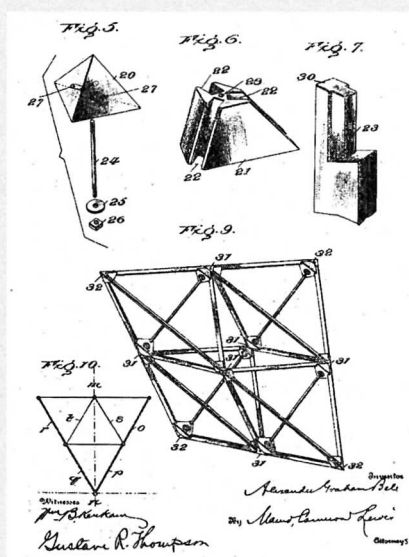
Тетраэдр и некоторые его сечения.

На рисунке вы также можете видеть одно интересное сечение тетраэдра, которое имеет форму квадрата, так как является частью октаэдра, расположенного внутри тетраэдра. Кроме того, на иллюстрации показано, как из двух тетраэдров рождается прекрасный невыпуклый многогранник, центральной частью которого является октаэдр.

## ТЕЛЕФОНЫ И ТЕТРАЭДРЫ

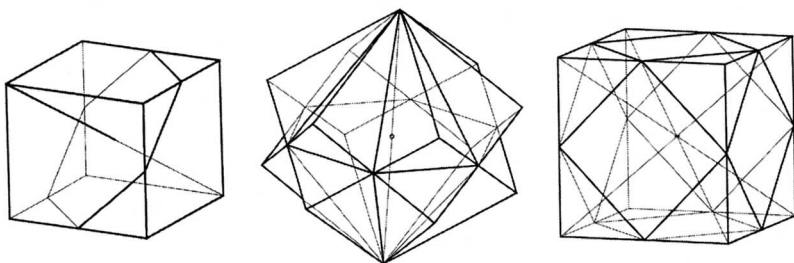
Великим исследователем тетраэдров был изобретатель телефона Александр Грейам Белл (1847–1922). Он изучал прочные структуры, составленные из тетраэдров, из которых можно было бы изготавливать рамы и каркасы воздухоплавательных аппаратов. Этот ученый шотландского происхождения, помимо телефона, также изобрел воздушный змей, состоящий из ячеек в форме тетраэдров.

Рисунки, которыми сопровождался  
патент воздушного змея  
Александра Грейама Белла.



## Куб

Длины диагонали граней куба единичной стороны равны  $\sqrt{2}$ , длина главной диагонали —  $\sqrt{3}$ . Среди сечений куба выделяются равносторонние треугольники и удивительный правильный шестиугольник, делящий куб на две равные части.



Куб и некоторые его сечения.

На рисунке представлен невыпуклый многогранник, состоящий из кубов, имеющих общее шестиугольное сечение. Вы также можете видеть, как различные шестиугольные сечения куба определяют новый многогранник — кубоктаэдр.

Задача об удвоении куба была одной из трех великих задач древнегреческой математики. Можно ли для данного куба единичной стороны построить с помощью циркуля и линейки ребро куба, который будет иметь в два раза больший объем? Если мы обозначим искомое ребро за  $x$ , то  $x^3 = 2$ , следовательно, задача сводится к по-

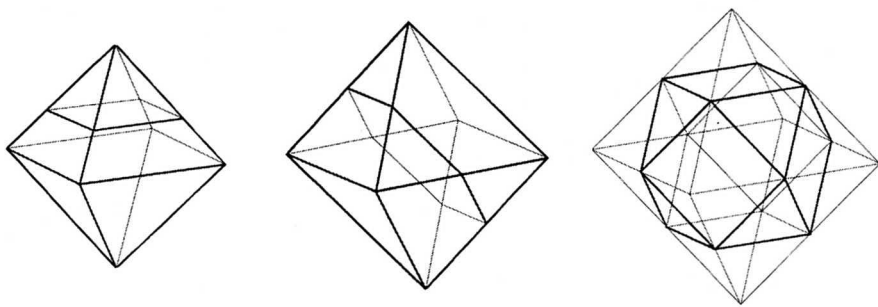
### БУЛЬОННЫЕ КУБИКИ

Говорят, что капитан Кук в 1772 году вез с собой «переносные супы» в форме кубов, однако ключевой датой в истории бульонных кубиков является 1838 год. Именно тогда Карл Генрих Кнорр основал компанию по производству кофе, которая вскоре стала специализироваться на выпуске концентрированных супов, растворимых в горячей воде. Сначала супы Кнорра выпускались в виде плиток, однако большой успех имели суповые концентраты в форме сосисок (концентрат нарезался дольками, подобно колбасе, и многие ели его ломтиками). Бульонные кубики впервые появились в 1912 году, и с того времени многие другие производители суповых концентратов стали выпускать свою продукцию в форме кубиков и плиток. Измельчение, спрессовывание, гранулирование, сушка и другие действия, а также придание формы — неотъемлемые этапы изготовления лекарственных средств, продукции химической промышленности и продуктов питания.

строению отрезка длиной  $x = \sqrt[3]{2}$  с помощью циркуля и линейки. Эта задача имела большую важность, так как позволяла проверить возможности циркуля и линейки при решении задач в пространстве, а не только на плоскости. Ею интересовался Платон и его последователи, а также такие великие геометры, как Гиппократ Хиосский (ок. 440 года до н. э.), Архит Тарентский (ок. 400 года до н. э.), Евдокс Книдский (ок. 370 года до н. э.), Менехм (ок. 350 года до н. э.), Эратосфен (ок. 230 года до н. э.), Аполлоний Пергский (ок. 225 года до н. э.), Диокл (ок. 180 года до н. э.) и другие. Никому из них не удалось решить эту задачу или доказать, что ее решения не существует. Следует отметить, что если в нашем распоряжении находится мера длины, равная 1, то построить отрезок длиной  $\sqrt{2}$  очень просто: он будет диагональю квадрата со стороной 1. Таким образом, секрет этой задачи заключался в том, что по какой-то неизвестной причине она сопротивлялась всем попыткам решения. Лишь в XIX веке алгебраическими методами удалось доказать, что эту задачу нельзя решить, если пользоваться только циркулем и линейкой.

## Октаэдр

Октаэдр можно представить как две правильные четырехугольные пирамиды, соединенные основаниями (то есть как бипирамиду), либо как два треугольника, расположенных параллельно (повернутых на пол-оборота), между которыми вставлены треугольные грани (то есть как антипризму).



Октаэдр с квадратным сечением, октаэдр с шестиугольным сечением и кубookтаэдр.

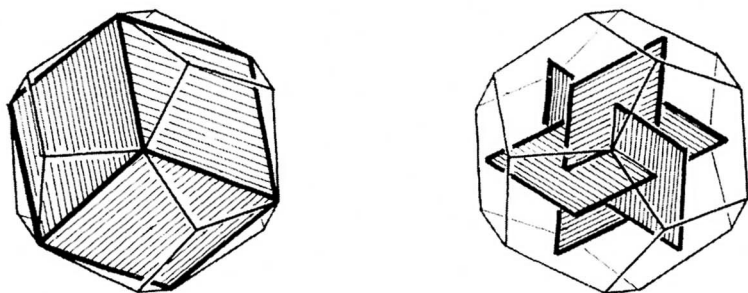
Если соединить середины верно выбранных шести ребер октаэдра, то есть если рассечь его плоскостью, параллельной двум параллельным граням, то мы получим любопытное шестиугольное сечение. Если мы рассмотрим четыре шестиугольных сечения, то получим новый многогранник с квадратными и треугольными гранями внутри октаэдра (кубооктаэдр).

## СТОЛЫ И ОКТАЭДРЫ

Если поместить октаэдр (цельный либо образованный исключительно ребрами) на пол так, что его основанием будет одна из треугольных граней, а другая, параллельная ей, будет находиться на высоте 70 см от пола, то мы получим прекрасную опору для садового стола. Теперь осталось подставить подпорки под остальные треугольные грани, и вы получите легкое и прочное основание.

## Додекаэдр

Додекаэдр можно получить совмещением двенадцати правильных пятиугольников (следовательно, его размеры будут также соответствовать золотому сечению) или представить его в виде куба, дополненного шестью «крышами» — частями пятиугольников.



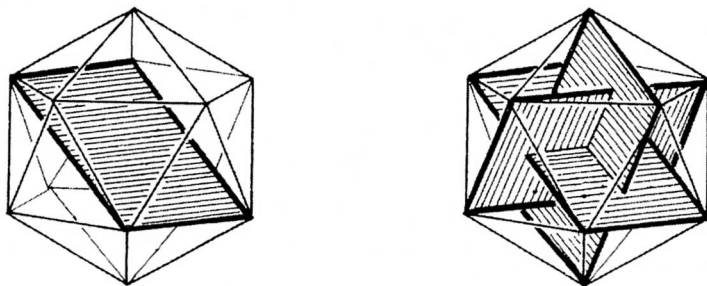
*Додекаэдр и его связь с кубом и икосаэдром.*

## ДОДЕКАЭДРЫ В ДОМАШНИХ УСЛОВИЯХ

Форму половины додекаэдра с шестью пятиугольными гранями имеют вазы для фруктов и мусорные контейнеры. Додекаэдры из железобетона высотой 30 см разделяют автомобильные и пешеходные зоны, однако у них есть один недостаток: их верхняя пятиугольная грань располагается горизонтально, и пешеходы часто садятся на нее, а это может быть опасно, если машины проезжают слишком близко.

## Икосаэдр

На следующем рисунке три прямоугольника золотого сечения помещены внутри икосаэдра. Благодаря этому несложно выразить координаты его вершин.



Икосаэдр и прямоугольники золотого сечения.

Двенадцать вершин трех равных прямоугольников, расположенных так, как показано на рисунке, определяют выпуклый многогранник с треугольными гранями. Любопытно, что его грани будут равносторонними треугольниками только тогда, когда эти прямоугольники будут прямоугольниками золотого сечения.

Напомним, что золотое сечение, величина которого равна  $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1,618...$  — это отношение между диагональю правильного пятиугольника и его стороной. Это объясняет, почему золотому сечению подчиняются размеры икосаэдров и додекаэдров. С древних времен золотое сечение считалось одним из красивейших соотношений. Знаменитая последовательность Фибоначчи, в свою очередь, определяется так: два ее первых члена равны 1, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Отношение между соседними числами Фибоначчи стремится к числу, равному величине золотого сечения. Сегодня золотое сечение можно встретить во множестве объектов, например в кредитных картах и удостоверениях личности.

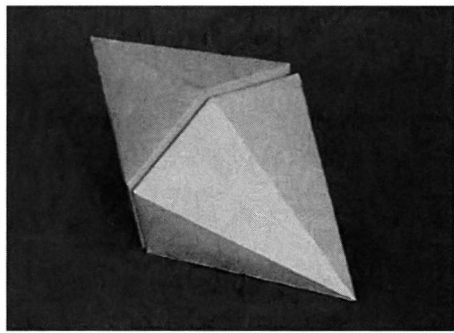
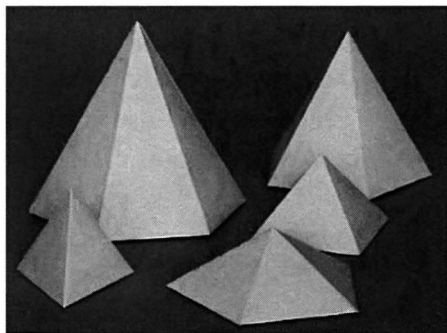
### РАЗБОРНЫЕ ИКОСАЭДРЫ

В настоящее время на американском рынке продаются любопытные наборы деталей из картона, из которых можно собрать икосаэдр без пирамидального основания и получить многогранник, основанием которого является пятиугольник. Размеры этого многогранника делают удобным его использование в качестве палатки (для этого нужно накрыть грани брезентом).

## Пирамиды и бипирамиды

Пирамиды, построенные египтянами и майя, — это выпуклые многогранники, образованные выпуклыми многоугольниками, лежащими в основании, и отрезками, соеди-

няющими точку, не лежащую на плоскости основания, с его вершинами. Единственная пирамида, которая является правильным многогранником, — это знаменитый правильный тетраэдр (все его грани — равные между собой равносторонние треугольники). Если исключить условие равенства граней, но сохранить требование, чтобы все грани пирамиды были правильными многоугольниками, мы получим пирамиду с квадратным основанием и боковыми гранями в виде равносторонних треугольников и пирамиду с пятиугольным основанием и боковыми гранями в виде равносторонних треугольников.



*Пирамиды и бипирамиды.*

Если вершина пирамиды смещена в пространстве, такая пирамида называется неправильной. Если соединить две пирамиды основаниями, образуется бипирамида. Например, бипирамидой является правильный октаэдр. Обратите внимание, что если соединить два равных тетраэдра основаниями, то образуется бипирамида, все грани которой будут равными между собой равносторонними треугольниками, однако в двух ее вершинах будет сходиться три ребра, в остальных — четыре (поэтому эта бипирамида не входит в число платоновых тел).

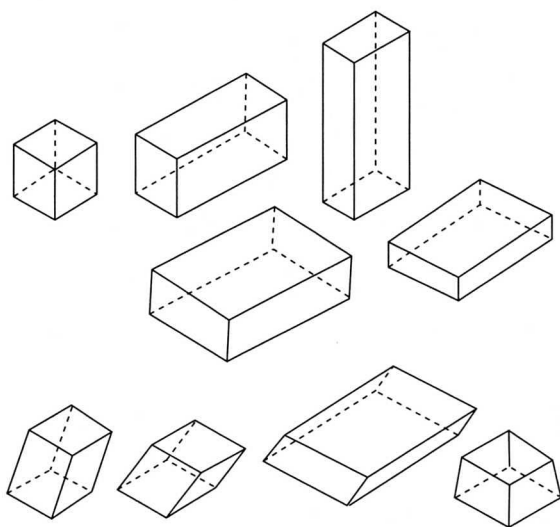
### ВИЗУАЛЬНЫЕ ПИРАМИДЫ И ЗРЕНИЕ

Пирамиды сыграли важную роль в изучении человеческого зрения, механизм которого в течение многих веков оставался загадкой. Часто применялся анализ «визуальных пирамид», вершинами которых служил глаз человека, ребрами — прямые, соединявшие глаз и наблюдаемые предметы. Если наблюдаемые предметы представляли собой многоугольники, образовывались воображаемые пирамиды. Это же происходит и в фотографии, где вершиной визуальной пирамиды является объектив, ребрами — лучи света, попадающие в него.

Объем произвольной пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту. В качестве приближения пирамиды можно использовать конус. Отметим, что при сечении пирамиды, например, плоскостью, параллельной ее основанию, образуются две фигуры: новая пирамида и усеченная пирамида.

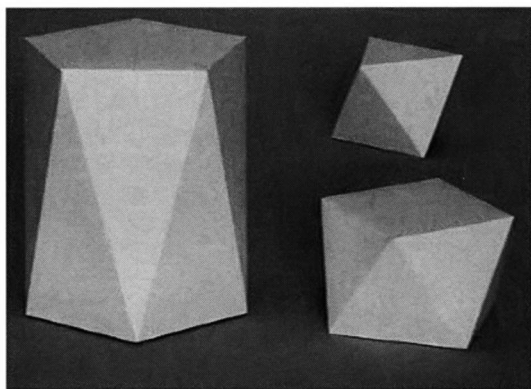
## Призмы и антипризмы

Если поднять многоугольник над плоскостью, на которой он изображен, перпендикулярно ей, то образуется прямая призма, которая определяется двумя параллельными основаниями — равными многоугольниками и боковыми прямоугольными гранями. Объем подобных фигур вычисляется как произведение площади основания на высоту.



*Различные модели призм.*

Если основания призмы смещены относительно друг друга, призма называется наклонной. Если соединить центры тяжести граней призмы, получится бипирамида, которая будет двойственной призме. Антипризмы, которые также называются призматоидами, возникают при рассмотрении двух параллельных граней, которые являются равными выпуклыми многоугольниками, при этом верхняя грань повернута относительно нижней, а каждая вершина верхней грани соединена с двумя соответствующими вершинами нижней грани. Таким образом получается фигура, основаниями которой являются равные многоугольники, повернутые относительно друг друга, а боковые грани имеют форму треугольников.

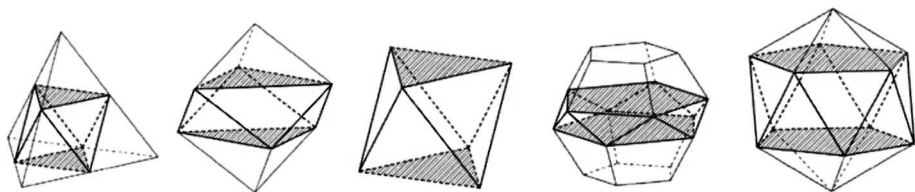


Антипризмы.

Основаниями правильных антипризм являются правильные  $n$ -угольники, а боковыми гранями — равносторонние треугольники. С увеличением  $n$  антипризмы будут становиться все ниже и ниже. Какой же многогранник является первой антипризмой? При  $n = 3$  мы получим... октаэдр!

Октаэдр — это единственная антипризма и правильный многогранник одновременно.

В мире антипризм нас поджидает большой сюрприз: всякий правильный многогранник является либо пирамидой, либо антипризмой, либо объединением антипризмы и нескольких пирамид (усеченных пирамид).



Что мы видим на рисунке? Тетраэдр — это пирамида. Октаэдр — антипризма. Икосаэдр — антипризма с пятиугольными основаниями, к которым приложены две пятиугольные пирамиды. Додекаэдр является пятиугольной антипризмой (обратите внимание на связь между боковыми треугольными гранями и пятиугольниками), к которой добавлены две усеченные пирамиды. Наконец, куб — это треугольная антипризма, к которой добавлены две треугольные пирамиды.

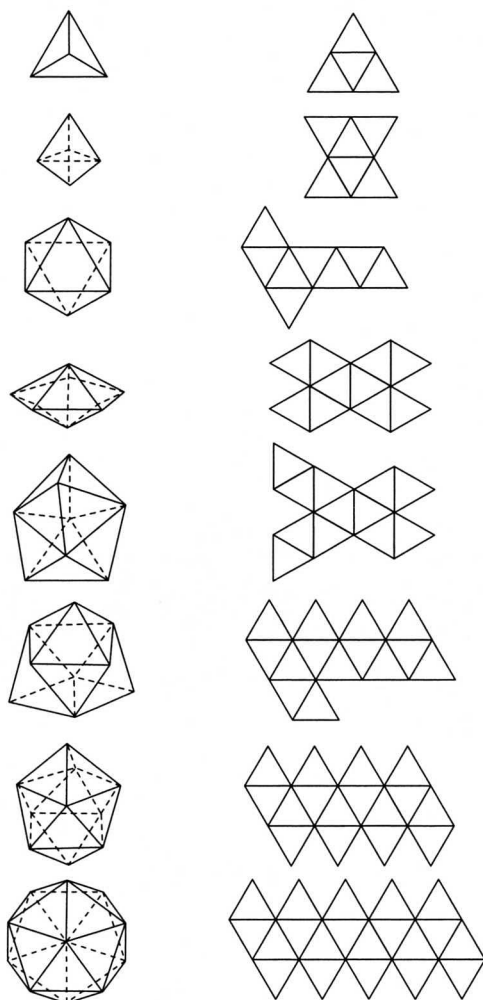
Рассмотрим многоугольник, параллельный основаниям антипризмы и отстоящий от них на расстояние, равное половине ее высоты. Если основания имеют  $n$  сторон,



значит у нее  $2n$  треугольных боковых граней и, следовательно, рассматриваемый многоугольник будет иметь  $2n$  сторон. Таким образом, для октаэдра таким многоугольником будет шестиугольник и антипризма, построенная на основе куба. В икосаэдрах и в додекаэдрах можно построить десятиугольные сечения.

## Дельтаэдры

Дельтаэдры — это выпуклые многогранники, грани которых — равные между собой равносторонние треугольники. На рисунке приведены восемь типов дельтаэдров и их плоские развертки.



Среди них вы сразу же узнаете правильные многогранники — тетраэдр, октаэдр и икосаэдр. Рассмотрим соотношения между числом граней, вершин и сторон, которые должны выполняться в дельтаэдрах.

Название	$\Gamma$	$B$	$P$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
Тетраэдр	4	4	6	4	0	0
Треугольная бипирамида	6	5	9	2	3	0
Октаэдр	8	6	12	0	6	0
Пятиугольная бипирамида	10	7	15	0	5	2
Додекадельтаэдр	12	8	18	0	4	4
Тетракаидекадельтаэдр	14	9	21	0	3	6
Гексакаидекадельтаэдр	16	10	24	0	2	8
???	18	11	27	0	1	10
Икосаэдр	20	12	30	0	0	12

При  $\Gamma = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20$  фигуры действительно существуют, однако возникает дельтаэдр-призрак с 18 гранями, о котором известно почти все:  $\Gamma = 18$ ,  $B = 11$ ,  $P = 27$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = 1$ ,  $B_5 = 10$ . Но такого объекта не может существовать в реальности. Как вы видите, формуле Эйлера удовлетворяют числа  $\Gamma$ ,  $B$ ,  $P$ , которые необязательно соответствуют какому-либо реальному многограннику. Например, две грани выпуклого многогранника не могут лежать в одной плоскости, однако описывающие его числа  $\Gamma$ ,  $B$ ,  $P$  удовлетворяют формуле Эйлера. Из 18 одинаковых равносторонних треугольников, поскольку  $B_4 = 1$ , образуется четырехгранная пирамида, вершина которой будет одной из вершин искомого многогранника. Перейдем на второй уровень: каждая из четырех вершин пирамиды, в которой уже сходятся три ребра, должна быть вершиной пятого порядка, следовательно, требуется добавить еще два ребра. Так после пирамиды появляется второй уровень с кольцом (антипризмой) из восьми треугольников и квадратным отверстием. Теперь осталось разместить всего шесть треугольников, однако это невозможно, так как должно выполняться условие о числе вершин пятого порядка. (Также можно рассмотреть дельтаэдр с 16 гранями, к которому нельзя добавить еще две грани так, чтобы полученный многогранник был

### ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС

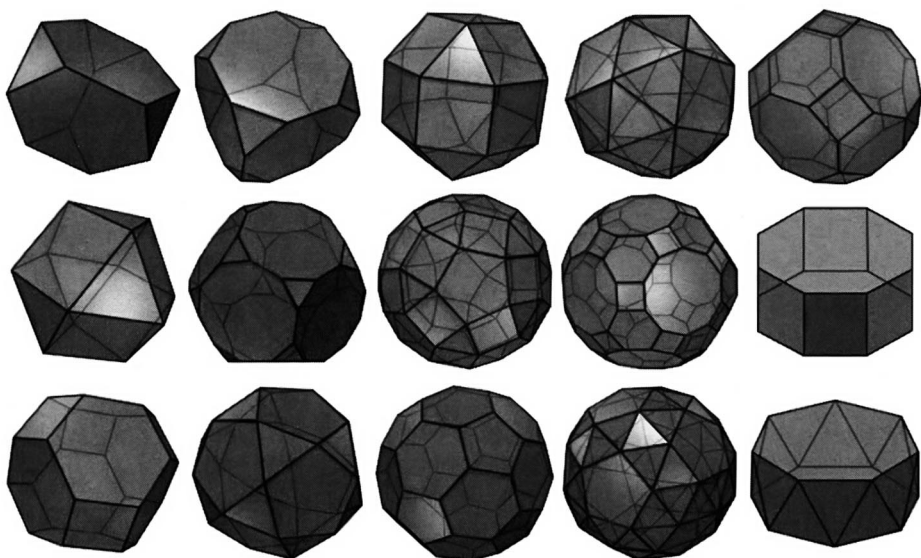
Американский геометр Джозеф Малкевич выдвинул задачу о поиске всех выпуклых многогранников, грани которых равны и представляют собой равнобедренные (но не равносторонние) треугольники. Полная классификация не завершена до сих пор.

выпуклым.) Задача о восьми дельтаэдрах была закрыта несколько лет назад Хансом Фройденталем и Бартелем Леендертом ван дер Варденом.

## Архимедовы тела

Согласно «Математическому собранию» Паппа Александрийского (середина XVI века), Архимед создал трактат о 13 полуправильных (архимедовых) многогранниках.

Полуправильные многогранники — это выпуклые многогранники (они не являются ни призмами, ни антипризмами), гранями которых выступают равные правильные многоугольники двух или трех видов, а в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.



Архимедовы тела.

Заметьте, что призмы и антипризмы могут быть полуправильными в том смысле, как указано выше (в этом случае число архимедовых тел будет бесконечно велико), однако мы исключили их из рассмотрения, чтобы сосредоточить внимание на остальных вариантах. На рисунке выше представлено 15 моделей, 11 из них построены на основе пяти правильных многогранников путем последовательного отсечения вершин или ребер. Модели курносого куба и курносого додекаэдра получаются, если раздвинуть грани соответствующего правильного многогранника и поместить между ними

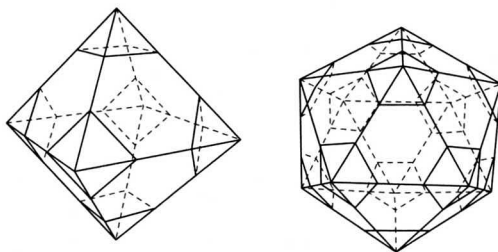
равносторонние треугольники. Эти многогранники могут существовать в зеркальных вариантах, следовательно, можно построить еще пятнадцать многогранников. Сколько же их всего: тринадцать, пятнадцать, бесконечно много? Подсчитать их непросто.

Тринадцать архимедовых тел изобразил еще Кеплер, который показал, что эти архимедовы тела являются единственно возможными. Некоторые из них можно встретить уже в работах Луки Пачоли и Венцеля Ямницера.

В следующей таблице перечислены любопытные названия тринадцати архимедовых тел и соответствующее число треугольных ( $\Gamma_3$ ), квадратных ( $\Gamma_4$ ), пятиугольных ( $\Gamma_5$ ), шестиугольных ( $\Gamma_6$ ), восьмиугольных ( $\Gamma_8$ ) и, всего в двух случаях, десятиугольных граней ( $\Gamma_{10}$ ).

Название	$\Gamma$	$\Gamma_3$	$\Gamma_4$	$\Gamma_5$	$\Gamma_6$	$\Gamma_8$	$\Gamma_{10}$	$V$	$P$
Кубооктаэдр	14	8	6	—	—	—	—	12	24
Икосододекаэдр	32	20	—	12	—	—	—	30	60
Усеченный тетраэдр	8	4	—	—	4	—	—	12	18
Усеченный куб	14	8	—	—	—	6	—	24	36
Многогранник Кельвина (усеченный октаэдр)	14	—	6	—	8	—	—	24	36
Усеченный додекаэдр	32	20	—	—	—	—	12	60	90
Усеченный икосаэдр	32	—	—	12	20	—	—	60	90
Ромбоусеченный кубооктаэдр	26	—	12	—	8	6	—	48	72
Ромбоусеченный икосододекаэдр	62	—	30	—	20	—	12	120	180
Ромбокубооктаэдр	26	8	18	—	—	—	—	24	48
Ромбоикосододекаэдр	62	20	30	12	—	—	—	60	120
Курносый куб	38	32	6	—	—	—	—	24	60
Курносый додекаэдр	92	80	—	12	—	—	—	60	150

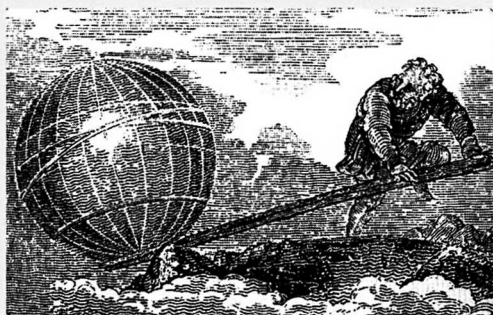
Особый интерес представляют два случая. Многогранник Кельвина, гранями которого являются шестиугольники и квадраты, образуется простым усечением правильного октаэдра, при этом линии среза делят его ребра на три равные части. Этот многогранник — единственное архимедово тело, при повторении которого можно заполнить пространство целиком.



Построение многогранника Кельвина и усеченного икосаэдра.

## АРХИМЕД ИЗ СИРАКУЗ (287–212 ГОДЫ ДО Н. Э.)

О жизни этого математика мы знаем немного. Известно, что он совершил путешествие в Египет и в Александрии познакомился с работами последователей Евклида. Архимед из Сиракуз был известным геометром и изобретателем военных машин, при проектировании которых в равной степени проявились его выдающиеся способности к математике и механике. Он сделал важный вклад в механику, гидростатику и другие области знания, а количество написанных им трудов доказывает, что Архимед, возможно, был величайшим мудрецом древности.



*Гравюра, опубликованная в журнале Mechanics Magazine в 1824 году в качестве иллюстрации к фразе, которая приписывается Архимеду: «Дайте мне точку опоры, и я поверну Землю».*

Усеченный икосаэдр, в свою очередь, имеет 12 пятиугольных и 20 шестиугольных граней и образуется усечением икосаэдра так, что линии среза делят его ребра на три равные части. Нет ли у вас дома модели этого многогранника? Не посвящаете ли вы несколько часов в неделю тому, что смотрите, как 22 игрока в течение 90 минут не сводят глаз с этого многогранника?.. Да, такую форму имеют обычные футбольные мячи (о них мы поговорим дальше).

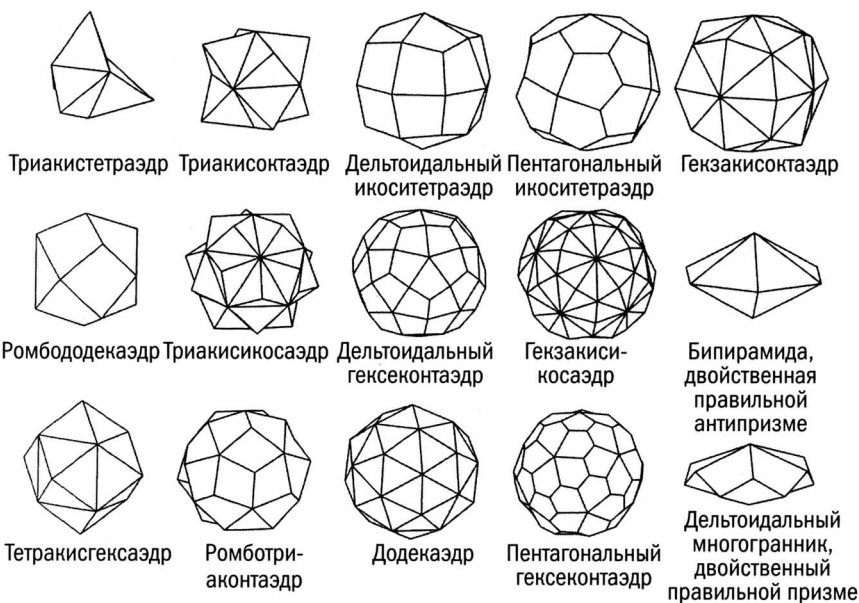
## Каталановы тела

Эжен Шарль Каталан (1814–1894) был выдающимся бельгийским математиком, именем которого назван важный класс чисел и примечательная группа многогранников. Числами Каталана являются 1, 1, 2, 5, 14, 132, 429... Они рассчитываются по формуле  $(2n)! / (n+1)! n!$ . И если Фибоначчи прославился благодаря тому, что определенная им последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, ... повсеместно присутствует в природе и связана с золотым сечением, Каталан стал известен потому, что его числа используются во множестве задач комбинаторики.

Стали известными и многогранники, открытые Каталаном. Каталановы тела — это 13 многогранников, двойственных архимедовым телам, то есть многогранники, по-

лучаемые на основе 13 архимедовых тел. В то время как многогранники, двойственные пяти правильным многогранникам, принадлежат к тому же семейству, архимедовы тела порождают 13 совершенно новых многогранников. Как не раз случалось в истории, до конца XIX века никто не уделял внимания этим объектам. Далее описаны тринадцать катановых тел.

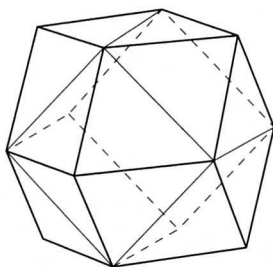
Название	$\Gamma$	$B$	$P$	Форма граней
Ромбододекаэдр	12	14	24	Ромбы
Ромботриаконтаэдр	60	32	90	Ромбы
Триакистетраэдр	12	8	18	Равнобедренные треугольники
Триакисикосаэдр	24	14	36	Равнобедренные треугольники
Тетракисгексаэдр	24	14	36	Равнобедренные треугольники
Триакисоктаэдр	60	32	90	Треугольники
Пентакисдодекаэдр	60	32	90	Треугольники
Гекзакисоктаэдр	48	26	72	Неправильные треугольники
Гекзакисикосаэдр	120	62	180	Неправильные треугольники
Дельтоидальный икоситетраэдр	24	26	48	Четырехугольники
Дельтоидальный гексеконтаэдр	120	62	180	Четырехугольники
Пентагональный икоситетраэдр	24	38	60	Пятиугольники
Пентагональный гексеконтаэдр	60	92	150	Пятиугольники



Катановы тела.

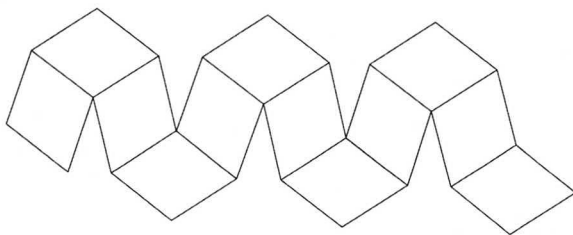
Грани каталановых тел не являются правильными многоугольниками. Число вершин каталанова тела совпадает с числом граней соответствующего ему архимедова тела, а число граней — с числом вершин архимедова тела. Любопытно, что в любое каталаново тело можно вписать сферу, которая будет касаться всех его граней, в то время как для архимедовых тел можно провести описанные сферы, которые будут проходить через все их вершины.

Рассмотрим одно из каталановых тел — ромбододекаэдр. Он образован 12 одинаковыми гранями, которые представляют собой ромбы, и строится на основе куба, как показано на рисунке.



*Ромбододекаэдр и схема его построения.*

На рисунке ниже вы можете видеть плоскую развертку этой фигуры.

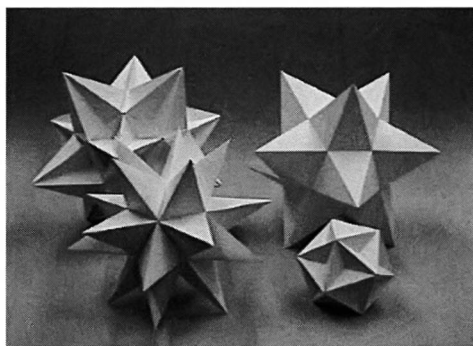


*Развертка ромбододекаэдра.*

## Звездчатые многогранники

Некоторые звездчатые многоугольники, например пентаграмма и звезда Давида, в древности имели мистическое значение. Пентаграмма образуется при проведении всех диагоналей правильного пятиугольника или при продолжении его сторон до пересечения. Звезда Давида строится продолжением сторон правильного шестиугольника или наложением двух равносторонних треугольников, повернутых относительно друг друга.

Первыми звездчатые многоугольники изучили Томас Брадвардин (1290—1349), Шарль де Бовель (1479 — ок. 1566) и Иоганн Кеплер (1571—1630), последний из которых попытался описать звездчатые многогранники. Он использовал два способа их построения: путем продолжения ребер и путем расширения граней исходных многогранников. Кеплер открыл первую пару звездчатых многогранников, полученных расширением додекаэдра и икосаэдра, и отметил, что на основе остальных трех правильных многогранников построить звездчатые многогранники невозможно.



Четыре звездчатых многогранника Кеплера — Пуансо.

В 1854 году Артур Кэли дал имена двум многогранникам Кеплера: малый звездчатый додекаэдр (12 вершин) и большой звездчатый додекаэдр (20 вершин). Они являются правильными невыпуклыми многогранниками и обладают множеством особых свойств.

Следует отметить, что алгоритм, с помощью которого можно построить бесконечно много звездчатых многогранников, очень прост: он заключается в расположении пирамид на гранях выпуклых многогранников. Также звездчатые многогранники можно получить, соединив различные многогранники гранями или построив пирамиды, основаниями которых являются звездчатые многоугольники.

Луи Пуансо, ничего не зная о звездчатых многогранниках Кеплера, начал скрупулезный и подробный анализ всех звездчатых многогранников, комбинируя как обычные, так и звездчатые многоугольники, ребра которых пересекаются в точках, не являющихся вершинами (пентаграмма, звезда Давида и другие). В результате Пуансо не только повторно открыл два многогранника Кеплера, но и обнаружил два новых: большой додекаэдр и большой икосаэдр.

Сам Пуансо предположил, что описанные им четыре звездчатых многогранника, вероятно, являются единственно возможными правильными многогранниками

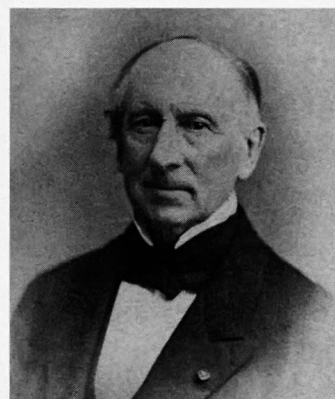


**ЛУИ ПУАНСО (1777–1859)**

Этот известный и талантливый французский математик и физик изучал действие систем сил на твердые тела, однако к своим важным открытиям в механике он присовокупил труд о многоугольниках и многогранниках, написанный в 1809 году. Пуансо удалось дополнить семейство многогранников Кеплера двумя новыми фигурами. Любопытно, что именем математика названы кратер на Луне, улица в Париже и, разумеется, два открытых им прекрасных многогранника.

**ОГЮСТЕН ЛУИ КОШИ (1789–1857)**

Этот блестящий ученый, родившийся в Париже, изучал математику в Политехнической школе, затем обучался в парижской Школе мостов и дорог. Его впечатляющий вклад в математику насчитывает 789 статей, а полное собрание сочинений составляет 27 томов. Коши был глубоко верующим католиком, консерватором, отличался непростым характером и временами страдал от депрессии. Противники его были многочисленны, а почитатели — преданны ему.



такого типа. Лишь в 1812 году Огюстен Луи Коши смог привести убедительное доказательство гипотезы Пуансо. Четыре многогранника, которые сегодня носят имя Кеплера — Пуансо, являются единственно возможными правильными звездчатыми многогранниками.

Как мы уже говорили, возможно построение и других звездчатых многогранников, и на протяжении XX столетия многие авторы открывали такие фигуры, начиная от склеенных между собой тетраэдров и заканчивая 59 звездчатыми формами икосаэдра. Макс Брюкнер, Альберт Уилер, Патрик Дюваль, Гарольд Коксетер и Жозеф Бертран привели полный перечень звездчатых многогранников, описали возможные способы их построения, изучали свойства их симметрии и т. д.

## Другие семейства многогранников

Помимо описанных, есть и другие интересные группы многогранников. Далее мы расскажем о некоторых из них.

### Параллелепипеды

Кубы, четырехугольные призмы и призмы, все грани которых являются прямоугольниками, — все это частные случаи параллелепипедов, гранями которых являются попарно параллельные параллелограммы. Параллелепипеды очень популярны, так как их можно легко описать тремя векторами, выходящими из одной точки, а объем параллелепипеда рассчитывается как модуль смешанного произведения этих векторов. С помощью декартовых координат, задаваемых векторами, очень удобно проводить всевозможные вычисления, связанные с параллелепипедами.

### Поликубы

Популярные фигуры полимино — это плоские фигуры, составленные из одинаковых квадратов, каждый из которых имеет по крайней мере одну общую сторону с другим. Эквивалентом полимино в пространстве являются поликубы, составленные из одинаковых кубов, каждый из которых имеет по крайней мере одну общую грань с другим. Если вы когда-нибудь играли с конструктором Lego, вам можно присвоить степень магистра поликубов. Аналогично поликубам можно построить политетраэдры, полиоктаэдры и т. д.

### Многогранники, обладающие особыми свойствами

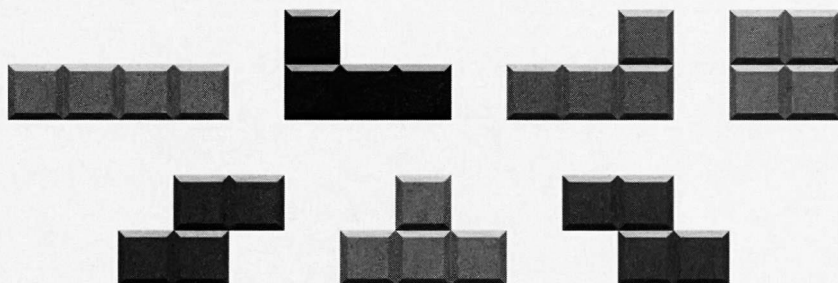
Особый интерес представляют описание и классификация семейств многогранников, обладающих каким-либо общим свойством, но необязательно всеми свойствами правильных многогранников. Так, изучаются выпуклые многогранники, все грани которых являются правильными многоугольниками (всего таких многогранников 92, их открыли Норман Джонсон и Виктор Залгаллер).

В этой группе насчитывается 14 многогранников, получаемых рассечением правильных многогранников и архимедовых тел, еще 15 получаются объединением правильных многогранников или архимедовых тел с 14 многогранниками из первой группы, 26 образуются путем объединения предыдущих многогранников с правиль-

## «ТЕТРИС»

Интерактивная головоломка «Тетрис» — одна из самых известных и продаваемых видеоигр с 1984 года. Ее создателем считается россиянин Алексей Пажитнов, а название игры происходит от слова «тетрамино» («четыре квадрата»). Изначально в игре насчитывалось всего семь элементов, состоящих из четырех квадратов: большой квадрат, фигурки в форме букв I и T, две симметричные фигурки в виде буквы L и еще две — в виде буквы Z.

С ростом популярности игры были представлены ее различные варианты в 3D, где на смену тетрамино пришли тетракубы.



*Семь исходных элементов «Тетриса».*

ными призмами, 11 образуются при сочетании предыдущих с правильными антипризмами, а 8 являются особыми случаями расположения треугольников, квадратов, пятиугольников и шестиугольников в пространстве. Остальные многогранники этой группы представляют собой сочетания двух или трех многогранников, описанных выше.

Это поверхностное описание позволяет понять, что перечислить все многогранники непросто: нужно устранить повторы, найти все взаимно симметричные фигуры (вспомните две фигурки «Тетриса» в форме буквы L) и установить, различными их следует считать или эквивалентными.

Также существует группа многогранников, все грани которых равны, группа выпуклых многогранников, во всех вершинах которых сходится одинаковое число ребер, и многие другие.

Представьте себе правильную пятиугольную антипризму, к основанию которой приклеена правильная пятиугольная пирамида: такой многогранник имеет десять граней в форме равносторонних треугольников и пятиугольное основание. Следовательно, это многоугольник с правильными гранями, однако в его вершинах сходится разное число ребер.

## Зоноэдры

Зоноэдр — это выпуклый многогранник, каждая грань которого обладает той же симметрией, что и параллелограмм. Представьте себе многогранник, гранями которого являются, например, параллелограммы.

## Трапецеэдры

Трапецеэдры образуются при соединении центров граней антипризм.

## Ортогональные многогранники

Все их грани образуют между собой углы в  $90^\circ$ , а их ребра параллельны одной из трех осей декартовой системы координат. Среди выпуклых многогранников этому условию соответствуют только призмы, а среди невыпуклых — и многие другие фигуры (например, поликубы).

## Производные многогранники

Соединив определенные точки любого многогранника, можно получить новый многогранник. Если мы рассечем исходный многогранник плоскостями, получим новый класс усеченных многогранников. Если разъединить грани многогранника и заполнить полученные пустоты треугольниками, образуются новые фигуры.

## Неправильные многогранники

Очевидно, что если мы не будем заострять внимание только на правильных многогранниках, то перед нами откроется настоящая бездна. Мир невыпуклых многогранников скрывает еще больше тайн. Например, существуют многогранники с отверстиями: так, если рассматривать поликубы, то можно составить кольцо из семи и восьми маленьких кубиков, объединенных между собой. Есть и еще более сложные случаи — например, тела, в которых плоские многоугольные грани заменены пространственными многоугольниками или линейчатыми поверхностями либо к ним применены топологические деформации. На многочисленных интернет-сайтах, посвященных многогранникам, можно найти множество их классификаций и бесконечное число задач, ожидающих решения.

## Гиперкубы в четырех измерениях

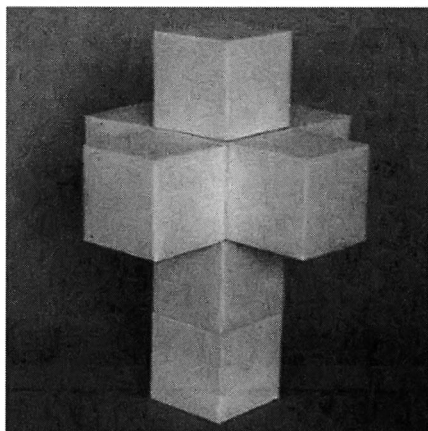
Особой фигурой в привычном нам трехмерном пространстве является куб: его грани — равные квадраты, все его ребра и углы равны, ребра и грани перпендикулярны между собой, противоположные грани и ребра параллельны друг другу, направления ребер куба указывают оси пространственных координат и т. д. Кажется очевидным, что мы обычно предпочитаем трехмерный куб более сложным многогранникам за его простоту и красоту. Какая фигура соответствует кубу в двумерном пространстве? Квадрат. А в одномерном? Отрезок. А в нульмерном? Точка. Эта последовательность представлена в таблице ниже.

Число измерений	Фигура	Вершины	Ребра	Двумерные грани	Трехмерные грани
0	Точка	1	—	—	—
1	Отрезок	2	1	—	—
2	Квадрат	4	4	1	—
3	Куб	8	12	6	1

Будет естественно сделать следующий шаг и задаться вопросом: как выглядит куб в четырехмерном пространстве? В голову сразу приходит следующий ответ: можно рассматривать время как четвертое измерение, в этом случае обычный куб уже будет иметь четыре измерения. Однако математическая логика подсказывает другой ответ: «из четырех отрезков строится квадрат, из шести квадратов — куб, из восьми кубов — гиперкуб». Если вы внимательно посмотрите на столбец таблицы выше, в котором указано число вершин (1, 2, 4, 8), то предположите, что гиперкуб будет иметь 16 вершин, 32 ребра и 24 плоские грани.

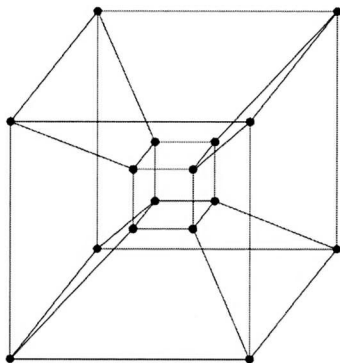
Число измерений	Фигура	Вершины	Ребра	Грани	Трехмерные грани	Четырехмерные грани
4	Гиперкуб	16	32	24	8	1

Таким образом, нам уже известно многое о гиперкубе. Давайте теперь попытаемся увидеть эту фигуру. Представьте себе на мгновение обычный куб, плоская развертка которого представляет собой крест из шести квадратов. Попробуйте собрать гиперкуб аналогичным образом из восьми кубов. Поставьте четыре куба в стопку и расположите еще четыре вокруг третьего снизу. Перед вами крест в 3D — пространственная развертка гиперкуба.



Этот крест изобразил на многих своих картинах Сальвадор Дали — по его мнению, эта фигура символизирует Иисуса Христа, парящего в пространстве. Однако на этом наши поиски не завершены. Куб нетрудно определить по его квадратным граням. Какие грани мы увидим при взгляде на гиперкуб? Кубы! Представьте себе кубические скульптуры, каждой гранью которых является куб в перспективе.

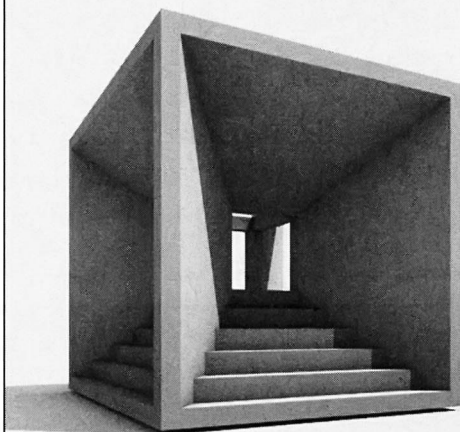
Можно пойти дальше и рассмотреть пространственные сечения гиперкуба.



*Изображение гиперкуба на плоскости.*

Можно дать волю воображению и представить четвертое измерение как цвет, после чего раскрасить ничем не примечательный белый куб ярко-красной краской. Мы привыкли, что измерениями архитектуры являются только длина, ширина и высота. Но не существует ли других интересных и измеримых параметров: цвет, яркость, температура, акустические свойства и другие?

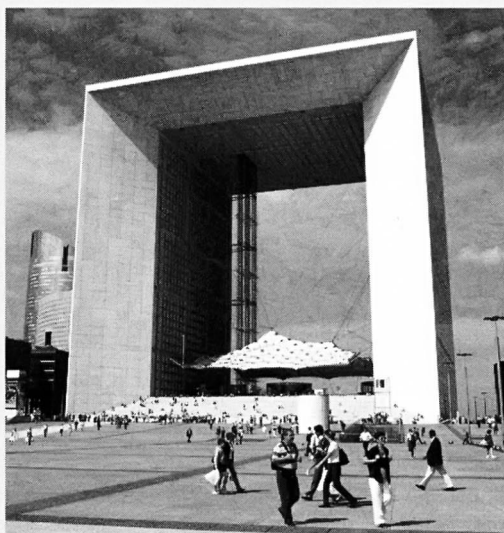
## ПАМЯТНИК КОНСТИТУЦИИ



Архитектор Мигель Анхель Руис-Ларреа создал этот прекрасный памятник испанской конституции в 1978 году для сада Национального музея естественных наук в Мадриде. Памятник представляет собой белый бетонный куб со стороной 7,75 м. Если не учитывать лестницы, то скульптура является визуализацией гиперкуба, так как на каждой из его граней можно увидеть куб в перспективе.

## БОЛЬШАЯ АРКА ДЕФАНС

Парижский монумент под названием Большая арка братства, известный как Большая арка Дефанс по названию района, в котором он расположен, был создан датским архитектором Отто фон Спрекельсеном, который в 1982 году первым из 423 архитекторов представил свой проект на конкурс. Эта новая триумфальная арка, напоминающая гиперкуб, была построена в период с 1982 по 1989 год. Если вы посмотрите на пустые грани куба, то увидите куб в перспективе. Его размеры и функциональность удивительны. Он насчитывает 108 м в длину, 110 м в высоту и 112 м в ширину, а его вес равен 300 тысячам тонн. Сооружение поддерживают двенадцать опор, слева и справа от него располагаются 35 этажей, где находятся правительственные учреждения. В верхней части здания расположены конференц-зал и выставочный центр, музей информатики, ресторан и смотровая площадка.



## Три правильных политопа

В этом разделе мы совершим экскурсию по миру правильных политопов в пространствах с разным числом измерений. Начнем с двумерной плоскости. Правильные многоугольники — это выпуклые фигуры (то есть такие, что любой отрезок, соединяющий две точки фигуры, заключен внутри нее), все стороны и углы которых равны. Это равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник,  $n$ -угольник и т. д. Существует бесконечное множество правильных многоугольников, которые служат гранями правильных многогранников в трех измерениях.

В трехмерном пространстве правильные многогранники — это выпуклые многогранники, такие, что все их грани являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Однако существует всего пять правильных многогранников. Это удивительный факт: при переходе в новое измерение число возможных случаев уменьшилось с бесконечности всего до пяти!

Двумерные грани правильных многогранников — это правильные многоугольники, одномерные грани — отрезки, следовательно, аналогами правильных многоугольников в одномерном пространстве будут отрезки. Таким образом, в одномерном пространстве существует всего одна правильная фигура — отрезок.

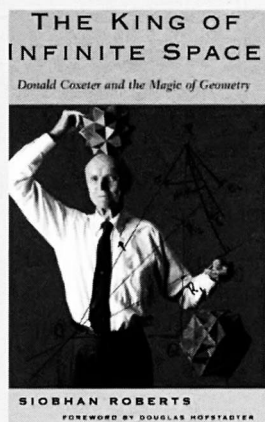
Перейдем в четырехмерное пространство: в нашем распоряжении пять правильных многогранников, которые можно представить как трехмерные грани правильных политопов. Получим следующие фигуры, изученные Гарольдом Коксетером.

### ГАРОЛЬД СКОТТ МАКДОНАЛЬД КОКСЕТЕР (1907–2003)

Гарольд Скотт МакДональд Коксетер родился в Лондоне, изучал математику в Тринити-колледже Кембриджа, но вся его научная карьера прошла в Канаде, в Торонтском университете. Коксетер — автор двенадцати важных трудов и множества работ, выполненных в соавторстве с другими блестящими учеными. Он внес неизмеримый вклад в изучение многогранников, в частности многогранников, расположенных в пространстве, имеющем более трех измерений.

Коксетер очень дружил со знаменитым голландским художником М. Эшером, который изобразил в своих произведениях множество геометрических свойств, открытых Коксетером.

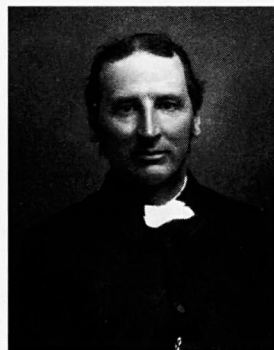
*Обложка биографии Коксетера, выполненная Шивон Робертс.*





**ЭДВИН ЭББОТТ ЭББОТТ (1838–1926)**

Английский писатель, богослов и преподаватель Эдвин Эбботт Эбботт окончил Школу лондонского Сити и колледж Сент-Джон Кембриджского университета, получив высшие оценки по филологии, математике и богословию. В 1862 году он постригся в монахи и начал активно заниматься преподаванием. В 1884 году он выпустил под псевдонимом A. Square («Квадрат») самую известную свою книгу, «Флатландия» (Flatland: A Romance of Many Dimensions) — рассказ о приключениях квадрата в Пойнтландии и Лайнландии.



Главный герой описывает многоугольных жителей плоского мира. По ходу действия трехмерные фигуры пересекают плоскость, появляясь перед рассказчиком в виде своих сечений, — обитатели Флатландии могут их видеть только так. Рассказчик-квадрат осмеливается покинуть плоскость и совершить путешествие в трехмерный мир, после чего пытается сделать невозможное — объяснить своим двумерным соотечественникам, что за пределами их мира существует многомерная реальность. В своей книге Эбботт хотел популярным языком объяснить понятия пространственной геометрии, однако его произведение также стало сатирой на общественные, моральные и религиозные ценности той эпохи. Эбботт вышел в отставку в 1889 году и посвятил себя литературе и богословию.

Гиперкуб теоретически определяется восемью кубами (они являются его трехмерными гранями), имеет 24 двумерные грани, 32 одномерных и 16 нульмерных граней.

Симплекс является обобщением последовательности: отрезок, равносторонний треугольник, тетраэдр. Если тетраэдр образуется с помощью равностороннего треугольника и точки, расположенной в третьем измерении, то правильный симплекс — пирамида, основанием которой является трехмерный тетраэдр, и точка, расположенная в четвертом измерении. Он имеет пять трехмерных граней (тетраэдров), десять двумерных, десять одномерных и пять нульмерных граней.

Политоп с 16 трехмерными гранями — фигура, обратная гиперкубу, то есть четырехмерный октаэдр, образованный соединением центров тяжести граней куба.

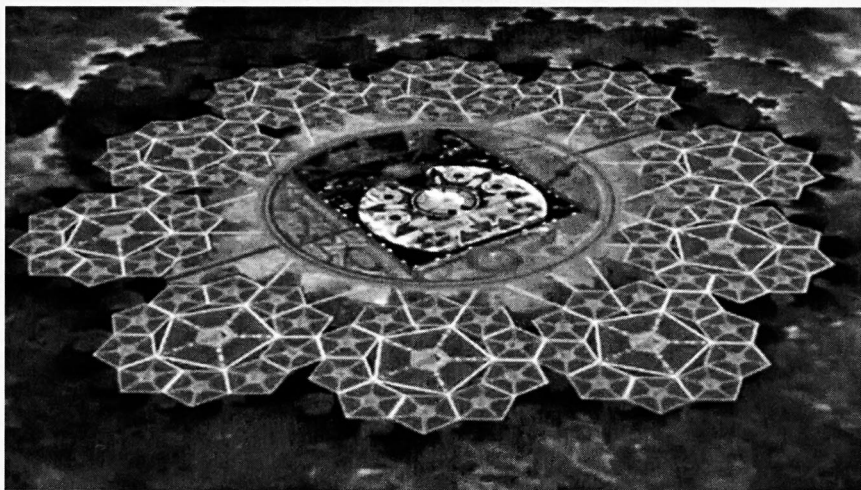
Все трехмерные грани политопы с 24 трехмерными гранями являются правильными октаэдрами. Эта фигура не имеет трехмерных аналогов.

Аналогом политопы с 600 трехмерными гранями будет икосаэдр, образованный из пятиугольной антипризмы добавлением двух пятиугольных пирамид. У этой фигуры 120 нульмерных граней, 720 одномерных и 1200 двухмерных.

## МНОГОГРАННИКИ И ФАНТАСТИКА

«Флатландия» Эбботта оказала влияние на авторов многих других фантастических произведений, которые с большим воображением описывали переход из реального пространства в четырехмерное или многомерные пространства. Интерес к этой теме достиг наивысшей точки в период с 1870 по 1920 год, когда она стала одной из основных в фантастической литературе и искусстве и даже породила несколько научных теорий. Четвертое измерение, понимаемое как дополнительное измерение пространства (а не временное измерение, как оно трактуется в теории относительности), упоминается в произведениях Оскара Уайльда, Федора Михайловича Достоевского, Марселя Пруста, Герберта Уэллса, Льюиса Кэрролла и Джозефа Конрада. Классическими произведениями на эту тему считаются роман «В четвертое измерение» Рэя Каммингса, написанный в 1926 году, история Юджина Джипа, персонажа комиксов о моряке Попае, который впервые появился в 1936 году, и рассказ Роберта Хайнлайна «...И построил он себе скрюченный домишко» 1941 года. Эта тема вскоре нашла воплощение в кино, где в изобилии стали появляться фильмы, в которых четвертое измерение играло главную роль. Сейчас этот же этап проходят видеоигры.

С научной точки зрения общее исследование геометрии четвертого измерения провел Бернхард Риман. Американский математик Томас Бэнчхофф создал удивительные фильмы о сечениях четырехмерного куба, какими они видны в трехмерном мире, а также современную DVD-версию «Флатландии». Эта тема содержит отсылку к древнему мифу о платоновской пещере, главный герой которой видит лишь тени всего, что происходит снаружи, и считает их реальностью.



Фотография из киноверсии «Флатландии» режиссера Томаса Бэнчхоффа.

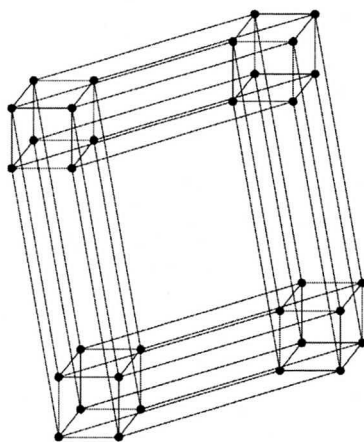
Политоп со 120 трехмерными гранями строится как двойственный предыдущему: 600 его вершин являются центрами 600 граней-тетраэдров.

Если в трехмерном пространстве существует пять правильных многогранников, то в четырехмерном — шесть правильных политопов. Возможно, в пятимерном пространстве есть семь правильных политопов? Однако в любом  $n$ -мерном пространстве, где  $n \geq 5$ , присутствует всего три правильных политопа:  $n$ -куб,  $n$ -тетраэдр и  $n$ -октаэдр.

Число  $p$ -граней  $n$ -куба рассчитывается по формуле  $2^{n-p} \binom{n}{p}$ , число  $p$ -граней  $n$ -симплекса —  $\binom{n+1}{p+1}$ , а  $n$ -октаэдр является двойственным  $n$ -кубу. Эти данные вкратце изложены в следующей таблице.

Число измерений	Правильные фигуры	Типы
1	Отрезок	1
2	Правильные многоугольники	Бесконечно много
3	Правильные многогранники	5
4	Правильные политопы	6
$n \geq 5$	Правильные политопы	3

Так, для  $n \geq 3$  неизменно существуют  $n$ -куб,  $n$ -тетраэдр и  $n$ -октаэдр. Правильная фигура на прямой линии — это простой отрезок; плоскость в этом отношении стоит особняком; икосаэдр и додекаэдр подобны дару небес и представляют собой настоящие аномалии, а четырехмерное пространство очень отличается от всех остальных пространств с числом измерений, большим трех.



Представление пятимерного куба на плоскости.

Труды по многомерной и неевклидовой геометрии в течение многих лет считались исключительно математическими абстракциями, пока Анри Пуанкаре не доказал, что группу преобразований Лоренца, оставляющих инвариантными уравнения электромагнетизма, можно рассматривать как повороты в четырехмерном пространстве. Позднее труды Эйнштейна и их геометрическое толкование Германом Минковским привели к тому, что четвертое измерение стало считаться необходимым атрибутом при описании наблюдаемых явлений, связанных с электромагнетизмом. Однако при этом четвертое измерение было не каким-то местом, отделенным от трехмерного пространства, и не пространственным измерением, аналогичным привычным трем, а временным измерением. В общей теории относительности гравитационное поле объясняется как геометрический эффект кривизны четырехмерного пространства-времени.

## Глава 3

# Удивительные секреты многогранников

*Глаза улавливают тончайшие математические расчеты, которым подчиняются искажения перспективы. Именно в этом заключается один из секретов меланхолической красоты некоторых картин.*

Сальвадор Дали

В этой главе мы хотим открыть вам некоторые самые тщательно охраняемые тайны многогранников. Важен здесь тот факт, что трехмерные многогранники значительно отличаются от более привычных нам плоских фигур. Рассмотрим хорошо известный пример: на плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников, в пространстве — всего пять правильных многогранников. И тот факт, что при переходе из двумерного в трехмерное пространство число вариантов уменьшается с бесконечности всего до пяти, настораживает. Рассмотрим правильные пятиугольники: из них невозможно составить мозаику (их углы не стыкуются друг с другом), однако из двенадцати правильных пятиугольников в пространстве можно составить прекрасный многогранник — додекаэдр.

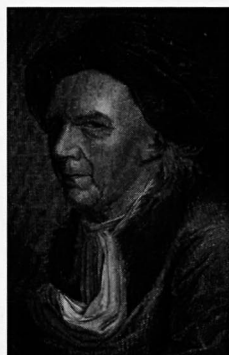
Мы уже коротко описали некоторые важнейшие свойства многогранников. В этом разделе вы узнаете о многих других, а также с помощью простых расчетов сможете понять, как проводятся исследования в этой области.

## Формула Эйлера

Что общего у куба, огромной пирамиды, додекаэдра, крохотной шестиугольной призмы и ромбододекаэдра? Кроме того, что все эти фигуры — многогранники, их характеристики заметно отличаются: у них разное число граней, углы разной величины, разные размеры, однако существует удивительное соотношение, которое выполняется для всех этих фигур:

**ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707–1783)**

Эйлер был одним из величайших математиков всех времен. Он родился в Швейцарии, но большую часть жизни проработал в Берлинской и Петербургской академии наук. Ему принадлежит 886 трудов, полное собрание его сочинений насчитывает 87 томов, и, кроме того, у него было 13 детей. Особо важны его работы по алгебре, теории чисел, геометрии, математическому анализу, механике, астрономии и физике. Именем ученого названо множество теорем, формул и понятий. Об Эйлере говорили: «Он – учитель всех нас».



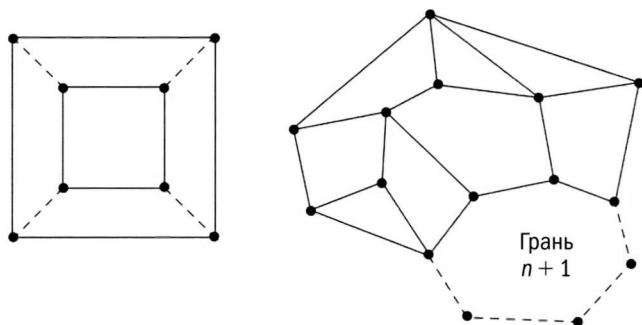
$$\text{Грани} + \text{Вершины} = \text{Ребра} + 2.$$

Эта удивительная формула, открытая Эйлером, справедлива для всех выпуклых многогранников.

**Формула  $G + V = P + 2$** 

Рассмотрим выпуклый  $n$ -угольник с вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и соответствующими ребрами  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ . Вне зависимости от длин сторон, величин углов, кривизны ребер и т. д. число ребер будет всегда равно числу вершин многоугольника.

Перейдем в трехмерное пространство и рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, который имеет  $V$  вершин,  $P$  ребер и  $G$  граней. Если посмотреть на этот многогранник изнутри и спроецировать его на большую сферу, внутри которой он находится, то его линии и соответствующие вершины окажутся нанесены на эту сферу так, что значения  $V, P$  и  $G$  останутся неизменными.



Граф, соответствующий кубу и росту геометрического графа.

Многограннику также можно поставить в соответствие плоский граф, который будет иметь то же число ребер  $P$ , то же число вершин  $B$  и то же число граней  $\Gamma$ :  $\Gamma - 1$  — число многоугольников,  $1$  — внешняя часть плоскости (грань, состоящая из части плоскости, ограничивающей граф). Тогда, по индукции, видим, что при  $\Gamma = 2$  получится единственный многоугольник и  $B = P$ , или, что аналогично,  $\Gamma + B = P + 2$ . Если при  $\Gamma = n$  число вершин равно  $B$ , число ребер —  $P$  и мы предположим (по индукции), что  $n + B_n = P_n + 2$ , тогда при  $\Gamma = n + 1$  нужно заострить внимание на  $(n + 1)$ -й грани. Когда число граней станет равным  $n + 1$ , к графу с  $n$  гранями добавится некоторое число вершин  $K$  и  $K + 1$  ребро. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Gamma + B_{n+1} &= n + 1 + B_n + K = (n + B_n) + (K + 1) = (P_n + 2) + (K + 1) = \\ &= (P_n + K + 1) + 2 = P_{n+1} + 2.\end{aligned}$$

И мы получили знаменитую теорему:

В любом выпуклом многограннике выполняется формула Эйлера  $\Gamma + B = P + 2$ .

Этот результат может показаться тривиальным, но если немного подумать, то мы увидим, что он поистине удивителен: соотношение выполняется для любого выпуклого многогранника независимо от формы его граней, углов на гранях и углов между гранями, от длин ребер и т. д. Формула, которая корректна для бесконечно большого числа разнообразных фигур, не может не привлекать внимания. Подобных формул, справедливых для столь непохожих фигур, практически не существует. Эта формула

#### ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА — ПУАНКАРЕ

С помощью формулы Эйлера для выпуклых многогранников можно вычислить так называемую характеристику Эйлера — Пуанкаре:  $\chi = B - P + \Gamma$ . Для сферы  $\chi = 2$ . Если мы рассмотрим тор (поверхность вращения, получаемая вращением окружности вокруг оси, лежащей вне этой окружности), то получим  $\chi = 0$ .

Следовательно, в тороидальных многогранниках  $\Gamma + B = P$ . Родом поверхности  $g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$  называется число «отверстий» в ней (для сферы  $g = 0$ , в тороидальных многогранниках  $g = 1 \dots$ ). Так,  $\chi$  и  $g$  являются характеристиками поверхности, то есть число 2 в формуле  $\Gamma + B = P + 2$  указывает на сферическую природу выпуклых многогранников. Для невыпуклых многогранников это отношение не выполняется.

**ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\Gamma$  И  $B$** 

В выпуклом многограннике  $\Gamma + B = P + 2$ , следовательно,  $P = \Gamma + B - 2$ , но каковы возможные значения  $\Gamma$  и  $B$ ? Существуют ли какие-то ограничения? Может ли быть так, что  $\Gamma = 1000$ , а  $B = 2$ ? Очевидно,  $B \geq 4$ , так как многогранника, у которого меньше четырех вершин, не существует. В каждой вершине сходятся минимум три ребра, следовательно,  $3 \cdot B \leq 2P$ , так как каждое ребро связывает две вершины. Следовательно  $3 \cdot B \leq 2\Gamma + 2B - 4$ , откуда  $4 \leq B \leq 2\Gamma - 4$ . Также  $\Gamma \geq 4$ , так как, чтобы ограничить часть пространства, требуется минимум четыре грани. Каждая грань должна иметь минимум три ребра, то есть  $3\Gamma \leq 2P = 2\Gamma + 2B - 4$ , откуда  $4 \leq \Gamma \leq 2B - 4$ . Вышеприведенные отношения соответствуют выпуклым многогранникам в пространстве.

словно бы смеется над всеми числовыми характеристиками многогранников и описывает их исключительно с точки зрения комбинаторики.

**Эйлер против Декарта и Пойа**

Рассмотрим выпуклый многогранник  $P$ . Для каждой вершины  $v_i$  рассчитывается угловой дефект  $\Delta_i$ , определяемый как разность между  $2\pi$  и суммой углов, сходящихся в вершине  $Bi$ , которую мы обозначим через  $S$ . В произвольной вершине тетраэдра угловой дефект будет равен  $2\pi - 3\frac{\pi}{3} = \pi$ , в вершине куба —  $2\pi - 3\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Через  $\Delta$  обозначается общий угловой дефект многогранника  $P$ , то есть  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ , если  $P$  имеет  $n$  вершин  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Чему равно  $\Delta$ ? Рене Декарт обнаружил, что  $\Delta$  неизменно равняется  $4\pi$  радианам (или  $720^\circ$ ).

Следующий результат удивителен сам по себе:

$$\Delta = 2\pi (\Gamma + B - P).$$

Еще одно, очень простое, рассуждение принадлежит Дьёрдю Пойа. Пусть  $P$  — выпуклый многогранник с  $\Gamma$  гранями,  $P$  ребрами и  $B$  вершинами, и пусть  $\Delta_1 = 2\pi - S_1$ ,  $\Delta_2 = 2\pi - S_2, \dots, \Delta_v = 2\pi - S_v$  — угловых дефектов вершин. Если обозначить через  $S$  общую сумму углов граней  $P$ , получим

$$S = \sum_{i=1}^B S_i = \sum_{i=1}^B (2\pi - \Delta_i) = 2\pi B - \sum_{i=1}^B \Delta_i = 2\pi B - \Delta.$$



С другой стороны,  $S$  можно вычислить следующим образом. Если  $\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_k$ , где  $\Gamma_i$  обозначает число граней с  $i$  ребрами, то, так как сумма углов многоугольной грани с  $i$  ребрами равна  $i \cdot \pi - 2\pi$ , при разбиении многоугольника на  $i$  треугольников получим

$$S = \sum_{i=3}^k (i-2)\pi \Gamma_i = \left( \sum_{i=3}^k i\Gamma_i - 2 \sum_{i=1}^k \Gamma_i \right) \pi = (2\rho - 2\Gamma)\pi.$$

Приравняв это выражение к приведенному выше равенству  $S = 2\pi B - \Delta$ , получим

$$(2\rho - 2\Gamma)\pi = 2\pi B - \Delta,$$

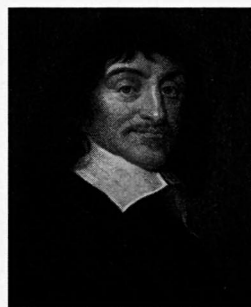
то есть  $\Delta = 2\pi(\Gamma + B - \rho)$ , что и требовалось доказать.

Обратите внимание, что если теорема Декарта верна, то  $\Delta = 4\pi$  и, исходя из вышеизложенного,  $\Gamma + B - \rho = 2$ , то есть формула Эйлера верна. И наоборот, если  $\Gamma + B - \rho = 2$ , то  $\Delta = 4\pi$ . Таким образом, Эйлер и Декарт независимо друг от друга доказали эквивалентные утверждения.

### РЕНЕ ДЕКАРТ (1596–1650)

Рене Декарт родился в городе Лаэ, в провинции Турень (ныне этот город назван в его честь), и получил образование в иезуитском коллеже Ла Флеш в Анжу. Во время обучения он уделял основное внимание классическим языкам, логике, философии и математике. Из-за слабого здоровья Декарту разрешалось каждый день вставать в 11 утра, и эту привычку он сохранил до конца жизни. В 1616 году он окончил университет Пуатье, затем поступил на военную службу и объехал всю Европу. Он общался с Мерсенном, Гюйгенсом, Бекманом и состоял в переписке со многими другими научными деятелями. С 1628 по 1648 год ученый жил в Голландии.

Декарт внес вклад в философию, логику, оптику, изучение метеоритов, физику и другие науки. Его работы оказали огромное влияние на научную мысль того времени и последующих столетий. Его важнейшим математическим трудом является «Геометрия» — приложение к «Рассуждению о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках». В 1649 году исследователь переехал в Стокгольм, чтобы давать частные уроки шведской королеве Кристине, которая требовала начинать занятия в пять часов утра. Декарт согласился на такие условия, но несколько месяцев спустя заболел пневмонией и вскоре умер.



## Формула Эйлера для граней и вершин

Теперь мы знаем ограничения на число граней  $\Gamma$  и число вершин  $B$  выпуклого многогранника. Число ребер  $P$  полностью зависит от  $\Gamma$  и  $B$ . Чтобы полностью исключить  $P$ , нужно более явно выразить формулу Эйлера через  $\Gamma$  и  $B$ , уточнив, что скрывается за этими числами.

В выпуклом многограннике  $P$  с числом граней  $\Gamma$  и числом вершин  $B$  обозначим через  $\Gamma_n$  число граней, имеющих  $n$  ребер,  $B_n$  — число вершин, в которых сходятся  $n$  ребер. Можно записать следующую сумму ряда (конечного!):

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6. \quad (1)$$

Также

$$B = B_3 + B_4 + B_5 + B_6. \quad (2)$$

Так как одно ребро принадлежит двум граням одновременно, то

$$3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 \dots = 2P. \quad (3)$$

Так как каждое ребро соединяет две вершины, получим

$$3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + 6B_6 \dots = 2P. \quad (4)$$

Используя формулу Эйлера, где обе части умножены на 2, то есть  $2\Gamma + 2B = 4 + 2P$ , по (1), (2), (3) и (4) получим

$$3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 = 12 + 2B_4 + 4B_5 + \dots + \Gamma_7 + 2\Gamma_8 + \dots \quad (*)$$

## Всегда существует треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань

Не существует выпуклого многогранника, у которого нет ни одной грани в форме треугольника, четырехугольника или пятиугольника. Обратите внимание на предыдущую формулу (\*): вы увидите, что выражение в правой части больше или равно 12, то есть всегда выполняется соотношение

$$3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 \geq 12$$

Следовательно, числа  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  и  $\Gamma_5$  не могут одновременно равняться нулю. Имеем:

*В любом выпуклом многограннике всегда существует как минимум одна грань в форме треугольника, четырехугольника или пятиугольника.*

Вспомним, что правильным многогранником называется выпуклый многогранник, все грани которого являются одинаковыми правильными многоугольниками и во всех вершинах которого сходится одинаковое число ребер. Тогда предыдущую теорему можно записать так:

*Единственными правильными многогранниками являются тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр.*

Исходя из вышеизложенного получим, что единственно возможные правильные многогранники будут полностью образованы либо равносторонними треугольниками, либо квадратами, либо правильными пятиугольниками.

Если все грани многогранника — это равносторонние треугольники (их углы равны  $60^\circ$ ), формула (\*) сводится к  $3\Gamma_3 = 12 + 2B_4 + 4B_5$ . В тетраэдре  $\Gamma_3 = 4$  (а также, разумеется,  $B_3 = 4$ ,  $B_4 = B_5 = 0$ ). В случае с октаэдром  $B_4 = 6$ ,  $B_3 = B_5 = 0$  и  $\Gamma_3 = 8$ . В икосаэдре  $\Gamma_3 = 20$  и  $B_5 = 12$ . Если все грани многогранника — квадраты, то в его вершинах могут сходиться только три ребра, поэтому  $B_4 = B_5 = 0$  и по формуле (\*)  $2\Gamma_4 = 12$ , то есть  $\Gamma_4 = 6$ . Таким образом, этот многогранник — куб. Если все грани многогранника — правильные пятиугольники, то степень его вершин может равняться только 3. По формуле (\*)  $\Gamma_5 = 12$  — это додекаэдр. Заметим, что в полученной нами теореме общее соотношение Эйлера сочетается с характеристиками многоугольников, ограничивающих часть пространства, которая образует многогранник. Эта часть пространства может быть ограничена треугольниками, квадратами или пятиугольниками.

## Все грани не могут быть разными

Если вы не привыкли следовать правилам, то, возможно, вы задавались вопросом: существуют ли фигуры без повторяющихся элементов? Например, существует ли многогранник, все стороны которого — разные многоугольники (один треугольник, один четырехугольник, один пятиугольник и т. д.)? Да, это был бы образцовый многогранник. Однако такая фигура не может существовать.

Покажем, почему это так. Пусть  $P$  — выпуклый многогранник с  $\Gamma(P)$  гранями. Рассмотрим два его параметра:

$r(P)$  — количество натуральных чисел  $i$ , таких, что в  $P$  существует грань с  $i$  ребрами;

$K(P)$  — число сторон грани  $P$  с наибольшим числом вершин или ребер.

Так, для куба  $P$  получим  $r(P) = 1$ ,  $K(P) = 4$ , для пирамиды  $P$ , в основании которой лежит пятиугольник,  $r(P) = 2$ ,  $K(P) = 5$ .

Если  $P$  имеет грань, число сторон которой равно  $K(P)$ , так как каждая из этих сторон является ребром другой грани, то общее число граней будет равно как минимум  $K(P) + 1$ , то есть

$$\Gamma(P) \geq K(P) + 1.$$

Так как  $r(P)$  не может быть больше, чем число элементов множества  $\{3, 4, 5, \dots, K(P)\}$ , имеем

$$r(P) \geq K(P) - 2.$$

На основании вышеприведенных неравенств для  $\Gamma(P)$  и  $r(P)$  получим

$$\Gamma(P) - r(P) \geq K(P) + 1 - (K(P) - 2) = 3.$$

В выпуклом многограннике с различными гранями общее число граней  $\Gamma(P)$  должно равняться  $r(P)$  — количеству натуральных  $i$ , для которых существует грань с  $i$  ребрами. Это приводит к противоречию:  $\Gamma(P) - r(P) = 0 \geq 3$ . Какая-либо грань многогранника будет повторяться.

## Три особых многогранника

Куб с шестью квадратными гранями, коробка, образованная шестью прямоугольниками, пирамида, число треугольных граней которой совпадает с числом сторон ее основания, различные прямоугольные призмы — непросто найти такой многогранник, в котором хотя бы одна грань не будет повторяться как минимум трижды. По сути, существует всего три вида таких фигур.

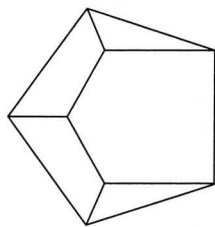


Рис. 1

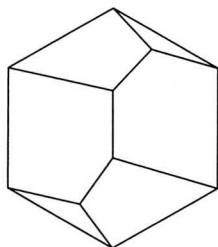


Рис. 2

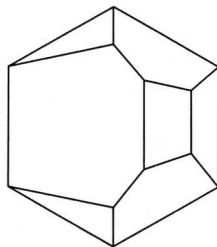


Рис. 3

Если обозначить через  $\Gamma_i$  число граней с  $i$  ребрами, то на рис. 1  $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = 2$ ; на рис. 2  $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = 2$  и  $\Gamma_6 = 1$ , на рис. 3  $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = 2$  и  $\Gamma_6 = 2$ . Причина того, что существуют всего три фигуры, обладающие этим свойством, такова: нам известно, что  $\Gamma + B = P + 2$ , и так как в каждой вершине сходятся как минимум три ребра, нам также известно, что  $3B \leq 2P$ , следовательно, если  $\Gamma_n \leq 2$  для любого  $n$ , имеем

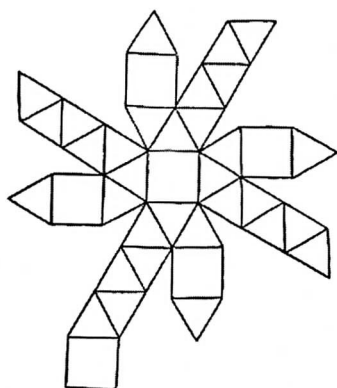
$$12 = 6\Gamma + 6B - 6P \leq 6\Gamma - 2P = 6 \sum_{n \geq 3} \Gamma_n - \sum_{n \geq 3} n\Gamma_n = \\ = 3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 + \sum_{n \geq 7} (6-n)\Gamma_n \leq 3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 + 0 \leq 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 12.$$

Отсюда следует удивительный вывод:  $\Gamma_n = 0$  при  $n \geq 7$ ,  $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = 2$ . Число сторон граней искомым многогранников будет меньше семи. Треугольных, четырехугольных и пятиугольных граней всегда будет две, шестиугольных — ни одной, одна или две, так что изображенные выше фигуры занимают исключительное положение в мире многогранников.

## Различные плоские развертки

Построить различные сечения многогранников не всегда просто. Они подобны разборным головоломкам, которые не всегда очевидны и их сложно собрать из отдельных частей. В общем случае намного проще собирать многогранники из их плоских разверток.

В кратком историческом экскурсе, который мы совершили в главе 1, говорилось, что Дюрер (1471–1528) в 1525 году первым включил в свое руководство по живописи плоские развертки многогранников — плоские фигуры, из которых можно было собрать трехмерные модели многогранников. И наоборот, каждому многограннику (так как его гранями являются многоугольники) всегда можно поставить в соответствие плоскую развертку.

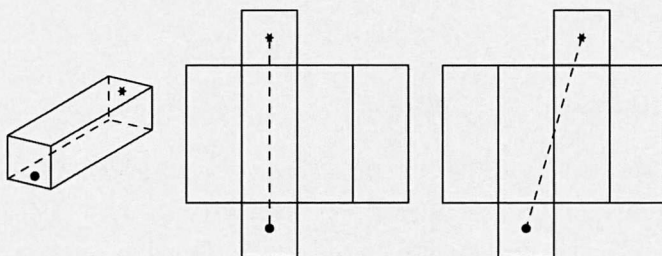


Развертка Дюрера.

Для каждого многогранника можно построить несколько плоских разверток, поэтому в каждом случае интересно рассмотреть возможное многообразие разверток для одной и той же фигуры.

### ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ МНОГОГРАННИКОВ

Каков кратчайший путь, соединяющий две точки на гранях многогранника, при условии, что этот путь должен полностью проходить по его поверхности? Генри Эрнест Дьюдени (1857–1930) представил эту проблему в виде занимательной задачи о пауке, который ползет по одной из граней шкатулки к мухе, сидящей на другой грани.

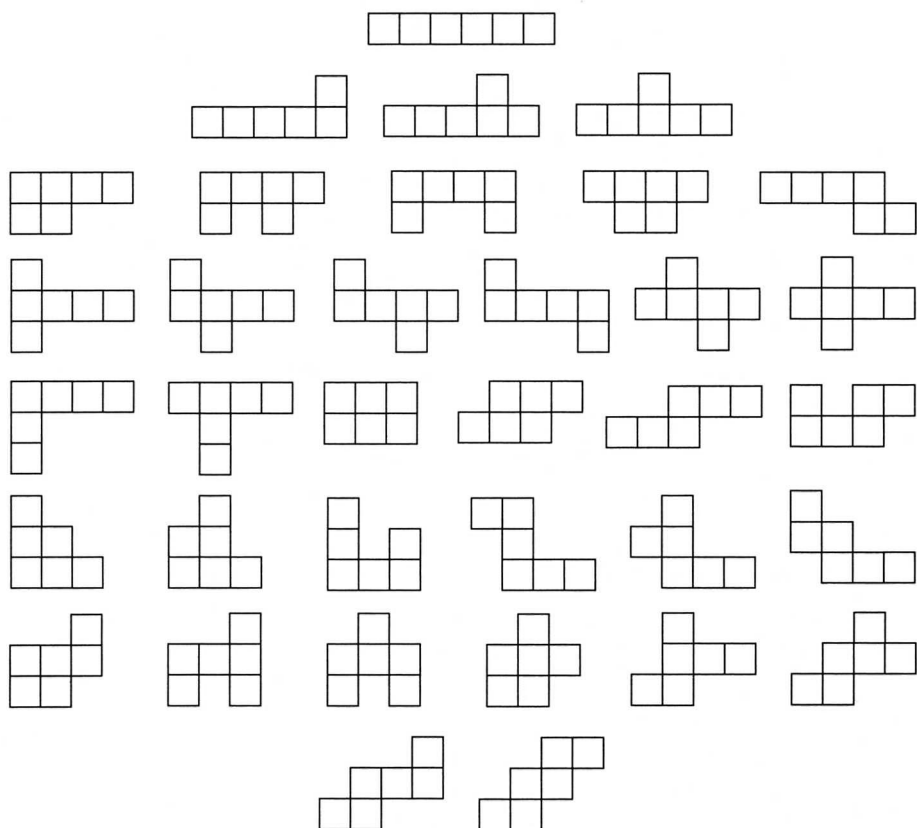


Как можно видеть на иллюстрациях, для одной и той же шкатулки можно построить несколько разных разверток. Нужно определить те, в которых можно провести отрезок, соединяющий две данные точки, а затем найти кратчайший из построенных отрезков. Эта задача интересна не только как занимательная головоломка — с ней приходится сталкиваться при прокладке электрических и водопроводных сетей, сетевых кабелей по стенам и потолкам, когда желательно свести расход кабеля к минимуму.

На иллюстрации вы можете видеть 35 видов гексамино на плоскости — фигур, образованных шестью одинаковыми квадратами, которые соединяются сторонами. Сколько гексамино являются плоскими развертками куба? Ровно одиннадцать.

Если построить плоские развертки на бумаге, а затем вырезать и склеить их, то можно получить прекрасные трехмерные модели многогранников. В продаже доступны удивительные коллекции плоских разверток из картона, а в Интернете существует множество сайтов, где можно найти и распечатать развертки для самых разных фигур.

Для данного многогранника нетрудно найти одну из его плоских разверток, однако обратная задача намного сложнее: представить, какой многогранник получится из заданной развертки, не всегда просто.



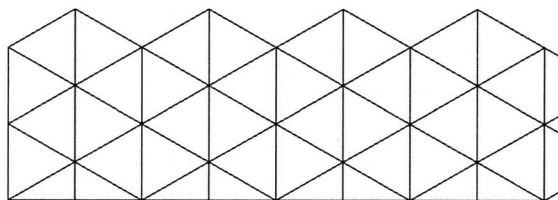
35 гексамино.

## РАЗВЕРТЫВАЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Многогранники, конусы, цилиндры и другие фигуры имеют поверхности, образованные отрезками прямых, которые можно развернуть на плоскости. Но многие поверхности, например поверхность сферы или однополостный гиперболоид, не обладают этим свойством. Большой проблемой при составлении карт Земли стала именно эта невозможность развернуть сферу на плоскости.

## Гибкие многогранники

На основе изображенной схемы можно собрать гибкий многогранник.



Путем сгибов и склеек можно получить кольца тетраэдров (калейдоциклы), для которых возможно вращение в пространстве. Знаменитая фигура IsoAxis, созданная Уоллесом Уолкером, положила начало моде на подобные многогранники, плоские развертки которых состоят из треугольников.

Если украсить их грани рисунками, как это сделал Эшер, то при вращении можно увидеть последовательность изображений. Заметьте, что при вращении кольца тетраэдров можно выделить несколько осей вращения одновременно: объем фигуры остается неизменным, поверхности тетраэдров — тоже, однако расстояния между вершинами изменяются. Никакое положение кольца не изометрично другому, и тем не менее множество параметров этой фигуры при вращении сохраняется.

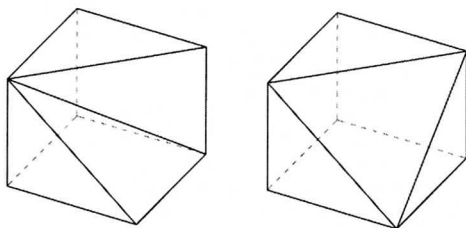
Отдельная тема — структурная жесткость многогранников, представляющая интерес с физической и инженерной точки зрения. Здесь речь идет о расчете прочности жилых домов и других сооружений.

## Удивительные пары

Трехмерное пространство может преподнести немало сюрпризов, и многогранники служат тому доказательством. Первый сюрприз заключается в том, что многие очень разные многогранники могут иметь одинаковые вершины, иными словами, положе-

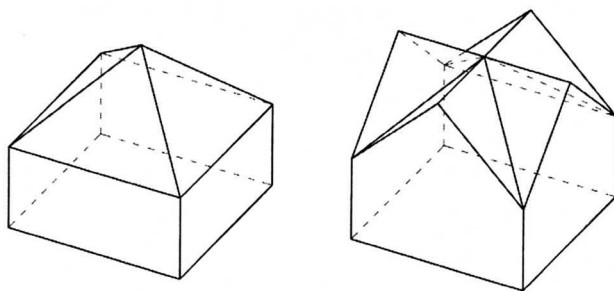


ние вершин в пространстве не определяет конкретный многогранник. На следующей иллюстрации вы видите первую пару таких многогранников.



Эти два многогранника имеют семь совпадающих вершин, пять одинаковых граней, у них одинаковое число граней и ребер, но при этом они не равны (один из них выпуклый, другой — нет)!

Помните известное определение многоугольника как пересечения нескольких полуплоскостей, определяемых прямыми, содержащими ребра многоугольника? Если перейти из плоскости в пространство и рассмотреть все плоскости, содержащие грани многогранника, то может ли случиться так, что одна и та же совокупность плоскостей будет определять одновременно несколько многогранников? Да, это так, что доказывает следующий пример.

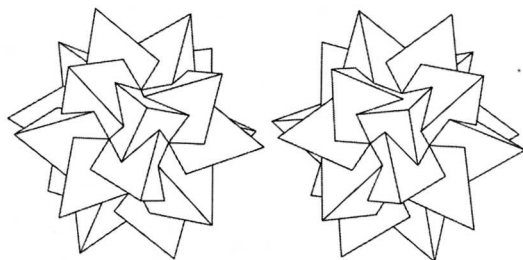


Плоскости «пола», «стен» и «крыши» одинаковы, тем не менее определяемые ими многогранники заметно отличаются.

### НАПРЯЖЕННАЯ ЦЕЛОСТНОСТЬ

Жесткие структуры, построенные из натянутых стержней, работающих только на растяжение или на сжатие, представляют большой интерес в архитектуре и инженерном деле. Подобные структуры начиная с 1948 года первыми изучили Кеннет Снелсон и Ричард Бакминстер Фуллер, но такие фигуры использовали многие скульпторы, а также дизайнеры палаток, в которых благодаря натяжению элементов брезент принимает нужную форму.

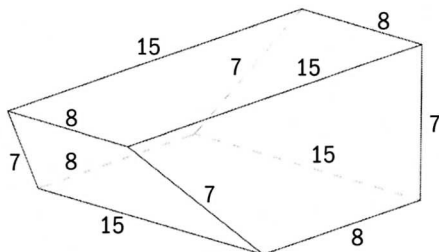
Согласно этим примерам, положение вершин и плоскостей граней не гарантирует равенства многогранников. А изменяя эти условия, мы можем получить весьма необычные фигуры. Рассмотрим два следующих многогранника.



## Загадка совершенной шкатулки

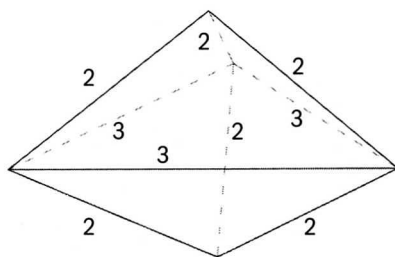
Будем называть совершенными такие простые прямоугольники, длины сторон и диагоналей которых выражаются целыми числами. Их построение равносильно построению прямоугольных треугольников, в которых длины катетов и гипотенузы выражаются целыми числами — пифагоровыми тройками. Знаменитый треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — простейший пример подобного треугольника, и на его основе нетрудно построить бесконечное множество совершенных прямоугольников.

Сможете ли вы построить такую шкатулку (совершенный прямоугольный параллелепипед), что длины всех ее сторон и всех диагоналей, в том числе диагоналей граней, будут выражаться целыми числами? Решить эту задачу пока что никому не удалось, но не получилось доказать и того, что она не имеет решений. Говоря о шкатулке, мы имеем в виду выпуклый многогранник с восемью вершинами и шестью прямоугольными гранями. Существуют ли совершенные выпуклые многогранники с шестью гранями? Да, но они не имеют форму шкатулки. Совершенством обладают скорее необычные формы, чем простые прямоугольные коробки, — как этот совершенный гексаэдр, построенный Блейком Петерсоном и Джеймсом Джорданом.



Этот удивительный многогранник имеет шесть четырехугольных граней, восемь вершин, длины диагоналей его граней равны 13 и 17 единицам, длина всех диагоналей равна 17 единицам, сумма длин ребер — 120, диагоналей — 240.

Обратив внимание на совершенные многогранники с пятью и шестью вершинами, мы можем рассмотреть удвоенный тетраэдр Хейко Харбота и Арнфрида Кемница, длины ребер которого равны 2 и 3, длина диагонали — 2.

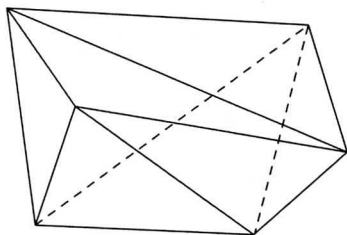


Задача о совершенной шкатулке по-прежнему ожидает решения.

## Тетраэдризация многогранников

Разделив многоугольник на треугольники, можно легко вычислить его площадь: она рассчитывается как сумма площадей треугольников независимо от способа разбиения. Если рассмотреть классический пример с правильными многоугольниками, то одно из красивейших разбиений — то, при котором вершиной всех треугольников будет центр многоугольника. Их вершины могут сходиться в вершинах многоугольника, на одной из его сторон и т. д.

Разбиение многоугольников на треугольники наводит на мысли о разбиении на тетраэдры (или тетраэдризации) многогранников, однако существуют многогранники, которые нельзя разбить таким образом (см. иллюстрацию).



Любой выпуклый многогранник можно разбить на тетраэдры, однако для невыпуклых многогранников эта задача не всегда имеет решение.

## Неразрешимая головоломка

Можно ли составить большой куб из малых кубов разного размера? В общем случае квадрат нельзя разделить на конечное число квадратов, длины сторон которых выражены целыми числами (если только речь не идет о разделении на четыре квадрата по схеме  $2 \times 2$ ), однако иногда можно найти способ разбить квадрат на более мелкие квадраты, стороны которых будут выражены целыми числами. Так, Джон Уилсон составил квадрат из 25 малых квадратов, Теофилус Уилкоккс — из 24.

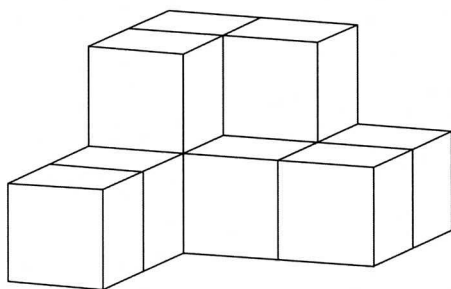
Однако ни один куб нельзя разбить на конечное число кубиков разного размера. Доказать это очень просто. Предположим, что мы разбили куб требуемым образом. Приступим теперь к сборке большого куба и выложим первый слой кубиков. Один из этих кубиков,  $C_1$ , будет наименьшим. Так как все остальные части головоломки также имеют форму куба и  $C_1$  наименьший из них, он не может располагаться в углу и ни одна из его граней не может принадлежать грани большого куба. Следовательно,  $C_1$  будет располагаться внутри большого куба и будет со всех сторон окружен кубиками большего размера. При взгляде с верхней грани  $C_1$  будут видны части граней этих кубических «небоскребов», окружающих его. Далее эту грань кубика нужно будет покрыть другими кубиками, один из которых,  $C_2$ , будет наименьшим, и т. д. до бесконечности, следовательно, для конечного числа кубиков задача не имеет решения.

## Любопытные упаковки

На плоскости существуют различные виды мозаик — схем укладки одного или нескольких многоугольников, которые при определенном расположении полностью покрывают плоскость. Наиболее популярны правильные мозаики, составленные из квадратов, равносторонних треугольников или правильных шестиугольников. Логично перейти из двухмерного в трехмерное пространство и задаться вопросом: какими многогранниками (одинаковыми или разными) можно заполнить пространство? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти трехмерные элементы мозаики.

Очевидно, что для любой мозаики, покрывающей плоскость, можно рассмотреть призмы, соответствующие ее элементам, и получить таким образом бесконечно много различных призм, которыми можно заполнить пространство. Интерес здесь представляют необычные фигуры, из которых можно составить подобную мозаику.

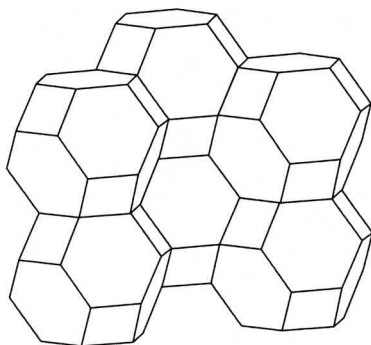
Какие из пяти правильных многогранников обладают этим свойством? Очевидно, куб.



*Кубическая упаковка.*

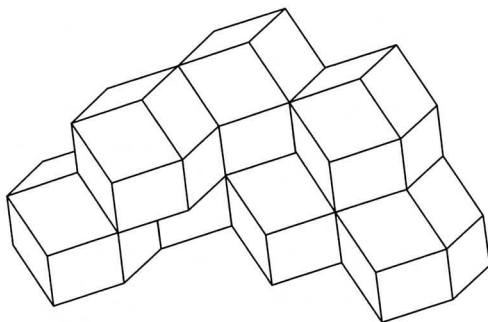
Удивительно, но кроме него подобным свойством не обладает ни один из пяти правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр).

Следующий интересный случай — многогранник Кельвина (усеченный октаэдр). Это архимедово тело, гранями которого являются квадраты и шестиугольники.



*Упаковка многогранников Кельвина равного размера.*

Третий любопытный случай — ромбододекаэдр. Это каталаново тело, двенадцать граней которого имеют форму ромба.



*Упаковка ромбододекаэдров.*

Этот случай также легко доказать: если разделить куб на шесть равных пирамид (их основаниями будут грани куба, а вершины — центром куба) и поместить их поверх другого куба того же размера, получится ромбододекаэдр.

Так, объем ромбододекаэдра в два раза больше, чем объем порождающего его куба, а малые диагонали ромбовидных граней являются ребрами этого куба. Как следствие, «упаковка» ромбоэдров, по сути, эквивалентна обычной «упаковке» кубов.

Другие возможности возникают при сочетании, например, двух или трех разных типов многогранников.

Несколько примеров представлено на следующих рисунках: на рис. 1 изображено сочетание усеченных кубов и октаэдров, на рис. 2 — тетраэдров и усеченных тетраэдров, на рис. 3 — октаэдров и кубооктаэдров.

Рис. 1

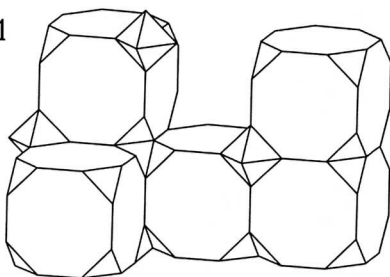


Рис. 2

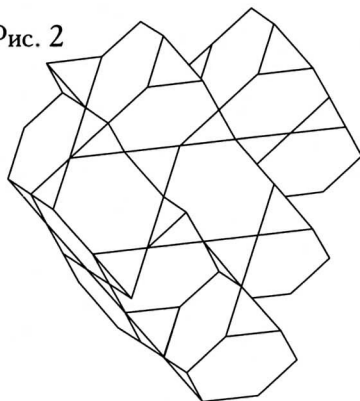
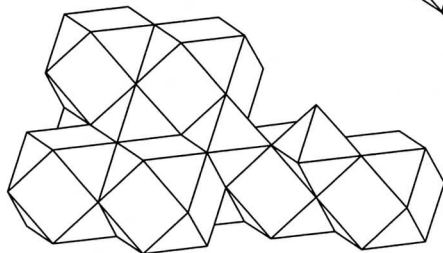


Рис. 3

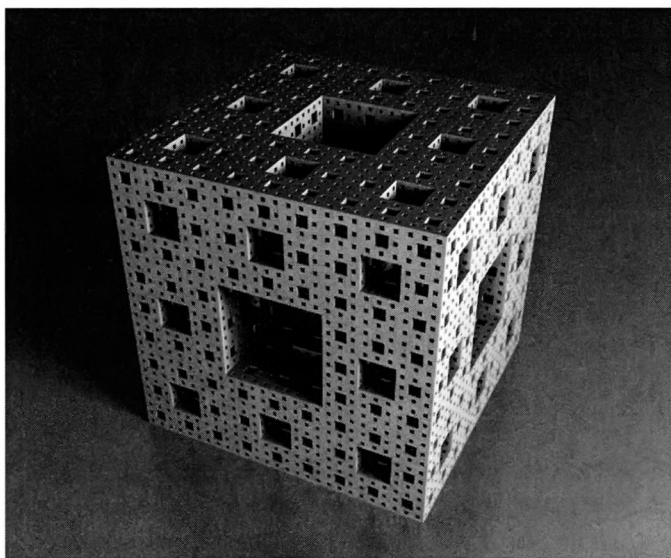


*Различные варианты заполнения из двух элементов.*

## Губка Менгера

Задолго до того, как Бенуа Мандельброт дал формальное определение фракталу, гениальный математик Карл Менгер придумал удивительную многогранную губку — первый фрактал в трехмерном пространстве.

Рассмотрим куб со стороной 1 и разделим его на  $3^3 = 27$  кубиков (подобно кубику Рубика). Если теперь мы извлечем центральный кубик и шесть других, которые касаются его граней, мы получим куб с отверстием, составленный из 20 кубиков со стороной  $1/3$ . Если мы повторим эти же действия для каждого из 20 этих кубиков, получим  $20 \cdot 20 = 400$  кубиков со стороной  $1/3 \cdot 1/3 = 1/9$ . Далее можно перейти к  $400 \cdot 20 = 8000$  кубиков со стороной  $(1/3)^3 = 1/27$  и выполнить аналогичные действия. Именно в этом заключается процесс построения фрактала, на каждой итерации которого каждый кубик имеет ту же форму, что и исходная фигура. Удивительно, но в то время как площадь поверхности губки стремится к бесконечности, ее объем стремится к нулю.



*Губка Менгера.*

Очевидно, что используя идею Менгера, можно построить множество подобных фигур на основе разных многогранников при условии соблюдения правила, позволяющего извлекать части фигуры (неизменно подобные всей фигуре в целом). Возможно, Анри Пуанкаре был прав, когда называл фрактальные множества «галереей чудовищ».





# Многогранники в архитектуре и искусстве

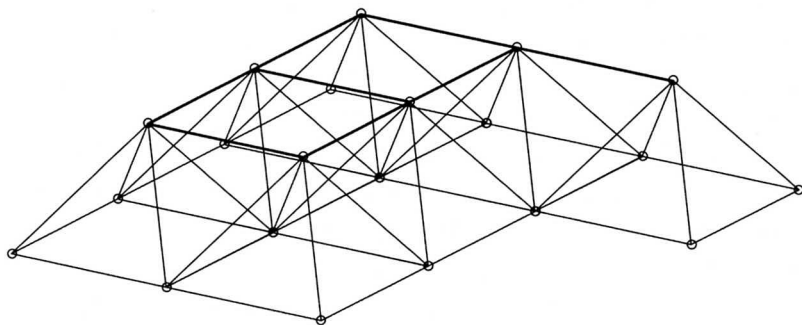
*Геометрия — язык архитектора.*  
Антонио Гауди

Геометрия всегда была основой архитектуры, наделяя ее, согласно классической триаде Витрувия, «пользой, прочностью и красотой». Благодаря геометрии был создан широкий спектр форм и фигур, размеров, пропорций, обладающих функциональными и эстетическими свойствами.

Призматические формы (взгляните хотя бы на комнату, в которой вы находитесь, и дом, в котором вы живете) стали типичными при строительстве зданий, но, к счастью, во многих интересных проектах используются более сложные объекты. Цель этой главы — продемонстрировать вам несколько примеров плодотворного взаимодействия геометрии и архитектуры на примере многогранников.

## Сетчатые конструкции, опалубка и строительные леса

С помощью структур из стержней и соединительных элементов сегодня возводятся особые сетчатые конструкции, образующие часть выставочных стендов или всевозможные перекрытия. Они легко изменяют форму, отличаются малым весом, их нетрудно расширить или вообще разобрать и использовать заново.



Сетчатая конструкция из многогранников, используемая в строительстве.

При возведении подобных конструкций чаще всего применяются жесткие многогранники или кубические решетки. Сферические узлы (вершины), где сходятся стержни, должны иметь грамотно расположенные отверстия с резьбой, чтобы к ним можно было прикреплять стержни, имеющие форму трубок, по которым обычно распределяется напряжение. Хотя можно различить стержни, которые работают на растяжение и сжатие, как правило, в моделях они изображаются одинаково — в виде полых цилиндров.

Многогранные структуры, которые по форме близки к другим поверхностям, также можно увидеть в опалубке или даже в строительных лесах, устанавливаемых для реставрации фасадов. Не стоит забывать, что вместо металлических лесов на Востоке (например, в Гонконге) используются деревянные или бамбуковые.

Не меньший интерес в сооружениях, где требуется достичь максимальной светопроницаемости, представляют плоские структуры, состоящие из тетраэдров или октаэдров, которые собираются на площадке, после чего устанавливаются вертикально. Они становятся основой для стеклянных фасадов или потолков. К ним могут крепиться лампы, кабели, другие коммуникации, либо же они используются как украшение сооружения и для увеличения его освещенности.

## Многогранники в жилых домах

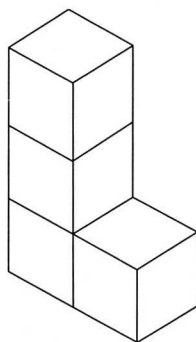
Идея о создании модульных жилых домов, то есть о разработке модуля, повторяя который, можно было бы формировать жилые пространства, относительно нова и тесно связана с требованиями XX века. Такие модули планировалось применять для массового строительства или максимального удешевления жилых домов. Благодаря творческим способностям архитекторов подобные геометрические объекты могут быть довольно оригинальными. Кроме того, сам способ повторения модулей оставляет немало места воображению: это может быть монотонное повторение и различные схемы с использованием поворотов, симметрии, переносов, пересечений и т. д.

Разумеется, из всех многогранников первыми кандидатами на использование в качестве модулей становятся кубы и их сочетания — далее мы приведем классические примеры модульных кубических структур, — но существуют и другие модули, например многогранники Кельвина, используемые в Канаде, или тетраэдры, из которых было построено несколько сооружений в Израиле. В 1970 году по проекту архитектора Цви Хекера в пустыне Негев была построена синагога, в которой сцепленные многогранники сочетаются с шестиугольными и квадратными гранями. Они формируют сложную структуру наружных стен и еще более интересное внутреннее

пространство, ограниченное многоугольниками разной формы. В 1980 году этот же архитектор создал целый жилой массив, дома в котором имели форму додекаэдров.

## L-модуль Леоса

Испанский архитектор Рафаэль Леос создал любопытный модуль, представляющий собой четыре одинаковых куба, расположенных в форме буквы L. На его основе можно создать широкий спектр различных жилых пространств.



L-модуль.

Отметим, что наименование «L-модуль» указывает не на первую букву фамилии архитектора, а на форму расположения кубов.

Леос выбрал эту форму после того, как оценил возможности ее применения по сравнению с другими фигурами из четырех кубов.

### РАФАЭЛЬ ЛЕОС ДЕ ЛА ФУЭНТЕ (1921–1976)

Этот выдающийся испанский архитектор спроектировал 218 экспериментальных жилых домов в промышленной зоне Лас Фронтерас в городе Торрехон-де-Ардос, посольство Испании в Бразилии и много других зданий и сооружений. Он работал над массовым строительством жилья для борьбы с трущобами и с 1960 года занимался исследованиями, посвященными индустриализации строительства. Леос изобрел L-модуль, состоящий из четырех кубов, и написал два справочника: «Разделение и организация архитектурного пространства» (1965) и «Сети и пространственные ритмы» (1970). Он также занимался скульптурой, и особое место в его творчестве отводилось многогранникам. Сегодня популяризацией идей архитектора занимается Общество Рафаэля Леоса по исследованиям и популяризации социальной архитектуры.

Всего из двух одинаковых L-модулей, имеющих по меньшей мере одну общую грань, можно получить около 3 тысяч сочетаний. Полное теоретическое описание этого модуля Леос изложил в своей книге «Сети и пространственные ритмы».

В послевоенные годы идеи модульной архитектуры вызывали большой интерес. Ле Корбюзье разработал «модуль» — единицу измерения, равную 183 см, или 6 английским футам, — и алгоритм деления или повторения этой единицы, подчиняющийся золотому сечению. Леос же перешел непосредственно к созданию геометрического модуля, хотя, разумеется, идеи Ле Корбюзье и Леоса можно сочетать.

### Кубический модуль Бофилей

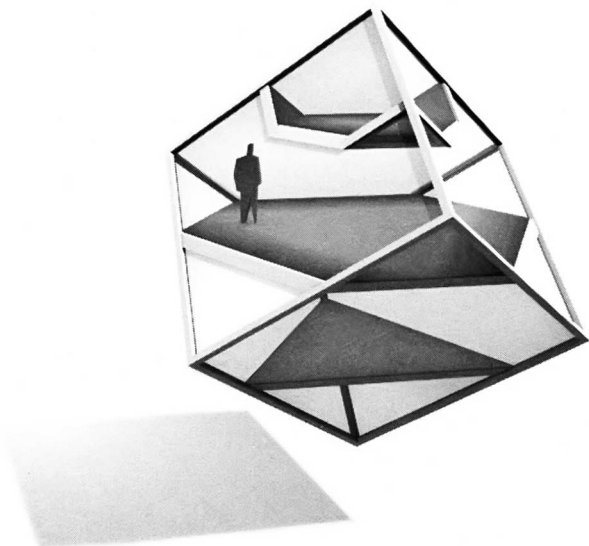
Архитекторы Анна и Рикардо Бофилы в 1970 году выполнили необычный проект жилых домов в Сан-Жуст-Десверн (провинция Барселона) под названием Walden 7. Базовым модулем для создания невероятно сложного многоквартирного дома стал обычный куб. Каждая квартира образована одним или несколькими кубами в зависимости от их размеров, при этом они необязательно располагаются на одном уровне. Основная идея архитекторов заключалась в том, чтобы путем смещения одних кубов относительно других создать общее пространство между квартирами: вместо традиционных коридоров и лестничных площадок переходы образовывались путем смещения самих кубов. Большое внимание уделялось совместному проживанию и взаимодействию людей, живущих в доме, — в общие помещения для них могли быть преобразованы центральные пустые пространства здания.

Еще более привлекательным проектом, созданным в то же время, стал жилой квартал в Монреале, спроектированный Моше Сафди: нагромождение призматических жилых домов в пространстве образует несколько уровней, пустые пространства, входы и выходы из модулей и т. д.

### Модуль Блома

Роттердам — голландский город, центр которого стал местом реализации привлекательных архитектурных проектов. Самым удивительным из них, начиная с 1980 года, возможно, являются «дома-кубы» Пита Блома — комплекс из 32 жилых домов, расположенных на улице Оверблаак. Удивительно, что каждый дом представляет собой не просто куб, а куб, повернутый на  $45^\circ$  относительно традиционного положения и поддерживаемый колонной в форме шестиугольной призмы. Каждый дом имеет три этажа общей полезной площадью  $100 \text{ м}^2$ . Главный этаж имеет форму шестиугольника,

так как является плоским сечением, соединяющим середины сторон куба, — пример подобного сечения вы могли видеть в главе 2.

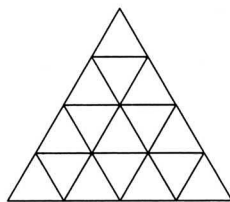
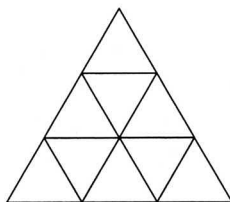
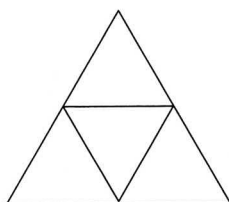
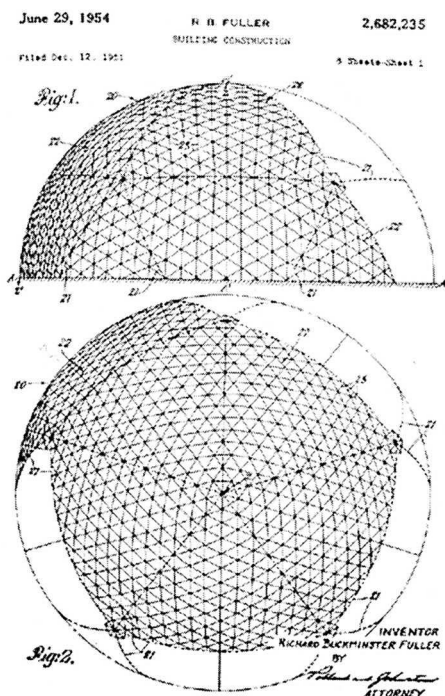


*План одного из жилых домов, выполненных по проекту Блома.*

## Чудесные геодезические купола

В прошлом архитекторов очень интересовали огромные купола. Однако их строительство всегда было очень сложным и часто требовало возведения деревянных подпорок, на которых и возводился купол (из кирпичей или бетона), после чего подпорки убирались. К счастью, сегодня при строительстве кинотеатров и стадионов, выставочных павильонов, рынков и других сооружений с помощью многогранников тоже можно создавать купола. Они уже не символизируют небо и не имеют какого-либо особого значения: под ними проходят всевозможные светские мероприятия, начиная от баскетбольных матчей и заканчивая рок-концертами.

Ключевую роль среди куполов играют так называемые геодезические купола. Икосаэдр — один из пяти правильных многогранников. Его 20 граней имеют форму равносторонних треугольников, а все его вершины расположены на воображаемой сфере. Последовательное разбиение на треугольники граней икосаэдра (и его производных многогранников), спроецированных на описанную около него сферу, позволяет создать геодезические купола высокой прочности, не требующие дополнительных внутренних опор.



Возведение геодезического купола. Вверху — проект Ричарда Бакминстера Фуллера, 1954 год.

Следует отметить, что на первом этапе треугольные грани икосаэдра, ограниченные тремя стержнями, делятся на четыре треугольника с двумя видами вершин и двумя типами ребер. На следующем шаге строится шестнадцать треугольных граней шести разных форм, имеющих пять разных видов ребер и четыре вида вершин. Следовательно, эти геодезические купола представляют собой не простую сетчатую конструкцию, а сложную структуру, при возведении которой используются стержневые элементы и соединения разных типов. С увеличением числа треугольников полученный многогранник начинает все больше напоминать сферу, и иногда мы даже по ошибке считаем, что перед нами именно сфера, хотя в действительности смотрим на многогранник с треугольными гранями.

## РИЧАРД БАКМИНСТЕР ФУЛЛЕР (1895–1983)

Выдающийся американский интеллектуал, дизайнер, инженер и архитектор Ричард Бакминстер Фуллер совершил множество различных изобретений и стал автором книг в защиту окружающей среды. Его главным творением являются геодезические купола. Химические соединения, имеющие структуру, напоминающую геодезические купола, в его честь были названы фуллеренами. Любимой фигурой Фуллера всегда был тетраэдр, который лег в основу множества его проектов.



### Купола Фуллера

Ричард Бакминстер Фуллер был гениальным американским инженером и архитектором, который создал (и запатентовал) революционные пространственные структуры, состоящие из тетраэдров, и удивительные купола, например американский павильон на Всемирной выставке 1967 года в Монреале. Основной идеей при создании геодезического купола, запатентованного Фуллером в 1947 году, был отказ от кирпича и бетона (требовавших возведения опор) и использование прочностных свойств многогранников с треугольными гранями, изготовленных как из металлоконструкций, так и путем наложения трехмерных модулей соответствующей формы.



*Купол Фуллера.*

## Купол Epcot Center

Тематический парк Epcot Center, построенный в 1982 году в Орландо как часть Всемирного центра отдыха Уолта Диснея, предлагает вниманию посетителей интересный экскурс в прошлое и будущее технологий, а также модели различных уголков планеты. Слово Epcot в названии парка расшифровывается как Experimental Prototype of Community of Tomorrow («Экспериментальный прототип общества будущего»).

Главная достопримечательность находится у самого входа — это огромная сфера, внутри которой расположены восемнадцать этажей. С геометрической точки зрения эта фигура представляет собой пентакисдодекаэдр, имеющий 60 треугольных граней, каждая из которых, в свою очередь, разделена на 16 равносторонних треугольников, а общее число элементов купола составляет 11520.

Это сооружение, благодаря которому Epcot Center заметен издалека, представляет собой оригинальный аттракцион. Пройдя через вход в основании купола и поднявшись по эскалатору, посетители рассаживаются в вагонетки, которые движутся по кругу по внутренним стенам сферы, позволяя увидеть диорамы, изображающие различные этапы развития телекоммуникаций. В конце экскурсии посетители вновь спускаются к подножию купола и покидают вагонетки, уступая место следующим в очереди. Как вагонетки движутся в обратном направлении? Они совершают поворот на  $180^\circ$ , и посетители возвращаются к выходу, сидя спиной вперед. Затем вагонетки совершают еще один поворот и возвращаются в исходное положение.

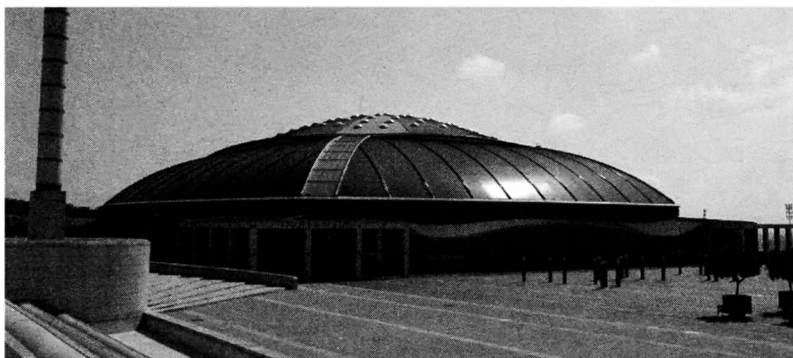


Аттракцион Spaceship Earth («Космический корабль «Земля») в Epcot Center.



## Купол Исодзаки

Оригинальный японский архитектор Арата Исодзаки (род. 1931) — автор знаменитых международных проектов, один из которых — Дворец спорта Сант Жорди, представляющий собой купол высотой 45 метров. Его верхняя часть была собрана на земле, после чего поднята на подъемных кранах и закреплена. В проекте Исодзаки использовал многогранную сетчатую структуру из металлических стержней и соединительных элементов. Базовым элементом конструкции является тетраэдр. Ее стены представляют собой искривленную сетчатую конструкцию, образующую криволинейную поверхность, которая в центральной части купола переходит в новую стержневую конструкцию, искривленную в двух направлениях.

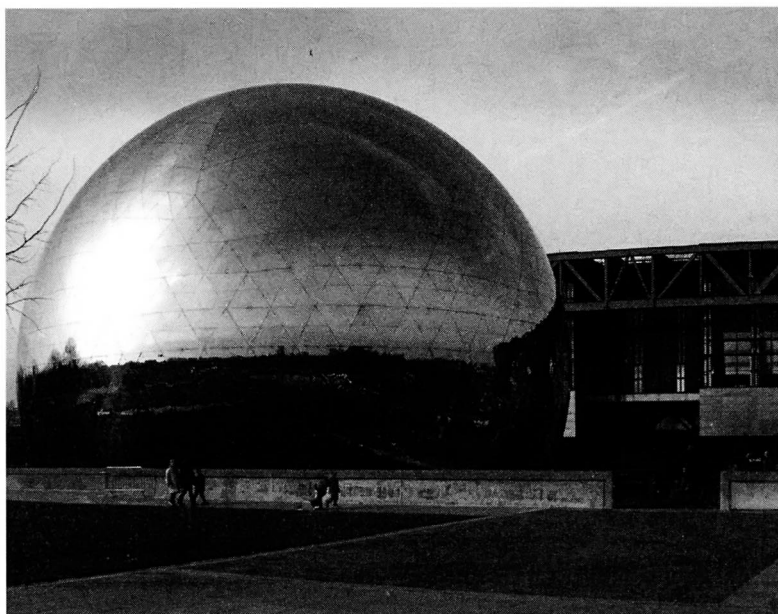


*Дворец спорта Сант Жорди в Барселоне, спроектированный Аратой Исодзаки.*

В других проектах Исодзаки также использовал необычные фигуры, применив новые технологии, благодаря которым части конструкции могли двигаться. Такая технологическая и геометрическая среда позволяет изменять формы, освещение и акустические свойства.

## Купол Ла-Виллет

В разных частях Парижа установлены различные примечательные памятники: так, из нескольких районов на северо-востоке города видна гигантская сфера-зеркало — Жеод, открытый в 1985 году в Городке науки и техники рядом с Музеем науки и индустрии в парке Ла-Виллет. Прекрасное стеклянное здание музея и его богатая коллекция известны во всей Европе.



*Жеод в парижском Городке науки и техники.*

В полной мере оценить масштаб Жеода помогут некоторые цифры: диаметр сферы-зеркала составляет 36 м, ее вес — 230 тонн, а вес опоры — 6 тысяч тонн. Она была спроектирована архитектором Адрианом Фансильбером и инженером и скульптором Жераром Шамаю. Последний, будучи верным учеником великого Ричарда Бакминстера Фуллера, определял Жеод (сокращение французского слова «геодезический») как икосаэдр, имеющий 20 треугольных граней, вершины которого располагаются на описанной сфере. Каждая грань икосаэдра разделена на 100 равно-сторонних треугольников, которые проецируются на виртуальную описанную сферу. Полученная фигура по форме удивительно близка к полусфере и имеет 2 тысячи одинаковых треугольных граней, причем все вершины фигуры располагаются на во-ображаемой сфере. Шамаю отсек нижнюю часть сферы, в результате полученное здание из металлоконструкций насчитывает 1670 треугольников и 835 соединитель-ных элементов. Затем каждый треугольник был разделен на четыре части, после чего сооружение было покрыто 6435 треугольными пластинами из нержавеющей стали. В результате образовался купол, по форме напоминающий сферу.

Но самый большой сюрприз ожидает нас внутри здания. Это не памятник науке, а кинотеатр на 363 места, кресла в котором наклонены на  $30^\circ$ , чтобы зрители могли смотреть фильмы на гигантском полусферическом экране диаметром 26 м.

## Купол Дали и другие сооружения

Сюрреалист Сальвадор Дали говорил о двух основных космических точках: о центре купола на вокзале Перпиньяна и о вершине купола театра-музея Дали в Фигерасе. В каталонском районе Эмпорда, где жил художник, сегодня существует так называемый треугольник Дали, очень популярный среди туристов. Его «вершинами» являются дом-музей Сальвадора Дали в Порт-Льигате, замок Гала — Дали в Пуболе и, с 1974 года, театр-музей Дали в Фигерасе. Именно там установлен купол из железа и стекла, представляющий собой многогранник. Современный купол был отреставрирован в 1998 году компанией Inox S. A. под руководством архитекторов Клоде и Парисио. Это классический геодезический купол с треугольными гранями.

Прозрачные купола многих других сооружений представляют собой не многогранники, а приближения полусфер. Лидер стиля хай-тек Норман Фостер возглавлял проект по перестройке здания Рейхстага, где должен был вновь разместиться немецкий парламент. В ходе реставрации Фостер сохранил фасады здания, но добавил к нему центральный купол из стали и стекла. Большой остекленный купол в форме полусферы сформирован металлическими параллелями и меридианами и содержит большой центральный элемент со смотровой площадкой и внутренним пешеходным пандусом.



*Купол Рейхстага в Берлине.*

## Гауди и многогранники

Антонио Гауди познакомился с многогранниками, изучая архитектуру, начертательную геометрию и естественные науки, а также штудирова книгу Леруа, где они подробно описывались. В учебнике под названием «Заметки по естественной истории» Милна-Эдвардса и Комте, изданном в Мадриде в 1859 году, Гауди прочитал о кристаллографических группах.

Соотношения всех архитектурных элементов храма Святого Семейства описываются делителями числа 12 (1:1, 1:4, 1:2, 3:4, 1:3, 2:3). Неудивительно, что при проектировании двенадцати колоколен храма Гауди выдвинул на первый план некоторые правильные многогранники, так как у куба и октаэдра двенадцать ребер, у додекаэдра — двенадцать граней, а у икосаэдра — двенадцать вершин. Кроме того, двенадцать колоколен оканчиваются изображениями епископских перстней, так как Гауди было прекрасно известно, что ювелиры при огранке бриллиантов и драгоценных камней в кольцах всегда использовали как образец правильные многогранники.

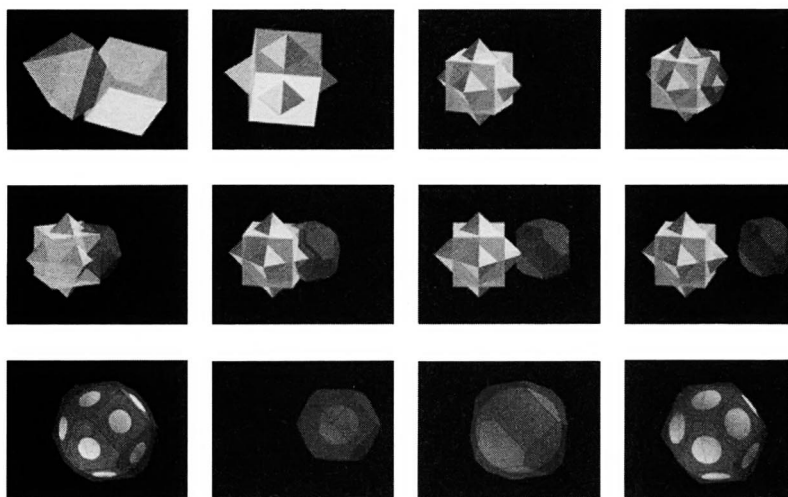
Неэлементарные многогранники в этой работе Гауди практически не встречаются, но их можно увидеть в пинаклях храма. Логично думать, что Гауди, любитель оригами, конструировал модели многогранников из бумаги. В его мастерской, а также в крипте храма Святого Семейства и соборе Пальма-де-Майорка можно увидеть модели многогранников, подвешенные к потолку. Комнаты имеют форму прямоугольных параллелепипедов, для смотровой площадки дома Бельесгуард характерна пирамидальная форма, а дымоходы в доме Батло и дворце Гуэля имеют форму пирамид и усеченных пирамид.



*Дымоходы дома Батло.*

Сам Гауди был уверен, что многогранники и фигуры, ошибочно называемые геометрическими, редко встречаются в природе. Даже те объекты, которые человек делает плоскими (двери, столы, доски) со временем изгибаются.

Однако вполне возможно, что архитектор использовал эти геометрические фигуры в своем творчестве именно благодаря их исключительным свойствам. Первым был построен фасад Рождества Христова, посвященный «Воплощению, Силе Божьей и Богу-Отцу». На четырех колокольнях этого фасада каменная фигура, символизирующая епископский перстень, образуется пересечением куба и октаэдра, как показано на иллюстрации.

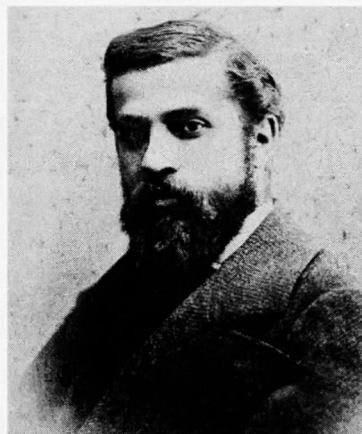


*Построение пересечения куба и октаэдра.*

Очевидно, что полученный многогранник не является правильным: шесть его граней имеют форму квадратов, восемь — форму шестиугольников. Эта фигура пересекается со сферой, в результате на четырнадцать граней многогранника накладываются шаровые сегменты, а область в форме цилиндра (определяемая двумя параллельными шаровыми сегментами, расположенными на шестиугольных гранях) оказывается пустой — в ней располагаются электрические осветительные элементы. В символизме Платона куб обозначал землю, октаэдр — воздух, следовательно, в мифологическом ключе многогранник, расположенный на вершине колокольни, символизировал синтез земли и неба: «небо нисходит на Землю»... в момент рождения Христа.

**АНТОНИО ГАУДИ (1852–1926)**

Этот гениальный архитектор родом из испанского города Реуса смог создать свой собственный стиль, во многом основанный на анализе пространственных геометрических фигур, которым он занимался всю жизнь. Гауди искал вдохновение в объектах природы или проводя собственные эмпирические исследования. Многократное повторение кривых, линейных поверхностей и многогранников позволяло создавать настоящие архитектурные шедевры, величайшим из которых стал храм Святого Семейства в Барселоне.



На колокольнях фасада Страстей Христовых повторяются формы пинаклей фасада Рождества Христова. Однако есть и различия. Если на фасаде Рождества Христова октаэдр (многогранник, двойственный кубу) при объединении с кубом образует многогранник, грани которого имеют форму квадратов и шестиугольников (неправильных), то на фасаде Страстей Христовых в этой геометрической игре участвуют двойственные им многогранники. При слиянии октаэдра и двойственного ему куба (определяемого центрами граней октаэдра) октаэдр превращается в многогранник с шестью гранями в форме правильного восьмиугольника и восемью треугольными гранями. И вновь эти многогранники символизируют восхождение с земли на небо — Страсти Христовы.

На фасаде Славы, где располагается главный вход, на вершинах четырех колоколен можно увидеть додекаэдры. В верхней части купола Девы Марии находится звездчатый многогранник с двенадцатью вершинами и четыре икосаэдра. Таким образом, после окончания строительства храма Святого Семейства в нем можно будет увидеть множество разных многогранников, поскольку, как говорил сам Гауди, «геометрия — язык архитектора».

## Некоторые любопытные произведения архитектуры

Многоугольники и многогранники можно увидеть и в других архитектурных шедеврах. Можно сказать, что одна из древнейших идей, которая использовалась при строительстве жилищ, заключалась в том, чтобы делать хижины в форме пирамиды

из тонких дощечек, связанных в верхней точке и покрытых шкурами, соломой или растениями. Примитивные дома, имеющие форму треугольной призмы (при их постройке боковые перекрытия опирались на приподнятую балку), были типичными для пастухов и крестьян Мадейры, Валенсии, Венгрии и других регионов.

## Пирамиды египтян, майя и современные пирамиды

Разнообразные пирамиды фараонов и ступенчатые пирамидальные храмы майя возвели простые многогранники в ранг мистических фигур. В Египте для посещения открыты 80 пирамид, среди которых особое место занимает пирамида Хеопса. Она выделяется своей формой и углом наклона боковых граней, составляющим  $51^\circ$ , а также идеальной ориентацией по сторонам света и тщательно выверенными размерами и пропорциями. Среди пирамид майя, в свою очередь, особое место занимают пирамиды Тулум, Чичен-Ица, Паленке, Яшчилан и Тикаль, образованные из различных усеченных пирамид.



Пирамида майя в Чичен-Ице.

В недавнее время было построено несколько огромных отелей в форме пирамид. Их стены — это комнаты и холлы, а огромное пустое пространство внутри включает большие холлы в их основании, откуда можно насладиться впечатляющим интерьером. Примеры подобных зданий — Hyatt Regency Hotel в Сан-Франциско и Hotel Granada Center в Гранаде.

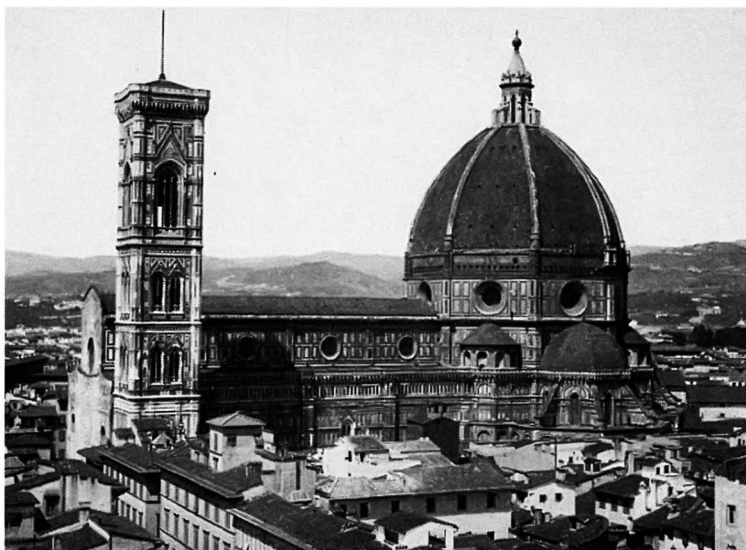
Среди пирамид последнего поколения выделяется музей Лувр в Париже. Пирамиду Лувра, изготовленную из стекла и металла, спроектировал китайский архитектор Йо Минг Пей. Она состоит из 673 стеклянных панелей, 603 из которых имеют форму ромба, 70 — форму треугольника. Угол наклона граней пирамиды в точности совпадает с углом наклона пирамиды Хеопса и равен  $51^\circ$ .

### Флорентийский баптистерий

В Пизе, Флоренции и других городах Италии можно увидеть прекрасные баптистерии, имеющие форму восьмиугольных призм, поверх которых установлены восьмиугольные пирамиды. Идеальные геометрические формы баптистерия Сан-Джованни во Флоренции подчеркиваются оригинальными цветными украшениями.

### Восьмиугольный купол Брунеллески

Флорентийский собор Санта-Мария-дель-Фьоре — уникальный образец флорентийской готики. Его строительство началось в 1296 году на месте старой церкви Санта Репарата, однако работа над последними деталями была завершена лишь в 1883 году. Столь долгий срок строительства сразу же наводит на мысль о том, что в возведении этого выдающегося памятника архитектуры участвовали многие



Собор Санта-Мария-дель-Фьоре на фотографии Джорджо Соммера (1834–1914).



зодчие и художники. Фасад здания сам по себе представляет сложную композицию из геометрических элементов (треугольников, стрельчатых арок, кругов, роз и т. д.). Однако поистине восхитительным этот собор делает купол, который был построен в период с 1420 по 1436 год великим Филиппо Брунеллески и стал образцом для многих других куполов.

Брунеллески победил в конкурсе архитекторов, представив проект, который соответствовал непростому условию. Дело в том, что меньшие купола здания были построены поверх восьмиугольных оснований из кирпича и имели форму *quinto acuto*, и главный купол также требовалось возвести на восьмиугольном основании. Однако после того, как в 1394 году строительство основания было завершено, никто не верил, что оно сможет выдержать огромный вес большого купола.

Гениальность юного Брунеллески заключалась в том, что он изготовил макет, на котором показал, что купол можно возвести, не используя сложные поддерживающие структуры из дерева. На выполнение проекта ушло шестнадцать лет упорного труда. Секрет купола Брунеллески заключался в следующем: он построил два купола (внешний и внутренний), для чего создал железный каркас, расположенный между восьмиугольным основанием и железным восьмиугольником в верхней части купола. В вершины восьмиугольника он поместил четыре арки *quinto acuto*, на каждой стороне — две дополнительные широкие балки, сужавшиеся кверху (по глубине, но не по ширине). Он также тщательно следил за изготовлением и обжигом кирпичей, укрепив их железом. Пройдя по двум галереям между двумя куполами, можно увидеть, что грамотно расположенные меридианы и некоторые параллели, изготовленные из железа, придают восьмиугольному куполу Брунеллески прочность классических сферических куполов. При строительстве Брунеллески мог не использовать центральные опоры: на каждом этапе возведенную часть купола удерживали параллельные кольца. Фонарь, находящийся в вершине купола, расположен над верхним железным восьмиугольником.

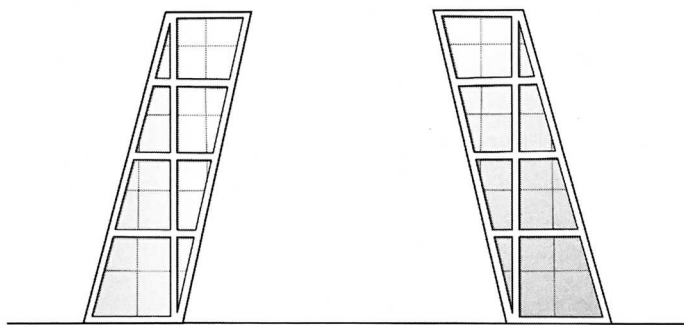
Самый большой христианский собор в мире — собор Святого Петра в Ватикане. В 1547 году Микеланджело было поручено завершить его строительство, дополнив собор огромным куполом. Зодчему повезло: он смог обратиться к идее Брунеллески и использовать флорентийский купол в качестве образца. Микеланджело спроектировал купол с основанием в форме круга и прочными ребрами, которые передают вес купола его основанию и одновременно выделяют пятнадцать окон, через которые в собор проникает солнечный свет. Разумеется, купол а-ля Брунеллески также отличался прочной структурой.

## Атомиум Ватеркейна

В 1958 году к открытию Всемирной выставки в Брюсселе был построен Атомиум. Планировалось, что сооружение по окончании полугодовой выставки будет разобрано, однако оно стало частью бельгийского культурного наследия (в 2006 году здание было отреставрировано). Атомиум — это кубическая структура, образованная вершинами и центром куба и соответствующими ребрами. Куб расположен вертикально и стоит на главной диагонали. Он содержит девять сфер по 18 м в диаметре, соединенных двадцатью трубками. Вес стальных конструкций этой масштабной структуры составляет 2400 тонн, высота — 103 м, а внутри нее находятся коридоры, лестницы, эскалаторы и лифт (в 1958 году он был самым быстрым в мире).

## Наклонные призмы КЮ и другие сооружения

Современный Мадрид может похвастаться богатой коллекцией небоскребов, ставших визитной карточкой города: башня «Европа», Мадридская башня, башня Пикассо, Торреспанья, новые башни Repsol, Sacyr Vallehermoso, Cristal, выставочный центр и многие другие. С 1996 года среди этих зданий благодаря особой форме выделяются башни КЮ, или «Ворота Европы», спроектированные архитектором Филиппом Джонсоном совместно с Джоном Бурже.



Башни КЮ в Мадриде.

Эти башни идеально симметричны относительно центральной плоскости площади, на которой они расположены. Они построены из стекла, гранита и металла, имеют 27 этажей, насчитывают 114 м в высоту и наклонены относительно вертикали на  $15^\circ$ . Благодаря Джонсону стала знаменитой фраза: «Нужно покончить с прямыми углами, если мы не хотим умереть от скуки».

Удивительные фигуры в форме призмы можно увидеть в парке развлечений «Футуроскоп» в Пуатье и в последних проектах Энрике Миральеса в Барселоне.

## Многогранники и искусство

Совершенный исторический экскурс в мир многогранников позволил нам увидеть, как художники и ремесленники использовали эти фигуры в своих произведениях. Благодаря взаимопроникновению геометрии и творчества мастера смогли сделать оригинальный вклад в живопись и скульптуру. Если в эпоху Возрождения присутствие многогранников на полотнах акцентировало внимание на реалистических методах перспективы, то много веков спустя эти фигуры легли в основу абстрактных направлений в искусстве. Это прекрасно иллюстрирует кубизм Пабло Пикассо. Цель кубизма — уже не максимально точно изобразить трехмерную реальность на плоскости картины, а найти геометрические сущности в искусстве. Так, на картине «Девушка с мандолиной» 1910 года Пикассо использует для изображения многоугольники и многогранники. Роже де ла Френе в своем полотне «Завоевание воздуха» (1913) вслед за Пикассо изображает пикник на открытом воздухе как пересечение призм и пирамид. Наиболее известными полотнами этого направления являются работы Жоржа Брака и Джозефа Альберса.



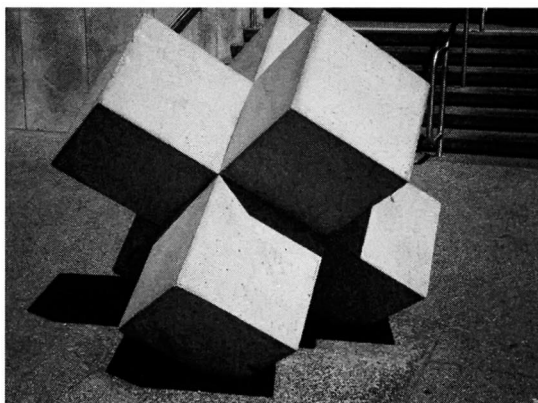
«Завоевание воздуха» Роже де ла Френе.

Сальвадор Дали создал множество картин, используя различные виды симметрии, топологические преобразования, многогранники и гиперкубы. Но особое место в его творчестве занимают три шедевра с многогранниками. В картине «Распятие, или Гиперкубическое тело» Дали заменил латинский крест крестом из восьми кубов (гиперкубом). Действие картины «Тайная вечеря» происходит внутри комнаты, имеющей форму додекаэдра (можно ли усмотреть в этом отсылку к идеям Платона?) с прозрачными гранями, через которые виден морской пейзаж вдали и фигура, возносящаяся на небо. Но еще интереснее акварель «Созерцание космоса», на которой изображен невозможный объект: расположение его пятиугольных и шестиугольных граней таково, что они не могут образовывать выпуклый многогранник.

Мауриц Корнелис Эшер силой своего богатого воображения создал невозможные трехмерные реальности, удивительные мозаики и картины, иллюстрирующие понятия неевклидовой геометрии. Тема неевклидовой геометрии в творчестве Эшера возникла благодаря его сотрудничеству с Гарольдом Скоттом Макдональдом Коксетером. Правильные многогранники, изображенные Эшером, сегодня стали популярны благодаря моделям для вырезания, которые продаются в магазинах.

Огромный вклад в создание невозможных фигур внес испанский математик Висенте Меавилья, который не только сформулировал целую теорию создания подобных фигур, но и выдумал множество новых невозможных многогранников.

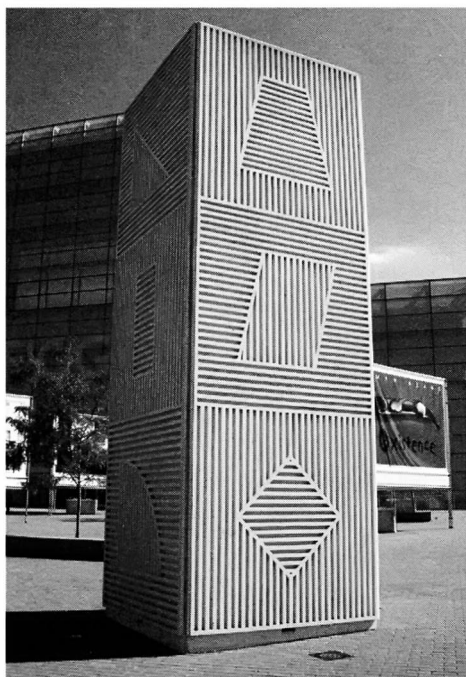
Разумеется, многогранники играют важную роль в современном абстрактном искусстве. Благодаря простоте, объему и возможности использовать разные цвета, материалы, текстуры, размеры, применять законы симметрии и нарушать их, многогранники стали основным элементом творчества скульпторов.



*Поликубы в Атланте.*

На предыдущей иллюстрации изображен один из многих бетонных поликубов, которые словно свалились с неба на площади Атланты. Собственно, сегодня во многих городах в одном из парков, у фонтана или в каком-то другом месте можно найти скульптуру в форме куба. Так, Исаму Ногути поместил свой огромный красный куб напротив здания Marine Midland Bank Building в Нью-Йорке. Этот куб опирается всего на одну вершину и его грани видны в интересной перспективе. Чарльз Перри поместил гигантскую металлическую скульптуру Eclipse в огромный холл гостиницы Hotel Hyatt Regency в Сан-Франциско. Поверхность скульптуры выступает из металлического каркаса в форме додекаэдра, образуя икосаэдр и малый ромбоикосододекаэдр. «Конструкция из тридцати одинаковых элементов» Макса Билла представляет собой большую металлическую скульптуру на пьедестале, в которой сочетаются тетраэдры. Из них составлены ленты, направленные в разные стороны.

Хьюго Верхейен, Ли Бёрнс, Е. Хейнер, А. Холден, Р. Фреденталь и многие другие художники создали неповторимые произведения на основе многогранников. Однако иногда сложность скульптуры, особенности ее возведения и размещения требуют вмешательства архитекторов и инженеров. Сол Ле Витт создал множество



Скульптура «Башня» Сола Ле Витта возле Figge Art Museum в городе Дэвенпорт, штат Айова.

произведений, которые он называл структурами: он разрабатывал основную идею, составлял планы, после чего реализовывал их при помощи инженеров и маляров. В его «Четырехгранной пирамиде», созданной в 1999 году, которая находится в Национальной галерее искусств в Вашингтоне, блоки из белого камня символизируют древние сооружения и современные небоскребы. В других своих минималистских скульптурах Ле Витт комбинирует цельные кубы и пустые пространства в форме куба.

Несколько лет назад скульптор Хавьер Карвахал выполнил ряд интересных исследований, посвященных сетчатым структурам. Том Карр, великий исследователь основных геометрических фигур и их расположения в пространстве, неоднократно использовал многогранники в своих произведениях. В качестве примера приведем впечатляющую шестиугольную призму («Оси», 2007) высотой в несколько метров, изготовленную из стекла и расположенную на лугу в окружении деревьев. Сквозь призму можно видеть окружающий пейзаж, а деревья отражаются в ее гранях. Спроектированная Карром триумфальная арка в Таррагоне, состоящая из наполовину окрашенных бетонных кубов, или ступенчатая пирамида, установленная в честь образования Европейского союза в Сан-Бой-де-Льобрегат, — все это примеры множества его огромных скульптур, установленных в общественных местах.

# Многогранники в дизайне

*Лучший способ найти хорошую идею — найти множество идей.*

Лайнус Полинг

Много ли многогранников вокруг вас? Действительно ли они для вас важны? На оба эти вопроса вполне можно дать положительный ответ, и в последней главе нашей книги мы постараемся убедить читателя в том, что это на самом деле так. Мы не вполне осознаем, что многогранники постоянно присутствуют вокруг нас, поскольку они имеют разные формы, разные функции, разные цвета и текстуры, сделаны из разных материалов. И все же они прочно вошли в нашу жизнь, не только украшая ее, но и выполняя различные полезные функции.

## Футбольный мяч

Хотя считается, что футбольный мяч — это шар, на самом деле он представляет собой многогранник, который, будучи заполненным воздухом, принимает форму, близкую к сферической.



*Футбольный мяч, соответствующий официальным требованиям.*

Футбольный мяч — это усеченный икосаэдр, гранями которого являются 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников. Это архимедово тело имеет 32 грани, 90 ребер и 60 вершин. Он занимает 86,74 % объема описанной около него сферы, а будучи заполненным воздухом — почти 95 % ее объема. Хотя были изучены (и изготовлены) мячи другой формы, сегодня усеченный икосаэдр по-прежнему остается идеальной моделью футбольного мяча.

### FIFA И УСЕЧЕННЫЙ ИКОСАЭДР

Футбольные мячи должны удовлетворять строгим требованиям к размеру и давлению. В 2008 году журнал EROSKI Consumer сообщил: «Чтобы подтвердить шаровидность мяча, его накачивают воздухом, после чего измеряют его диаметр в 16 различных точках и вычисляют его средний диаметр. Затем определяют разность между максимальным и минимальным диаметром. Таким образом определяется отношение разности между максимальным и минимальным диаметром к среднему диаметру (в процентах). Для мячей, используемых в официальных соревнованиях FIFA, этот параметр не должен превышать 2 %. Для мячей Umbro он составляет 2,2 %, то есть они недостаточно круглые. Для мячей Matt (2 %) и Joma (1,9 %) этот параметр принимает допустимые, хотя и завышенные значения. Оптимальную форму имеют мячи Astore (1,3 %) и Diadora (1,3 %). Словом, вся наука стоит на службе у спорта.

## Многогранники в играх

Игра всегда была приятным способом скоротать время. Одни из нас играют ради выигрыша, другие, проявляя благоразумие, играют для удовольствия или чтобы проверить свою ловкость, знания и удачу. Но и в мире игр очень часто можно встретить многогранники. Мы уже рассказывали о трехмерном «Тетрисе» и изготовлении многогранников из бумаги. Существуют и другие игры с ними.

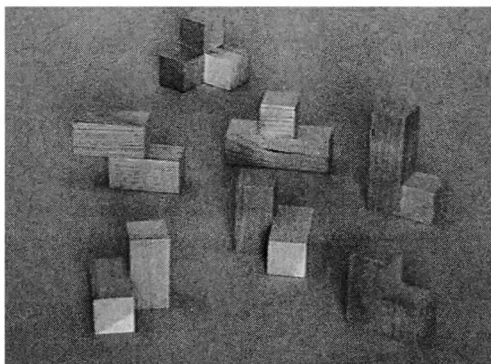
### Кубики Сома

Только выдающиеся ученые способны совершать открытия в нескольких разных областях. Именно таким человеком был Пит Хейн (1905–1996) — датский физик, математик, изобретатель, писатель и поэт. В 1972 году он был удостоен почетной докторской степени Йельского университета. Хейн открыл суперэллипсы (они используются в городском строительстве при проектировании площадей), супер-яйца (при вращении они образуют суперэллипсы), а также создал популярные игры «Гекс», «Морра», «Башня», «Так-тикс», «Нимби», Qrazy Qube, «Звездный календарь» и кубики Сома.

Кубики Сома — это куб, разделенный на семь частей, каждая из которых состоит не более чем из четырех маленьких кубиков. Головоломка подобна трехмерной версии головоломки «Танграм». Цель игры — собрать куб размером  $3 \times 3 \times 3$ . Так как элементами этой головоломки являются поликубы, ее можно назвать и трехмер-



ной версией полимино. Мартин Гарднер и Джон Хортон Конвей сделали эту игру популярной и проанализировали ее с точки зрения математики. Они определили, что кубики Сомы допускают 240 разных решений (без учета симметрии и поворотов).



*Элемент кубиков Сомы.*

## Кубик Рубика

Венгерский писатель и преподаватель архитектуры Эрнё Рубик в 1974 году придумал самую популярную (и самую продаваемую!) кубическую головоломку всех времен.



*Венгерская марка 1982 года, посвященная кубу Рубика.*

Ее цель — расположить маленькие кубы так, чтобы на каждой грани большого куба оказалось девять кубиков одного цвета. Похожую головоломку размером  $2 \times 2 \times 2$  кубика, которые соединялись при помощи магнитов, придумал в 1970 году Ларри Николс, но именно изобретение Рубика ознаменовало поворотный момент в истории подобных игр.

Число возможных состояний кубика Рубика огромно и равняется

43 252 003 274 489 856 000.

Решение задачи стало предметом различных соревнований и любопытных математических исследований, цель которых — найти быстрые и эффективные алгоритмы сборки кубика вне зависимости от исходного состояния. Дэвид Сингмастер нашел метод сборки кубика по слоям, требующий менее минуты. Питрус, Фридрих и Хейн приводили методы сборки кубика за ограниченное число ходов. В 2007 году Дэниел Канкл и Джин Куперман показали, что любой кубик Рубика можно собрать не более чем за 26 ходов. В 2008 году Томас Рокицки нашел решение из 25 ходов, а в 2010 году группе под руководством Морли Дэвидсона удалось доказать, что любой кубик Рубика можно собрать за 20 ходов (или меньше, в зависимости от исходного состояния).

Одновременно с задачей о наименьшем числе ходов решалась и другая задача — о сборке кубика за минимальное время. Мировой рекорд сегодня принадлежит Эрику Аккерсдейку и равняется 7,08 секунды. Сегодня проводятся забавные соревнования по сборке кубика Рубика ногами, с завязанными глазами, одной рукой и т. д.

## Игральные кости и лотереи

Игральные кости, имеющие форму многогранников (особенно кубов), возникли в глубокой древности. Результат броска костей указывают числа, изображенные на их гранях. Во времена древних греков и римлян игра в кости была очень популярна, и даже считается, что император Клавдий написал о ней трактат, который, впрочем, до наших дней не дошел.

В XVII веке Антуан Гомбо, шевалье де Мере, задался вопросом о выигрышной стратегии в игре с двумя игральными костями. С этим вопросом он обратился к двум великим математикам — Пьеру Ферма (1601–1665) и Блезу Паскалю (1623–1662). Результатом их совместных размышлений стала теория вероятностей — интересный и важный раздел математики, который способствовал развитию статистики.

Классические игральные кости имеют форму куба, их грани пронумерованы от 1 до 6 так, что сумма очков на противоположных гранях всегда равна 7 ( $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ ), а числа 1, 2, 3 записаны против часовой стрелки. Такие кости используются во многих настольных играх. Однако в последние десятилетия появи-

лись новые игральные кости, имеющие другую форму и с другим числом очков. Так, можно встретить игральные кости с 6, 8, 10, 12, 20 и даже 100 гранями, имеющие форму правильных многогранников, призм, антипризм, бипирамид и других фигур.



*Стогранная игральная кость.*

Эта впечатляющая японская игральная кость со ста гранями представляет собой пластиковую сферу, части которой были срезаны так, что получились равномерно распределенные круглые грани. Они расположены попарно параллельно, чтобы выпавшее число очков всегда находилось на верхней грани. Двумя десятигранными кубиками можно обозначать любые числа от 1 до 100 очков: число, выпавшее на одном кубике, будет указывать десятки, на втором кубике — единицы.

Также существуют игральные кубики для покера и ролевых игр.

### **ЗАГАДОЧНАЯ ИГРАЛЬНАЯ КОСТЬ**

Благодаря идеальной симметрии кубов очевидно, что вероятность выпадения любого числа очков, записанного на гранях куба, одинакова. Если некоторые значения выпадают чаще остальных, это означает, что кубик имеет дефект (например, его вес распределен неравномерно или бросок производится не совсем случайным образом).

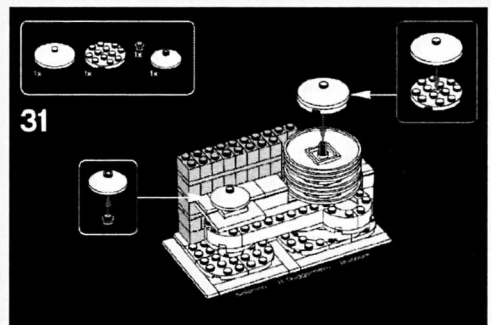
Рассмотрим игральную кость в форме призмы (чтобы ее изготовить, можно склеить два обычных кубика и нанести на грани полученной фигуры числа от 1 до 6). Какова вероятность того, что выпадет число очков, записанное на одном из оснований или на боковых гранях, имеющих большую площадь? Теоретическими методами эта задача пока не решена, в ходе экспериментов было совершено множество бросков, их результаты были зафиксированы, после чего проведены статистические расчеты частот выпадения различных граней. Вероятность выпадения того или иного числа очков определяется как предел частоты, полученной в ходе эксперимента.

## ЗНАМЕНИТЫЙ КОНСТРУКТОР LEGO

Идея о поликубах родилась ввиду необходимости использования модулей. Примером удивительной модульной игры является конструктор Lego, прообразом которого являются деревянные кубики. В 1918 году Оле Кирк Кристиансен основал в датском городе Биллунн столярную мастерскую, где изготавливал мебель для фермеров. После нескольких непростых лет он начал выпускать модели мебели в миниатюре, чтобы снизить издержки и упростить процесс. Крошечные лестницы и гладильные доски навели его на мысль об изготовлении игрушек. В 1934 году Кристиансен назвал свои игрушки Lego, соединив два датских слова — leg и godt («играть» и «хорошо»). Когда повсеместно начал использоваться пластик, компания Кристиансена адаптировалась к изменениям и начала выпускать игрушки из пластмассы. Одной из первых модульных игр Lego была разборная модель грузовика. В 1949 году был начат выпуск пластиковых блоков, которые можно было соединять друг с другом, — они-то и принесли компании международную известность. Сначала блоки изготавливались из ацетилцеллюлозы, позднее — из АБС-пластика. Они имели форму традиционных деревянных кубиков, которые можно было ставить друг на друга, однако пластиковые блоки Lego можно было сцеплять между собой: на верхней грани каждого блока располагалось несколько штырьков, а на нижней — отверстия той же формы.

Детали конструкторов Lego принимали все более сложную форму, и в 1968 году в Биллунне был открыт тематический парк «Леголенд» с миниатюрными моделями настоящих городов, целиком построенных из кирпичиков Lego. Одно из главных свойств кирпичиков заключалось в том, что каждый из них был прежде всего частью системы: все новые конструкторы совместимы с остальными, а все детали вне зависимости от их размера, формы или функции тем или иным образом соединяются с остальными. Чтобы все детали Lego идеально совмещались друг с другом, они изготавливаются с точностью до двух тысячных долей миллиметра.

Конструкторы Lego не только развлекают, но и обучают: считается, что они развивают у детей творческие способности и учат их решать задачи.



*Интернет-сайт Lego содержит инструкции по сборке различных зданий.*

*На иллюстрации изображена инструкция по сборке Музея Гуггенхайма в Нью-Йорке.*

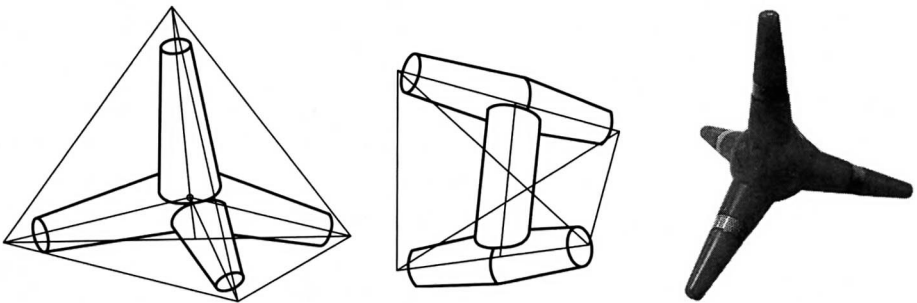
## Головоломки

Разбиение фигур на многогранники, подобно кубикам Сомы, лежит в основе множества головоломок, целью которых является сборка многогранника из частей разной формы. Такие головоломки, как Tak-it-Apart, Plato's Plight, Bun Box и так называемые узлы прекрасно помогают проверить пространственное мышление. Вы и сами можете соединить четыре одинаковых куба с разноцветными гранями, сделанные из картона или кубиков Lego, и собрать из них поликубы так, чтобы все их грани были окрашены в одинаковые цвета. Существует множество головоломок с различными многогранниками, похожих на кубик Рубика. Правила их сборки те же, но сложность из-за необычной формы выше.

## Долосы и тетраподы

При строительстве портов с давних времен требовалось решить классическую задачу о строительстве волнорезов, задача которых — защитить набережную от штормовых волн. Волнорезы могли выглядеть как нагромождение огромных камней или бетонных кубов, но более эффективны сооружения, элементы которых имеют форму тетраэдров. Скрепленные между собой тетраэдры образуют более прочную структуру, чем составленная из кубов.

Волнорезы на основе тетраэдров, созданные в 1950-х годах во Франции, получили название «тетраподы». Они образованы четырьмя усеченными конусами, расположенными вдоль внутренних осей воображаемого тетраэдра. Нагромождения бетонных тетраподов, скрепленных между собой, устанавливаются в портах. В 1970-е годы Эриком Меррифилдом с той же целью были созданы долосы: их элементы располагаются вдоль противоположных ребер тетраэдра.



*Тетрапод, долос и дорожное заграждение в форме тетрапода.*

Позднее тетраподы стали использовать в качестве альтернативы дорожным конусам, так как их проще устанавливать: достаточно бросить их на землю, и они сами примут правильное положение. Этим же свойством обладают миниатюрные тетраподы из стали с заостренными концами, которые разбрасывает на дороге полиция для борьбы с нарушителями.

## Царство упаковок

Все мы живем в царстве упаковок и коробок. Мы храним в них бумаги, продукты питания, перевозим товары и размещаем их на полках магазинов. Упаковка — важный посредник между заключенным внутри нее товаром и нами, потребителями. И действительно, упаковка содержит огромное количество информации о содержимом, составе продукта, сроке годности, стоимости и т. д., а также обладает привлекательным внешним видом благодаря нанесенным изображениям и рекламным слоганам.

Искусство изготовления упаковок имеет свою историю. Первая сборная упаковка, выпущенная в США, была произведена компанией Bird & Company в 1850 году и предназначалась для того, чтобы продавцы могли упаковывать в нее приобретенные покупателями товары. Первая информация на сборной упаковке была напечатана в 1879 году Робертом Гейром. Он довел объемы производства до 7500 упа-

### ПАЧКА СИГАРЕТ MARLBORO

Двадцать сигарет традиционно располагаются в пачке максимально компактно (в три ряда по семь, шесть и семь сигарет) и заворачиваются в фольгу, затем кладутся в бумажную пачку, завернутую в целлофан, дизайн которой зависит от марки. Каждая сигарета имеет 0,8 см в диаметре и 8,5 см в длину, размеры пачки, как правило, составляют  $5 \times 8,5 \times 2$  см, при этом соотношение длин сторон большой грани пачки равно  $8,5/5 = 1,61$ , то есть золотому сечению.

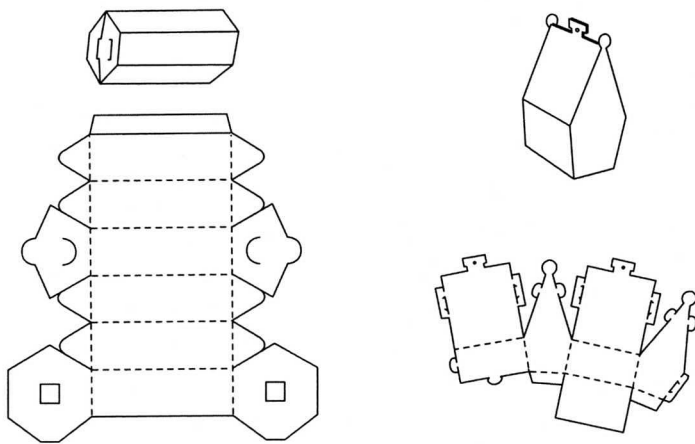
Революцию в дизайне сигаретных пачек произвел в 1955 году дизайнер Фрэнк Джианниното, работавший в компании Philip Morris. Его целью было сменить образ марки сигарет с фильтром Marlboro, которые в те годы считались дамскими. Так родилась пачка сигарет с открывающейся крышкой. Она отличалась повышенной прочностью и бросалась в глаза благодаря фирменному красно-белому логотипу. Словом, легко можно понять, почему эти сигареты стали популярны во всем мире и превратились в образец типично американского дизайна.

ковок в час и гениальным образом объединил процесс печати и разрезания плоской развертки, сделав возможным хранение пустых коробок с уже нанесенной на них информацией о продукте.

Большинство упаковок с геометрической точки зрения представляют собой простые призмы, однако помимо простых прямоугольных граней они содержат сложные системы из кромки, двойных граней, отворотов и т. д., которые придают собранной упаковке высокую прочность. Но существуют упаковки и более сложной формы.

На иллюстрациях ниже можно увидеть интересные примеры упаковок в форме простых многогранников, укрепленных дополнительными элементами.

Выше всего ценятся упаковки, плоские развертки которых можно хранить уложенными в стопку, а при необходимости — быстро собирать. Широкое коммерческое использование упаковки привело к тому, что возник новый огромный рынок, требующий серьезного подхода. Так, оптимальная форма коробок для хлопьев и пиццы была выбрана на основе научных исследований.



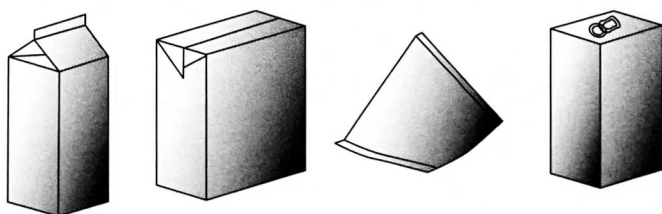
*Упаковки в форме многогранников и их плоские развертки.*

В обществе потребления не была обойдена стороной и тема подарочных упаковок. По какой-то причине подарок без специальной упаковки вызывает подозрения, в то время как обертка с этикетками подтверждает, что вещь «действительно была куплена». Площадь поверхности оберточной бумаги всегда больше, чем общая площадь граней коробки, так как ее должно хватать, чтобы изящно завернуть подарок, добавить бумажные ленты и другие украшения — целый ритуал!

## Тетрапак

Шведские дизайнеры Рубен Раусинг и Эрик Окерлунд более 50 лет назад создали знаменитые упаковки Tetra Classic, Tetra Rex, Tetra Top и Tetra Brik Aseptic.

Упаковка Tetra Classic имеет форму тетраэдра, гранями которого являются равносторонние треугольники. Tetra Brik Aseptic по форме напоминает кирпич и имеет основание размерами  $6,66 \times 10$  см, благодаря чему на площади  $30 \times 40$  см можно вертикально разместить восемнадцать упаковок. Tetra Rex представляет собой призму с квадратным основанием и прямой или наклонной крышкой, а Tetra Top имеет такую же форму, но крышка этой упаковки изготовлена из полиэтилена.



Для изготовления этих упаковок используется бумага, гарантирующая прочность, пластик, придающий герметичность, алюминий, защищающий содержимое от воздействия света и кислорода, и, наконец, полиэтилен. Процесс упаковывания гарантирует полную стерильность внутренней части коробки и идеальную сохранность продукта даже при высоких температурах. Было подсчитано, что малый вес упаковки и ее способность расширяться позволили снизить транспортные расходы примерно на 75 %.

Производство этих упаковок стало возможно благодаря их удивительным геометрическим свойствам. Так, например, Tetra Classic изготавливается из рулонов материала, на котором уже отпечатана необходимая информация, с помощью хитроумных механизмов, которые сгибают края упаковки, после чего в нее снизу заливается содержимое, затем края складываются и запечатываются, и упаковки отделяются друг от друга.

## Многогранники дома

Не только комнаты жилых домов могут иметь форму классического прямоугольного параллелепипеда. Многие элементы, которые кажутся плоскими, в действительности имеют объем. Представьте себе доски паркета, керамическую плитку, любые детали



## УПАКОВКА KLEENEX

В 1872 году Джон Кимберли, Хавила Бэбкок, Чарльз Кларк и Фрэнк Шэттак основали корпорацию Kimberly-Clark Corporation в городе Нина, штат Висконсин. Несколько лет спустя эта компания начала выпуск салфеток Kleenex. Изначально компания была крупным производителем туалетной бумаги и бумажных полотенец, бинтов и простейших компрессов под названием Kotex. 12 июня 1924 года появился бренд Kleenex — салфеток для снятия макияжа, однако спустя два года мужчины обнаружили, что эти салфетки можно использовать как носовые платки. Так началось охватившее весь мир соревнование производителей этих белых мягких одноразовых салфеток.

Название Kleenex (буква К обозначает название компании, Kimberly) происходит от видоизмененного английского слова *clean* («чистить»), при этом его произношение в английском не изменяется. Суффикс -ex был добавлен для того, чтобы связать новый продукт с уже успешной к тому времени маркой Kotex. Знаменитая упаковка Pop-Up была создана в 1928 году, но первые карманные упаковки салфеток появились лишь в 1932 году.

Секрет призматической упаковки Kleenex в том, что грамотно сложенные салфетки извлекаются через отверстие в верхней части по одной и всегда готовы к использованию.

мебели, имеющие форму призмы, двери и фрамуги, окна или каминные. Поговорим же о тех элементах интерьера, которые отличаются особым богатством форм.

## Геометрические лампы

На рынке представлено множество подвесных ламп в форме многогранников, начиная от простых стеклянных кубов и заканчивая додекаэдрами, звездчатыми многогранниками Кеплера — Пуансо и другими фигурами.

Примечательным примером являются экономичные лампы «Лампан» от ИКЕА, абажур которых имеет форму симметричного многогранника с 52 гранями. Также нетрудно изготовить светильники в форме додекаэдра или икосаэдра. Датский дизайнер Хольгер Стрём, в свою очередь, использовал ромботриаконтаэдр (многогранник, 30 граней которого имеют форму ромбов, а в вершинах сходятся три или четыре ребра) в качестве образца для пластикового модуля неправильной формы, на который устанавливается лампа IQLight.

Во многих городах мира, от Стамбула до Гранады, изготавливаются прекраснейшие светильники из цветного стекла с металлическими ребрами, имеющие форму звездчатого многогранника. Даже Гауди разместил в крипте храма Святого Семейства светильники в форме додекаэдра.

## Пирамидальные зонтики

Зонтики для защиты от дождя появились в Европе лишь в XVI веке и изначально предназначались только для женщин. Прошло несколько веков, прежде чем мужчины проявили интерес к этому аксессуару. Например, в дождливой Великобритании первый магазин зонтов открылся только в 1830 году. Продававшиеся в нем зонты изготавливались из дерева и ткани, их рукоятки были из эбенового дерева. Первый зонтик со стальным каркасом изготовил Сэмюэль Фокс в 1852 году. Следует отметить, что Фоксу удалось таким образом найти выгодное применение большим партиям спиц для женских корсетов.



*Картина Гюстава Кайботта «Парижская улица в дождливую погоду» была написана в 1877 году, когда зонтики со стальными каркасами во многих городах по-прежнему были новинкой.*

Форма обычного зонтика проста: вверх вдоль центрального стержня смещается кольцо, которое сдвигает восемь спиц, а те, в свою очередь, приводят в движение восемь больших спиц, в результате ткань, закрепленная между ними, раскрывается и натягивается. Раскрытый зонт имеет форму восьмиугольной пирамиды, приближающейся к кругу. Таким образом, «пирамида», защищающая от дождя, обладает идеальной симметрией, спасающей от вертикальных потоков воды, но никак не помогает при косом дожде и ветре. Не так давно были созданы миниатюрные зонты, которые, подобно реквизиту фокусников, способны складываться в несколько раз.

## МНОГОГРАННЫЕ ЗАНАВЕСКИ

Последняя новинка в мире дизайна штор принадлежит голландке Ханне Аллейн, которая, разделив ткань на треугольники и сложив занавески вбок и вверх, придала им форму многогранников. Подробную информацию о работах этого дизайнера-авангардиста можно найти в Интернете.

В настоящее время выпускается уже новое поколение зонтов. В столице Чили Сантьяго можно купить довольно дорогие зонты, создатели которых отошли от классической конструкции с восемью спицами. Это зонты с четырьмя спицами, имеющие форму пирамиды с квадратным основанием, и с шестью спицами, имеющие форму шестиугольной пирамиды. Самыми большими на рынке являются зонтики для гольфа, но если вам нужен зонт побольше, вы всегда можете спрятаться под пляжным зонтом или зонтом, раскрытым над столиком ресторана. Их конструкции идентичны.

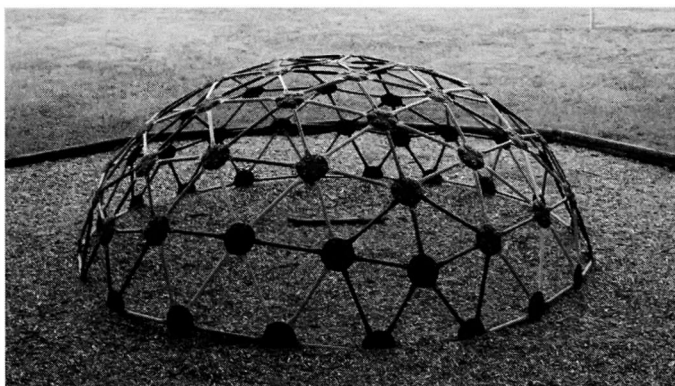
## Предметы из картона

С ростом интереса к складывающимся, простым в сборке и поддающимся переработке объектам в продаже появилось множество предметов из картона. Они продаются в разложенном виде, а после сборки образуют любопытные геометрические фигуры, которые можно использовать в разных целях. В качестве примера можно привести картонные домики для кошек, имеющие форму додекаэдра, в котором не хватает одной пятиугольной грани.

Также существуют складные столы и стулья из укрепленного картона (однако вес и размеры их будущих владельцев ограничены), удобные для ужина или пикника.

## Мебель в городе

На улицах и площадях часто можно увидеть стулья, столы, вазоны, детские игрушки, дорожные ограждения, киоски и т. д. Частями всех этих элементов городской среды являются многогранники. Нет ничего проще, чем каменная скамейка в форме прямоугольного параллелепипеда или большой плиты, опирающейся на две малых. Для детей в парках устанавливаются специальные домики или небольшие купола из металлоконструкций, где проводятся цирковые представления.



*Элемент детского парка, имеющий форму многогранника.*

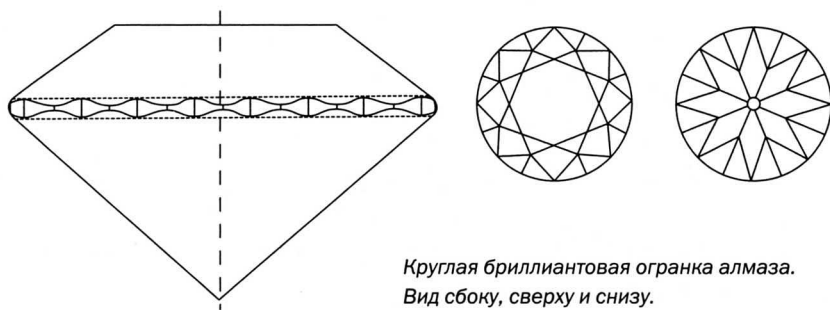
Бетонные додекаэдры используются для разграничения пешеходных зон, а в Париже форму додекаэдров имеют контейнеры для стекла. Мусорные контейнеры обычно имеют форму усеченной пирамиды или параллелепипеда.

Другой любопытный пример — фигура, внешне напоминающая пирамиду, расположенная на площади музея науки «Космокайша» (CosmoCaixa) в Барселоне. В действительности эта фигура имеет всего две треугольные грани, изготовленные из железа, которые расположены так, что отбрасывают тень, подобно солнечным часам. На площади Науки размечен циферблат, и взглянув на тень, отбрасываемую «стрелкой», вы всегда можете сказать, который час.

## Многогранники в ювелирном деле

В Австралии, Южноафриканской Республике и Бразилии находятся месторождения алмазов. Добытые на них алмазы умелые ювелиры всего мира превращают в уникальные геометрические фигуры — бриллианты, привлекающие тех, кто может позволить себе их купить или готов принять такой дорогой подарок. Высокая стоимость бриллиантов объясняется тем, что они редко встречаются в природе, и конечная цена зависит от их веса, чистоты и качества огранки.

Алмаз имеет кубическую решетку, его кристаллы по форме близки к октаэдрам и окрашены в разные цвета. Ювелиры обычно различают девять видов огранки бриллиантов: простую, круглую, сердце, овал, маркиз, груша, багет, квадрат и изумруд. А поскольку алмаз, как известно, является прочнейшим из минералов, его огранка представляет собой сложный технический процесс.



Круглая бриллиантовая огранка алмаза.  
Вид сбоку, сверху и снизу.

В истории огранки алмазов важную роль сыграл Марсель Толковский, который в 1919 году написал книгу «Конструирование бриллианта», посвященную отражениям и преломлениям лучей света в бриллиантах. В ней Толковский поставил и решил задачу об идеальной огранке алмаза, при которой достигаются максимальная яркость и блеск камня. Он использовал основные принципы оптики (законы отражения и преломления света) и с помощью простых тригонометрических расчетов определил оптимальную форму и пропорции искомого бриллианта. Яспер Паульсен внес в работу Толковского технические поправки, однако, по сути, огранка алмазов в течение всего XX века производилась по образцу, найденному в 1919 году.

Нижняя точка ограненного алмаза вставляется в кольцо, а усеченная его часть ограняется так, чтобы обеспечить максимальную яркость и блеск. Ключевыми параметрами при огранке являются угол наклона граней павильона в  $40^{\circ}45'$ , коронки —  $34^{\circ}30'$ , а размер площадки составляет 53 %. Следует отметить, что в результате исследований Толковского геометрическая красота стала преобладать над размером.

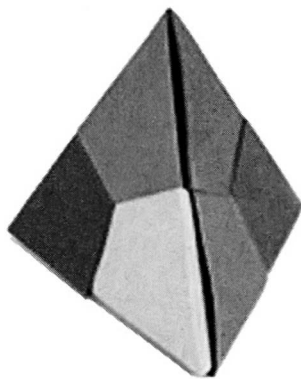
Следующий шаг в ювелирном деле был совершен в период с 1977 по 1984 год в Японии: Ясухито Шигетоми предложил новый тип огранки бриллиантов, было создано новое устройство для огранки (FireScore<sup>®</sup>), а Тарухиро Тамуро разработал новый процесс огранки и продаж алмазов. Новый тип огранки получил название EightStar<sup>®</sup>. В его основе лежала восьмиконечная звезда, а ограненный таким образом алмаз имел 58 граней. Впервые эту схему огранки реализовал на практике Киёши Хигучи.

Однако многогранники используются не только при огранке роскошных бриллиантов, но и при изготовлении более скромных украшений, например при огранке искусственных камней для ожерелий, брошей, подвесок, колец и других украшений. Изумительным примером такой работы является оригинальная подвеска, представляющая собой изогнутую решетку из тонких серебряных прутьев, внутри которой свободно перемещаются (но не могут выпасть) различные платоновы тела.

## Многогранное оригами

Хотя искусство складывания фигурок из бумаги возникло в Китае в начале нашей эры, это занятие стало особенно популярным в Японии в VI веке. Именно там родилось название «оригами», происходящее от слов ори («складывать») и ками («бумага»). Поскольку бумага в то время была дорогой, изначально искусство оригами было уделом знати, однако позднее оно преодолело границы Японии и сегодня известно во всем мире. Возможность создать из обычных квадратных листов бумаги размером  $10 \times 10$  см сложные модели цветов, животных и различных предметов придает искусству оригами особое очарование. Первый (и очень популярный) труд о складывании птиц из бумаги был издан в Японии в 1797 году.

Оригами распространилось на Востоке, а арабы, как и во многих других случаях, способствовали проникновению этого искусства на Запад. Достоверно известно, что уже около 1000 года об оригами знали в Испании и Италии. Следует отметить, что в классическом оригами не допускается использование клея и ножниц, все фигуры складываются из разноцветных квадратных листов, при этом одна фигура может состоять из нескольких отдельных модулей.



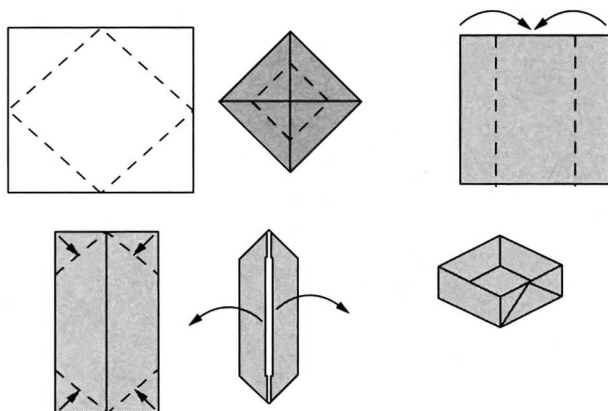
*Многогранное оригами.*

Особым направлением в оригами всегда было конструирование многоугольников и многоугольных модулей, из которых можно собирать многогранники, как в обучающих целях, так и в качестве украшений или упаковок. В супермаркетах Токио продаются журналы с пояснениями, как складывать из бумаги прекрасные подарочные упаковки, а продавцы используют для создания изысканных вариантов упаковки самые сложные техники.

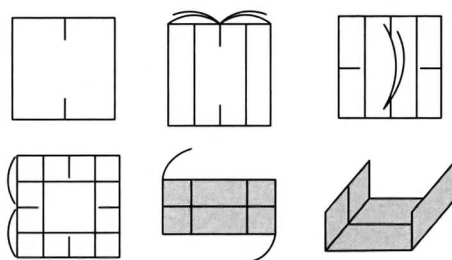
Очевидно, что оригами — очень увлекательное и доступное хобби. Поклонники этого искусства объединяются в клубы, проводят многочисленные конкурсы, а в Интернете можно найти множество сайтов с инструкциями по складыванию любых фигур, от самых простых до очень сложных. Оригами увлекались такие выдающиеся люди, как известный испанский философ Мигель де Унамуно и Антонио Гауди, которые как-то раз, встретившись в храме Святого Семейства, вызвали друг друга на поединок, чтобы определить, кто из них быстрее сложит из бумаги несколько разных птиц.

### Как сложить коробку, куб и тетраэдр

Далее приведены подробные схемы сборки ряда многогранников. На первой изображена последовательность действий для сборки коробки из одного квадратного листа.



Вы можете видеть шесть этапов сборки основного модуля. Изготовив шесть его копий (их можно сложить из бумаги разных цветов), можно получить куб.

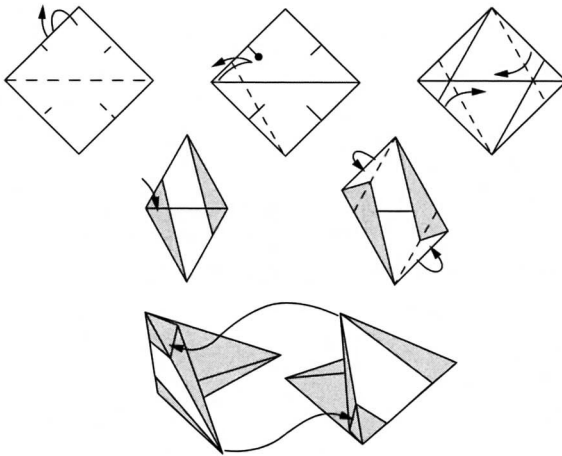


## ЕВКЛИД ПРОТИВ ФУДЗИТЫ И ХАТОРИ

Как и для евклидовой геометрии, существует семь аксиом геометрии оригами, предложенных Фумиаки Фудзитой и Косиро Хатори.

1. Пусть заданы две точки  $A$  и  $B$ , тогда лист можно сложить так, что они будут лежать на складке.
2. Пусть заданы две точки  $A$  и  $B$ , тогда лист можно сложить так, что одна перейдет в другую.
3. Пусть заданы две прямые  $L$  и  $M$ , тогда лист можно сложить так, что одна перейдет в другую.
4. Пусть заданы прямая  $L$  и точка  $A$ , тогда лист можно сложить так, что точка попадет на складку, а прямая перейдет сама в себя (то есть линия складки будет ей перпендикулярна).
5. Пусть заданы прямая  $L$  и две точки,  $A$  и  $B$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $A$  попадет на прямую  $L$ , а точка  $B$  — на складку.
6. Пусть заданы две прямые,  $L$  и  $M$ , и две точки,  $A$  и  $B$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $A$  попадет на прямую  $L$ , а точка  $B$  попадет на прямую  $M$ .
7. Пусть заданы две прямые,  $L$  и  $M$ , и точка  $A$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $A$  попадет на прямую  $L$ , а прямая  $M$  перейдет сама в себя.

Наконец, приведем алгоритм Дэвида Петти для построения тетраэдра из двух квадратов. При этом для того чтобы грани полученной фигуры приняли форму равносторонних треугольников, следует соблюдать высочайшую точность.



Эта тема подробно освещена в книгах «Математическое оригами» (Mathematical Origami) Дэвида Митчелла и «Оригами для знатоков» (Origami for the Connoisseur) Кунихико Касахары и Тоши Такахамы. Бумажные многогранники хотят, чтобы вы приютили их у себя дома. Так дайте же им такую возможность!



## Эпилог

Наш визит в мир многогранников завершен. Надеемся, что он оказался для вас приятным и познавательным и после него вы обретете способность повсюду замечать эти замечательные фигуры с их любопытными свойствами. Открыв в себе этот дар, вы сами удивитесь тому, сколько многогранников окружает вас каждый день.

Эта книга поможет вам оценить свойства многогранников и даже, возможно, создать новые объемные фигуры. Хотя сегодня известно великое множество многогранников, по-прежнему велики подозрения, что перед нами лишь вершина айсберга, и нас ожидает еще множество открытий.

Мы от всей души приглашаем вас расширить свои знания о многогранниках — в этом вам помогут многочисленные публикации и интернет-страницы. Открыть их — значит полюбить их. Пусть вам сопутствует многогранная и многоликая удача.



## Библиография

- ALSINA C. *Geometría cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*, Barcelona, Rubes, 2005.  
—: *Geometría para turistas*, Barcelona, Ariel, 2009.
- COXETER H.S.M. *Regular Polytopes*, Londres, Dover, 1973.
- CROMWELL P. *Polyhedra*, Nueva York, Cambridge University Press, 1997.
- FERRER J.L. *Superficies poliédricas*, Madrid, Paraninfo, 1999.
- GIRALT-MIRACLE D. (Ed.) *Gaudí. La búsqueda de la forma*, Barcelona, Lunwerg, 2002.
- GONZÁLEZ P.M. *Los sólidos pitagórico-platónicos. Geometría, arte, mística y filosofía*, Badajoz, FESPM, 2008.
- GRÜNBAUM B. *Convex Polytopes*, Nueva York, Wiley, 1962.
- GUILLÉN G. *Poliedros*, Madrid, Síntesis, 1997.
- HARGITTAI I. (Ed.) *Fivefold Symmetry*, Singapur, World Scientific Press, 1992.
- JOHNSON N. *Uniform Polytopes*, Nueva York, Cambridge University Press, 1999.
- MALKEVITCH J. (Ed.) *Geometry's Future*, Lexington, COMAP, 1998.
- PEARCE P. *Structure in Nature Is a Strategy for Design*, Cambridge, MIT Press, 1978.
- PEDOE E. *La geometría en el arte*, Barcelona, Gustavo Gili, 1978.
- SENECHAL M. FLECK, G. (Eds.), *Shaping Space, a Polyhedral Approach*, Boston, Birkhäuser, 1988.
- SUTTON D. *Sólidos platónicos y arquimedianos*, Barcelona, Oniro, 2005.
- WENNINGER M.J. *Polyhedron Models and Dual Models*, Londres-Nueva York, Cambridge University Press, 1983.



# Алфавитный указатель

- аксиомы оригами 136  
алмаз 23, 132–133  
антипризма 39, 55–60, 66–68, 73  
Архимед из Сиракуз 33, 35, 39, 59–62  
архимедовы тела 35, 39, 59–61  
бипирамида 53–55, 58  
Блом, Пит 100–101  
большой звездчатый додекаэдр 64  
Бофиль, Рикардо и Анна. 100  
Бридж, Джеймс 42  
Брунеллески, Филиппо 13, 35, 112–113  
Брюкнер, Макс 41, 43, 65  
ван дер Варден, Бартель Леендерт 43, 59  
вершина 13, 17, 40, 45–49, 59, 63, 78–85, 88–91  
выпуклость 15, 68  
вычислительная геометрия 43, 44  
Гауди, Антонио 16, 108–110, 129, 135  
гекзаксикосаэдр 62  
гекзаксикоктаэдр 62  
гексакаидекадельтаэдр 58  
гексеконтаэдр 62  
геодезический купол 101–107  
Гильберт, Давид 42  
гиперкуб 69–71, 73, 116  
головоломки с многогранниками 67, 85–86, 120–121, 125  
грань 17–19, 45–95, 100–111, 116–118, 121–133  
Грюнбаум, Бранко 19, 43  
губка Менгера 94  
Дали, Сальвадор 70, 107, 116  
двойственность многогранников 19, 46, 55, 61–61, 75  
двугранный угол 46  
Декарт, Рене 40, 80–81  
делла Франческа, Пьеро 35, 37  
дельтаэдр 57–59  
Ден, Макс 42  
Джованни да Верона 37  
додекадельтаэдр 58  
додекаэдр 11, 25, 27, 31–33, 52, 64  
    звездчатый 64  
    курносый 60  
    усеченный 60  
долос 125–126  
Дюрер, Альбрехт 37–38, 85–86  
Евдокс 29, 51  
Евклид Александрийский 28–33, 44, 61, 136  
Залгаллер, Виктор Абрамович 42, 43, 66  
золотое сечение 52, 53, 61, 100, 126  
зоноэдр 68  
игральные кости в форме многогранников 122–123  
изображение многогранников 34, 35, 37, 39, 42, 44, 115  
икосаэдр 21, 25, 27, 32, 35, 40, 45–48, 52–53, 56  
    правильный 21, 101, 106  
    усеченный 21, 60, 61, 119, 120  
икоситетраэдр 62  
икосододекаэдр 60, 117  
история многогранников 24–43  
картины с изображением многогранников 115–116  
Каталан, Эжен Шарль 41, 61  
Кеплер, Иоганн 39–41, 60, 64–65, 129

- Коксетер, Гарольд Скотт Макдональд  
 42, 65, 72, 116  
 Коши, Огюстен Луи 41, 65  
 кристаллографическая классификация  
 22–23  
 кристаллографическое ограничение 23  
 куб 18, 45–51, 69–73, 92–95, 98–  
 101, 135  
 курносый 59–60  
 Сомы 120–121, 125  
 усеченный 18, 60  
 кубизм 115  
 кубик Рубика 121–122  
 кубоктаэдр 50–51, 60  
 купола 35, 101–107, 113  
 Кэли, Артур 64  
 Леонардо да Винчи 35–36, 42  
 Леос, Рафаэль 99–100  
 Лю Хуэй 33  
 малый звездчатый додекаэдр 64  
 малый ромбоикосододекаэдр 60, 117  
 малый ромбокубооктаэдр 60  
 мебель в городских пространствах 131–  
 132  
 минералы 22–23  
 многогранник  
 виртуальный 44  
 выпуклый 18–19, 40–43, 53–59,  
 78–84, 89–91  
 гибкий 88  
 двойственный 41, 47, 61–62, 110  
 звездчатый 21, 35, 39, 41, 63–65  
 Кельвина 18, 60, 93, 98  
 Кеплера — Пуансо 41, 64, 65, 129  
 невыпуклый 13, 17–19, 41, 49–50,  
 68, 79  
 однородный 41–42  
 определение 19, 83  
 ортогональный 68  
 полуправильный 36  
 правильный 26, 39, 54, 56, 83  
 с правильными гранями 42, 67  
 многогранники  
 в азартных играх 120–125  
 в архитектуре 71, 97–118  
 в дизайне 44, 119–136  
 в домашних условиях 128–131  
 в природе 20–23, 24, 109  
 в ювелирном деле 132–133  
 Гауди 108–110  
 и мыльные пузыри 21  
 многогранники и филателия 42  
 многогранные лампы 129–130  
 многогранные модули 98–101  
 многоугольник 12, 13–19, 32, 45, 47–  
 48  
 с самопересечениями 13–14  
 определение 89  
 звездчатый 63, 64  
 правильный 15, 47, 72  
 невыпуклый 13–15, 17, 19  
 выпуклый 13–15, 17, 19, 55, 78  
 Монж, Гаспар 13, 41  
 напряженная целостность 89  
 «Начала» Евклида 25, 29–32, 44  
 октаэдр 22, 25, 45–49, 51–52, 54, 56  
 усеченный 45  
 origami 134–136  
 Папп Александрийский 33, 59  
 параллелепипед 23, 66, 128, 131, 132  
 Паскаль, Блез 122  
 Пачоли, Лука 35–36, 60  
 пентакисододекаэдр 62, 104  
 Пикассо, Пабло 115

- пирамиды 24, 51, 53–56, 111–112  
 Пифагор Самосский 25  
 Платон 25–29, 39–40, 51  
 По́йа, Дьёрдь 80  
 поликуб 66, 68, 116, 117, 121, 124  
 полимино 66, 121  
 полито́пы 41, 42, 72–76  
 призма 55, 114–115  
 призматойд 55  
 прямоугольный параллелепипед 90  
 Пуансо, Луи 41, 64–65, 129  
 радиолярии 20  
 разбиение на треугольники 43, 91, 101, 102, 106  
 развертки многогранников 37, 47, 57, 63, 85–88, 127  
 ребро 17–19, 36, 45–52, 58–69, 78–91  
 ромб 62, 63, 112  
 ромбододекаэдр 18, 23, 24, 62, 63, 77, 93–94  
 ромботриаконтаэдр 129  
 ромбоусеченный икосододекаэдр 60  
 ромбоусеченный кубookтаэдр 60  
 ромбоэдр 23, 94  
 Рубик, Эрнё 121–122  
 семейства многогранников 45–76  
 сетчатая структура 97–98, 102, 105, 118  
 сечения многогранников 36, 85  
 симметрия многогранников 20–23, 45, 47, 67, 130  
 симплекс 73, 75  
 скульптуры из многогранников 33, 70, 116–118  
 совершенная шкатулка 90–91  
 теоремы о многогранниках 79, 81  
 тетракандекадельтаэдр 58  
 тетракисексаэдр 62  
 тетраподы 125–126  
 тетраэдр 25, 46–49, 54, 56, 58, 73, 75, 83, 88, 103, 125, 135–136  
     правильный 47, 54  
     усеченный 60  
 тетраэдризация 91  
 Теэтет 25–26, 29–30, 48  
 трапецоэдр 23  
 триаксикосаэдр 62  
 триаксикоктаэдр 62  
 триакistetраэдр 62  
 угловой дефект 80  
 удвоение куба 50  
 упаковка многогранников 92–94  
 упаковки в форме многогранников 127  
 усеченная пирамида 55  
 Ферма, Пьер 122  
 формула Эйлера 41, 58, 77–84  
 Фройденталь, Ханс 43, 59  
 Фуллер, Ричард Бакминстер 43, 89, 102–103, 106  
 футбольный мяч 119–120  
 характеристика Эйлера — Пуанкаре 79  
 Хейн, Пит 120, 122  
 храм Святого Семейства 16, 108, 110, 129, 135  
 Эйлер, Леонард 40, 78, 81  
 Эшер, Мауриц 72, 88, 116  
 Ямницер, Венцель 38, 60

## Научно-популярное издание

Выходит в свет отдельными томами с 2014 года

**Мир математики**

**Том 23**

**Клауди Альсина**

**Тысяча граней геометрической красоты.**

**Многогранники**

### РОССИЯ

**Издатель, учредитель, редакция:**

ООО «Де Агостини», Россия

**Юридический адрес:** Россия, 105066,

г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 3, стр. 1

*Письма читателей по данному адресу не принимаются.*

**Генеральный директор:** Николаос Скилакис

**Главный редактор:** Анастасия Жаркова

**Выпускающий редактор:** Людмила Виноградова

**Финансовый директор:** Наталия Василенко

**Коммерческий директор:** Александр Якутов

**Менеджер по маркетингу:** Михаил Ткачук

**Менеджер по продукту:** Яна Чухиль

Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт [www.deagostini.ru](http://www.deagostini.ru), по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в России:

☎ 8-800-200-02-01

**Телефон горячей линии**

**для читателей Москвы:**

☎ 8-495-660-02-02

**Адрес для писем читателей:**

Россия, 600001, г. Владимир, а/я 30,

«Де Агостини», «Мир математики»

*Пожалуйста, указывайте в письмах свои контактные данные для обратной связи (телефон или e-mail).*

**Распространение:**

ООО «Бурда Дистрибушен Сервисиз»

**УКРАИНА**

**Издатель и учредитель:**

ООО «Де Агостини Паблшинг» Украина

**Юридический адрес:** 01032, Украина,

г. Киев, ул. Саксаганского, 119

**Генеральный директор:** Екатерина Клименко

Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт [www.deagostini.ua](http://www.deagostini.ua), по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в Украине:

☎ 0-800-500-8-40

**Адрес для писем читателей:**

Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,

«Мир математики»

Украина, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостини»

**БЕЛАРУСЬ**

**Импортер и дистрибьютор в РБ:**

ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,

ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,

тел./факс: (+375 17) 331-94-41

**Телефон «горячей линии» в РБ:**

☎ + 375 17 279-87-87 (пн–пт, 9.00–21.00)

**Адрес для писем читателей:**

Республика Беларусь, 220040, г. Минск,

а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,

«Мир математики»

**КАЗАХСТАН**

**Распространение:**

ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую розничную цену книг. Издатель оставляет за собой право изменять последовательность заявленных тем томов издания и их содержание.

**Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии:**

Grafica Veneta S.p.A Via Malcanton 2

35010 Trebaseleghe (PD) Italy

*Подписано в печать: 07.05.2014*

*Дата поступления в продажу на территории*

*России: 24.06.2014*

Формат 70 x 100 / 16. Гарнитура «Academy».

Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.

Усл. печ. л. 5,832.

Тираж: 50 000 экз.

© Claudi Alsina, 2010 (текст)

© RBA Coleccionables S.A., 2011

© ООО «Де Агостини», 2014

ISBN 978-5-9774-0682-6

ISBN 978-5-9774-0718-2 (т. 23)



Данный знак информационной продукции размещен в соответствии с требованиями Федерального закона от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».

Издание для взрослых, не подлежит обязательному подтверждению соответствия единым требованиям, установленным Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности продукции, предназначенной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011 от 23 сентября 2011 г. № 797.





# Тысяча граней геометрической красоты

## Многогранники

Окружающий нас мир полон изумительно красивых и сложных фигур, примерами которых можно считать и обычный цветок, и изломанные линии фьордов. Среди них отдельное место занимают многогранники — фигуры особого очарования с богатой родословной. На протяжении веков они привлекали внимание не только геометров, но и кристаллографов, архитекторов, художников, скульпторов и ювелиров. Читатели этой книги откроют для себя удивительный раздел геометрии, посвященный многогранникам, и познакомятся с оригинальными способами применения этих тел.

Добро пожаловать в многогранный мир!

ISBN 978-597740682-6

